....अध्याय–1
उनागर संख्या पध्दत्ति

1-1 उनागर संख्या की ओर आधुनिक गणित में संख्यांकन की दो पद्धत्ति है। पहला भारतीय संख्यांकन या हिन्दू अरेबिक दाशमिक पद्धत्ति और दूसरा बिट्रिश संख्यांकन पद्धत्ति या अन्तर राष्ट्रीय संख्यांकन पद्धत्ति। भारतीय संख्यांकन पद्धत्ति देवनागरी (संस्कृत)और बिट्रिश संख्यांकन पद्धत्ति ऑग्ल (इंगलिश) भाषा लिपि से लिया गया है। इन तीनों भाषाओं संस्कृत, हिन्दी और ऑग्ल में अधो संख्यांकन तालिका से स्पष्ट है। संख्याएँ १६ ,२६ , ३६ , ४६ ,५६ , ६६ ,और ७६ का अंकीय लेखन का वाचन (पाठन) हिन्दी भाषा के समृद्धिता⧗ के अनुरूप नहीं है।

तालिका 1-1

भाषावार संख्या का लेखन प्रस्तुती और उनका वाचन

क्रमांक	संस्कृत भाषा			हिन्दीं भाषा		ऑग्ल (अंग्रेजी) भाषा	
	संख्या	वाचन (पाठन)		संख्या	वाचन (पाठन)	संख्या	वाचन (पाठन)
1	१६	नवदशः	एकोनविंशतिः	१६	उन्नीस	19	नाइनटीन
2	२६	नवविंशति	एकोनत्रिंशत्	२६	डनतीस	29	ट्वन्टीनाइन
3	३६	नवत्रिंशत्	एकोनचत्वारिंशत्	३६	डनचालीस	39	थर्टीनाइन
4	४६	नवचत्वारिशत्	एकोनपंचाशत्	४६	उनचास	49	फोर्टीनाइन
5	५६	नवपंचाशत	एकोनषष्टिः	५६	उनसठ	59	फिप्टीनाइन
6	६६	नवषष्टिः	एकोनसप्ततिः	६६	उन्हत्तर	69	सिक्सटीनाइन
7	७६	नवसप्ततिः	एकोनाशीतिः	७६	उन्यासी	79	सेवन्टीनाइन
8	८६	नवाशीतिः	एकोननवतिः	८६	नवासी	89	एट्टीनाइन
9	६६	नवनवतिः	एकोनशतम्	६६	निन्यानबे	99	नाइन्टीनाइन

व्याख्या प्रसारित संकेतन नियम से 19 =10+9 के लिए संस्कृत भाषा में लेखन १६ = १0 + ६ है जिसका वाचन नवदशः=नव +दशः से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। ऑग्ल भाषा में लेखन 19 =10+9 जिसका वाचन नाइनटीनः=नाइन +टेन := टेन + नाइन से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

29 =20+9 के लिए संस्कृत भाषा में लेखन २६ = २0 + ६ है जिसका वाचन नवविंशतिः=नव +विंशति से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। ऑग्ल भाषा में लेखन 29 =20+9 जिसका वाचन ट्वन्टीनाइनः=ट्वन्टी +नाइन से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

इसी प्रकार 39, 49, 59,69,79 के लिए संस्कृत भाषा एवं ऑग्ल भाषा में लेखन के अनुरूप है। इसी तारतम्य में 89 के लिए हिन्दी भाषा में लेखन ८६ का वाचन नवासी नव अस्सी का त्वरित क्रमोत्तर वाचन नवास्सी का नवासी है तब ८६ = ८ 0 + ६ का वाचन नवास्सी = नव +अस्सी = अस्सी + नव से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। एवं 99 के लिए हिन्दी भाषा में लेखन६६ का वाचन निन्यानबे जो कि नवनब्बे मे नव का अर्थ निया निन्यानबें लयात्मक त्वरित वाचन होता है। अतएव ६६ का वाचन निन्यानबें = नव (निया) +नब्बे = नब्बे + नव से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

पुनः 1■ संस्कृत भाषा में १६ , २६ , ३६ .....८६ ,६६. **का वाचन विश्लेषण**

१६ का वाचन एकोनविंशतिः = एक उन/उना विंशतिः, २६ का वाचन एकोनत्रिंशत् = एक उन/उना त्रिंशत ,

३६ का वाचन एकोनचत्वारिंशत्ः =एक उन/उना +चत्वारिंशत्ः, ४६ का वाचन एकोनपंचाशत् = एक उन/उना पंचाशत् , ५६

⧗ **समृद्धि भाषा** पूरी दुनिया में अनेक भाषाएँ हैं। सभी भाषाओं का अपना–अपना भाषा विज्ञान एवं व्याकरण है। जिसके अनुसार पूंर्णतः समृद्धि भाषा वहीं भाषा है जिसमें लिखे गये शब्दों का वाचन (पठन–पाठन) शब्द मे सम्मिलित अक्षर के प्रति स्फुटित मुखध्वनि उच्चारण (वाणी या बोल) के अनुसार किया जाता है। आपको यह जानकर आश्चर्य होगा कि समृद्धि भाषा होने के क्रम में हिन्दीं भाषा ही प्रथम स्थान प्राप्त करने की ओर अग्रसर मानी जा रहीं हैं। जहाँ केवल स् (आधा स) से प्रारंभ शब्द (जेसे – स्तर, स्त्री, स्कूल, स्पष्ट.....) का वाचन ईस् होता है। इस प्रकार दुनिया की कोई भी भाषा समृद्धिता के परिपालन में शत–प्रतिशत समृद्ध सिद्ध नहीं हैं किसी –किसी संदर्भ में यह कथन सत्य है।

का वाचन एकोन षष्टिः = एक उन/उना षष्टिः, ६६ का वाचन एकोनसप्ततिः= एक उन/उना सप्ततिः , ७६ का वाचन एकोनाशीतिः = एक उन/उना आशीतिः , ८६ का वाचन एकोननवतिः = एक उन/उना नवति , ६६ का वाचन एकोनशतम् = एक उन/उना शतम् ।

2■ हिन्दी भाषा में १६ ,२६ , ३६ .....६६ ,७६ **का वाचन विश्लेषण**

१६ का वाचन उन्नीस– उनबीस/उनाबीस का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से प्राप्त है। इसी प्रकार २६ का वाचन उनतीस – उनतीस/उनातीस, ३६ का वाचन उनचालीस– उनचालीस/उनाचालीस ४६ का वाचन उनचास – उनपचास/उनापचास, ५६ का वाचन उनसठ– उनसाठ/उनासाठ, ६६ का वाचन उनहत्तर – उनसत्तर/उनासत्तर, ७६ का वाचन उन्यासी– उनअस्सी/उनाअस्सी का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से क्रमशः प्राप्त है।

उपरोक्त पुनः व्याख्या बिन्दु 1 में उपसर्गित एकोन/एकोना का अर्थ एक उन/उना है एकन्यून का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से प्राप्त है। जबकि बिन्दु 2 में उपसर्गित उन/उना का अर्थ भी एक उन/उना से ही है। क्योकि गणित लेखन में $1*x^1$ (एक गुणित एक्स का घात एक) को केवल x ही लिखे एवं पढ़े जाने का नियम है।

उना शब्द मूलतः छत्तीसगढ़ी भाषा से लिया गया है। जिसका प्रमाणिक प्रयोग हमारे पूर्वजों के बोल–चाल में रहा है। सन् 1950 के बाद हिन्दी एवं ऑग्ल भाषा के बढ़ते प्रभाव में विलोपन की ओर है।

जैसे 1• दुद ह दुहना अे छलकथ हे थोरिक **उना** करके गोरसी आगी म दुहना ल मढ़ाव।

2• एसों के अंकाल में पाँच गाड़ा ले आगर होवैया धान ह पाँच खाड़ी तक नी होइस उहू म चार काठा **उना** होगे।

3• बने–बने जिये कमाय के हे तब नरेटी के आवत ले झन खाव ,दु कँवरा के **उना** खाव।

4• कइसे गा छुहीवाला हमर धान ल सीग–सीग ले टुकनी भर–भर के नापे अउ तेहा पिवरी छूही तक ल सपटा के भरत ले तक नी नापत हस उहू म **उना–उना** करके देवत हस अउ हाँका पार थस तिन खूँट– तिन खूँट । तोर नपइ म दुवे खूँट तो परत हावे।

उपरोक्त व्याख्या से स्पष्ट है उन/उना का अर्थ एकन्यून या एक कम है। तब –

19 उन्नीस = उना +बीस = बीस में से एक कम = 20 – 1 के लिए $2\bar{1}$

29 उनतीस = उना +तीस = तीस में से एक कम = 30 – 1 के लिए $3\bar{1}$

39 उनचालीस = उना +चालीस = चालीस में से एक कम = 40 – 1 के लिए $4\bar{1}$

49 उनचास = उना +पचास = पचास में से एक कम = 50 – 1 के लिए $5\bar{1}$

59 उनसठ = उना +साठ = साठ में से एक कम = 60 – 1 के लिए $6\bar{1}$

69 उनहत्तर = उना +सत्तर = सत्तर में से एक कम = 70 – 1 के लिए $7\bar{1}$

79 उनयासी = उना +अस्सी = अस्सी में से एक कम = 80 – 1 के लिए $8\bar{1}$(वाचन के अनुरूप संख्यांकन (संख्या लिखना) होगा।

उपरोक्त विश्लेषित व्याख्या का उद्देश्य सम्बंधित भाषाओं की सार्वभौमिकता एवं समृद्धदता को ठेस पहुचाना कदापि नही है। वरन इस प्रकार के वाचन एवं संख्यांकन (संख्या लिखना) की असंगता को ही नवीन ज्ञान विकास भाषा की ओर अग्रसर होने विस्तारित करना है। छत्तीसगढ़ियों के क्रिया कलापो, व बोल –चाल की भाषा की ओर अग्रसर होने विस्तारित करना है। छत्तीसगढ़ियों के क्रिया कलापो, व बोल –चाल की भाषा में उनके गणित ज्ञान की समृद्धता का स्पष्ट झलक मिलता है। गणित ज्ञान विकास में नये आयाम देने उत्सुक करता है।

उपरोक्तानुसार उन/उना के लिए संस्कृत भाषा में एकोन का अर्थ एक न्यून और हिन्दी भाषा के गणित अध्ययन में पूर्ववर्ती (जो इसके पहले आ गया है) शब्द लिया गया है। जिसका अर्थ ....से एक कम हे। न्यून का भावार्थ घटाने(ऋणात्मक) से है।

उन/उना अंक संख्याएँ $2\bar{1}, 3\bar{1}, 4\bar{1}, 5\bar{1}, 6\bar{1}, 7\bar{1}, 8\bar{1}$, का इकाई अंक $\bar{1}$ एक उन/उना अंकन के रूप में प्रयुक्त हैं। इसी प्रकार $\bar{2}$ को दो उन/उना , $\bar{3}$ को तीन उन/उना. ....$\bar{8}$ को आठ उन/उना , $\bar{9}$ को नव उन/उना. के रूप में प्रयुक्त होगा। अर्थात् $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ उन/उना. अंक के रूप में प्रयुक्त होंगे। हिन्दीं भाषा में रेखाबंधनी अंक के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

आगर अंक छत्तीसगढ़ी भाषा में उना का विरूद्धार्थी शब्द आगर है। जिसका अभिप्राय आगू के (आगे का), उपराहा (अधिक)का गणितीय अर्थ........ से एक अधिक से है। संस्कृत में एकाधिकेणपूर्वेण = पूर्व (पहले) से एक अधिक और हिन्दी में भाषा में परवर्ती (जो इसके बाद आयेगा) लिया गया है। अधिक का भावार्थ जोड़ने (धनात्मक) से है। अतः आगर अंक रेखाबंधनी मुक्त प्राकृत अंक 1,2.3,4,5,6,7,8,9 ही होगा। इस आगर शब्द का अनुप्रयोग छत्तीसगढ़ियों के सामान्य बोल–चाल के साथ इनके गणित ज्ञान विकास मे झलकता है।

जैसे 1• आगर–आगर लुहे सहि का गोठियाथस थोरिकिन का बात कहा थे तेला तो सुन ले।

2• 6 आना बनी के हिसाब ले 24 बनिहार के 8 दिन के पूरा घान लुवइ बनी दु **आगर** अउठ कोरी रूपिया होही।

3• सुका **आगर** चार रूपिया प्रति तोला चांदी के भाव से चार **आगर** दुइ कोरी तोला चाँदी के पूरा किम्मत सात **आगर** नवकोरी रूपिया होही।

शब्दार्थ आगर–आगर = आगू–आगू = आगे–आगे। लुवे सहि = काटने जैसा । गोठियाथस = बात कर रहे हो । थोरकिन = थोड़ा सा। का = क्या। तेला= उसको। 16 आना = 1रूपिया। बनी =मजदूरी। बनिहार =मजदूर । 1 कोरी = 20 इकाई। अडठ = साड़ेतीन(तीन और आधा) $3\frac{1}{2} = 3.5$ । घान लुवइ = धान काटने का। सुका = चार आना (रूपये का चौथाई भाग) तोला = वजन मापने का एक प्राचीन इकाई जिसका आधुनिक तौल माप 11.304 ग्राम के बराबर है। पूरा किम्मत = कुलमूल्य या कुल कीमत।

1-2 उनागर संख्या⧗ दो या दो से अधिक अंकीय संख्याएँ जिसके संख्यांकन में कम से कम एक अंक उना और एक अंक आगर हो उनागर संख्या कहलाता है। **जैसे** $1\bar{7}, 2\bar{4}, \bar{7}7, 1\bar{8}2, 1000\bar{1}, 9\bar{2}\bar{3}\bar{8}80\bar{9}31$

उनागर संख्या का प्रसार उनागर संख्या का प्रसार सामान्य संख्या प्रसार नियम के अनुसार प्रत्येक अंक स्थानीय मान को पंक्ति योग के रूप में प्रसारित करना ही है, जिसमें उना अंकों का स्थानीय मान प्रसार ऋणात्मक संख्या के रूप में होगा।

जैसे $5\bar{3}\bar{2}86\bar{6}9\bar{9}\bar{4}01 = 50000000000 - 3000000000 - 200000000 + 80000000 + 6000000 - 600000 + 90000 - 9000 - 400 + 00 + 1$

1-3 आदर्श उनागर संख्या प्रचलित संख्यांकन पद्धत्तियाँ हिन्दु अरेबिक एव ब्रिट्रिश दोनों ही दशाधारी है। जिनमें प्रयुक्त अंक 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (कुल दस प्रकार की) है। इन दस अंक मे से केवल 0,1,2,3,4,5 (कुल छः प्रकार की) के अनुप्रयोग नियम में 0 (शून्य) को उनागर से परे मानकर 1,2,3,4,5 को आगर तथा $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ को उन/उना अंक के रूप में प्रयुक्त कर प्रचलित दशाधारी संख्यांकन पद्धति के अन्तर्गत की संख्या के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त उनागर संख्या को आदर्श उनागर संख्या कहते हैं। अर्थात् 0, आगर अंक (1,2,3,4,5) एवं उना अंक $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ के अनुप्रयोग से दर्शित संख्या को ही आदर्श उनागर संख्या कहते है।

आदर्श उनागर संख्या के अनुप्रयोग से लाभ मूलभूत गणितीय संक्रिया [संकलन(जोड़ना), व्यवकलन(घटाना),गुणा एवं भाग] में अंकों 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 का अनुप्रयोग होता है। अतः इनके बीच सम्बंधित गणन तालिका का कंठस्थ होना अनिवार्य माना जाता है। शिक्षा मनोविज्ञान के विपरीत नवनिहाल नन्हे बच्चों को रटने की ओर बाध्य करता है। समस्त कला एवं विज्ञानों की सोलह श्रृंगार से श्रृंगारित रानी जैसी ज्ञान को सिखने –सिखाने की विधा से दूर ले जा रहा है। जिसका परिणाम सामने है पूरा विश्व गणित के मास्टरों की कमी से जूझ रहा है। उना आगर संख्यांकन पद्धति में मात्र 0,1,2,3,4,5 का अनुप्रयोग होता है। अतः इनके बीच सम्बंधित गणन तालिका को सरलता से रचना करने की विधा जागृत कर शिक्षा मनोविज्ञान के अनकुल सिखने –सिखाने की कला में माहिर करने नये आयाम दिया जा कर हमारी भावी पीढ़ी में गणित ज्ञान का सतत् गुरूतर भाव को बनाये रखने हमारे पूर्वजों की भाँति कामयाब होंगे।

1-4 उनागर संख्या के अनुप्रयोग विस्तार आदर्श उनागर की भाँति समस्त मूलभूत संक्रिया में 0 सहित उनागर अंक {(आगर अंक– 1,2,3,4,5,6,7,8,9), (उना अंक–$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$)} का अनुप्रयोग गणित के समस्त मूलभूत संक्रिया {संकलन(योग या जोड़), व्यवकलन(घटाना), गुणा एवं भाग}को नये आयाम में प्रस्तुत करने की ओर अग्रसर करेगा। सभी क्षेत्र और शाखाओं में शिक्षा मनोविज्ञान के अनकुल सीखने –सिखाने की कला में माहिर करने और भी नये आयाम विस्तारित करने का मार्ग प्रशस्त करेगा। हमारी भावी पीढ़ी में हमारे पूर्वजों की भाँति गणित ज्ञान का सतत् गुरूतर भाव को बनाये रखने की भावना से अग्र अध्याय में तालिका (पहाड़ा)बनाने , मूलभूत संक्रियों के प्रति विविध आयाम , आर्वत – – –) ज्ञात करने, बीजगणित के अन्तर्गत n घातांकी समीकरण (वर्ग, त्रिघात.– –. –),स्वर्णानुपात समीकरण, श्रीनिवासरामानुजन का समीकरण– – – आदि के प्रस्तुती हेतू द्वितीय बीजगणित सोपान, कोण माप ग रेडियन में हो तो ैपदगए ब्वेगए $\mathrm{Tan}^{-1}x$ए $\mathrm{Sin}^{-1}x, \mathrm{Cos}^{-1}x$, ज्ंदग एवं

अतिपरवलय त्रिकोणमिति अध्ययन में Sinhx, Coshx, $\mathrm{Tan}^{-1}hx$, के साथ खगोल विज्ञान के अन्तर्गत सर्वोच्च समिका का आकलन

अतिपरवलय त्रिकोणमिति अध्ययन में Sinhx, Coshx, $\mathrm{Tan}^{-1}hx$, के साथ खगोल विज्ञान के अन्तर्गत सर्वोच्च समिका का आकलन

⧗ उन/उना अंकन के लिए आध्यात्मिक अध्ययन संसथान अमोद कुंज रूड़की (भारत) द्वारा प्रकाशित वेदिक गणित पुष्पमाला किताब श्रृंखला में विनकुलम शब्द लिया गया है जो वास्तव में इंगलिश श्शब्दकोश से लिया श्शब्द VINCULUM ही है। जिसका अर्थ रेखाबंधनी है जिसका अभिप्राय गणित में अंको के ऊपर खींची गई रेखा से है, जिससे उनका एक ही क्रिया में निर्दिष्ट होना सुझाया गया है। उनागर संख्यांकन पद्धत्ति में गणित संक्रिया अन्तर्गत उन/उना (कम)होना ही निर्दिष्ट होगा।

करनें उक्त ग्रंथ के तीसरे सोपान केरूप में त्रिभुजांक एवं बीजांक आधारित त्रिकोणमिति एक TRIX TRIGONOMTRY" है।

1-5 **दसपुरनी एवं नवपुरनी अंक युग्म** जिन दो अंक जिनका योग 10 होता है वे एक दूसरे के प्रति दसपुरनी अंक युग्म तथा जिन दो अंक जिनका योग 9 होता है वे एक दूसरे के प्रति नवपुरनी अंक युग्म कहलाते है। अंक गणितीय मूलभूत संक्रिया ,सरल दशमलव भिन्न का आवर्त दशमलव निरूपण ,सामान्य संख्या को उनागर संख्या में तथा उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलने में स्पष्टतः अनुप्रयोग दर्शित होने के अतिरिक्त गणित अन्य शाखाओं, प्रशाखाओं में अनुप्रयोग दर्शित हो सकते है। अध्ययन क्रम में अवलोकित कीजिए। **दसपुरनी अंक युग्म** ;1↔9), (2↔8), (3↔7), (4↔6), (5↔5), एवं **नवपुरनी अंक युग्म** (0↔9), (1↔8), (2↔7), (3↔6), (4↔5), होंगे।

1-6 **सामान्य संख्या को उनागर संख्या में बदलना**: सामान्य संख्या को उनागर संख्या में बदलने के लिए–

1• वह अंक या अंक समूह के अंकों को दृष्टिगत करें जो 6,78,9 हो। दर्शित सामान्य संख्या के अंक स्थान विस्तार में यें अलग–अलग दो या दो से अधिक स्थान या समूह में हो सकते हैं।

2A• उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार एकैक अंक में ही हो तो इन अंकों का दसपुरनी अंक का उना मान दर्शित करें और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति दसपुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे।

2B• उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार समूह में हो तो समूह अंकों के प्रथम दाँये अंक का दसपुरनी अंक का उना मान तथा शेष अंकों के नवपुरनी का उना मान दर्शित करें और इस प्रकार समूह के दाँये से बाँये अंतिम अंक के प्रति नवपुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे।

2A और 2B के बाद पुनः यदि यह बाँये अंक जिसका आगर 6,7 8, या 9 होने को होता है तो इसका नवपुरनी का उना मान दर्शित करें। और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति नव पुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे। पुनः और पुनः का क्रम तब तक जारी रखे जब तक उक्त पुनः की स्थिति में बाँये अंक को आगर (एक अधिक) करने पर 6,7,8, या 9 होने को होता है ।

जैसे $8=08=1\bar{2}$, $85=085=1\bar{2}5=1\bar{1}\bar{5}$, $258=3\bar{4}\bar{2}$, $658=1\bar{3}\bar{4}\bar{2}$, $1392=14\bar{1}2$, $184739=2\bar{2}5\bar{3}4\bar{1}$, $55555786=1\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{2}\bar{1}\bar{4}$, $29563299991=30\bar{4}\bar{4}33000\bar{1}1$

टीप 1• $54978=550\bar{2}\bar{2}$, $988888888=10\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}$, $9999999999=1000000000\bar{1}$, में शून्य (0) $\pm$ से परे है। **2•** आवश्यकतानुसार आंशिक उनागर संख्या प्राप्त कर सकते है। **3•** व्याापक अध्ययन में उना अंक $\bar{9},\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5}$ भी लिये जा सकते है।

1-7 **उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलना** उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलने के लिए–

1• वह अंक या अंक समूह के अंकों को दृष्टिगत करें जो $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9}$ हो । दर्शित उनागर संख्या के अंक स्थान विस्तार में यें अलग–अलग दो या दो से अधिक स्थान या समूह में हो सकते ।

2A• उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार एकैक अंक में ही हो तो इन के योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित करें और इस प्रकार जिन उना अंकों के प्रति उनके योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित दसपुरनी अंक किया जा चुका के बाँये अंक को उना(एक न्यून) कर दर्शित करे।

2B• उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार समूह में हो तो समूह अंकों के प्रथम दाँये उना अंक के योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित करें तथा शेष उना अंकों के योज्य प्रतिलोम का नवपुरनी मान दर्शित करें और इस प्रकार समूह के दाँये से बाँये अंतिम उना अंक के योज्य प्रतिलोम के प्रति नवपुरनी अंक दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को उना (एक न्यून) कर दर्शित करे।

2A और 2B के बाद पुनः यदि यह बाँये अंक 0 (शून्य) जिसका उना $\bar{1}$ होगा के प्रति 0 (शून्य)का योज्य प्रतिलोम 0 का नवपुरनी 9 दर्शित करें। और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति नव पुरनी अंक दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को उना (एक न्यून) कर दर्शित करे। पुनः और पुनः का क्रम तब तक जारी रखे जब तक उक्त पुनः की स्थिति में बाँये अंक जिसे उना करना है वह 0 (शून्य) हो ।

जैसे $1\bar{2}=08$, $1\bar{2}5=85$, $258=3\bar{4}\bar{2}=258$, $1\bar{3}\bar{4}\bar{2}=658$, $14\bar{1}2=1392$, $184739=2\bar{2}5\bar{3}4\bar{1}=184739$, $550\bar{2}\bar{2}=54978$, $1\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{2}\bar{1}\bar{4}=55555786$, $10\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}=988888888$, $1000000000\bar{1}=9999$

⧗ किसी संख्या के पूरे अंक उना (रेखाबंधनी) मुक्त हो तो वह संख्या प्राकृत संख्या तथा पूरे अंक उना (रेखाबंधनी) युक्त हो तोणात्मक पूर्ण संख्या होगा।

$9999999, \quad 30\bar{4}\bar{4}33000\bar{1}1 = 29563299991$

1-8 छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार छत्तीसगढ की अपनी लोक लुभावन संस्कृति है। जो लेखनी के अभाव में पीढ़ी दर पीढ़ी हस्तान्तरित एवं मुखान्तरित ही होते आ रहा है। जिन–जिन विधा का हस्तान्तण एवं मुखान्तरण का क्रम सतत् जारी रहा है वे विधाएँ फलीभूत हो रही है। जिसे लेखबद्ध करने की ओर हमारे मनीषी अपने–अपने विधा क्षेत्र भाव में समर्पित है। जिसका प्रभाव आप सब के सामने है। छत्तीसगढ़ राज्य बना और लुप्त होती छत्तीसगढ़ी बोली (समय चक्र में हिन्दीं, अंग्रेजी भाषा के बढ़ते प्रभाव में छत्तीसगढ़ी बोलने वालों को हीन भाव से भी देखा जाने लगा) को राजभाषा का सम्मान मिला। वर्तमान परिदृश्य में हमें गर्वान्वित कर रहा है। छत्तीसगढ की गणित विधा भी अपने आप में एक विशिष्ट विधा है। आप पूर्व अध्ययन से अवलोकित कर रहे है। आगे अध्ययन में भी अवलोकित करेंगे। इसी क्रम में छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार भी विशिष्ट अध्ययन का विषय वस्तु है।

संख्याओं के आधारमिति विश्लेषण से प्रमाणित हो चुका है कि प्रचलित हिन्दु–अरेबिक एवं ब्रिट्रिश संख्यांकन पद्धत्तियाँ का आधार दस ;10द्व है। अतः इसे दशाघारी संख्या कहते हैं। दशाधारी संख्या को दो या दो से अधिक n आधारी संख्यांकन में दर्शित किया जा सकता है। जिसका वाचन बाँये से दाँये एकअंकीय वाचन क्रम ही यथेष्ठ होगा और लेखन के लिए प्रयुक्त अंक $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, \underline{10}, \underline{11}, \underline{12}, - - - - - \underline{n-3}, \underline{n-2}, \underline{n-1}$ होंगे। जैसा कि आपको विदित है कि कम्प्यूटर टेक्नालाजी में समस्त प्रोग्रामिंग दो आधारी संख्यांकन पर ही आधारित है। जिसके लेखन में 0 या 1 का ही प्रयोग होता है।

1 से 40 तक की 10 आधारी संख्या का 2 आधारी एवं 3 आधारी में निरूपण

10 आ.	2 आ.	3 आ.	10 आ.	2आ.	3 आ.	10 आ.	2आ.	3 आ.	10 आ.	2आ.	3 आ.
1	1	1	11	1011	102	21	10101	210	31	11111	1011
2	10	2	12	1100	110	22	10110	211	32	100000	1012
3	11	10	13	1101	111	23	10111	212	33	100001	1020
4	100	11	14	1110	112	24	11000	220	34	100010	1021
5	101	12	15	1111	120	25	11001	221	35	100011	1022
6	110	20	16	10000	121	26	11010	222	36	100100	1100
7	111	21	17	10001	122	27	11011	1000	37	100101	1101
8	1000	22	18	10010	200	28	11100	1001	38	100110	1102
9	1001	100	19	10011	201	29	11101	1002	39	100111	1110
10	1010	101	20	10100	202	30	11110	1010	40	101000	1111

प्राकृत संख्याकन का आधार10 और छत्तीसगढ़ संख्यांकन का आधार बीस(कोरी/कोड़ी) चुनने का तर्क

छत्तीसगढ़ संख्यांकन का आधार बीस को कोरी (कोड़ी) कहने में कौड़ी बीज चित्र

प्राकृत संख्या का आधार 10 चुनने का संयोग भूगोल,खगोल एवं ज्योतिष विज्ञान में स्थान विशेष के सीमांकन की 10 दिशाएँ है। इसी प्रकार छत्तीसगढियों ने अपने गणित विधा की विकास यात्रा में प्रत्यक्ष भाव सें अपने दोनों हाथ (कर) एवं पाँव या पैर (गोड़) के उंगली (अंगरी) की कुल संख्या 20 चुनने का एक पक्ष बनाया है। इसका दूसरा पक्ष कौडी बीज है। जिसे व्यवसायिक पृष्ठभूमि में प्रथम और प्रथम बार मुद्रा के रूप स्वीकरा गया। आज भी अति गरीबी का अंतिम आकलन फुट्टी कौडी तक नहीं होने से ही करते है। चिकित्सा विज्ञान ज्योतिष विज्ञान, वास्तु विज्ञान तंत्र, मंत्र, यंत्र में कौड़ी के प्रकारों एवं उनके उपयोगों का अध्ययन एक अलग विषय है। आदिवासी स्वयं अपने और अपने देवी देवता के श्रृंगार में कौड़ी का उपयोग करते है। छत्तीसगढ़ी राऊतनाचा श्रृंगार साधन में कौड़ी माला का विशेष महत्व है। आधुनिक परिदृश्य में विशेष अध्ययन का विषय हो गया है। कौड़ी बीज के विशिष्ट प्रकारों में से एक ऐसा कौड़ी बीज होता है जिसके मध्य चीरे के दोनों ओर बने स्पष्ट पलक सदृश्य उभारों के मध्य पोरों की कुल संख्या 20 बनती है। इन विशिष्ट प्रकार के कौडी बीजों में अति विशिष्ट प्रकार के कौड़ी बीज के मध्य चीरे के दोनों ओर बने स्पष्ट स्केली उभारों के मध्य पोरों की संख्या बराबर–बराबर 10-10 की भी बनती है। ऐसे विशिष्ट एवं अतिविशिष्ट कौड़ी के मध्य भागों की कुल संख्या 20 को ही कौड़ी

से कोरी कहा जाने लगा। इस प्रकार छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार बीसाधारी या कोरी आधारी मे स्वीकारा जाना चाहिए। BHARGAV'S STANDARD ILLUSTRATED D1CTIONARY OF THE ENGLISH LANGUAGE (Anglo –Hindi Edition) Compiled & Edited by prof R.C. PATHAK, B.A.L.T के पृष्ठ 1140 में संख्यांकन की एक गणना प्रणाली (पद्धत्ति) में 20 इकाई = 1 कोड़ी माना गया है।जिसका अपभ्रंश कोरी निश्चित ही उक्त पद्धति छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धति है। ज्योतिष विद्या में वर्षा होने का मूल्यांकन मानक वर्षा की इकाई का बीस भाग कर एक बीसवाँ, दो बीसवाँ, तीनबीसवाँ, चारबीसवाँ, पाँचबीसवाँ छःबीसवाँ .... जैसे आकलन कर वर्षा से होने वाले लाभ हानि का अध्ययन किया जाता है। हमारे छत्तीसगढिया पूर्वज पाव (इकाई का चौथाई मान) = । (एक काड़ी) अध (इकाई का आधा मान)=।। (दो काड़ी) पौन (इकाई का तीनचौथाई मान) = ।।। (तीन काड़ी) सवैया (सवा गुना) = १। , डेवढ़ा (डेढ़ गुना) = १।। , अड़ैया (अड़ई या ढाई गुना)= २।। , उंठा (अउठ या साड़े तीनगुना) = ३।। , ढेउचा (ढेउच या साड़ेचार गुना)= ४।। , पउचा (साड़े पाच गुना)= ५।। तक की तालिका (पहाड़ा) उसी तरह कंठस्थ रखते जैसे दो से बीस का पहाड़ा।

10 इकाई = अध (आधा) कोरी , 30 इकाई = डेढ़ कोरी ,50 इकाई = ढाई (अड़ई) कोरी, 70 इकाई = अउठ (साड़ेतीन) कोरी, 90 इकाई = ढेउच (साड़ेचार) कोरी, 100 इकाई =1 सौ एवं उना–आगर का उपयोग शैली में कोरी आधारमिति विश्लेषण के आधार पर 1 से 100 तक संख्या लिखना पढ़ना निम्नानुसार अवलोकित कीजिए।

1 से 10 तक				**11से 20 तक**			
दशाधारी		**कोरी आधारी**		**दशाधारी**		**कोरी आधारी**	
लिखना	**पढ़ना**	**लिखना**	**पढ़ना**	**लिखना**	**पढ़ना**	**लिखना**	**पढ़ना**
1	एक	१	एक	11	ग्यारह	११ या ।।१	ग्यारा/ अधकोरी एक
2	दो	२	दु	12	बारह	१२ या ।।,२	बारा/अधकोरी दु
3	तिन	३	तिन	13	तेरह	१३ या ।।,३	तेरा/अधकोरी तिन
4	चार	४	चार	14	चौदह	१४ या ।।,४	चौदा/अधकोरी चार
5	पाँच	५	पाच	15	पंद्रह	१५या ।।,५ या १५	पंदरा/अधकोरी पाच/पाच उना एक कोरी
6	छह	६	छे	16	सोलह	१६या ।।,६या १४	सोला/ अधकोरी छे/चार उना एक कोरी
7	सत	७	सात	17	सत्रह	१७ या ।।,७या १३	सतरा/अधकोरी सात/तिन उना एक कोरी
8	आठ	८	आठ	18	अठारह	१८या ।।,८या १२	अठरा/अधकोरी आठ/ दुउनाएक कोरी
9	नव	९	नव	19	उन्नीस	१९ या ।।,९या ११	उंनाइस/अधकोरी नव /एकउना एक कोरी
10	दस	१०	दस/अधकोरी	20	बीस	१०	बीस/ कोरी

21 से 30 तक

दशाधारी		**कोरी आधारी**	
लिखना	**पढ़ना**	**लिखना**	**पढ़ना**
21	इक्कीस	११	एक कोरी एक या एकआगर एक कोरी
22	बाइस	१२	एक कोरी दुया दु आगर एक कोरी
23	तेइस	१३	एक कोरी तिन या तिन आगर एक कोरी
24	चौबीस	१४	एक कोरी चार या चार आगर एक कोरी
25	पच्चीस	१५या १।।, ५	एक कोरी पाच या पाच आगर एक कोरीया पाचउना डेढ़ कोरी
26	छब्बीस	१६या १।।,४	एक कोरी छे या छे आगर एक कोरीया चार उना डेढ़ कोरी
27	सत्ताइस	१७या १।।,३	एक कोरी सातया सात आगर एक कोरी या तीनउना डेढ़ कोरी
28	अठाइस	१८या १।।,२	एक कोरी आठ या आठ आगर एक कोरी या दुउना डेढ़ कोरी
29	उनतीस	१९या १।।,१	एक कोरी नव या नव आगर एक कोरी या एक उना डेढ़ कोरी
30	तीस	१,१० या १।।	एक कोरी दस या डेढ़ कोरी

31 से 40 तक

दशाधारी		**कोरी आधारी**	
लिखना	**पढ़ना**	**लिखना**	**पढ़ना**

31	एकतीस	१,११ या १।।,१	एक कोरी ग्यारा या डेढ़ कोरी एक या एक आगर ड़ेढ़ कोरी
32	बत्तीस	१,१२ या १।।,२	एक कोरी बारारा या डेढ़ कोरी दुया दु आगर ड़ेढ़ कोरी
33	तैतीस	१,१३ या १।।,३	एक कोरी तेरा या डेढ़ कोरी तिनया तिन आगर ड़ेढ़ कोरी
34	चौतीस	१,१४ या १।।,४	एक कोरी चौदा या डेढ़ कोरी चार या चार आगर ड़ेढ़ कोरी
35	पैतीस	१,१५ या १।।,५ या २,५̅	एक कोरी पंदरा या डेढ़ कोरी पाच या पाच आगर ड़ेढ़ कोरी या पाच उना दुकोरी
36	छत्तीस	१,१६ या १।।,६या २,४̅	एक कोरी सोला या डेढ़ कोरी छे या छे आगर ड़ेढ़ कोरी या चार उना दुकोरी
37	सैतीस	१,१७ या १।।,७ या २,३̅	एक कोरी सतरा या डेढ़ कोरी या सात आगर ड़ेढ़ कोरी सात या तिन उना दुकोरी
38	अड़तीस	१,१८ या १।।,८या २,२̅	एक कोरी अठरा या डेढ़ कोरी आठया आठ आगर ड़ेढ़ कोरी या दु उना दुकोरी
39	उनचालीस	१,१९ या १।।,९ या २,१̅	एक कोरी उन्नाइस या डेढ़ कोरी नव या नव आगर ड़ेढ़ कोरीया एक उना दुकोरी
40	चालीस	२,0	दुकोरी

41से 50 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
41	एकचालिस	२१	दु कोरी एक या एक आगर दु कोरी
42	बियालिस	२२	दु कोरी दु या दु आगर दु कोरी
43	तिरालिस	२३	दु कोरी तिन या तिन आगर दु कोरी
44	चौवालिस	२४	दु कोरी चार या चार आगर दु कोरी
45	पैतालिस	२५या २।।,५̅	दु कोरी पाच या पाच आगर दु कोरी या पाचउना अड़इ. कोरी
46	छियालिस	२६या २।।,४̅	दुकोरी छे या छे आगर दु कोरी या चार उना अड़इ कोरी
47	सैतालिस	२७या २।।,३̅	दुकोरी सातया सात आगर दु कोरी या तिन उना अड़इ कोरी
48	अड़तालिस	२८या २।।,2̅	दु कोरी आठ या आठ आगर दु कोरी या दु उना अड़इ कोरी
49	उनचास	२९या २।।,1̅	दु कोरी नव या नव आगर दु कोरी या एक उना अड़इ कोरी
50	पचास	२,10 या 2।।	दु कोरी दस या अड़इ कोरी

51 से 60 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
51	इक्यावन	२,११ या २।।,१	दु कोरी ग्यारा या अड़इ कोरी एक या एक आगर अड़इ कोरी
52	बावन	२,१२ या २।।,२	दु कोरी बारारा या अड़इ. कोरी दुया दु आगर अड़इ कोरी
53	तिरपन	२,१३ या २।।,३	दु कोरी तेरा या अड़इ कोरी तिन या तिन आगर अड़इ कोरी
54	चौवन	२,१४ या २।।,४	दु कोरी चौदा या अड़इ कोरी चार या चार आगर अड़इ कोरी
55	पचपन	२,१५ या २।।,५या ३,५̅	दु कोरी पंदरा या अड़इ कोरी पाच या पाच आगर अड़इ कोरी या पाच उना तिनकोरी
56	छप्पन	२,१६ या २।।,६या ३,४	दुकोरी सोला या अड़इ. कोरी छे या छे आगर अड़इ कोरी या चार उनातिनकोरी
57	सन्तावन	२,१७ या २।।,७ या३,३̅	दु कोरी सतरा या अड़इ कोरी सात या सात आगर अड़इ कोरी या तिन उना तिनकोरी
58	अन्ठावन	२,१८ या २।।,८या ३,२̅	दु कोरी अठरा या अड़इ कोरी आठया आठ आगर अड़इ कोरी या दु उना तिनकोरी
59	उनसठ	२,१९ या २।।,९ या ३,१̅	दु कोरी उन्नाइस या अड़इ कोरी नव या नव आगर अड़इ कोरी या एकउना तिनकोरी
60	साठ	३,0	तिनकोरी

61 से 70 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
61	एकसठ	३,१	तिन कोरी एक या एक आगर तिनकोरी
62	बासठ	३२	तिन कोरी दु या दु आगर तिनकोरी
63	तिरसठ	३३	तिन कोरी तिन या तिन आगर तिनकोरी
64	चौसठ	३४	तिन कोरी चार या चार आगर तिनकोरी

65	पैसठ	३,५या ३।।,५̄	तिन कोरी पाच या पाच आगर तिनकोरी या पाचउना अउठ् कोरी
66	छियासठ	३,६या ३।।,४̄	तिन कोरी छेया छे आगर तिनकोरी या चार उना अउठ कोरी
67	सड़सठ	३,७या ३।।,३̄	तिनकोरी सात या सात आगर तिनकोरी या तीनउना अउठ कोरी
68	अड़सठ	३८या ३।।,२̄	तिन कोरी आठ या आठ आगर तिनकोरी या दुउना अउठ कोरी
69	उनहत्तर	३९या ३।।,१̄	तिनकोरी नव या नव आगर तिनकोरी या एक उना अउठ कोरी
70	सत्तर	३,१० या ३।।	तिनकोरी दस या अउठ् कोरी

71से 80 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
71	एकहत्तर	३,११ या ३।।,१	तिन कोरी ग्यारा या अउठ् कोरी एक या एक आगर अउठ कोरी
72	बहहत्तर	३,१२ या ३।।,२	तिन कोरी बारारा या अउठ् कोरी दुया दु आगर अउठ कोरी
73	तिहहत्तर	३,१३ या ३।।,३	तिन कोरी तेरा या अउठ कोरी तिनया तिन आगर अउठ कोरी
74	चौहत्तर	३,१४ या ३।।,४	तिन कोरी चौदा या अउठ् कोरी चारया चार आगर अउठ कोरी
75	पचहत्तर	३,१५ या ३।।,५ या ४,५̄	तिन कोरी पंदरा या अउठकोरी पाच या पाच आगर अउठकोरी या पाच उना चारकोरी
76	छिहत्तर	३,१६ या ३।।,६या ४,४̄	तिन कोरी सोला या अउठ् कोरी छे या छे आगर अउठ कोरी या चार उना चारकोरी
77	सतहत्तर	३,१७ या ३।।,७या ४,३̄	तिन कोरी सतरा या अउठ् कोरी सात या सात आगर अउठ कोरी या तिन उना चारकोरी
78	अठहत्तर	३,१८ या ३।।,८या ४,२̄	तिन कोरी अठरा या अउठ् कोरी आठ या आठ आगर अउठ कोरी या दु उना चारकोरी
79	उन्यासी	३,१९ या ३।।,९ या ४,१̄	तिन कोरी उन्नाइस या अउठकोरी नव या नवआगर अउठ कोरी या एक उना चारकोरी
80	अस्सी	४,0	चारकोरी

81स 90 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
81	इक्यासी	४,१	चार कोरी एक या एक आगर चार कोरी
82	बियासी	४,२	चार कोरी दु या दु आगर चार कोरी
83	तिरासी	४,३	चार कोरी तिन या तिन आगर चार कोरी
84	चौरासी	४,४	चार कोरी चार या चार आगर चार कोरी
85	पचयासी	४,५या ४।।,५̄	चारकोरी पाच या पाच आगर चार कोरी ा पाचउना ढेउच् कोरी
86	छियासी	४,६या ४।।,४̄	चारकोरी छे या छे आगर चार कोरी या चार उना ढेउच कोरी
87	सतयासी	४,७या ४।।,३̄	चारकोरी सात या सात आगर चार कोरी या तीनउना ढेउच कोरी
88	अठयासी	४,८या ४।।,२̄	चारकोरी आठ या आठ आगर चार कोरी या दुउना ढेउच कोरी
89	नवयासी	४,९या ४।।,१̄	चार कोरी नव या नवआगर चार कोरी या एक उना ढेउच कोरी
90	नब्बे	४,१० या ४।।	चार कोरी दस या ढेउच् कोरी

91 से 100 तक

दशाधारी		कोरी आधारी	
लिखना	पढ़ना	लिखना	पढ़ना
91	इन्कानबे	४,११ या ४।।,१	चार कोरी ग्यारा या ढेउच् कोरी एक या एक आगर ढेउच कोरी
92	बिन्यानबे	४,१२ या ४।।,२	चार कोरी बारारा या ढेउच् कोरी दु या दु आगर ढेउच कोरी
93	तिरानबे	४,१३ या ४।।,३	चार कोरी तेरा या ढेउच् कोरी तिन या तिन आगर ढेउच कोरी
94	चौरानबे	४,१४ या ४।।,४	चार कोरी चौदा या ढेउच् कोरी चार या चार आगर ढेउच कोरी
95	पंचानबे	४,१५ या ४।।,५या ५,५̄	चार कोरी पंदरा या ढेउच् कोरी पाच या पाच आगर ढेउच कोरीया पाच उना पाच कोरी
96	छियानबे	४,१६ या ४।।,६या ५,४̄	चार कोरी सोला या ढेउच् कोरी छेया छे आगर ढेउच कोरी या चार उना पाच कोरी
97	संतानबे	४,१७ या ४।।,७या ५,३̄	चार कोरी सतरा या ढेउच्कोरी सात या सात आगर ढेउच कोरी या तिन उना पाच कोरी
98	अन्ठानबे	४,१८ या ४।।,८या ५ ,२̄	चार कोरी अठरा या ढेउच् कोरी आठ या आठआगर ढेउच कोरी या दु उना पाचकोरी

99	निन्यानबे	४,१६ या ४।।,६या ५ ,१	चार कोरी उन्नाइस या ढेउच़ कोरी नव या नव आगर ढेउच कोरी या एक उना पाच कोरी
100	सौ	५,0	पाचकोरी

टीप 1• संख्या तालिका में कोरी आधारी छत्तीसगढ़ संख्यांकन लिपि पाली संस्कृत से ली गई हिन्दी लिपि है। आधुनिक अध्ययन में ब्रिट्रिश संख्यांकन लिपि ही अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन लिपि के रूप में स्वीकार हो चुका है। अतः अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन लिपि में दर्शित करने को विडम्बना के श्रेणी में नहीं लिया जाना यथेष्ठ होगा। आगे ऐसा ही जाने।

2• चूँकि n आधारी संख्यांकन पद्धत्ति में 0 सहित n अंक प्रयुक्त होंगे। 2 ,3,4--- ---8,9,10 आधारी संख्यांकन में प्रयुक्त अंक संकेतन क्रमशः {0,1},{0,1,2},{0,1,2,3},-------{0,1,2----5,6,7},{0,1,2,------6,7,8},{0,1,2----7,8,9}एक स्थानिक होंगे। जबकि दझ10 के लिए अंक संकेतन 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 के बाद अंक संकेतन ;11),(12),(13)---------(n-3),(n-2),(n-1) दो या दो अधिक स्थानिक होंगे। जिन्हें स्पष्टतः अलग–अलग अंक संकेतन के दृष्टि से नीचे रेखांकित कर $\underline{10}, \underline{11}, \underline{12} - - - \underline{n-3}, \underline{n-2}, \underline{n-1}$ दर्शित करना चाहिए। तद्अनुसार कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन के स्पष्टतः अलग–अलग अंक संकेतन के 20 अंक 0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9,$\underline{10}$, $\underline{11}$, $\underline{12}$, $\underline{13}$,$\underline{14}$,$\underline{15}$, $\underline{17}$, $\underline{18}$, $\underline{19}$ होंगे।

1-9 कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या को स्पष्टतः दर्शित करना आधारमिति विश्लेषण के अनुसार दशाधारी⧗ संख्यांकन के संख्या के अतिरिक्त किसी भी n आधारी संख्यांकन की संख्या को स्पष्टतः दर्शित करने द आधारी संख्यांकन की संख्या को छोटे कोष्टक में बंदकर कोष्टक के बाहर दाँये नीचे किनारे में आधार संख्यांक n दर्शित करते हैं। तदानुसार कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या को छोटे कोष्टक में बंदकर कोष्टक के बाहर दाँये नीचे किनारे में आधार संख्यांक 20 दर्शित करते हैं। जैसे कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या 5$\underline{17}$ $\underline{19}$ को स्पष्टतः $(5\underline{17}\ \underline{19})_{20}$ दर्शित करेंगे।

1-10 कोरी या बीस आधारी (छत्तीसगढ़) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या को दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन की संख्या में बदलनाः आधारमिति विश्लेषण के अनुसार n आधारी संख्यांकन की संख्या $(x_r\ x_{r-1}\ x_{r-2}x_{r-3} - - - -x_4\ x_3x_2\ x)_n$ का प्रसारित संकेतन हल मान $= x_r * n^{r-1} + \ x_{r-1} * n^{r-2} + x_{r-2} * n^{r-3} + x_{r-3} * n^{r-4} + - - - x_4 * n^3 + \ x_3 * n^2 + x_2 * n + x$ का योग मान होगा। तदानुसार 20 आधारी संख्यांकन की संख्या $;x_r\ x_{r-1}\ x_{r-2}x_{r-3} - - - -x_4\ x_3x_2\ x)_{20}$ का प्रसारित संकेतन हल मान $= x_r * 20^{r-1} + \ x_{r-1} * 20^{r-2} + x_{r-2} * 20^{r-3} + x_{r-3} * 20^{r-4} + - - -x_4 * 20^3 + \ x_3 * 20^2 + x_2 * 20 + x$ का योग मान होगा।

उदाहरण■ **1•** $;(23)_{20} = 2*20+3 = 43$ **2•** $(4\ \underline{15}\ )_{20} = 4*20+15 = 95$,

3• $(5\ \underline{17}\ \ 3\ \underline{19})_{20} = 5*20^3 + 5*20^2 + 5*20 + 19 = 40000 + 2000 + 100 + 19 = 42119$

4• $(1111111111)_{20} = 20^9+20^8+20^7+20^6+20^5+20^4+20^3+20^2+20+1$

$= 512000000000+25600000000+1280000000+64000000+ 3200000+160000 +8000+400+20+1 = 5,38,94,73,68,421$

शब्दों में पाँच खरब, अड़तीस अरब, चौरानबे करोड, तिहत्तरलाख, अड़सठहजार चार सौ इक्कीस ।

1-11 दशाधारी (अन्तराष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या को कोरी आधारी या बीसाधारी (छत्तीसगढ़) संख्यांकन की संख्या में बदलना

आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को प्रथम पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

प्रक्रम 1 दशाधारी (अन्तराष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को प्रथम पंक्ति में पंक्तिबंद्ध कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से प्राप्त भागफल को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को दूसरे पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

....

....

⧗ धारी संख्यांकन की संख्या ही अन्तर्राष्ट्रीय संख्या होने से आधार संख्यांक 10 को दर्शित करने का नियम नहीं है। अतः एक स्थानिक अंक (0,1,2, दशा 3,4,5,6,7,8,9) संकेतन द्वारा दर्शित स्वतंत्र संख्या दशाधारी संख्यांकन की संख्या होंगे।

....

प्रक्रम r प्रक्रम $(r-1)$ से प्राप्त भागफल को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को त वें पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

प्रक्रम	भाजक	भागफल	शेषफल
दशाधारी संख्या →		37,94,73,68,421	
1	20	1897368421	1
2	20	94868421	1
3	20	4743421	1
4	20	23171	1
5	20	11858	<u>11</u>
6	20	592	<u>18</u>
7	20	29	<u>12</u>
8	20	1	9
9	20	0	1

ऐसा हल प्रक्रम शून्य (0) भागफल प्राप्त होने तक जारी रखें ।अंतिम भागफल शून्य एवं अंतिम शेषफल को अंतिम पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

ध्यानाकर्षण दो स्थानिक शेषफलों को नीचे रेखांकित कीजिए।

अभीष्ट प्राप्त अंतिम से प्रथम प्रक्रम तक के शेषफलों को बाँये से दाँये छोटे कोष्टक में बदकर दर्शित कीजिए। और दर्शित करने के नियम में के बाहर दाँये नीचे किनारे में आघार संख्यांक 20 दर्शित कर अभीष्ट हल मान प्राप्त कीजिए।

उदाहरण से– 37,94,73,68,421= $(1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1111)_{20}$ अभीष्ट हल मान होगा।

हल जाँच $;1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1111)_{20}$

$$= 1*20^8 + 9*20^7 + \underline{12}*20^6 + \underline{18}*2^5 + \underline{11}*20^4 + 1*20^3 + 1*20^2 + 1*20 + 1$$

=25600000000+11520000000+768000000+57600000+1760000+8000+400+20+1

=37,94,73,68,421 प्रश्नांकित संख्या।

1-12 कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार अध्ययन क्रम में कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार के अभाव को दृष्टिगत करते हुये मेरे अपने व्यक्तिगत विचार में कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार

................कोरिच /कोरित/कोरिद/कोरिन/रीठ/रिस/रिछ/रिप/रिच/रित/ रीद/कोरी/इकाई लिया है। जिसके अनुसार दशाधारी संख्याकन की संख्या 37,94,73,68,421 का वाचन सैतीस अरब, चौरानबें करोड, तिहत्तर लाख, अड़सठ हजार ,चार सौ इक्कीस = कोरीआधारी संख्याकन की संख्वा $(1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1\ 1\ 1\ 1)_{20}$ का वाचन **एकरीठ, नवरिस, बारहरिछ, अठ्ठारह रिप, ग्यारहरिच, एकरित, एकरीद, एककोरी, एक** होगा।

1-13 कोरी आधारी संख्याओं में गणितीय रांक्रिया अध्याय 2 से 24 तक के शीर्षक में प्रस्तुत दशाधारी सख्यांकन मैं गणितीय रांक्रिया के नियमों को परिपालन में लिया जाने में संशय नहीं किया जाना चाहिए है। हासिल/शेषफल /मूलाधार /उपाधार /;उनागर प्रचालको एवं आश्लेषकों द्ध की गणना कोरी आधारी संख्यांकन नियम के प्रति केवल और केवल दशाधरी नियम के अधीन प्रयुक्त 9 एवं 10 का नियम क्रमश:<u>19</u> एवं <u>20</u> का नियम हो जाता है।तदनुसार एक अलग कृति **कोरी आधारी संख्याओं में गणितीय रांक्रिया** के नाम पर प्रस्तुत किया जा सकता है।

1-14 आधारमिति संख्यांकन में z,m,n का गोपनीय रहस्य आधार n के प्रति $z<n$ एक अंक $\underline{n-r}$ के रूप में मान्य होगा। जहाँ त प्राकृत संख्या समुच्चय [1,2,3,4,5,6,7,8,9, -------(n-3),(n-2),(n-1)] का एक अवयव है। इस प्रकार लिए गये॰ की बारंबारता m हो तो आधारमिति संख्यांकन में z,m,n का गोपनीय रहस्य (z,z,z ------m बार $)_n$ का मान दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धति मे प्राप्त संख्या से है।

जैसे <u>13</u>,7,20 का गोपनीय रहस्य $;\underline{13}\ \underline{13}\ \underline{13}$ ......7 बार $)_{20}$ का मान दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धति मे प्राप्त संख्या = $[13*20^6 + 13*20^5 + 13*20^4 + 13*20^3 + 13*20^2 + 13*20^1 + 1*20^0] =$

87,57,89,473 है। अति गोपनीयता में z,m,n में से किसी एक अथवा दो को मानक गोपनीयता के श्रेणी में रखा जा सकता है। जैसे संख्या 87,57,89,473 को अति गोपनीयता में –

1• **मानक गोपनीयता** z = <u>13</u> में 7,20 4• **मानक गोपनीयता** z = <u>13</u> एवं m = 7 में केवल n =20

2• **मानक गोपनीयता** m = 7 में 13,20 5• **मानक गोपनीयता** z = <u>13</u> एवं n =20 **में केवल** m =7

3• **मानक गोपनीयता** z = 20 में 7, <u>13</u> 6• **मानक गोपनीयता** m = 7 एवं n =20 में केवल z = 13

प्रयुक्त होगा।

उनागर संख्यांकन की योग तालिका a+b = b+a

a↓+b→	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{9}$	$\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0
$\overline{8}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1
$\overline{7}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2
$\overline{6}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3
$\overline{5}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4
$\overline{4}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5
$\overline{3}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6
$\overline{2}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\overline{1}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	$\overline{2}$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

$\overline{2} + 4 = 4 + \overline{2} = 2$ और $6+7= 7+6=13$ का चिन्हांकन

उनागर संख्यांकन की व्यवकलन (घटाना)तालिका (a+b) ≠ (b+a)

a↓ −b→	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\overline{9}$	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$
$\overline{8}$	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{7}$	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$
$\overline{6}$	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$
$\overline{5}$	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$
$\overline{4}$	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$
$\overline{3}$	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$
$\overline{2}$	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{1}$	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
2	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
3	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
4	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
5	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
6	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
7	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$	$\overline{2}$
8	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	$\overline{1}$
9	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

$\overline{2} - 4 = \overline{6}$ **और** $6-7= \overline{1}$ **का चिन्हांकन**

अध्याय -2
पूर्णांकों का संकलन संक्रिया

2-1 पूर्णांकों का संकलन (योग करना) संकलन शब्द के लिए छत्तीसगढ़ी क्रिया शब्द सकेलना है। सकेलना का मूल अर्थ यत्र–तत्र बिखरे वस्तुओं को एक निर्दिष्ट स्थान पर इकट्ठा करना या मिलाकर रखने से है। जिसका शाब्दिक अर्थ जोड़ना या योग करने से है। गणित अध्ययन–अध्यापन में दो संख्याओं के संकलन में हासिल मुक्त और हासिल युक्त संक्रिया की स्थिति बनती है।

हासिल मुक्त योग संक्रिया योग संक्रिया के लिए प्रयुक्त संख्या के बायें से दाये स्तम्भवार (इकाई, दहाई सैकड़ा, हजार ....) स्थित अंकों का योग एक अंकीय प्राप्त हो।

हासिल युक्त योग संक्रिया योग संक्रिया के लिए प्रयुक्त संख्या के बायें से दाये स्तम्भवार (इकाई, दहाई सैकड़ा, हजार ....) स्थित अंकों का योग दो या दो से अधिक अंक में प्राप्त हों।

2-2 पूर्णांको का संकलन (योग करना या जोड़ना) एवं व्यवकलन (घटाना) संक्रिया में कर्ता संकेत [·]‡

कार्यालयीन एवं व्यापारिक लेन–देन में योग की बड़ी बड़ी संख्याओं की लम्बी सूची होती है। जिससे इकट्ठे हासिल प्राप्त करना संक्रिया परिणाम में त्रुटि सम्भव है। ऐसे त्रुटि को जाँचने की कोई सटीक विधि भी तो नहीं हैं। अतः जाँच के नाम पर पुनः योग संक्रिया दोहराते तिहराते है।किसी दूसरे तीसरे महानुभाव को जचवाते है। हालाकि आधुनिक इलेक्ट्रानिक युग में त्रुटि शब्द प्रचलन में मुक्त हो चुका है। अब हम हमारे द्वारा की गई संक्रिया से प्राप्त परिणाम को तभी स्वीकारते हैं जब गणक (कैलुकेटर) स्वीकारता है। गणक से प्राप्त परिणाम को किसी ने जाँचने की सोचां भी नहीं होगा। इस प्रकार डगमगगाता आत्मविश्वास बच्चे गणित सिखने सिखाने के प्रारंभिक चरण (जोड़ना –घटाना) में ही कमजोर हो रहा है। जिसका परिणाम हम सब के सामने है। पूरा विश्व समुदाय गणित मास्टर की कमी से जूझ रहा है। अतः गणित सिखने सिखाने के प्रारंभिक चरण जोड़ना –घटाना में ही ऐसा कर दिखाना होगा ,जिससे बच्चों मे आत्म विश्वास बढ़े । इसी तारतम्य में **कर्ता संकेत [·]** को संकलन एवं व्यवकलन के परिपेक्ष्य में जुटाया गया है। जो कि दो अर्थ आगर करने वाला और उना करने वाला से है। अतः कर्ता का अनुप्रयोग सिद्धांत उक्त दोंनों अर्थों में अलग–अलग विश्लेषित करना यथेष्ठ होगा।

2-3 पूर्णांको का संकलन (योग करना या जोड़ना) की संक्रिया के संदर्भ में कर्ता संकेत [·] की प्रयुक्त स्थिति छत्तीसगढ़ गणित दर्शन में सामान्य संख्यांकन एवं उनागर पद्धत्ति की संख्यांकन में दो या दो से अधिक संख्याओं का योग करने में (इकाई– इकाई), (दहाई– दहाई), (सैकड़ा–सैकड़ा) – – – – –– स्तम्भ प्रखण्ड के अंकों का अलग –अलग योग किया जाता है। जब इस प्रकार किये गये संक्रिया स्तम्भ प्रखण्ड में उपस्थित दो या दो से अधिक अंकों का योग 9 से अधिक (10, 11 ,12 ,13, 14 ,15 ,16, 17,18) प्राप्त हो तो **कर्ता संकेत [·] आगर (एक अधिक) सूचक के रूप में प्रयुक्त होता है।** और जब इस प्रकार किये गये संक्रिया स्तम्भ प्रखण्ड में उपस्थित दो या दो से अधिक अंकों का योग $\bar{9}$ से कम $(\overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18})$प्राप्त हो तो **कर्ता संकेत [·] उना (एक कम) सूचक के रूप में प्रयुक्त होता है।** इस प्रकार प्रचलित संकलन संक्रिया के संदर्भ में कर्ता संकेत [·] का तात्पर्य क्रमशः हासिल आया (1) और हासिल आया $(\bar{1})$ के अर्थ से है।

2-4 कर्ता संकेत [·] का दर्शित स्थान

1• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड के अंकों के योग के संदर्भ में

योग के लिए प्रयुक्त n संख्याओं को ऊपर से n पंक्ति के नीचे एक स्तम्भ में अथवा बाँये से दाँये n स्तम्भ की एक पंक्ति में दर्शित कीजिए। प्रत्येक संख्या के इकाई अंकों का क्रमशः n पंक्ति के एक स्तम्भ में प्रथम पंक्ति से अथवा n स्तम्भ की एक पंक्ति में प्रथम स्तम्भ से योग का प्रथम चरण प्रारंभ कीजिए। जब दो या दो अधिक $\boldsymbol{k_1}$ अंको का योगफल $\boldsymbol{k_{s1}}$ = 9 से अधिक (10, 11 ,12 ,13, 14 ,15 ,16, 17,18) / $\bar{\mathbf{9}}$ से कम $(\overline{\mathbf{10}}, \overline{\mathbf{11}}, \overline{\mathbf{12}}, \overline{\mathbf{13}}, \overline{\mathbf{14}}, \overline{\mathbf{15}}, \overline{\mathbf{16}}, \overline{\mathbf{17}}, \overline{\mathbf{18}})$ द्विअंकीय प्राप्त हो तो तत्काल इसी $\boldsymbol{k_1}$वें क्रम की संख्या के दहाई अंक $\boldsymbol{d_1}$ $(\bar{\mathbf{9}}, \bar{\mathbf{8}}, \bar{\mathbf{7}}, \bar{\mathbf{6}}, \bar{\mathbf{5}}, \bar{\mathbf{4}}, \bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{2}}, \bar{\mathbf{1}}$ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 में से कोई एक होगा) के संगत उसके दाँयी ओर कर्ता संकेत [·] को $[(\boldsymbol{d_1})^{\cdot}]$ दर्शित कीजिए। तथा $\boldsymbol{k_{s1}}$ के इकाई अंक को लेकर पुनः योग के लिए दूसरे चरण की ओर बढ़े और जब $\boldsymbol{k_2}$ अंको के साथ योगफल

‡ **कर्ता संकेत [·]** यह कर्ता संकेत [·] मूलतः आघ्यात्मिक अध्ययन संस्थान अमोद कुज रूड़की द्वारा संचालित **वैदिक गणित** के उच्चस्तरीय पत्राचार पाठ्यक्रम में से लिया गया। जो कि मेरे परम आदरणीय पाद पूज्य गुरूदेव श्री नरेन्द्रपुरी जी संचालक अध्ययन संस्थान अमोद कुज रूड़की के द्वारा जुटाया गया है।

$k_{s2}=9$ से अधिक / $\bar{9}$ से कम द्विअंकीय प्राप्त हो तो तत्काल इसी k_2 वें क्रम की संख्या के दहाई अंक d_2 के संगत उसके दाँयी ओर कर्ता संकेत [·] को $[(d_2)^{\cdot}]$ दर्शित कीजिए। .... इस प्रकार $k_1, k_2, k_3, - - - - k_r$ का क्रम इकाई स्तम्भ प्रखण्ड के अंकों के समस्त अंकों का योग संक्रिया में सम्मिलित होने तक जारी रखे। अंतिम चरण से k_r अंको के साथ योगफल $\mathbf{k_{sr}}=9$ से अधिक / $\bar{9}$ से कम द्विअंकीय प्राप्त हो तो तत्काल इसी k_r वें क्रम की संख्या के दहाई अंक d_r संगत उसके दाँयी ओर कर्ता संकेत [·] को $[(d_r)^{\cdot}]$ दर्शित कीजिए। तथा $\mathbf{k_{sr}}$के इकाई अंक को योगफल के पंक्ति/स्तम्भ के इकाई प्रखण्ड में दर्शित करे। और यदि $\mathbf{k_{sr}}=\bar{9},\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1}$ 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 में से कोई एक अर्थात् एकअंकीय प्राप्त हो तो मात्र इसी अंक को योगफल के पंक्ति/स्तम्भ के इकाई प्रखण्ड में दर्शित करे।

2• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड से उच्च प्रखण्ड (दहाई, सैकड़ा, हजार – – –) के अंकों केयोग के संदर्भ में

इकाई स्तम्भ प्रखण्ड से उच्च प्रखण्ड (दहाई, सैकड़ा, हजार – – –) के अंक कर्ता संकेत [·] मुक्त अथवा कर्ता संकेत [·] युक्त होंगें। तब इन प्रखण्डों के सतत योग संक्रिया में कर्ता संकेत [·] मुक्त अंक यथावत लिया जावे। तथा कर्ता संकेत [·] युक्त अंक के लिए कर्ता संकेत [·] अनुच्छेद 2-3 के अनुसार पूर्व स्तम्भ प्रखण्ड से आगर (एक अधिक) संकेतक के रूप आने से कर्ता संकेत [·] युक्त अंक $[\bar{9}^{\cdot},\bar{8}^{\cdot},\bar{7}^{\cdot},\bar{6}^{\cdot},\bar{5}^{\cdot},\bar{4}^{\cdot},\bar{3}^{\cdot},\bar{2}^{\cdot},\bar{1}^{\cdot},0^{\cdot},1^{\cdot},2^{\cdot},3^{\cdot},4^{\cdot},5^{\cdot},6^{\cdot},7^{\cdot},8^{\cdot},9^{\cdot}]$ को

क्रमशः $[\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]$ माना जावे।

इसी प्रकार कर्ता संकेत [·]युक्त अंक के लिए कर्ता संकेत [·] अनुच्छेद 2-3 के अनुसार पूर्व स्तम्भ प्रखण्ड से उना (एक कम) संकेतक के रूप आने से कर्ता संकेत [·] युक्त अंक $[\bar{9}^{\cdot},\bar{8}^{\cdot},\bar{7}^{\cdot},\bar{6}^{\cdot},\bar{5}^{\cdot},\bar{4}^{\cdot},\bar{3}^{\cdot},\bar{2}^{\cdot},\bar{1}^{\cdot},0^{\cdot},1^{\cdot},2^{\cdot},3^{\cdot},4^{\cdot},5^{\cdot},6^{\cdot},7^{\cdot},8^{\cdot},9^{\cdot}]$ को

क्रमशः $[\overline{10},\bar{9},\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8,]$ माना जावे।

टीप 1• योग के लिए ली गई संख्याओं में अंकों की स्थान संख्या समान न हो, तब समस्त संख्या के अंक स्थान तुल्य करने आवश्यकतानुसार बाँयी ओर उच्च प्रखण्डों पर शून्य (0) बढ़ाकर सबसे अधिक अंक स्थान वाले संख्या के तुल्य स्थानिक संख्या बनाइए। **जैसे** [45+ 299+ 90465] को [00045 +00299 +90465] दर्शित कर सकते है।

2• योगके लिए प्रयुक्त संख्याओं के अंतिम स्तम्भ प्रखण्ड से भी कर्ता [·] प्राप्त हो सकता है, जिसे इस अंतिम प्रखण्ड के बाद नवीन प्रखण्ड मे नियमानुसार दर्ज कीजिए।

3• कर्ता [·] को अंक के दायी ओर ऊपर क्षैतिज स्थिति $d^{\cdot}$ पर ही दर्ज करना चाहिए। $d.$ और $\dot{d}$ सदृश्य कदापि दर्ज न करें। क्योंकि दशमलव भिन्न के अध्ययन में $d.$ अंक d के बाद दशमलव चिन्ह को तथा $\dot{d}$ दशमलव बाद के अंक d का आर्वती होने का संकेतन है।

व्याख्या उदाहरण 1■ 536 और 795 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल 536 और 795 का योगफल

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में
$536 + {}^{\cdot}7^{\cdot}95$ योगफल 1331	$54\bar{4} + 1\bar{2}\bar{1}5$ योगफल 1331

(1) सामान्य संख्यांकन के लिए

1• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड $6+5=11>9$ अतः 795 के दहाई स्तम्भ के अंक 9 में कर्ता चिन्हित करते हुए 11 के इकाई अंक 1 को योगफल के इकाई स्तम्भ में 1दर्शित कीजिए।

2• दहाई स्तम्भ प्रखण्ड $3+9^{\cdot}=3+10=13>9$ अतः $79^{\cdot}5$ के सैकड़ा स्तम्भ के अंक 7 में कर्ता चिन्हित करते हुए 13 के इकाई अंक 3 को योगफल के दहाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

3• सैकड़ा स्तम्भ प्रखण्ड $5+7^{\cdot}=5+8=13>9$ अतः $7^{\cdot}9^{\cdot}5$ के हजार स्तम्भ जो कि रिक्त है में कर्ता चिन्हित करते हुए 13 के इकाई अंक 3 को योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

4• हजार स्तम्भ प्रखण्ड यहाँ केवल कर्ता एक ही बार दर्शित है अतः योगफल के हजार स्तम्भ में 1दर्शित कीजिए।

(2) उनागर संख्यांकन के लिए

1• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड $\bar{4}+5=1$ से योगफल के इकाई स्तम्भ में 1दर्शित कीजिए।

2• दहाई स्तम्भ प्रखण्ड $4+\bar{1}=3$ से योगफल के दहाई स्तम्भ में 3 दर्शित कीजिए।

3• सैकड़ा स्तम्भ प्रखण्ड $5+\bar{2}=3$ योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में 3 दर्शित कीजिए।

4• हजार स्तम्भ प्रखण्ड यहाँ केवल संख्या $1\bar{2}\bar{1}5$ का 1 दर्शित है अतः योगफल के हजार स्तम्भ में 1 दर्शित कीजिए।

व्याख्या उदाहरण 2■ 5736, 9452 , 4301, 8673, और 938 का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल (1) सामान्य संख्यांकन में–

1• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड $6+2+1+3=12>9$ अतः 8673 के दहाई स्तम्भ के अंक 7 में कर्ता चिन्हित करते हुए 12 के इकाई अंक $2+8=10>9$ अतः 0938 के दहाई स्तम्भ के अंक 3 में कर्ता चिन्हित करते हुये 10के इकाई अंक 0 को योगफल के इकाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

2• दहाई स्तम्भ प्रखण्ड $3+5+0+\dot{7}=3+5+0+8=16>9$ अतः $86\dot{7}3$ के सैकड़ा स्तम्भ के अंक 6 में कर्ता चिन्हित करते हुए 16 के इकाई अंक $6+\dot{3}=6+4=10>9$ अतः $09\dot{3}8$ के सैकड़ा स्तम्भ अंक 9 में कर्ता चिन्हित करते हुए 10 के इकाई अंक 0 को योगफल के दहाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

3• सैकड़ा स्तम्भ प्रखण्ड $7+4=11>9$ अतः 9452 के हजार स्तम्भ के अंक 9 में कर्ता चिन्हित करते हुए 11 के इकाई अंक $1+3+\dot{6}=1+3+7=11>9$ अतः $8\dot{6}\dot{7}3$ के हजार स्तम्भ के अंक 8 में कर्ता चिन्हित करते हुए 11 के इकाई $1+\dot{9}=1+10=11>9$ अतः $0\dot{9}\dot{3}8$ के हजार स्तम्भ के अंक 0 में कर्ता चिन्हित करते हुए 11 के इकाई को योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

4• हजार स्तम्भ प्रखण्ड $5+\dot{9}=5+10=15>9$ अतः $\dot{9}452$ के दस हजार स्तम्भ जो कि रिक्त है में कर्ता चिन्हित करते हुए 15 के इकाई अंक $5+4+\dot{8}=5+4+9=18>9$ अतः $\dot{8}\dot{6}\dot{7}3$ के दसहजार स्तम्भ जो कि रिक्त है में कर्ता चिन्हित करते हुए 18 के इकाई अंक $8+\dot{0}=8+1=9$ को योगफल के स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

5736, 9452 , 4301, 8673, और 938 का योगफल

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में
$5\ 7\ 3\ 6$ $\cdot\ \dot{9}\ 4\ 5\ 2$ $4\ 3\ 0\ 1$ $\cdot\ \dot{8}\ \dot{6}\ \dot{7}\ 3$ $+\quad \dot{0}\ \dot{9}\ \dot{3}\ 8$ योगफल $2\ 9\ 1\ 0\ 0$	$1\ \bar{4}\ \bar{3}\ 4\ \bar{4}$ $1\ \bar{1}\ 4\ 5\ 2$ $4\ 3\ 0\ 1$ $1\ \bar{1}\ \bar{3}\ \bar{3}\ 3$ $+\quad 0\ 1\ \dot{\bar{1}}\ 4\ \bar{2}$ योगफल $3\ \bar{1}\ 1\ 0\ 0$ $=2\ 9\ 1\ 0\ 0$

5• दस हजार स्तम्भ प्रखण्ड कर्ता + कर्ता $=(\cdot+\cdot)=1+1=2$ अतः योगफल के दसहजार स्तम्भ में 2 दर्शित कीजिए।

(2) उनागर संख्यांकन के लिए

1• इकाई स्तम्भ प्रखण्ड $\bar{4}+2+1+3+\bar{2}=0$ से योगफल के इकाई स्तम्भ में 0 दर्शित कीजिए।

2• दहाई स्तम्भ प्रखण्ड. $4+5+0+\bar{3}+4=10>9$ अतः $01\bar{1}4\bar{2}$ के सैकड़ा स्तम्भ के अंक $\bar{1}$ में कर्ता चिन्हित करते हुए 10 के इकाई 0 योगफल के दहाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

3• सैकड़ा स्तम्भ प्रखण्ड $\bar{3}+4+3+\bar{3}+\dot{\bar{1}}=\bar{3}+4+3+\bar{3}+0=1$ से योगफल के सैकड़ा स्तम्भ 1 में दर्शित कीजिए।

4• हजार स्तम्भ प्रखण्ड $\bar{4}+\bar{1}+4+\bar{1}+1=\bar{1}$ से योगफल के हजार स्तम्भ में $\bar{1}$दर्शित कीजिए।

5• दसहजार स्तम्भ प्रखण्ड 1+1+1 =3 से कर्ता प्राप्त नहीं होगा अतः उक्त योगफल मान 3 को ही योगफल के दसहजार स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

साधित उदाहरण■

89 और 77 का योगफल | 75 और 67 का योगफल

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में		सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में
$8\ 9$ $+\quad \cdot\ \dot{7}\ 7$ योगफल $1\ 6\ 6$	$1\ \bar{1}\ \bar{1}$ $+\quad 1\ \bar{2}\ \bar{3}$ योगफल $2\ \bar{3}\ \bar{4}$ $=1\ 6\ 6$		$7\ 5$ $+\quad \cdot\ \dot{6}\ 7$ योगफल $1\ 4\ 2$	$1\ \bar{3}\ 5$ $+\quad 1\ \bar{3}\ \bar{3}$ योगफल $2\ \bar{6}\ 2$ $=\ 1\ 4\ 2$

989 ,167 और 389 का योगफल   899, 889 और 791 का योगफल

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में		सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में
$9\ 8\ 9$ $\cdot\dot{1}\ \dot{6}\ 7$ $+\ \dot{3}\ \dot{8}\ 9$ योगफल $1\ 5\ 4\ 5$	$1\ 0\ \bar{1}\ \bar{1}$ $0\ 2\ \bar{3}\ \bar{3}$ $+\ 0\ 4\ \bar{1}\ \bar{1}$ योगफल **$1\ 6\ \bar{5}\ \bar{5}$** $=1\ 5\ 4\ 5$		$8\ 9\ 9$ $\cdot\ 8\ \dot{8}\ 9$ $+\ \cdot\dot{7}\ 9\ 1$ योगफल $2\ 5\ 7\ 9$	$1\ \bar{1}\ 0\ \bar{1}$ $1\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}$ $+\ 1\ \bar{2}\ \bar{1}\ 1$ योगफल $3\ \bar{4}\ \bar{2}\ \bar{1}$ $=2\ 5\ 7\ 9$

9879 , 9469, 8358,7456 और 6989 का योगफल   98989, 93189 ,40039 और 32261 का योगफल

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में ψ		सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन में
$9\ 8\ 7\ 9$ $\cdot\ \dot{9}\dot{4}\ \dot{6}\ 9$ $\cdot\ 8\ \dot{3}\ \dot{5}\ 8$ $\cdot\ \dot{7}\ 4\ \dot{5}\ 6$ $+\ \cdot\ 9\ \dot{4}\ \dot{6}\ 9$ योगफल $4\ 4\ 6\ 3\ 1$	$1\ 0\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}$ $1\ \bar{1}\ 5\ \bar{3}\ \bar{1}$ $1\ \bar{2}\ 4\ \bar{4}\ \bar{2}$ $1\ \dot{\bar{3}}\ \dot{5}\ \bar{4}\ \bar{4}$ $+\ 1\ \bar{1}\ 5\ \bar{3}\ \bar{1}$ योगफल $5\ \bar{6}\ 7\ \bar{6}\ \bar{9}$ $=4\ 4\ 6\ 3\ 1$		$9\ 8\ 9\ 8\ 9$ $\cdot\dot{9}\ \dot{3}\ \dot{1}\dot{8}\ 9$ $\cdot\ 4\ 0\ \dot{0}\ \dot{3}\ 9$ $+\ 3\ 2\ 2\ 6\ 1$ योगफल $26\ 4\ 4\ 7\ 8$	$1\ 0\ \bar{1}\ 0\ \bar{1}\ \bar{1}$ $1\ \bar{1}\ 3\ 2\ \bar{1}\ \bar{1}$ $0\ 4\ 0\ 0\ 4\ \bar{1}$ $0\ 3\ 2\ 3\ \bar{4}\ 1$ योगफल $2\ 6\ 4\ 5\ \bar{2}\ \bar{2}$ $=\ 2\ 6\ 4\ 4\ 7\ 8$

ψ संकलन संक्रिया में – सैकडा स्तम्भ में $\dot{5} = (5\text{-}1)=4$ होगा। क्योंकि संगत दहाई अंक $\bar{4}$ ऋणात्मक है।

$\dot{\bar{3}} = (\bar{3}) + 1) = \bar{2}$ होगा। क्योंकि संगत सैकडा अंक में $\dot{5} = (5\text{-}1)=4$ धनात्मक है

----------02----------

अध्याय -3
सामान्य संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया

3-1 संख्या X मे से संख्या Y घटाने की स्थिति संख्या X मे से संख्या Y घटाने की दो स्थिति बनती है।

स्थिति (1) ऐसे स्तम्भ प्रखण्ड (इकाई, दहाई, सैकड़ा ,हजार– – – –)पर (संख्या X का अंक) **बड़ा या बराबर हो** (संख्या Y का अंक b) के। अर्थात संकेत में $a \geq b$ हो तो इन स्तम्भ पर घटाने की संक्रिया को **सरल व्यवकलन या कर्तामुक्त व्यवकलन** कहते हैं।

जैसे 1• (संख्या X का अंक 7) > (संख्या Y का अंक 4) से $7 - 4 = 3$

2• (संख्या X का अंक 8) = (संख्या Y का अंक 8) से $8 - 8 = 0$

स्थिति (2) ऐसे स्तम्भ प्रखण्ड (इकाई, दहाई, सैकड़ा ,हजार– – – –)पर (संख्या X का अंक a) छोटा हो (संख्या Y का अंक b) के। अर्थात् संकेतमें $a < b$ हो तो इन स्तम्भ पर घटाने की संक्रिया को **कर्तायुक्त व्यवकलन** कहते हैं।

जैसे 1• (संख्या X का अंक 4) <(संख्या Y का अंक 5) के लिए कर्ता आवश्यक है।

2• संख्या X का अंक 0) <(संख्या Y का अंक 5) के लिए कर्ता आवश्यक है।

3-2 सरल व्यवकलन या कर्तामुक्त व्यवकलन इसके लिए व्यवकलन की यह छोटी सी तालिका का आत्मसात होना पर्याप्त है।

साधित उदाहरण

1• $79 - 37 = 42$

2• $98 - 67 = 31$

3• $989 - 167 = 822$

4• $5939 - 4925 = 1014$

5• $93189 - 33047 = 60142$

6• $56789 - 53249 = 03540$

7• $8459063 - 5432001 = 3027062$

तालिका 1 $a \geq b$ के लिए (अंक a) – (अंक b)व्यवकलन

a→ −b ↓	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
2	7	6	5	4	3	2	1	0		
3	6	5	4	3	2	1	0			
4	5	4	3	2	1	0				
5	4	3	2	1	0					
6	3	2	1	0						
7	2	1	0							
8	1	0								
9	0									

तालिका में $6 - 4 = 2$ चिन्हांकित है।

तालिका–2

[a'/a+10] ≥ b] के लिए (अंक a) – (अंक b)व्यवकलन

[a'/a+10]→ −b ↓	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	3	4	5	6	7	8	9	
7	3	4	5	6	7	8	9		
6	4	5	6	7	8	9			
5	5	6	7	8	9				
4	6	7	8	9					
3	7	8	9						
2	8	9							
1	9								

3-3 कर्तायुक्त व्यवकलन सिद्धांत

कर्तायुक्त व्यवकलन के दो सिद्धांत प्रतिपादित किये जा सकते है। (1) कर्ता का उना सिद्धांत ;(2) कर्ता का आगर सिद्धांत ।

(1) कर्ता का उना सिद्धांत रामू के पास 5 रूपये है। उसे श्यामू को 7 रूपये देना है। रामू के पास श्यामू को 7 रूपये देने के लिए 2 रूपये कम पड़ रहा है। अतः वह अपने पड़ोसी दुकानदार राजू से 2 रूपये **चलाव** (आपसी–वापसी का लेन देन)

चाहता है। लेकिन राजू आवश्यक न्यूनतम 2रूपये नहीं देता बल्कि अपने देने की न्यूनतम गणना राशि 10 रूपये देता है। अब रामू श्यामू को 7 रूपये निम्नानुसार तीन तरीकों से दे सकता है।

(A) प्रथम रामू अपने पास रखे 5 रूपये श्यामू को देगा। इसके बाद शेष 7 – 5 = 2 रूपये श्यामू को और देने के लिए राजू से प्राप्त चलाव 10 रूपये में से देगा। बचत 8 रू (2 का 10पुरनी) होगा।

(B) प्रथम रामू अपने पास रखे 5 रूपये में राजू से लिये चलाव राशि 10 रूपये को मिलाकर अर्थात जोड़ कर 10+5 = 15 रूपये कर लेगा। इसके बाद दूसरे क्रम में इस 15 रूपये में से 7 रूपये श्यामू को देगा। तब रामू के पास व्यवकलन तालिका 2 के अनुसार 7 का 15 पुरनी 8 रूपये बचत होगा।

तालिका 3

(संख्या X – संख्या Y) के लिए c = संख्या Y के किसी स्तम्भ प्रखण्ड के अंक b का 10 पुरनी तथा a˙/a = संख्या X के किसी स्तम्भ प्रखण्ड के अंक ˙ का उना/केवल अंक										
c→ +a˙/a↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0˙	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1˙/0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2˙/1	2	3	4	5	6	7	8	9		
3˙/2	3	4	5	6	7	8	9			
4˙/3	4	5	6	7	8	9				
5˙/4	5	6	7	8	9					
6˙/5	6	7	8	9						
7˙/6	7	8	9							
8˙/7	8	9								
9˙/8	9									

(C) प्रथम रामू राजू से लिये चलाव राशि 10 रूपये में से ही 7रूपये देगा। इसके बाद दूसरे क्रम में 7 का 10 पुरनी 3 रूपये को अपने पास रखे 5 रूपये में मिला लेगा अर्थात् जोड़ लेगा। तब रामू के पास योग तालिका 3 के अनुसार 5 + 3 = 8 रूपये बचत होगा।

(रामू संख्या X – श्यामू संख्या Y) उपरोक्त तीनों तरीकों में रामू द्वारा राजू से लिया गया **चलाव**⧗ राशि 10 रूपये प्रचलित संख्यांकन के दशाधारी होने के अर्थ पर है। जिसके अनुसार प्रचलित संख्यांकन में 10 इकाई = 1 दहाई , 10 दहाई = 1 सैकड़ा , 10 सैकड़ा = 1 हजार , – – – – होगा। इस प्रकार यदि (रामूसंख्या X – श्यामूसंख्या Y) के लिए किसी स्तम्भ प्रखण्ड पर देनदार रामू के पास a˙/a अंक राशि है जो लेनदार श्यामू को b अंक राशि से कम (a˙/a < b) है ।तब इस प्रखण्ड पर घटाने की संक्रिया सम्पन्न करने रामू द्वारा प्रतीकार्थ राजू से लिया गया **चलाव** राशि 10 रूपये को इस संक्रिया प्रखण्ड से प्रथम उच्च प्रखण्ड पर स्थित रामूसंख्या X के अंक मान ˙ को उना(एक कम) करता है। कर्ता चिहिन्त कर a˙ दर्शित किया जाता है। व्यवकलन के उना सिद्धांत को प्रतिपादित करता है।

सिद्धांत की समीक्षा उपरोक्त सिद्धांत संख्यात्मक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है। जिससे (संख्या X – संख्या Y) के लिए किसी स्तम्भ प्रखण्ड पर संख्या X का अंक a˙/a = 5 तथा संख्या Y का अंक b =7 है। अतः इन्ही संगत शदों में 2068 में से 1973 को घटाने की संक्रिया उपरोक्त तीनों सिद्धांतो पर कर स्वमेव समीक्षा के बिन्दु दे सकेंगे ।

1■ 2068 –1973 **का हल व्याख्या, उना सिद्धांत A के अनुसार**

	2˙0˙ 6 8
–	1 9 7 3
	0 0 9 5
=95	

इकाई प्रखण्ड a=8 , b =3 से a> ***b*** है। इसलिए 8–3 = **5** उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड a=6 , b =7 से a< b है। इसलिए 2068 के सैकड़ा अंक 0 में कर्ता चिहिन्त कीजिए। b – a = 7 – 6 = 1 का दस पुरनी 9 उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिहिन्त a˙=0˙ = $\bar{1}$, b =7 से a˙ < b है। इसलिए 2068 के हजार 2 में कर्ता चिहिन्त कीजिए। b – a˙ = 9 – $\bar{1}$ = 10 का दस पुरनी 0 उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

⧗ **चलाव–** आवश्यक होने पर चाही गई वस्तु या धनराशि जिसे एक न्यूनतम समय अवधि में यथावत वापस किया जाता है, के लिए छत्तीसगढ़ी शब्दावली में चलाव शब्द प्रयुक्त है। विडम्बना है कि आधुनिक गणित अध्ययन में उधार लिया अथवा 1 को मानों 11 , 2 को मानों 12 , 3 को मानों 13 , --- -, 8 को मानों 18 , का पाठ पढ़ाकर नवनिहालों (भविष्य के राष्ट्र निर्माताओं) को ऋणं ग्रसता और छूठ का संदेश ही दे रहे है।

हजार प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot}=2^{\cdot}=1$, $b=1$ से $a^{\cdot}=b$ है। $b-a^{\cdot}=1-1=0$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

2■ $2068-1973$ का हल व्याख्या, उना सिद्धांत B के अनुसार

$$\begin{array}{r} 2^{\cdot}0^{\cdot}\ 6\ 8 \\ -\ 1\ 9\ 7\ 3 \\ \hline 0\ 0\ 9\ 5=95 \end{array}$$

इकाई प्रखण्ड $a=8$, $b=3$ से $a>b$ है। इसलिए $8-3=5$ उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड $a=6$, $b=7$ से $a<b$ है। इसलिए 2068 के सैकड़ा अंक 0 में कर्ता चिन्हित कीजिए। तालिका 2 के अनुसार $(a+10)-b=(6+10)-7=16-7=9$ दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot}=0^{\cdot}=\bar{1}$, $b=9$ से $a^{\cdot}<b$ है। इसलिए 2068 के सैकड़ा अंक 0 में कर्ता चिन्हित कीजिए। तालिका 2 के अनुसार $(a+10)-b=(\bar{1}+10)-9=9-9=0$ सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot}=2^{\cdot}=1$, $b=1$ से $a^{\cdot}=b$ है। $b-a^{\cdot}=1-1=0$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

3■ $2068-1973$ का हल व्याख्या, उना सिद्धांत C के अनुसार

$$\begin{array}{r} 2^{\cdot}0^{\cdot}\ 6\ 8 \\ -\ 1\ 9\ 7\ 3 \\ \hline 0\ 0\ 9\ 5=95 \end{array}$$

इकाई प्रखण्ड $a=8$, $b=3$ से $a>b$ है। इसलिए $8-3=5$ उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड $a=6$, $b=7$ से $a<b$ है। इसलिए 2068 के सैकड़ा अंक 0 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b=7$ के दसपुरनी 3 को $a=6$ में जोड़ने से $3+6=9$ उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot}=0^{\cdot}=\bar{1}$, $b=7$ से $a^{\cdot}<b$ है। इसलिए 2068 के हजार अंक 2 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b=9$ के दसपुरनी 1को $a^{\cdot}=0^{\cdot}=\bar{1}$ में जोड़ने से $1+\bar{1}=0$ उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot}=2^{\cdot}=1$, $b=1$ से $a^{\cdot}=b$ है। $b-a^{\cdot}=1-1=0$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

(2) कर्ता का आगर सिद्धांत उपरोक्त कर्ता का उना सिद्धांत के संदर्भ रामू द्वारा राजू से **चलाव** प्राप्त कर श्यामू को रूपये देने के तीनों तरीकों (A,B,C) के विश्लेषण उपरांत (रामू संख्या X – श्यामू संख्या Y) पर कर्ता का उना सिद्धांत प्रतिपादन में कर्ता [·] को उनाकर्ता के रूप में रामू संख्या अंक पर चिन्हित किया गया है। पुनः विचार करे यदि राजू चलाव राशि 10 रूपये को श्यामू को देता है और कहता है कि रामू जब भी देवे लौटा देना। तब श्यामू उक्त चलाव राशि 10 रूपये में 7रूपये रखकर शेष बचे 3 रूपये (7 का 10 पुरनी) को राम को देगा। इस प्रकार रामू के पास रखे 5 रूपये मिलाकर $(5+3)=8$रूपये होगा।

तालिका 4

(संख्या X – संख्या Y) के लिए–a=संख्या X के किसी स्तम्भ प्रखण्ड का अंक c = संख्या Y के किसी स्तम्भ प्रखण्ड के अंक $b/b^{\cdot}$ का 10 पुरनी जहाँ $b^{\cdot}$ = एक आगर $b=(b+1)$ है।

a→ +c↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	3	4	5	6	7	8	9	
3	3	4	5	6	7	8	9		
4	4	5	6	7	8	9			
5	5	6	7	8	9				
6	6	7	8	9					
7	7	8	9						
8	8	9							
9	9								

(रामूसंख्या X –श्यामूसंख्याY) उक्त तरीका में राजू द्वारा श्यामू को दिया गया **चलाव** राशि 10 रूपये प्रचलित संख्यांकन के दशाधारी होने के अर्थ पर है। जिसके अनुसार प्रचलित संख्यांकन में 10 इकाई = 1 दहाई , 10 दहाई = 1 सैकड़ा , 10 सैकड़ा = 1 हजार , – – – – होगा। इस प्रकार यदि (रामूसंख्या X – श्यामूसंख्या Y) के लिए किसी स्तम्भ प्रखण्ड पर देनदार रामू के पास ˙ अंक राशि है जो लेनदार श्यामू को b अंक राशि से कम $(a<b/b^{\cdot})$ है। तब इस प्रखण्ड पर घटाने की संक्रिया सम्पन्न करने राजू द्वारा प्रतीकार्थ श्यामू को दिया गया **चलाव** राशि 10

रूपये को इस संक्रिया प्रखण्ड से प्रथम उच्च प्रखण्ड पर स्थित श्यामू संख्या Y के अंक मान b को आगर(एक अधिक) करता है।कर्ता चिहिन्त कर $\dot{b}$ दर्शित किया जाता है। व्यवकलन के आगर सिद्धांत को प्रतिपादित करता है।

आगर सिद्धांत के अनुसार 2068 − 1973 का हल व्याख्या

$$\begin{array}{r} 2\;0\;6\;8 \\ -\;\dot{1}\;\dot{9}\;7\;3 \\ \hline 0\;0\;9\;5 \\ =9\;5 \end{array}$$

इकाई प्रखण्ड a =8 , b =3 से 8−**3** = **5** उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।
दहाई प्रखण्ड a=6 , b =7 से a< *b* है। इसलिए 1973 के सैकड़ा अंक 9 में कर्ता चिन्हित कीजिए।
b = 7 के दसपुरनी 3 को a=6 में जोड़ने से 3+6 =9 उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।
सैकड़ा प्रखण्ड a=0 , कर्ता चिन्हितं $\dot{b}$ = $\dot{9}$ =10 से a < $\dot{b}$ है। इसलिए 1973 के हजार अंक 1 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $\dot{b}$ = 10 के दसपुरनी 0 को a=0 में जोड़ने से 0+0 =0 उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड. a= 2 , कर्ता चिन्हित $\dot{b}$ =$\dot{1}$ =2 से है। a−$\dot{b}$ = 2 − 2 =0 उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

साधित उदाहरण■

उना सिद्धांत पर व्यवकलन (घटाना)	आगर सिद्धांत पर व्यवकलन (घटाना)
1■ 36−28 के लिये− $\dot{3}\;6$ $-2\;8$ $0\;8$ उत्तर	1■ 36−28 के लिये− $3\;6$ $-\dot{2}\;8$ $0\;8$ उत्तर
2■ 324−115 के लिये− $3\;\dot{2}\;4$ $-1\;1\;5$ $2\;0\;9$ उत्तर	2■ 324−115 के लिये− $3\;2\;4$ $-1\;\dot{1}\;5$ $2\;0\;9$ उत्तर
3■ 906−107 के लिये− $\dot{9}\;\dot{0}\;6$ $-1\;0\;7$ $7\;0\;9$ उत्तर	3■ 906−107 के लिये− $9\;0\;6$ $-\;\dot{1}\;\dot{0}\;7$ $7\;0\;9$ उत्तर
4■ 728− 89 के लिये− $\dot{7}\;\dot{2}\;8$ $-0\;8\;9$ $6\;3\;9$ उत्तर	4■ 728− 89 के लिये− $7\;2\;8$ $-\dot{0}\;\dot{8}\;9$ $6\;3\;9$ उत्तर
5■ 8472− 379 के लिये− $\dot{8}\;\dot{4}\;\dot{7}\;2$ $-3\;7\;9\;6$ $4\;6\;7\;6$ उत्तर	5■ 8472− 3796 के लिये− $8\;4\;7\;2$ $-\;\dot{3}\;\dot{7}\;\dot{9}\;6$ $4\;6\;7\;6$ उत्तर
6■ 49062 − 8648 के लिये− $4\;\dot{9}\;0\;\dot{6}\;2$ $-\;8\;6\;4\;8$ $4\;0\;4\;1\;4$ उत्तर	6■ 8472− 3796 के लिये− $4\;9\;0\;6\;2$ $-\;\dot{8}\;6\;\dot{4}\;8$ $4\;0\;4\;1\;4$ उत्तर
7■ 98356 − 79467 के लिये− $9\;\dot{8}\;\dot{3}\;\dot{5}\;6$ $-7\;9\;4\;6\;7$ $1\;8\;8\;8\;9$ उत्तर	7■ 98356− 79467 के लिये− $9\;8\;3\;5\;6$ $-7\;\dot{9}\;\dot{4}\;\dot{6}\;7$ $1\;8\;8\;8\;9$ उत्तर

8■ 364237 − 270038 के लिये− $\dot{3}\;6\;4\;\dot{2}\;\dot{3}\;7$ $-2\;7\;0\;0\;3\;8$ $0\;9\;4\;1\;9\;9$ उत्तर	8■ 364237− 270038 के लिये− $3\;6\;4\;2\;3\;7$ $-\;2\;7\;0\;\dot{0}\;\dot{3}\;8$ $0\;9\;4\;1\;9\;9$ उत्तर
9■ 680032 − 68810 के लिये−	9■ 680032− 68810 के लिये−

6 8 0 0 3 2 − 0 6 8 8 1 0 6 1 1 2 2 2 उत्तर	6 8 0 0 3 2 − 0 6 8 8 1 0 6 1 1 2 2 2 उत्तर
10■ 10000000 − 8764321 के लिये– 1 0 0 0 0 0 0 8 − 0 8 7 6 4 3 2 1 0 1 2 3 5 6 7 9 उत्तर	10■ 10000000 − 8764321 के लिये– 1 0 0 0 0 0 0 0 − 0 8 7 6 4 3 2 1 0 1 2 3 5 6 7 9 उत्तर

3-4 A ≠ 0 (A = 0 नहीं है) तब A0, A00, A000, A0000 - - - - - - - सदृश्य संख्या में से संख्या घटाना

(संख्या **X** – संख्या **Y**) के लिये संख्या X= A0 सदृश्य संख्या 10, 20 ,30 ,40------------, A00 सदृश्य संख्या 100, 200 ,300 ,400------------, A000 सदृश्य संख्या 1000, 2000 ,3000 ,4000------------, A0000 सदृश्य संख्या 10000, 2000 ,30000 ,40000------------, इस प्रकार n अंकीय सं,ख्या में A के बाद (n−1) स्थान तक शून्य की स्थान संख्या वाले संख्या।

संख्या Y = संख्या X से छोटी संख्या इकाई अंक 0 नहीं है।

और संख्या Y संख्या X से कम स्थान की संख्या हो तो नियमानुसार संख्या Y के बाँयी ओर शून्य बढ़ाकर संख्या X के तुल्य स्थान की संख्या बनाने बाद घटाने की संक्रिया प्रारंभ कीजिए।

उत्तर पद **1•** उत्तर पद का इकाई अंक मान संख्या Y के इकाई अंक का दसपूरनी दर्शित होगा।

2• संख्या X के सर्वोच्च स्थान और इकाई स्थान के मध्य के अंक अर्थात् दहाई अंक से संख्या X के शून्य स्थान तक के अंक मान संख्या Y के संगत स्थान के अंको का नवपूरनी दर्शित होगा।

3• संख्या X के सर्वोच्च स्थान का अंक मान = [(A − 1) − (संख्या Y के संगत स्थान का अंक,]

या [A –(संख्या Y के संगत स्थान का अंक +1)] दर्शित होगा।

साधित उदाहरण■

50000−4763 के लिए
5 0 0 0 0 − 0 4 7 6 3 4 5 2 3 7 उत्तर।

उत्तर पद•

इकाई स्तम्भ अंक 4763 के इकाई स्तम्भ का अंक 3का 10 पुरनी 7 होगा।

दहाई, सैकड़ाएवं हजार स्तम्भ अंक 4763 के क्रमशः दहाई, सैकड़ा एवं हजार स्तम्भ अंक 6, 7 , एवं 4 का 9 पुरनी अंक 3, 2 एवं 5 होगा।

दस हजार स्तम्भ अंक (5 − 1) (4763 दसहजार स्तम्भ अंक 0)= 4 होगा।

600000−349 केलिए
6 0 0 0 0 0 − 0 0 0 3 4 9 5 9 9 6 5 1 उत्तर।

उत्तर पद•

इकाई स्तम्भ अंक 349 के इकाई स्तम्भ का अंक 9का 10पुरनी 1 होगा।

दहाई, सैकड़ा , हजार, एवं दसहजार स्तम्भ अंक 349 के क्रमशः दहाई, सैकड़ा, हजार एवं दसहजार स्तम्भ अंक 4, 3 , 0 एवं 0 का 9 पुरनी अंक 5, 6 , 9 एवं 9 होगा।

लाख स्तम्भ अंक (6 − 1) − (349 का लाख स्तम्भ अंक 0)= 5 होगा।

9000000−7320156 केलिए
9 0 0 0 0 0 0 − 7 3 2 0 1 5 6 1 6 7 9 8 4 4 उत्तर।

उत्तर पद•

इकाई स्तम्भ अंक **7320156** के इकाई स्तम्भ का अंक 6 का 10 पुरनी 4 होगा।

दहाई, सैकड़ा , दहजार, दसहजार एवं लाख स्तम्भ अंक 7320156 के क्रमशः दहाई, सैकड़ा, हजार, दसहजार एवं लाख स्तम्भ अंक 5, 1 , 0,2 एवं 3 का 9 पुरनी अंक 4, 8 , 9,7 एवं 6 होगा।

दस लाख स्तम्भ अंक (9 − 1) − (7320156 का दस लाख स्तम्भ अंक 7)= 1 होगा।

विवेचना– 1• विस्तारित व्याख्या संक्रियाएँ लम्बी प्रतीत होती है। किन्तु अभ्यास उपरांत सरल एवं द्रुतगामी आत्मसाती होता अनुभव करेंगे।

2• कर्ता का आगर एवं उना सिद्धांत संख्याओं के लम्बी श्रृंखला के संकलन में सरल और त्रुटिहीन द्रुतगामी हल देने वर्तमान हासिल विधि से उन्नत है। जिसे वैदिक गणित में क्रमशः एकाधिकेनपूर्वेण एवं एकन्यूनेनपूर्वेण तथा आधुनिक गणित परवर्ती एवं पूर्ववर्ती अंक/संख्या के रूप में लिया गया है।

3• व्यवकलन में कर्ता का उना सिद्धांत पर सुझाए गये तीनों सुझाव एवं कर्ता का आगर सिद्धांत जो कि योग पर सुझाए गये सुझाव के तारतम्य में है सभी अपने आप कोई कठिन नहीं है।

4• उना सिद्धांत पर सुझाए गये बिन्दु B वर्तमान व्यवकलन विधि के तारतम्य में है जिसमें 0 को मानो 10 1 को मानो 11 , 2 को मानो 12, -----7 को मानो 17, 8 को मानो 18, का नियम 10 से बड़ी संख्या में से धटाने का बोझ बढाता प्रतीत होता है।

5• उना सिद्धांत पर सुझाए गये सुझाव B के अतिरिक्त सभी सुझाव व्यवकलन के पूर्व योग के ज्ञान लाभ को विकसित करते हुए 1से 10 तक के योग एवं अन्तर ज्ञान में ही निहित है।

----------03----------

अध्याय -4
उनागर संख्यांकन की संख्या में संकलन की संक्रिया

4-1 उनागर संख्यांकन की संख्या में संकलन को संक्रिया में कर्ता संकेत [$\cdot$] उनागर संख्यांकन की संख्या में संकलन (जोड़ या योग) की संक्रिया में कर्ता संकेत [$\cdot$] का अनुप्रयोग अध्याय 2 के अनुच्छेद 2-3 में पूर्णांको का संकलन (योग करना या जोड़ना) की संक्रिया के संदर्भ में कर्ता संकेत [$\cdot$] की प्रयुक्त स्थिति के शब्दों में यथावत ही है।

साधित उदाहरण■

$4\bar{3}65 + 367\bar{4}$ केलिए

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{3}\ 6\ 5 \\ +\ 3\ \dot{6}\ 7\ \bar{4} \\ \hline 7\ 4\ 3\ 1 \end{array}$$ उत्तर।

उत्तर पद• इकाई स्तम्भ अंक $5 + \bar{4} = 1$ योगफल के इकाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
दहाई स्तम्भ अंक $6 + 7 = 13 > 9$ अतः $367\bar{4}$ के सैकड़ा स्तम्भ के अंक 6 में कर्ता चिन्हित करते हुए 13 के इकाई अंक 3 को योगफल के दहाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
सैकड़ा स्तम्भ अंक $\bar{3} + \dot{6} = \bar{3} + 7 = 4$ को योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
हजार स्तम्भ अंक $4 + 3 = 7$ को योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

$4\bar{2}\bar{5}3 + 63\bar{5}\bar{4}$ केलिए

$$\begin{array}{r} 4\ \bar{2}\ \bar{5}\ 3 \\ +\ \cdot\ 6\ \dot{3}\ \bar{5}\ \bar{4} \\ \hline 1\ 0\ 0\ 0\ \bar{1} \end{array}$$ उत्तर।

उत्तर पद• इकाई स्तम्भ अंक $\mathbf{3 + \bar{4} = \bar{1}}$ योगफल के इकाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
दहाई स्तम्भ अंक $\bar{5} + \bar{5} = \overline{10} < \bar{9}$ अतः के $63\bar{5}\bar{4}$ सैकड़ा स्तम्भ के अंक 3 में कर्ता चिन्हित करते हुए $\overline{10}$ के इकाई अंक 0 को योगफल के दहाई स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
सैकड़ा स्तम्भ अंक $\bar{2} + \dot{3} = \bar{2} + 2 = 0$ को योगफल के सैकड़ा स्तम्भ में दर्शित कीजिए।
हजार स्तम्भ अंक $4 + 6 = 10 > 9$ अतः के $63\bar{5}\bar{4}$ हजार स्तम्भ में कर्ता चिन्हित करते हुए 10 के इकाई अंक 0 को योगफल के हजार स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

दस हजार स्तम्भ अंक इसमें केवल एक मात्र कर्ता ही है अतः कर्ता [$\cdot$] $= 1$ को योगफल के दसहजार स्तम्भ में दर्शित कीजिए।

साधित उदाहरण■

उनागर संख्यांकन में	सामान्य संख्यांकन में जाँच
1■ $545 + \bar{4}45$ के लिये– $\begin{array}{r} 5\ 4\ 5 \\ +\ \bar{4}\ \dot{4}\ 5 \\ \hline 1\ 9\ 0 \end{array}$ उत्तर।	1■ $545 + \bar{4}45 = 545 - 355$ के लिये– $\begin{array}{r} 5\ 4\ 5 \\ -\ \dot{3}\ 5\ 5 \\ \hline 1\ 9\ 0 \end{array}$ उत्तर।
2■ $3\bar{5}4\bar{6} + \bar{2}\bar{5}6\bar{4}$ के लिये– $\begin{array}{r} 3\ \bar{5}\ 4\ \bar{6} \\ +\ \dot{\bar{2}}\ \bar{5}\ \dot{6}\ \bar{4} \\ \hline 0\ 0\ 9\ 0 \end{array}$ उत्तर।	2■ $3\bar{5}4\bar{6} + \bar{2}\bar{5}6\bar{4} = 2534 - 2444$ के लिये– $\begin{array}{r} 2\ 5\ 3\ 4 \\ -\ 2\ \dot{4}\ 4\ 4 \\ \hline 0\ 0\ 9\ 0 \end{array}$ उत्तर।
3■ $6\bar{1}\bar{4}\bar{3}7 + \bar{4}2\bar{5}\bar{8}3$ के लिये– $\begin{array}{r} 6\ \bar{1}\ \bar{4}\ \bar{3}\ 7 \\ +\ \bar{4}\ \dot{2}\ \dot{\bar{5}}\ \dot{\bar{8}}\ 3 \\ \hline 2\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$ उत्तर।	3■ $6\bar{1}\bar{4}\bar{3}7 + \bar{4}2\bar{5}\bar{8}3 = 58577 - 38577$ के लिये– $\begin{array}{r} 5\ 8\ 5\ 7\ 7 \\ -\ 3\ 8\ 5\ 7\ 7 \\ \hline 2\ 0\ 0\ 0\ 0 \end{array}$ उत्तर।
4■ $7\bar{2}\bar{3}65 + 234\bar{5}5$ के लिये– $\begin{array}{r} 7\ \bar{2}\ \bar{3}\ 6\ 5 \\ +\ 2\ 3\ 4\ \dot{\bar{5}}\ 5 \\ \hline 9\ 1\ 1\ 2\ 0 \end{array}$ उत्तर।	4■ $7\bar{2}\bar{3}65 + 234\bar{5}5 = 67765 + 23355$ के लिये– $\begin{array}{r} 6\ 7\ 7\ 6\ 5 \\ +\ \dot{2}\ \dot{3}\ \dot{3}\ \dot{5}\ 5 \\ \hline 9\ 1\ 1\ 2\ 0 \end{array}$ उत्तर।

<table>
<tr>
<td>5■ $4255\bar{2}\bar{5}\bar{6} + 2\bar{6}\bar{4}\bar{2}3\bar{4}\bar{4}$ के लिये–
$\begin{array}{rccccccc} & 4 & 2 & 5 & 5 & \bar{2} & \bar{5} & \bar{6} \\ + & 2 & \bar{6} & \bar{4} & \bar{2} & 3^{\cdot} & \bar{4}^{\cdot} & \bar{4} \\ \hline & 6 & \bar{4} & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ = & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ उत्तर।</td>
<td>5■ $4255\bar{2}\bar{5}\bar{6} + 2\bar{6}\bar{4}\bar{2}3\bar{4}\bar{4} =$
$4254744 + 1358256$ के लिये–
$\begin{array}{rccccccc} & 4 & 2 & 5 & 4 & 7 & 4 & 4 \\ + & 1 & 3^{\cdot} & 5^{\cdot} & 8^{\cdot} & 2^{\cdot} & 5^{\cdot} & 6 \\ \hline & 5 & 6 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ उत्तर।</td>
</tr>
<tr>
<td>6■ $34\bar{3}\bar{4}\bar{2} + 1\bar{3}4\bar{1}\bar{1} + 1\bar{2}3\bar{4}\bar{4} + 22\bar{2}\bar{2}\bar{2} + 71\bar{7}\bar{1}\bar{9}$ के लिये–
$\begin{array}{rcccccc} & & 3 & 4 & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} \\ & & 1 & \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} & \bar{1} \\ & & 1 & \bar{2} & 3 & \bar{4} & \bar{4} \\ + & & 2 & 2 & \bar{2}^{\cdot} & \bar{2} & \bar{2} \\ & \cdot & 7 & 1^{\cdot} & \bar{7} & \bar{1}^{\cdot} & \bar{9} \\ \hline & 1 & 4 & 1 & \bar{4} & \bar{3} & \bar{8} \\ = & 1 & 4 & 0 & 5 & 6 & 2 \end{array}$ उत्तर।</td>
<td>6■ $34\bar{3}\bar{4}\bar{2} + 1\bar{3}4\bar{1}\bar{1} + 1\bar{2}3\bar{4}\bar{4} + 22\bar{2}\bar{2}\bar{2} + 71\bar{7}\bar{1}\bar{9} = 33658 + 06589 + 08256 + 21778 + 70281$
के लिये–
$\begin{array}{rcccccc} & & 3 & 3 & 6 & 5 & 8 \\ & & 0^{\cdot} & 6^{\cdot} & 5^{\cdot} & 8^{\cdot} & 9 \\ & & 0 & 8 & 2^{\cdot} & 5^{\cdot} & 6 \\ + & & 2^{\cdot} & 1^{\cdot} & 7 & 7^{\cdot} & 8 \\ & \cdot & 7 & 0 & 2^{\cdot} & 8 & 1 \\ \hline & 1 & 4 & 0 & 5 & 6 & 2 \end{array}$ उत्तर।</td>
</tr>
</table>

----------04----------

अध्याय -5
उनागर संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया

5-1 उनागर संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया में उना एवं आगर सिद्धांत

अध्याय 3 अनुच्छेद 3-3 और 3-4 में सामान्य संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया की उना सिद्धांत A, B, C और आगर सिद्धांत उनागर संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया में यथा शब्दों में स्वीकार्य है। केवल उना अंकों के 9 पुरनी एवं 10 पुरनी को समझना होगा। तालिका अवलोकित कीजिए।

उना अंक ↔	9 पुरनी	10पुरनी	उनांअंक↔	9 पुरनी	10पुरनी	उनांअंक↔	9 पुरनी	10पुरनी
$\bar{1}$	10	11	$\bar{4}$	13	14	$\bar{7}$	16	17
$\bar{2}$	11	12	$\bar{5}$	14	15	$\bar{8}$	17	18
$\bar{3}$	12	13	$\bar{6}$	15	16	$\bar{9}$	18	19

यहाँ ↔ यह स्पष्ट करता है कि $\bar{1}$ का 9 पुरनी 10 तथा 10 का 9 पुरनी $\bar{1}$ है।

इसी प्रकार $\bar{1}$ का 10 पुरनी 11 तथा 11 का 10 पुरनी $\bar{1}$ है। क्रमशः ....

1■ $9\bar{6}\bar{5}\bar{3} - 54\bar{3}\bar{2}$ का हल व्याख्या 1• उना सिद्धांत A के अनुसार

$$\begin{array}{rcccc} & 9^{\cdot} & \bar{6}^{\cdot} & \bar{5}^{\cdot} & \bar{3} \\ - & 5 & 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \hline & 3 & \bar{1} & 7 & 9 \\ = & 2 & 9 & 7 & 9 \end{array}$$ उत्तर

इकाई प्रखण्ड $a = \bar{3}, b = \bar{2}$ से $a < b$ है इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के दहाई अंक $\bar{5}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b - a = \bar{2} - \bar{3} = 1$ का दस पुरनी 9 उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{5}^{\cdot} = \bar{6}, b = \bar{3}$ से $a < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के सैकड़ा अंक $\bar{6}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b - a^{\cdot} = \bar{3} - \bar{6} = 3$ का दस पुरनी 7 उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{6}^{\cdot} = \bar{7}, b = 4$ से $a^{\cdot} < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के हजार अंक 9 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b - a^{\cdot} = 4 - \bar{7} = 11$ का दस पुरनी $\bar{1}$ उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड. कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = 9^{\cdot} = 8, b = 5$ से $a^{\cdot} > b$ है। $a^{\cdot} - b = 8 - 5 = 3$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

हल व्याख्या 2• उना सिद्धांत B के अनुसार

$$\begin{array}{rcccc} & 9^{\cdot} & \bar{6}^{\cdot} & \bar{5}^{\cdot} & \bar{3} \\ - & 5 & 4 & \bar{3} & \bar{2} \\ \hline & 3 & \bar{1} & 7 & 9 \\ = & 2 & 9 & 7 & 9 \end{array}$$ उत्तर

इकाई प्रखण्ड $a = \bar{3}, b = \bar{2}$ से $a < b$ है इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के दहाई अंक $\bar{5}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। तालिका 2 के अनुसार $(a+10) - b = (\bar{3} + 10) - \bar{2} = 7 - \bar{2} = 9$ उत्तर का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{5}^{\cdot} = \bar{6}, b = \bar{3}$ से $a < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के सैकड़ा अंक $\bar{6}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। तालिका 2 के अनुसार $(a^{\cdot}+10) - b = (\bar{6} + 10) - \bar{3} = 4 - \bar{3} = 7$ उत्तर का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{6}^{\cdot} = \bar{7}, b = 4$ से $a^{\cdot} < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के हजार अंक 9 में कर्ता चिन्हित कीजिए। तालिका 2 के अनुसार $(a^{\cdot}+10) - b = (\bar{7} + 10) - 4 = 3 - 4 = \bar{1}$ सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = 9^{\cdot} = 8, b = 5$ से $a^{\cdot} > b$ है। $a^{\cdot} - b = 8 - 5 = 0$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

हल व्याख्या 3• उना सिद्धांत C के अनुसार

इकाई प्रखण्ड $a = \bar{3}, b = \bar{2}$ से $a < b$ है इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के दहाई अंक $\bar{5}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b = \bar{2}$ का दस पुरनी 12 को $a = \bar{3}$ में जोड़ने से $12 + \bar{3} = 9$ उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

$9^{\cdot}\ \bar{6}^{\cdot}\ \bar{5}^{\cdot}\ \bar{3}$
$-5\ \ 4\ \ \bar{3}\ \ \bar{2}$
$3\ \ \bar{1}\ \ 7\ \ 9$
$=\ 2\ \ 9\ \ 7\ \ 9$ उत्तर

दहाई प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{5}^{\cdot} = \bar{6}$, $b = \bar{3}$ से $a < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के सैकड़ा अंक $\bar{6}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b = \bar{3}$ का दस पुरनी 13 को $a^{\cdot} = \bar{6}$ में जोड़ने से $13+\bar{6}$ =7 उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = \bar{6}^{\cdot} = \bar{7}$, $b = 4$ से $a^{\cdot} < b$ है। इसलिए $9\bar{6}\bar{5}\bar{3}$ के हजार अंक 9 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b = 4$ का दस पुरनी 6 को $a^{\cdot} = \bar{7}$ में जोड़ने से $6+\bar{7} = \bar{1}$ उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड कर्ता चिन्हित $a^{\cdot} = 9^{\cdot} = 8$, $b = 5$ से $a^{\cdot} > b$ है। $a^{\cdot} - b = 8 - 5 = 3$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

हल व्याख्या 4• आगर सिद्धांत के अनुसार

$9\ \ \bar{6}\ \ \bar{5}\ \ \bar{3}$
$-5^{\cdot}\ \ 4^{\cdot}\ \ \bar{3}^{\cdot}\ \ \bar{2}$
$3\ \ \bar{1}\ \ 7\ \ 9$
$=\ 2\ \ 9\ \ 7\ \ 9$ उत्तर

इकाई प्रखण्ड $a = \bar{3}$, $b = \bar{2}$ से $a < b$ है। इसलिए $54\bar{3}\bar{2}$ के दहाई अंक $\bar{3}$ में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b = \bar{2}$ का दस पुरनी 12 को $a = \bar{3}$ में जोड़ने से $12+\bar{3} = 9$ उत्तर पद का इकाई प्रखण्ड अंक होगा।

दहाई प्रखण्ड $a = \bar{5}$, कर्ता चिन्हित $b^{\cdot} = \bar{3}^{\cdot} = \bar{2}$ से $a < b^{\cdot}$ है। इसलिए $54\bar{3}\bar{2}$ के सैकड़ा अंक 4 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b^{\cdot} = \bar{2}$ का दस पुरनी 12 को $a = \bar{5}$ में जोड़ने से $12+\bar{5} = 7$ उत्तर पद का दहाई प्रखण्ड अंक होगा।

सैकड़ा प्रखण्ड $a = \bar{6}$, कर्ता चिन्हित $b^{\cdot} = 4^{\cdot} = 5$ से $a < b^{\cdot}$ है। इसलिए $54\bar{3}\bar{2}$ के हजार अंक 5 में कर्ता चिन्हित कीजिए। $b^{\cdot} = 5$ का दस पुरनी 5 को $a = \bar{6}$ में जोड़ने से $5+\bar{6} = \bar{1}$ उत्तर पद का सैकड़ा प्रखण्ड अंक होगा।

हजार प्रखण्ड $a = 9$, $b^{\cdot} = 5^{\cdot} = 6$ से $a > b^{\cdot}$ **है।** $a - b^{\cdot} = 9 - 6 = 3$ उत्तर पद का हजार प्रखण्ड अंक होगा।

5-2 उनागर संख्यांकन की संख्या में व्यवकलन (घटाना) की संक्रिया में योज्य प्रतिलोम का योग नियम

इस नियम में (संख्या X − संख्या Y)के लिए −

प्रक्रम 1 संख्या Y का योज्य प्रतिलोम = [संख्या $\bar{Y}$] को संख्या Y समस्त अंको का योज्य प्रतिलोम से प्राप्त संख्या लीजिए।

प्रक्रम 2 उनागर संख्या के योग नियमानुसार संख्या X में प्रक्रम 1 से प्राप्त संख्या Y का योज्य प्रतिलोम संख्या कायोग कीजिए। यह प्राप्त योगफल ही उनागर संख्यांकन में ;(संख्या X − संख्या Y) का उत्तर होगा।

सरल शब्दों में (संख्या X − संख्या Y) के लिए संख्या Y के स्थानीय अंको का चिन्हान्तरण (+ का −) एवं (− का +) अर्थात b को $\bar{b}$ एवं $\bar{b}$ को b करने से प्राप्त संख्या (संख्या Y का यो. प्रतिलोम. संख्या $\bar{Y}$ होगा) को संख्या X में अध्याय 4 में दिये उनागर संख्यांकन की संख्या में संकलन (जोड़ या योग) की संक्रिया के अनुसार संकलित या योग कीजिए। अध्याय 1 में दिये उनागर योग तालिका x+y =y+x का लाभ लाजिए।

संख्या X −संख्या Y

प्रश्न	व्यवकलन का उना सिद्धांत	व्यवकलन का आगर सिद्धांत	योज्य प्रतिलोम योग नियम
1■	$30181-\bar{1}\bar{2}345$ के लिए $3\ 0\ 1\ 8^{\cdot}\ 1$ $-\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ 4\ 5$ $4\ 2\ 4\ 3\ 6$ उत्तर।	$30181-\bar{1}\bar{2}345$ के लिए $3\ 0\ 1\ 8\ 1$ $-\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{3}\ 4^{\cdot}\ 5$ $4\ 2\ 4\ 3\ 6$ उत्तर।	$30181-\bar{1}\bar{2}345$ के लिए $3\ 0\ 1\ 8\ 1$ $+\ 1\ 2\ 3\ \bar{4}^{\cdot}\ \bar{5}$ $4\ 2\ 4\ 4\ \bar{4} = 4\,2\,4\,3\,6$ उत्तर।
2■	$5453\bar{4} - 3\bar{5}5\bar{5}7$ के लिए $5\ 4\ 5^{\cdot}\ 3\ \bar{4}$ $-\ 3\ \bar{5}\ \bar{5}\ 5\ \bar{7}$ $2\ 9\ 9\ 8\ 3$	$5453\bar{4} - 3\bar{5}5\bar{5}7$ के लिए $5\ 4\ 5\ 3\ \bar{4}$ $-\ 3\ \bar{5}\ \bar{5}^{\cdot}\ 5\ \bar{7}$ $2\ 9\ 9\ 8\ 3$	$5453\bar{4} - 3\bar{5}5\bar{5}7$ के लिए $5\ 4\ 5\ 3\ \bar{4}$ $+\ \bar{3}^{\cdot}\ 5^{\cdot}\ 5\ \bar{5}\ 7$ $3\ 0\ 0\ \bar{2}\ 3 = 2\,9\,9\,8\,3$
3■	$30\bar{7}4\bar{2} - 2\bar{1}3\bar{3}5$ के लिए $3\ 0^{\cdot}\ \bar{7}^{\cdot}\ 4^{\cdot}\ \bar{2}$ $-\ 2\ \bar{1}\ 3\ \bar{3}\ 5$ $1\ 0\ 5\ 2\ 3$ उत्तर।	$30\bar{7}4\bar{2} - 2\bar{1}3\bar{3}5$ के लिए $3\ 0\ \bar{7}\ 4\ \bar{2}$ $-\ 2\ \bar{1}^{\cdot}\ \bar{3}^{\cdot}\ 3\ 5$	$30\bar{7}4\bar{2} - 2\bar{1}3\bar{3}5$ के लिए $3\ 0\ \bar{7}\ 4\ \bar{2}$ $+\ \bar{2}\ 1\ \bar{3}\ 3\ \bar{5}$ $1\ 1\ \bar{4}\ 7\ \bar{7} = 1\,0\,5\,2\,3$ उत्तर।

		1 0 5 2 3 उत्तर।	
4■	$9\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9} - 7\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\ \bar{7}$ के लिए $9\ \bar{9}\cdot\ \bar{9}\cdot\ \bar{9}\cdot\ \bar{9}\cdot\ \bar{9}\cdot\ \bar{9}$ $-7\ \bar{7}\ \bar{7}\ \bar{7}\ \bar{7}\ \bar{7}\ \bar{7}$ $1\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 8$ उत्तर।	$9\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9} - 7\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\ \bar{7}$ के लिए $9\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}$ $-\ 7\ \bar{7}\cdot\ \bar{7}\cdot\ \bar{7}\cdot\ \bar{7}\cdot\ \bar{7}\cdot\ \bar{7}$ $1\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 8$ उत्तर।	$9\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9}\bar{9} - 7\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\bar{7}\ \bar{7}$ के लिए $9\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}\ \bar{9}$ $+\ \bar{7}\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7$ $2\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}\ \bar{2}$ $= 1777778$ उत्तर।

----------05----------

अध्याय -6

तालिका(पहाड़ा) की रचना

6-1 1(एक) के पहाड़ा द्वारा 2, 3, 4,-- - - - - का पहाड़ा विस्तार गणित विषय अध्ययन प्रारंभ के साथ से अब तक अंकगणित में निपुणता का प्रतीक पहाड़ा के कंठस्थ होने को माना जाता है। पहाड़ा कंठस्थ करने के लिए छोटे–छोटे बच्चे रटने की प्रवृत्ति के शिकार हो रहे हैं। जिसके परिणाम स्वरूप सभी कलाओं ,विज्ञानों एवं विधाओं की सोलह श्रृंगारों की रानी मानी जाने वाली यह गणित विधा का अध्ययन शुष्क विषय की परिधि में जकड़ सा गया है। शुष्कता की इस परिधि से बाहर निकलने के लिए गणित की कार्यशाला योजना अन्तर्गत अध्ययन अध्यापन की व्यवस्था होनी चाहिए। इसी तारतम्य में पहाड़ा को रटने की अपेक्षा पहाड़ा बनाने की ओर बच्चों को केन्द्रित किया जा सकता है।

1 से 5 तक की पहाड़ा बनाने की कार्ययोजना चार्ट

पहाड़ा→ पहाड़ा रचना ↓	शून्यम्	एकम्	दूनी	तिया	चौक	पंचे	छक्के	सत्ते	अट्ठे	निया	दहाम्	ज्ञात होने का पूर्व ज्ञान
1 का पहाड़ा→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	गिनती का पठन
+1 का पहाड़ा→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
=2, का पहाड़ा→	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	पहाड़ा1+पहाड़ा1
+1 का पहाड़ा→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
=3 का पहाड़ा→	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	प.2+ प.1
+1 का पहाड़ा→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
=4 का पहाड़ा→	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	प.3+ प.1
या 2 का पहाड़ा→	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
+2 का पहाड़ा→	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
=4 का पहाड़ा→	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	प-2+ प.2
+1 का पहाड़ा→	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
=5 का पहाड़ा→	0	5	10	15	16	25	30	35	40	45	50	प.4+ प-1
या 2 का पहाड़ा→	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	
+3 का पहाड़ा→	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	
=5 का पहाड़ा→	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	प.2+ प.3

इसी प्रकार 6 के पहाड़े के लिए (प-1 + प-5) / (प.-2.+ प.-4.)/ (प.-3.+ प.-3.)

7 के पहाड़े के लिए (प-1 + प-6) / (प- 2 + प.-5.)/)(प.-3.+ प.-4.)

8 के पहाड़े के लिए (प-1 + प-7) / (प- 2. + प.-6.)/ (प.-4.+ प.-4.)

9 के पहाड़े के लिए (प-1 + प-8) /(प.-2.+ प.-7.) / (प.-3.+ प.-6.)/(प.-4.+ प.-5.) की योग संक्रिया के द्वारा पैकेट बोर्ड के साधन से पूर्वाध्ययन (योग की संक्रिया)का अभ्यास मय कार्यरूप देकर आत्मसात कराया सकता है। आपके स्थान परिवेश एवं उपलब्ध साधन के अनुसार कार्य योजना और भी नवीनता लिए सरल बोधगम्य हो सकता है।

10 के पहाड़े के लिए (प.1 + प.9) / (प.2 + प-8)/ (प.3 +प 7)/(प.4 +प 6)/(प.5 +प 5) की योग संक्रिया की विवेचना कर यह आत्मसात कराया जा सकता है कि 1 के पहाड़े में दाँयी ओर 10 का 0 बढ़ाने मात्र से 10 का पहाड़ा बन जाता है। इसी प्रकार 2 के पहाड़े में दाँयी ओर 20 का 0 बढ़ाने मात्र से 20 का पहाड़ा , 3 के पहाड़े में दाँयी ओर 30 का 0 बढ़ाने मात्र से 30 का पहाड़ा -------------------------------90 के पहाड़े में दाँयी ओर 90 का 0 बढ़ाने मात्र से 90 का पहाड़ा , 100 के पहाड़े में दाँयी ओर 100 का 00 बढ़ाने मात्र से 100 का पहाड़ा, ...बनाने बच्चे स्वमेव अग्रंसर होंगे।

6- 2 संख्या के अंकों का स्थानीय मान अन्तराष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति मे x अंकीय संख्या के दाँयी से बाँयी ओर स्थित r वें स्थान पर स्थित अंक d_r का स्थानीय मान घातांकी संकेतन अनुप्रयोग मे $d_r * 10^{r-1}$ होगा। जो सरलता से अंक d_r के दाँयी ओर $(r-1)$ स्थान तक शून्य बढ़ाने से प्राप्त होगा।

जैसे 6532 **के प्रति– इकाई अंक** 2 का स्थानीय मान = $d_r * 10^{r-1} = 2 * 10^{1-1} = 2 * 10^0 = 2 * 1 = 2$

दहाई अंक 3 का स्थानीय मान = $d_r * 10^{r-1} = 3 * 10^{2-1} = 3 * 10^1 = 3 * 10 = 30$

सैकड़ा अंक 5 का स्थानीय मान = $d_r * 10^{r-1} = 5 * 10^{3-1} = 5 * 10^2 = 5 * 100 = 500$

हजार अंक 6 का स्थानीय मान = $d_r * 10^{r-1} = 6 * 10^{4-1} = 6 * 10^4 = 6 * 1000 = 6000$

6-3 संख्या–प्रसार किसी संख्या को उनके अंकों के स्थानीय मानों को क्षैतिज योग के प्रतिरूपण में दर्शित करना उस संख्या का संख्या–प्रसार कहलाता है। **जैसे** संख्या 6532 का संख्या–प्रसार = 6000+500+30+2

संख्या 55555 का संख्या–प्रसार = 50000+5000+500+50+5

संख्या $8889=1\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$ का संख्या–प्रसार = $10000+\bar{1}000+\bar{1}00+\bar{1}0+\bar{1}$

संख्या $9887=10\,\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{3}$ का संख्या–प्रसार = $10000+0000+\bar{1}00+\bar{1}0+\bar{3}$

6-4 किसी n अंकीय संख्या के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में संख्या–प्रसार का अनुप्रयोग किसी संख्या के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में संख्या–प्रसार का अनुप्रयोग दो या दो से अधिक अंकीय संख्यों का पहाड़ा (तालिका) विस्तार सिद्धांत का प्रतिपादन ही है। जिसके अनुसार– किसी संख्या के संख्या–प्रसार में r वाँ पद=$d_r * 10^{r-1}$ का पहाड़ा विस्तार के लिए अंक d_r के पहाड़ा विस्तार के दाँयी ओर (r-1) स्थान तक दर्शित करने का नियम है। उक्त नियम के अनुसार संख्या–प्रसार के प्रत्येक पदों का पहाड़ा विस्तार का योग मान ही अभीष्ट संख्या का पहाडा विस्तार होगा।

जैसे 16 का पहाड़ा विस्तार– 16=10+6 द्वारा– 16 एकम् 10+6 =16, 16 दूनी 20+12 =32 , 16 तिया 30+18 =48 , 16 चौक 40+24 =64, 16 पंचे 50+30 =80, -------------- विस्तारित करें।

$19=2\bar{1}$ का पहाड़ा विस्तार– $2\bar{1}=20+\bar{1}$ द्वारा– 19 एकम् $20+\bar{1}$ =19, 19 दूनी $40+\bar{2}$ =38 , 19 तिया $60+\bar{3}$ =57 , 19 चौक $80+\bar{4}$ =76, 19 पंचे $100+\bar{5}$ =95, -------------- विस्तारित करें।

43 का पहाड़ा विस्तार– 43=40+3 द्वारा– 43 एकम् 40+3 =43, 43 दूनी 80+6 =86 , 43 तिया 120+9 =129 , 43 चौक 160+12=172, 43 पंचे 200+15=215, -------------- विस्तारित करें।

$89=1\bar{1}\bar{1}$ का पहाड़ा विस्तार– $1\bar{1}\bar{1}=100+\bar{1}0+\bar{1}$ द्वारा– 89 एकम् $100+\bar{1}0+\bar{1}$ =89, 89 दूनी $200+\bar{2}0+\bar{2}$ =178, 89 तिया $300+\bar{3}0+\bar{3}$ =267, 89 चौक $400+\bar{4}0+\bar{4}$ =356, 89 पंचे $500+\bar{5}0+\bar{5}$ =545, -------------- विस्तारित करें ।

संक्षेप में– उक्त अनुच्छेद विस्तार को संक्षेप करने के क्रम में–

प्रक्रम 1 जिस n अंकीय संख्या का पहाड़ा (तालिका) विस्तार करना है, उसके प्रत्येक अंक को खण्डशः दर्शित कीजिए– यथा 16 का 1\6 , **89**=$1\bar{1}\bar{1}$ **का** $1\backslash\bar{1}\backslash\bar{1}$, 215 **का** 2\1\5

प्रक्रम 2 प्रत्येक खण्ड के अंकों का पहाड़ा विस्तार करे । जिनमें से nवें खण्ड के पहाड़ा विस्तार को यथावत तथा शेष खण्ड के विस्तार मे इकाई अंक को यथावत दर्शित कर शेष अंकों से बनी संख्या को इस इकाई अंक के बाँयी ओर नीचे बतौर हासिल दर्ज करे। नियमानुसार सरल कर अभीष्ट पहाड़ा विस्तार प्राप्त करे।

यथा 16=1\6 के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में 16 एकम् 1\6=16, 16 दूनी $2\backslash_1 2$=32 , 16 तिया $3\backslash_1 8$ =48, 16 चौक $4\backslash_2 4$=64 , 16 पंचे $5\backslash_3 0$ =80, 16 छक्के $6\backslash_3 6$=96 , 16 सत्ते $7\backslash_4 2$=112 , 16 अठ्ठे $8\backslash_4 8$=128 , 16 निया $9\backslash_5 4$=144, 16 दहाम् $10\backslash_6 0$=160

43=4\3 के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में 43 एकम् 4\3, =43, 43 दूनी 8\6=86 , 43 तिया 12\9=129 , 43 चौक $16\backslash_1 2$, =172, 43 पंचे $20\backslash_1 5$=215 , 43 छक्के $24\backslash_1 8$=258 , 43 सत्ते $28\backslash_2 1$=301 , 43 अठ्ठे $32\backslash_2 4$=344 , 43 निया $36\backslash_2 7$ =387,43 दहाम् $40\backslash_3 0$ =430

$89=1\bar{1}\bar{1}$ $=1\backslash\bar{1}\backslash\bar{1}$ के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में 89 एकम् $1\backslash\bar{1}\backslash\bar{1}=1\bar{1}\bar{1}$ = 89 ,89 दूनी $2\backslash\bar{2}\backslash\bar{2}$ =178, 89 तिया $3\backslash\bar{3}\backslash\bar{3}$=267 , 89 चौक $4\backslash\bar{4}\backslash\bar{4}$ = 356 , 89 पंचे $5\backslash\bar{5}\backslash\bar{5}$ =445, 89 छक्के $6\backslash\bar{6}\backslash\bar{6}$, =534, 89 सत्ते $7\backslash\bar{7}\backslash\bar{7}$ =623, 89 अठ्ठे $8\backslash\bar{8}\backslash\bar{8}$ =712, 89 निया $9\backslash\bar{9}\backslash\bar{9}$=801, 89 दहाम् $10\backslash\bar{1}\,0\backslash\bar{1}\,0$ =$9\bar{1}0$

517=5\1\7 के पहाड़ा (तालिका) विस्तार में 517 एकम् 5\1\7, =517, 517 दूनी 10\2\$_1$4 =1034 , 517 तिया 15\3\$_2$1=1551 , 517 चौक 20\4\$_2$8 , =2068, 517 पंचे 25\5\$_3$5=2585 , 517 छक्के 30\6\$_4$2=3102 , 517 सत्ते 35\7\$_4$9=3619 , 517 अठ्ठे 40\8\$_5$6=4136 , 517 निया 45\9\$_6$3 =4653, 517 दहाम् 50\$_{10}$0\$_7$0 =5170

6-5 पहाड़ा (तालिका) की रचना हेतू चाबी(कुची) या प्रचालक एवं उनका अनुप्रयोग सामान्य संख्यांकन [01,2,3,4,5,6,7,8,9] की संख्या को मूलतः उनागर संख्यांकन अंक [$\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1}$, 0,1,2,3,4,5] में दर्शित संख्या को खण्डशः दर्शित करने से प्राप्त अंक पहाड़ा विस्तार के प्रति यथा संगत खण्डों का चाबी(कुची) या प्रचालक कहलाते है। जिनका पहाड़ा (तालिका) की रचना में अनुप्रयोग किया जाता है। इसके लिए सामान्य अंकन की संख्या को उस संख्या के प्रति एकम् का पहाड़ा होगा। बाद दूनी, तिया, चौक का पहाड़ा विस्तार में पूर्व क्रम के पहाड़ा के खण्डशः प्राप्त अंक में संगत कुची का योग कर करते जाते हैं। प्राप्त क्रम की उनागर संख्या को सामान्य संख्यांकन की संख्यांकन में दर्शित करें। और अभीष्ट पहाड़ा विस्तार का प्रगति करें। इस विधि के अनुप्रयोग से पहाड़ा या तालिका रचना में आत्मसाती होने असहजता का भाव प्रतीत होने वाले कठिनतर संख्याओं [9, 19, 29, 39, 49 ---------] का पहाड़ा या तालिका रचना सहज ही खेल–खेल में की ऊँचाई दर ऊचाई प्राप्त कर सकेंगे ।

उदाहरण ■ 9 की तालिका (पहाड़ा) रचना– $9 = 1\bar{1}$ से दहाई प्रचालक 1 इकाई प्रचालक $\bar{1}$

9 की बीसम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

नव एकम्	$1/\bar{1} = 0/9 = 9$	नव ग्यारम्	$9+1/0-1 = 10\bar{1} = 99$
नव दूनी	$0+1/9-1 = 18$	नव बारम्	$9+1/9-1 = 108$
नव तिया	$1+1/8-1 = 27$	नव तेरम्	$10+1/8-1 = 117$
नव चौक	$2+1/7-1 = 36$	नव चौदम्	$11+1/7-1 = 126$
नव पंचे	$3+1/6-1 = 45$	नव पंद्रम्	$12+1/6-1 = 135$
नव छक्के	$4+1/5-1 = 54$	नव सोलम्	$13+1/5-1 = 144$
नव सत्ते	$5+1/4-1 = 63$	नव सत्रम्	$14+1/4-1 = 153$
नव अठ्ठे	$6+1/3-1 = 72$	नव अठ्ठारम्	$15+1/3-1 = 162$
नव निया	$7+1/2-1 = 81$	नव उन्नीसम्	$16+1/2-1 = 171$
नव दहाम	$8+1/1-1 = 90$	नव बीसम्	$17+1/1-1 = 180$

19, 29, 39 की दहाम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

$19 = 2\bar{1}$ से द..प्र.=2, इ.प्र.= $\bar{1}$.		$29 = 3\bar{1}$ से द..प्र.=3, इ.प्र–= $\bar{1}$.	$39 = 4\bar{1}$ से दप्र=4, इ.प्र. = $\bar{1}$.
एकम्	$2\bar{1} = 19$	$3\bar{1} = 29$	$4\bar{1} = 39$
दूनी	$1+2/9-1 = 38$	$2+3/9-1 = 58$	$3+4/9-1 = 78$
तिया	$3+2/8-1 = 57$	$5+3/8-1 = 87$	$7+4/8-1 = 117$
चौक	$5+2/7-1 = 76$	$8+3/7-1 = 116$	$1/1+4/7-1 = 156$
पंचे	$7+2/6-1 = 95$	$1/1+3/6-1 = 145$	$1/5+4/6-1 = 195$
छक्के	$9+2/5-1 = 114$	$1/4+3/5-1 = 174$	$1/9+4/5-1 = 1/_1 3/4 = 234$
सत्ते	$1/1+2/4-1 = 133$	$1/7+3/4-1 = 203$	$2/3+4/4-1 = 273$
अठ्ठे	$1/3+2/3-1 = 152$	$2/0+3/3-1 = 232$	$2/7+4/3-1 = 2/_1 1/2 = 312$
निया	$1/5+2/2-1 = 171$	$2/3+3/2-1 = 261$	$3/1+4@2-1 = 351$
दहाम्	$1/7+2/1-1 = 190$	$2/6+3/1-1 = 290$	$3/5+4/1-1 = 390$

49, 59 की दहाम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

	$49 = 5\bar{1}$ से द.प्र-=5 , इ.प्र = $\bar{1}$.	$59 = 1\bar{4}\bar{1}$ से स.प्र. =1 द.प्र-=$\bar{4}$, इ.प्र = $\bar{1}$.
एकम्	$5\bar{1}$ = 49	$1\bar{4}\bar{1}$ = 59
दूनी	0/4+5/9-1 = 98	0+1/5-4/9-1 = 118
तिया	0/9+5/8-1 = $0/_{1}4/7$ = 147	1+1/1-4/8-1 = $2/\bar{3}/7$ = 177
चौक	1 / 4+5/7-1 = 196	1+1 / 7-4/7-1 = 236
पंचे	1/9+5/6-1 = $1/_{1}4/5$ = 245	2+1/3-4/6-1 = $3/\bar{1}/5$ = 295
छक्के	2 / 4+5/5-1 = 294	2 +1/ 9-4/5-1 = 354
सत्ते	2/9+5/4 -1 = $2/_{1}4/5$ = 343	3+1/5-4/4 -1 = 413
अठ्ठे	3 / 4+5/3-1 = 392	4+1 / 1-4/3-1 = $5/\bar{3}/2$ = 472
निया	3/9+5/2 -1 = $3/_{1}4/1$ = 441	4+1/7-4/2 -1 = = 531
दहाम्	4 / 4+5/1-1 = 392	5+1 / 3-4/1-1 = $6/\bar{1}/0$ = 590

69, 79 की दहाम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

	$69 = 1\bar{3}\bar{1}$ स.प्र. =1,द.प्र-=$\bar{3}$, इ.प्र = $\bar{1}$.	$79 = 1\bar{2}\bar{1}$ स.प्र. =1, द.प्र-=$\bar{2}$, इ.प्र = $\bar{1}$.
एकम्	$1\bar{3}\bar{1}$ = 69	$1\bar{2}\bar{1}$ = 79
दूनी	0+1/6-3/9-1 = 138	0+1/7-2/9-1 = 158
तिया	1+1/3-3/8-1 = 207	1+1/5-2/8-1 = 237
चौक	2 +1/ 0-3/7-1 = $3\bar{3}6$ = 276	2+1 / 3-2/7-1 = 316
पंचे	2+1/7-3/6-1 = 345	3+1/1-2/6-1 = $4\bar{1}5$ = 395
छक्के	3+1 / 4-3/5-1 = 414	3 +1/ 9-2/5-1 = 474
सत्ते	4+1/1-3/4 -1 = $5\bar{2}3$ = 483	4+1/7-2/4 -1 = 553
` अठ्ठे	4+1/8-3/3 -1 = 552	5+1/5-2/3-1 = 632
निया	5+1/5-3/2 -1 = 621	6+1/3-2/2 -1 = 711
दहाम्	6+1 / 2-3/1-1 = $7\bar{1}0$ = 690	7+1 / 1-2/1-1 = $8\bar{1}0$ = 790

89, 99 की दहाम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

	$89 = 1\bar{1}\bar{1}$ स.प्र. =1, द.प्र- =$\bar{1}$, इ.प्र = $\bar{1}$	$99 = 10\bar{1}$ स.प्र. =1, द.प्र-=0, इ.प्र = $\bar{1}$
एकम्	$1\bar{1}\bar{1}$ = 89	$10\bar{1}$ = 99
दूनी	0+1/8-1/9-1 = 178	0+1/9/9-1 = 198
तिया	1+1/7-1/8-1 = 267	1+1/9/8-1 = 297
चौक	2 +1/ 6-1/7-1 = 356	2+1 / 9/7-1 = 396
पंचे	3+1/5-1/6-1 = 445	3+1/9/6-1 = 495
छक्के	4+1 / 4-1/5-1 = 534	4 +1/ 9/5-1 = 594
सत्ते	5+1/3-1/4 -1 = 623	5+1/9/4 -1 = 693
अठ्ठे	6+1 / 2-1/3-1 = 712	6+1 / 9/3-1 = 792
निया	7+1/1-1/2 -1 = 801	7+1/9/2 -1 = 891

दहाम्	8+1 / 0-1/1-1 =9$\bar{1}$0 = 890	8+1 / 9/1-1 = 990

8889, 9999 की दहाम् तक तालिका (पहाड़ा) रचना

8889 = 1$\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$1 से द.ह.प्र =1, ह. प्र. = $\bar{1}$, सै.प्र-=$\bar{1}$, द.प्र-=$\bar{1}$, इ.प्र = $\bar{1}$-		9999 = 1000$\bar{1}$ से द.ह.प्र =1, ह. प्र. = 0, सै.प्र-=0, द.प्र- =$\bar{1}$, इ.प्र = $\bar{1}$-
एकम्	1$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$1 = 8889	1000$\bar{1}$ = 9999
दूनी	0+1/8-1/8-1/8-1/9-1 = 17778	0+1/9/9/9/9-1 = 19998
तिया	1+1/7-1/7-1/7-1/8-1 = 26667	1+1/9/9/9/8-1 = 29997
चौक	2+1/6-1/6-1/6-1/7-1 = 35556	2+1/9/9/9/7-1 = 39996
पंचे	3+1/5-1/5-1/5-1/6-1 = 44445	3+1/9/9/9/6-1 = 49995
छक्के	4+1/4-1/4-1/4-1/5-1 = 53334	4+1/9/9/9/5-1 = 59994
सत्ते	5+1/3-1/3-1/3-1/4-1 = 62223	5+1/9/9/9/4-1 = 69993
अठ्ठे	6+1/2-1/2-1/2-1/3-1 = 71112	6+1/9/9/9/3-1 = 79992
निया	7+1/1-1/1-1/1-1/2-1 = 80001	7+1/9/9/9/2-1 = 89991
दहाम्	8+1/0-1/0-1/-1/1-1 = 9$\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ 0 = 89990	8+1/9/9/9/1-1 = 99990

9 का एकम् से दहाम् तक पहाड़ा रचना का रंग भरने/चिन्हाँकित करने का खेल –

1 9	2 8	3 7	4 6	5 5	6 4	7 3	8 2	9 1	रंग भरे डब्बों की संख्या	खाली डब्बों की संख्या	रंगभ्रे एवं खाली डब्बों के अवलोकन से रचित पहाड़ा
									0	9	9 एकम् 0 9 = 9
#									1	8	9 दूनी 1 8
#	#								2	7	9 तिया 27
#	#	#							3	6	9 चौक 36
#	#	#	#						4	5	9 पंचे 45
#	#	#	#	#					5	4	9 छक्के 54
#	#	#	#	#	#				6	3	9 सत्ते 63
#	#	#	#	#	#	#			7	2	9 अठ्ठे 72
#	#	#	#	#	#	#	#		8	1	9 निया 81
#	#	#	#	#	#	#	#	#	9	0	9 दहाम् 90

विवेचना इस प्रकार अभ्यास करने से बच्चों में स्वमेव जिज्ञासा विकसित होगी। जिसके फलस्वरूप बिना बीच की संक्रिया दर्शाये कठिन प्रतीत होने वाले संख्याओं की तालिका रचना देखते ही देखते सरल लगने लगेंगे। इससे बच्चों में तर्क शक्ति भी विकसित होगी, जो की गणित अध्ययन का मूल उद्देश्यो में निहित है। बच्चे रटने–रटाने के लिए नहीं अपितु सीखने –सिखाने की ओर अग्रसर होंगे।

----------06----------

अध्याय-7
गुणा की संक्रिया

7-1 गुणन संक्रिया हमारे पूर्वज किसी वस्तु ,नाम, जाति विशेष की तादात (मात्रा) के संग्रह या वितरण की कुल मात्रा को जब एक संख्या दर के समूहमान इकाई पर एक–एक समूह मान का क्रमशः योग करके संकलन करते थे। जैसे– किसान अपने अनाज उत्पादन की कुल मात्रा के रास† को काठा –काठा‡ नापकर 20 काठे माप पूरा होने पर 1मुट्ठी अनाज का कुढ़ या सरा⧗ रखते या रखवाते थे। यह सरा भी प्रत्येक 20 काठा के पूरा होने पर विशेष पंक्ति/स्तम्भ दर (सामान्यत 5 सरे के एक पंकित/स्तम्भ) पर होता है। मुद्रा के रूप में सिक्कों (कौडी, 1पइसा, 2पइसा 3पइसा ,1आना, 2आना, 4आना 8आना एवं 1रूपया) का ही चलन था । तब संग्रहित कुल धन राशि का हिसाब करने 5_5 या 10_10 सिक्कों का ऊँचाई बनाकर करते थे। इसी प्रकार सब्जी बाजार में आज भी कुंजडे सब्जियों का ढेरी या जूरी { पेड़ पौधे के पत्ते तनों के छिलके से बंधा छोटा बंडल जो दोनों हाथों में से किसी भी हाथ के अंगुष्ठ और अंगूठे के शीर्ष को मिलाने से बने परिधि को माना गया है(वर्तमान परिदृश्य मे कोई निर्धारण नहीं है) ,बैंकिंग व्यवस्था में 100_100 नोटों की गड्डी, 10_10 गड्डियों का एक पेक और 10_10 पेक का एक डब्बा पेक बनाकर रखते है। इसी तारतम्य में हमारे विद्यालय में शाला प्रवेश उत्सव समारोह में कक्षा पहली के 5 नव प्रवेशी छात्र/छात्रा को 2-2 किताब वितरित किया गया। कुल वितरण की संख्या निम्नानुसार क्रमित योग तालिका अवलोकित कीजिए।

1 छात्र/छात्रा को→ 2 किताब के लिए --2 1 बार संकलित है।

2 छात्र/छात्रा को→ 2+2 = 4 किताब के लिए------------------------------------ 2 2 बार संकलित है।

3 छात्र/छात्रा को→ 2+2+2 = 6 किताब के लिए---------------------------------2 3 बार संकलित है।

4 छात्र/छात्रा को→ 2+2+2+2 = 8 किताब के लिए-----------------------------2 4 बार संकलित है।

5 छात्र/ छात्रा को→ 2+2+2+2+2= 10 किताब के लिए---------------------- 2 5 बार संकलित है।

इसी प्रकार नव प्रवेशी छात्र/ छात्रा छात्र के बढ़ते दर्ज क्रम में 2 को संकलित करने में 2 की संकलन (योग) माला में 2 की बारंबारता क्रम बढ़ता जायेगा। गणित अध्ययन में योगमाला के बढ़ते क्रम योग(+)की बारंबारता गुण को गुणन संक्रिया या गुणा की संक्रिया कहते है।

गुणा की संक्रिया संकेतन सामान्य गणित अध्ययन में संक्रियाओं के संकेतन की उत्पत्ति दर्शनΨ के अनुसार इस गुणा की संक्रिया संकेतन (×) चुना गया है।

गुणा की संक्रिया संकेतन के अनुप्रयोग से तालिका का स्वरूप

1 छात्र/छात्रा को → 2 × 1 = 2 किताब

2 छात्र/छात्रा को → 2 × 2 = 4 किताब

3 छात्र/छात्रा को → 2 × 3 = 6 किताब

4 छात्र/छात्रा को → 2 × 4 = 8 किताब

† **रास** छत्तीसगढ़ में खलिहान (कोठार या ब्यारा) अनाजों के मिंजाई उपरांत रखे अनाज के ढ़ेरी को **रास** कहते है।

‡ **काठा** अनाज मापने का काठ (लकड़ी) का बना घनाम पात्र जिसका अन्तः माप लम्बा,' चौड़ा 'ऊँचाई = 6.0 इंच * 6.0 इंच * 8.0 इंच =288.000 घनइंच आयतन का होता है। जो वर्तमान में विलुप्त सा हो गया है। विकल्प में पीतल/लोह धातु का बेलनाकार पात्र का उपयोग होने लगा जिसका अन्तः ब्यास 7.4 इंच ओर ऊँचाई 6.7 इंच से अन्तः माप π * (त्रिज्या)^2 * ऊँचाई =3.142857*(3.7)^2*6.7 = 288.272272611 घनइंच=288 घनइंच आयतन का होता है। यह भी विलुप्त होने की ओर है। इन दोनो पात्रों की मानक धारिता माप पूरा सिग भरे जाने पर 9 पौण्ड=9*4.53.6 =4.0824=4.000 किलोग्राम वजन माप का चाँवल माना गया है।

⧗ **कुढ या सरा** †के अनुसार बने रास को अनाज के ढ़ेर को मापने छोटे इकाई माप से बड़े इकाई माप के 1 इकाई माप पूरा होने के याददाश्त बनाए रखने की अनाज का मुठ्ठी भर रखे अनाज को **कुढ़** या सराकहते है।।

Ψ अध्याय 15 अनुच्छेद 15-4 शीर्षक **संक्रियाओं के संकेतन की उत्पत्ति दर्शन** का अध्ययन कीजिए।

5 छात्र/छात्रा को $\rightarrow 2 \times 5 = 10$ किताब

इसी प्रकार m छात्र/छात्रा को $\rightarrow 2 \times m = 2m$ किताब वितरित किया गया। $2 \times m = 2m$ में 2 के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर $a \times m = am = C$ अर्थात्–

a+a+a+-----------------m बार $= a \times m = C$ होगा।

7-2 **$a \times m = C$ के अवयव के नाम** $a \times m = C$ में **1•** बराबर संकेत = के बाँये पक्ष में गुणन संक्रिया संकेतन [$\times$] के बाँयी ओर स्थित a को गुण्य (जिसको गुणा करना है।), **2•** गुणन संक्रिया संकेतन [$\times$] दाँयी ओर स्थित m को गुणक (गुण्य a को जितना गुणा करना है उसका मान) तथा **3•** बराबर संकेत = के दाँये पक्ष में स्थित C को गुणनफल(गुण्यं को गुणक से गुणा करने पर प्राप्त हल मान) कहते हैं।

गुणनसंक्रिया की विधियाँ गुण्य एवं गुणक के अंकों को ध्यान दिये जाने पर गुणन संक्रिया की तार्किक एवं गतिशील विधियों की एक श्रृंखला प्राप्त किया जा सकता है। जिसमें चार विधियाँ **1•** गोमूत्री विधि, **2•** उनागर विधि, **3•** घुचांक विधि एवं **4•** उर्ध्व–तिर्यक विधि प्रमुख है।

1■ गोमूत्री विधि आधुनिक प्रचलन में गुणन संक्रियाँ विधि का नाम गोमूत्री विधि है। इस विधि में ज्यों–ज्यों गुण्य एवं गुणक में अंकों की स्थान संख्या बढ़ता जाता है त्यों–त्यों संक्रिया पद पंक्ति और स्तम्भ बढ़ता जाता है।जिसकी तुलना चलती हुई गौकुल के प्राणियों के मूत्र त्याग का जमीन में हुए फैलाव से किया जाकर गोमूत्री नाम दिया गया है।

2■ उनागर विधि श्री श्री1008 श्री जगतगुरू स्वामी तीर्थराज जी महराज ने अपनी कृति वैदिक गणित में देवभाषा संस्कृत के शब्दों ,वाक्यांशो एव वाक्यो में सम्पूर्ण गणित अध्ययन के लिए 16 सूत्र एवं 13 उपसूत्र सुझाए है। इन्ही सूत्रों में निहित सूत्र एकाधिकेणपूर्वेण और एकन्यूनपूर्वेण को हिन्दी भाषा गणित अध्ययन अध्याय संख्या रेखा‡ के अन्तर्गत क्रमशः परवर्ती एवं पूर्ववर्ती बताया है। छत्तीसगढ़ी भाषा–बोली के बोल–चाल में क्रमशः आगर और उना शब्द है। जिसे उना + आगर = उनागर का अनुप्रयोग गुणन संक्रिया में करने को उनागर विधि कहते हैं।

3■ घुचांक विधि उनागर विधि के विस्तार में किसी संख्या विशेष से गुण्य एवं गुणक की संख्या रेखा अध्ययन के अनुसार मान्य आधार से दर्शित दूरी को घुचांक या घुचनमान कहते है। गुणन संक्रिया में इसके अनुप्रयोग को घुचांकविधि कहते हैं।

4■ खड़े–तिरछा या उर्ध्व–तिर्यक विधि गोमूत्री विधि के विकल्प में व्यापक और एक पंक्ति विधि है। इस विधि में गुण्य और गुणक के अंकों में केवल उर्ध्व या खड़ा , $\updownarrow$ केवल तिर्यक या तिरछा अथवा उर्ध्व तिर्यक दोनों सम्बंध स्थापित कर गुणन संक्रिया सम्पन्न किया जाता है। गुणन संक्रिया में ऐसे अनुप्रयोग को उर्ध्व तिर्यक विधि कहते हैं।

गुणन संक्रिया प्रारम्भ पूर्व याद रखे –1■ उना और आगर संख्या का गुणनफल उनागर संख्या अध्ययन में स्पष्ट किया जा चुका है कि जिन संख्याओं के सभी अंक उना अंकन $[0\ \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}]$ में दर्शित हो उन्हें संख्या सामान्य अध्ययन में ऋणात्मक संख्या और जिन संख्याओं के सभी अंक आगर अंकन $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$ में दर्शित हो उन्हे धनात्मक संख्या कहते है। गुणन संक्रिया में –घुचांक उना आगर दोंनो स्वरूपों में प्राप्त हो सकते है। तब धनात्मक अंक/संख्या के लिए $(+)$ और ऋणात्मक अंक/संख्या के लिए $(-)$ चिन्हमान से **1•** $(+) * (+) = (+)$ **2•** $(+) * (-) = (-)$ **3•** $(-) * (+) = (-)$ **4•** $(-) * (-) = (+)$ होगा। अर्थात समान चिन्हों $(+,+)$ अथवा $(-,-)$ का गुणनफल $(+)$ तथा असमान चिन्हों $(+,-)$ अथवा $(-,+)$ का गुणनफल $(-)$ होगा।

‡‡ गणित अध्ययन में संख्या रेखा एक विशिष्ट अध्ययन का अध्याय है।इस प्रसंग में केवल धन एवं ऋण पूर्णांकों का संख्या रेखा प्रदर्शन से है। जो निम्नानुसार है। **धन एवं ऋण पूर्णांकों का संख्या रेखा**

$$\bar{W} ■ ■ ■ ■ ■ \overline{11}, \overline{10}, \bar{9}, \bar{8}, \bar{7}, \bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, 0\ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ■ ■ ■ ■ ■ W$$

← ऋण पूर्णांकों की संख्या रेखा दिशा ←[मूल बिन्दु 0(शून्य) से]→ धन पूर्णांकों की संख्या रेखा दिशा→

संख्या रेखा में स्थित किसी संख्या ˙ के पूर्व बाँयी ओर स्थित संख्या b, a से उना मान तथा संख्या ˙ के बाद दाँयी ओर स्थित संख्या c, a से आगर मान के होंगे। जैसे संख्या 5 के पूर्व बाँयी ओर स्थित संख्या $\overline{10}$ 5 से 15 उना मान का होगा तथा संख्या 5 के बाद दाँयी ओर स्थित संख्या 10, 5 से 5आगर मान के होंगे।

अध्ययन क्षेत्र आधुनिक प्रचलन की गोमूत्री विधि से आप सब परिचित हैं अतः इस विधि की पुनः विस्तारित अध्ययन की आवश्यकता नहीं है। शेष विधियों एवं उनके विस्तार क्षेत्र को गोमूत्री विधि से तुलनात्मक भाव से विस्तारित अध्ययन में लिया गया है। आगे के अध्याय क्रम मे गुणन संक्रिया के नवीन प्रवेश में घुचांक विधि का विस्तारित अध्ययन प्रस्तुत है।

2■ .क्रम अदला बदली (क्रम विनिमय)का नियम गुणन संक्रिया में गुण्य और गुणक का अदलाबदली(गुण्य को गुणक के स्थान पर तथा गुणक को गुण्य के स्थान पर प्रतिस्थापन करना) से गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् $A*B = B*A \quad 4*5 = 5*4$

3■ साथ चलने (साहचर्य)का नियम गुणन संक्रिया में प्रस्तुत तीन संख्याएँ A,B एवं C में से किन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल को गुण्य अथवा गुणक मानकर तीसरी सख्या को संगत गुणक अथवा गुण्य मानकर तीनों संख्या A,B एवं C के प्राप्त गुणनफल में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् $(A*B)*C = A*(B*C) = B*(C*A) = (B*C)*A = (C*B)*A = C*(B*A)$

$$4*5*7 = (4*5)*7 = 4*(5*7) = 5*(7*4) = (5*7)*4 = (7*5)*4 = 7*(5*4)$$

----------07----------

अध्याय -8
गुणन संक्रिया में घुचांक विधि का विस्तारित अध्ययन

किसी विशेष बिन्दु ,आधार परिस्थिति से अन्तर या दूरी बनना–बनाना अथवा कोणीय दिशा परिवर्तित करना उस बिन्दु आधार परिस्थिति से घुचना या घुचाना है। **जैसे** बीच सड़क पर चलते व्यक्ति का बस को आते देख बीच सड़क से दूरी बनाकर किनारे पर चलना।किसी प्रकाश किरण का विरल माध्यम से सघन माध्यम में कोणीय दिशा परिवर्तित होना। संख्या रेखा में $\bar{5}$ को संख्या रेखा में मूल बिन्दु 0 (शून्य) के बाँयी ओर 5 इकाई दूरी पर तथा 11 को मूल बिन्दु 0 (शून्य) के दाँयी ओर 11 इकाई दूरी पर दर्शित है। अतः मूल बिन्दु 0(शून्य)के सापेक्ष $\bar{5}$ का घुचांक $\bar{5}$ और 11 धुचांक 11 इकाई होगा।

8-1 गुण्य एवं गुणक के सापेक्ष आधार संख्या चयन संख्यांकन पद्धति के आधारमिति विश्लेशण के अनुसार प्रचलित अन्तराष्ट्रीय संख्यांकन पद्धति का दर्जा प्राप्त हिन्दू अरेबिक भारतीय संख्यांकन पद्धति दशाधारी है। जिसके तहत् यदि किसी संख्या का कोई अंक (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 में से कोई एक होगा।) बाँये दाँये (इकाई से दहाई, सैकड़ा, हजार............की ओर) n वें क्रम पर स्थित है तों उस अंक स्थानीय मान अंक का 10^{n-1} गुणा होता है। अतः गुण्य एवं गुणक के सापेक्ष निकटतर आधार संख्या 10^x/(10^x का r गुणा) /(का r वाँ भाग) में से कोई सुविधानुसार चयन किया जाना चाहिए।

मूलाधार और उपाधार 10^x के रूप मे चयनित आधार मूलाधार तथा (10^xका r गुणा) एवं (10^xका r वाँ भाग) के रूप में चयनित आधार उपाधार कहलाता है। अर्थात् $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$, — — — — — — मूलाधार के रूप में प्रयुक्त होगा। 10 के गुणांक 20, 30 , 40----- । 100 के गुणांक 200, 300 , 400----। 1000 के गुणांक 2000, 3000 , 4000-----। 10000 के गुणांक 20000, 30000 , 40000.....— — — — — — एवं 100 का दूसरा , चौथा और पाँचवाँ भाग क्रमशः 50, 25 और 20 । 1000 का दूसरा , चौथा और पाँचवाँ भाग क्रमशः 500, 250 और 200। 10000 का दूसरा ,चौथा और पाँचवाँ भाग क्रमशः 5000 2500, और 2000 । 100000 का दूसरा , चौथा और पाँचवाँ भाग क्रमशः 50000 25000, और 20000। — — — — — उपाधार के रूप में प्रयुक्त होगा।

8-2 आधार के सापेक्ष ऋणात्मक एवं धनात्मक घुचांक संख्या W का आधार F के सापेक्ष घुचांक = W – F होगा। अतः यदि संख्या W गुण्य/गुणक के लिए प्रयुक्त हो तो (W < F) से गुण्य/ गुणक का आधार के सापेक्ष घुचांक मान उना (ऋणात्मक) तथा (W > F) से गुण्य/ गुणक का आधार के सापेक्ष घुचांक मान आगर (धनात्मक) परिभाषित होगा।

गुणा के संदर्भ में घुचांक में अंकों की स्थान संख्या

1• **मूलाधार के सापेक्ष प्राप्त घुचांक में** मूलाधार में स्थित 0 (शून्य) की स्थान संख्या के बराबर सुनिश्चित करें।

2• **उपाधार के सापेक्ष प्राप्त घुचांक में** चयनित उपाधार जिस मूलाधार के गुणांक अथवा भाागांश रूप में चयन किया गया है उस मूलाधार में स्थित 0 (शून्य) की स्थान संख्या के बराबर सुनिश्चित करें। घुचांक में उपरोक्त नियमानुसार 0 (शून्य) की स्थान संख्या सुनिश्चित करने के लिए आवश्यकतानुसार बाँयी ओर शून्य बढ़ाये।

घुचांक प्राप्त करना

1• **उना(ऋणात्मक) घुचांक प्राप्त करना** संख्या W का आधार F के सापेक्ष घुचांक = W – F = – (F–W) को हल करने के लिए अध्याय 3 के अनुच्छेद 3-4 का अनुप्रयोग कीजिए।

2• **आगर (धनात्मक) घुचांक प्राप्त करना** कर्ता मुक्त सरल व्यवकलन नियम का अनुप्रयोग कर सरलता से प्राप्त कीजिए। उदाहरण तालिका अवलोकित कीजिए।

मूलाधार के लिए			उपाधार के लिए			
संख्या	उपयुक्त मूलाधार	घुचांक	संख्या	उपयुक्त उपाधार	उपाधार के प्रति मूलाधार	घुचांक
8	10	$\bar{2}$	24	20	10	4
14	10	4	39	40	10	$\bar{1}$
93	100	$0\bar{7}$	46	40	10	6
112	100	12	46	50	10/100	$\bar{4}/0\bar{4}$

889	1000	$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$	197	200	100/1000	$0\bar{3}$ /$00\bar{3}$
993	1000	$00\bar{7}$	226	250	100/1000	06/006
1009	1000	009	444	500	100/1000	$0\bar{6}$/$00\bar{6}$
1111	1000	111	503	500	100/1000	03/003
9998	10000	$000\bar{2}$	1993	2000	1000/10000	$00\bar{7}$/$000\bar{7}$
10015	10000	0015	2102	2000	1000/10000	102/0102
99999	100000	$0000\bar{1}$	4999	5000	1000/10000	$00\bar{1}$/$000\bar{1}$
100013	100000	00013	5015	5000	1000/10000	015/0015

8-3 गुणन संक्रिया घुचांक विधि

[A] जब गुण्य और गुणक में कोई एक या दोनों चयनित आधार के निकटतर संख्या हो

प्रक्रम1 गुण्य और गुणक के निकटतर एक ही मूलाधार संख्या का चयन कीजिए।

प्रक्रम2 चयनित मूलाधार संख्या से गुण्य और गुणक का घुचांक प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम3 गुणन संक्रिया दर्शित करने के लिए प्रथम पंक्ति में गुण्य और उसका धुचांक तथा द्वितीय पंक्ति में गुणक और उसका धुचांक दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 4 गुणनफल के दो अनुभाग होंगे।

1■ दाँया अनुभाग इस अनुभाग में घुचांको का गुणनफल प्राप्त कीजिए। इस गुणनफल का इकाई, दहाई ....क्रम स्थान उतने ही स्थान की संख्या ले जितने चयनित मूलाधार में 0 (शून्य) की स्थान संख्या है।इसके लिए आवश्यकतानुसार स्थानपूर्ति नियम से गुणनफल के बाँयी ओर 0(शून्य) बढ़ाये। तत्पश्चात् शेष उच्च स्थान से बनी संख्या को द्वितीय बाँयें अनुभाग में जोड़ने हेतू बतौर हासिल दर्शित करें।

2■ बाँया अनुभाग इस अनुभाग में (गुण्य + गुणक का घुचांक) **अथवा** (गुणक + गुण्य का घुचांक) **अथवा** {(गुण्य+गुणक)–चयनित आधार} से प्राप्त हल और दायें अनुभाग से प्राप्त हासिल का योग मान दर्शित कीजिए।

प्रक्रम5 अभीष्ट गुणनफल प्रक्रम 4 से प्राप्त बाँया अनुभाग में दर्शित हासिल को छोडने और दोनो अनुभाग के मध्य विभाजन रेखा को हटाने से प्राप्त संख्या अभीष्ट गुणनफल होगा।

टीप– दाँया अनुभाग में घुचांक का स्वरूप अलग–अलग {आगर(+) और उना(–)} अथवा {उना (–)और आगर(+)}हो तो प्रक्रम 5 से प्राप्त अभीष्ट गुणनफल उनागर संख्याकन पद्धति पर प्राप्त होगा। जिसे नियमानुसार प्रचलित सामान्य संख्यांकन पद्धति में प्राप्त कीजिए।

बीज गणितीय प्रमाण माना कि गुण्य =A और गुणक = B के लिए निकटतर मूलाधार k है।

तब k से Aका घुचांक = A–k= R से A= k+R तथा k से B का घुचांक = B– k = S से B= k +S

$\therefore A * B = (k+R)*(k+S) = k^2 + kR + kS + RS =$

$= k(k+R+S) + R*S$ को $A*B$ आधारमिति के अनुसार K आधारी संख्यांकन में दर्शित करने पर – $A*B = (k+R)*(k+S) = [\underline{k+R+S}\ \ \underline{R*S}]_K$

=k+R+S\R*S बाँया –दाँया पक्ष विभाजन से जहाँ मूलाधार $k = 10^x$ के प्रति

हल का दाँया अनुभाग= $R*S$ = (गुण्य का घुचांक)* (गुणक का घुचांक) का गुणनफल x अंकीय होगा। यह प्रक्रम 4 के दाँया अनुभाग हल में घुचाकों के गुणनफल दर्शित है। अतः गुणनफल दाँया अनुभाग प्रमाणित ।

हल का बाँया अनुभाग = $K+R+S = (K+R)+S = A+S =$ (गुण्य + गुणक का घुचांक)

अथवा

हल का बाँया अनुभाग= $K+R+S = (K+S)+R = B+R =$ (गुणक+गुण्य का घुचांक)

अथवा

हल का बाँया अनुभाग= $K+R+S = (K+R)+(K+S) - K = (A+B) - K$ = (गुणक. गुण्य) – आधार

यह सब प्रक्रम 4 के बाँया अनुभाग हल में हल का बाँया अनुभाग=(गुण्य + गुणक का घुचांक) **अथवा** (गुणक + गुण्य का घुचांक)

अथवा

{(गुण्य+गुणक)–चयनित आधार} से प्राप्त हल दर्शित है । अतः हल का बाँया अनुभाग प्रमाणित।

उदाहरण 1■ हल व्याख्या प्रक्रम

गुण्य 12 और गुणक 13 का गुणनफल गणना 12 2 13 3 15 / 6 =156 अभीष्ट गुणनफल

प्रक्रम1 गुण्य और गुणक के निकटतर आधार =10

प्रक्रम2 आधार 10 से गुण्य 12 का घुचांक =12–10 =2 और गुणक 13 का घुचांक =13–10 =3 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम3 गुणन संक्रिया दर्शित करने के लिए प्रथम पंक्ति में गुण्य और उसका घुचांक सहित 12 2 तथा द्वितीय पंक्ति में गुणक और उसका घुचांक 13 3 दर्शित है

प्रक्रम 4 गुणनफल के दो अनुभाग

1■ **दाँया अनुभाग** इस अनुभाग में घुचांको का गुणनफल = 2*3 = 6 होगा। चयनित आधार 10 में 0 (शून्य) की स्थान संख्या एक है। अतः गुणनफल 6 ही दर्ज है।

2■ **बाँया अनुभाग** इस अनुभाग में (गुण्य + गुणक का घुचांक) = 12 + 3 =15

अथवा (गुणक + गुण्य का घुचांक) = 13 + 2 =15

अथवा {(गुण्य+गुणक)–चयनित आधार} = { (12+13) – 10} = 25 – 10 = 15 दर्ज है।

प्रक्रम 5 अभीष्ट गुणनफल प्राप्त करने प्रक्रम 4 का अनुभाग बंधन नियमानुसार हटाने पर –

अभीष्ट गुणनफल =156 प्राप्त है।

उदाहरण 2■

गुण्य 173 और गुणक 103 का गुणनफल गणना 173 73 10 3 03 176 +2/ $_2$19 = 17819 अभीष्ट गुणनफल

हल व्याख्या प्रक्रम

प्रक्रम1 गुण्य और गुणक के निकटतर आधार =100

प्रक्रम2 आधार 100 से गुण्य 173 का घुचांक =173–100 =73 और गुणक103 का घुचांक =103–100 =03 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम3 गुणन संक्रिया दर्शित करने के लिए प्रथम पंक्ति में गुण्य और उसका घुचांक सहित 173 73 तथा द्वितीय पंक्ति में गुणक और उसका घुचांक 103 03 दर्शित है ।

प्रक्रम4 गुणनफल के दो अनुभाग

1■ **दाँया अनुभाग** इस अनुभाग में घुचांको का गुणनफल = 73* 03 = 219। चयनित आधार 100 में 0 (शून्य) की स्थान संख्या दो है। अतः गुणनफल का इकाई एव दहाई अंको से बनी संख्या 19 ही दर्ज कर गुणनफल सैकड़ा अंक 2 को बतौर हासिल 19 के बाँयी ओर नीचे छोटे अक्षर में यथा $_2$19 दर्ज किया है ।

2■ **बाँया अनुभाग** इस अनुभाग में (गुण्य + गुणक का घुचांक) = 173 + 03 =176

अथवा (गुणक + गुण्य का घुचांक) = 103 + 73 = 176

अथवा {(गुण्य+गुणक)–चयनित आधार} = { (173+103) – 100} =276– 100 = 176 में दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल 2 का योग करने 176 +2 =178 दर्ज है।

प्रक्रम5 अभीष्ट गुणनफल प्राप्त करने प्रक्रम 4 का अनुभाग बंधन नियमानुसार हटाने पर–

अभीष्ट गुणनफल =17819 प्राप्त है। साधित उदाहरण अवलोकित कीजिए।

1■ गुण्य 17 और गुणक 14 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 10 से 17 7 14 4 21+2/$_2$8 = 238 अभीष्ट गुणनफल	2■ गुण्य 12 और गुणक 9 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 10 से 12 2 9 $\bar{1}$ 11/$\bar{2}$ = 11$\bar{2}$ = 108 अभीष्ट गुणनफल	3■ गुण्य 7 और गुणक 18 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 10 से 7 $\bar{3}$ 18 8 15+$\bar{2}$/$\bar{2}\bar{4}$ = 13$\bar{4}$ =126 अभीष्ट गुणनफल
4■ गुण्य 8 और गुणक 9 का गुणनफल गणना – प्रयुक्त आधार 10 से– 8 $\bar{2}$ 9 $\bar{1}$	■5 गुण्य 103 और गुणक115 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 100 से– 103 03 115 15	गुण्य 105 और गुणक 187 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 100 से– 105 05 187 87

7 / 2 = 72 अभीष्ट गुणनफल	118 / 45 = 11845 अ. गु.	192+4 / $_4$35 = 19635 अ. गु.
7■ गुण्य 121 और गुणक 97 का गुणनफल गणना –प्रयुक्त आधार 100 से 121 21 97 $\overline{03}$ 118/$\overline{63}$ =11737 अभीष्ट गुणनफल	8■ गुण्य 163 और गुणक 98 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 100 से 163 63 98 0$\overline{2}$ 161+$\overline{1}$/ $_{\overline{1}}$ $\overline{2}$6 = 160/$\tilde{2}\tilde{6}$ = 15974 अभीष्ट गुणनफल	9■ गुण्य 93 और गुणक 89 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 100 से 93 0$\overline{7}$ 89 $\overline{1}\overline{1}$ 82 / 77= 8277 अभीष्ट गुणनफल
10■ गुण्य 95 और गुणक 59 का गुणनफल गणना –प्रयुक्त आधार100 से– 95 0$\overline{5}$ 5 9 $\overline{41}$ 54+2 / $_2$05 =5605 अभीष्ट गुणनफल	11■ गुण्य 115 और गुणक 113 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 100 से– 115 15 5 113 13 3 128 +1 / $_1$9 / $_1$5 =12995 अभीष्ट गुणनफल	12■ गुण्य 1005 और गुणक 1007 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 1000 से 1005 005 1007 007 1012/035= 1012035 अभीष्ट गुणनफल
13■ गुण्य 997 और गुणक 887 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 1000 से 997 00$\overline{3}$ 887 0$\overline{1}\overline{3}$ 884 / 039 =884039 अभीष्ट गुणनफल	14■ गुण्य 885 और गुणक 1015 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 1000 से 885 0$\overline{1}\overline{5}$ 1015 015 1000 /$\overline{2}\overline{2}\overline{5}$ =1000 $\overline{2}\overline{2}\overline{5}$ = 999775 अभीष्ट गुणनफल	15■ गुण्य 1025 और गुणक 997 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 1000 से 1025 025 997 00$\overline{3}$ 1022 / 0$\overline{7}\overline{5}$ =10220 $\overline{7}\overline{5}$ = 1021925 अभीष्ट गुणनफल
16■ गुण्य 10015 और गुणक 100008 का गुणनफल गणना – प्रयुक्त आधार 10000 से 10015 0015 10008 0008 10023 / 0120 =10023 0120 अभीष्ट गुणनफल	17■ गुण्य 9993 और गुणक 8889 का गुणनफल गणना– प्रयुक्त आधार 10000 से 9993 000$\overline{7}$ 8889 $\overline{1}\overline{1}\overline{1}\overline{1}$ 8882 / 7777 =88827777 अभीष्ट गुणनफल	18■ गुण्य 10234 और गुणक 9998 का गुणनफल गणना–प्रयुक्त आधार 10000 से 10234 0234 9998 000$\overline{2}$ 10232/0$\overline{4}\overline{6}\overline{8}$ = 102320$\overline{4}\overline{6}\overline{8}$ = 102319532 अभीष्ट गुणनफल

[B] जब गुण्य और गुणक दोनों चयनित आधार के लिए उपयुक्त हो लेकिन निकटतर संख्या न हो जब गुण्य और गुणक दोनों चयनित आधार के लिए उपयुक्त है लेकिन निकटतर संख्या नहीं है तो घुचांक अवश्य बड़ी संख्या होगी,जिनका गुणनफल प्रात करना सामान्यतः आसान नहीं होगा। क्योकि बढ़ता धुचांक स्वयं एक नया प्रश्न बनता है। इस स्थिति पर घुचांको का आधार और घुचांक प्राप्त करने का क्रम एक अंकीय घुचांक प्राप्त होने तक रखे । तब चयनित आधार 10^n के सापेक्ष गुण्य एवं गुणक के घुचांको का गुणनफल प्राप्त करने आधार 10^m चयनित हो तो अतिरिक्त प्रश्न पद के m पद होंगे तथा अभीष्ट गुणनफल (m+2) पदों में प्राप्त होगा। जिसमे बाँये प्रथम पद को छोड़कर अंतिम m पदों में इकाई अंक दर्ज कर शेष अंको से बनी संख्या को बतौर हासिल दर्ज कर बाँयी ओर अगले उच्च पद की संख्या में योग करे।

टीप 1• गुण्य एवं गुणक का घुचांक आगर अथवा उना संख्यांकन का हो घुचांकों की गुणन संक्रिया प्रष्न पद विस्तार आगर संख्यांकन में होगा।

2• दोनों घुचांक के अलग–अलग संख्यांकन आगर (धनात्मक) उना (ऋणात्मक) की होने पर गुणनफल का इकाई , दहाई सैकड़ा ....की ओर (m+1) स्थान तक के अंक उना (ऋणात्मक) संख्याकन में दर्ज होंगे। लेकिन शेष अंको से बनी संख्या बतौर हासिल m स्थान

(अतिरिक्त प्रष्नपद के m पद) तक आगर (धनात्मक) मे ही तथा केवल (m+1) स्थान (घुचांक पद स्थान) उना में दर्ज होगा।

उदाहरण 1■ हल व्याख्या प्रक्रम• बढ़ता प्रश्न क्रम नियमानुसार प्राप्त घुचांक 117और 115 का गुणनफल प्राप्त करना स्वयं एक प्रश्न बनता है। जिसके हल के लिए आधार 100 से प्राप्त घुचांक 17और 15 का गुणनफल प्राप्त करना भी स्वयं एक प्रश्न बनता है। जिसके हल के लिए आधार 10 से प्राप्त घुचांक 7 और 5 प्राप्त कर हल आगे हल प्रक्रम बिन्दुवार प्रस्तुत है। गणना क्रम दाँयी से बाँयी ओर →

प्रक्रम 1 $7 * 5 = 35$ से गुणनफल का इकाई अंक 5 तथा हासिल 3 लिखा $_{3}5$

1■ गुण्य 1117 और गुणक 1115 का गुणनफल गणना–

आधार 1000 से–

1117	117	17	7
1115	115	15	5

1245/$_{13}$4 / $_{2}$5 / $_{3}$5

=1245455 अभीष्ट गुणनफल

प्रक्रम 2 $(17 + 5 = 22)$ अथवा $(15 + 7 = 22)$ में प्रक्रम 1 से प्राप्त हसिल 3 का योग करने पर 22+3 =25 गुणनफल का दहाई अंक 5 तथा हासिल 2 लिखा $_{2}5$

प्रक्रम 3 $(117 + 15 = 132)$ अथवा $(115 + 17 = 132)$ में प्रक्रम 2 से प्राप्त हसिल 2 का योग करने पर 132+2 =134 गुणनफल का सैकड़ा अंक 4 तथा हासिल 13 लिखा $_{13}4$

प्रक्रम 4 $(\mathbf{11}17 + 115 = 1232)$ अथवा $(1115 + 17 = 1232)$ में प्रक्रम 3 से प्राप्त हसिल 13 का योग करने पर 1232+13 =1245 को गुणनफल का हजारवें स्थान पर लिखा।

प्रक्रम5 अभीष्ट गुणनफल =1245455 होगा।

बढ़ता प्रश्न क्रम

2■ गुण्य 888887 और गुणक 888884 का गुणनफल गणना–

आधार 100000 से–

888887	$\overline{111113}$	11113	1113	113	13	3
888884	$\overline{111116}$	11116	1116	116	16	6

790117 / $_{12346}$4/ $_{1235}$3/ $_{124}$2/ $_{13}$1 / $_{2}$0 / $_{1}$8

=790117432108 अभीष्ट गुणनफल

हल व्याख्या प्रक्रम•

नियमानुसार प्राप्त घुचांक $\overline{111113}$ और $\overline{111116}$ दोनों का गुणनफल प्राप्त करना स्वयं प्रश्न बनता है। जिसके हल के लिए प्रश्न पद विस्तार–

11113	1113	113	13	3	
11116	1116	116	16	6	के रूप में 5 पदों में है।

गणना क्रम दाँयी से बाँयी ओर →

प्रक्रम1 $3 * 6 = 18$ से गुणनफल का इकाई अंक 8 तथा हासिल 1 लिखा $_{1}8$

प्रक्रम2 $(13 + 6 = 19)$ अथवा $(16 + 3 = 19)$ में प्रक्रम 1 से प्राप्त हसिल 1 का योग करने पर 19+1 =20 से गुणनफल का दहाई अंक 0 तथा हासिल 2 लिखा $_{2}0$

प्रक्रम3 $(\mathbf{1}13 + 16 = 129)$ अथवा $(116 + 13 = 129)$ में प्रक्रम 2 से प्राप्त हसिल 2 का योग करने पर 129+2 =131 से गुणनफल का सैकड़ा अंक 1 तथा हासिल 13 लिखा $_{13}1$

प्रक्रम4 $(\mathbf{11}13 + 116 = 1229)$ अथवा $(1116 + 113 = 1229)$ में प्रक्रम 3 से प्राप्त हसिल 13 का योग करने पर 1229+13 =1242 से गुणनफल का हजारवाँ अंक 2 तथा हासिल 124 लिखा $_{124}2$

प्रक्रम5 $(\mathbf{111}13 + 1116 = 12229)$ अथवा $(11116 + 1113 = 12229)$ में प्रक्रम 4 से प्राप्त हसिल 124 का योग करने पर 12229+124 =12353 से गुणनफल का दसहजारवाँ अंक 3 तथा हासिल 1235 लिखा $_{1235}3$ ।

प्रक्रम6 $(\mathbf{1111}13 + 11116 = 122229)$ अथवा $(111116 + 11113 = 122229)$ में प्रक्रम 5 से प्राप्त हसिल 1235 का योग करने पर 122229+1235 =123464 से गुणनफल का लाखवाँ अंक 4 तथा हासिल 12346 लिखा $_{12346}4$ ।

प्रक्रम7 $(888887 + \overline{111116} = 777771)$ अथवा $(888884 + \overline{111113} = 777771)$ में प्रक्रम 6 से प्राप्त हसिल 12346 का योग करने पर 777771+12346 =790117 को गुणनफल का दसलाखवाँ स्थान पर लिखा।

प्रक्रम8 अभीष्ट गुणनफल =790117432108 होगा।

हल व्याख्या प्रक्रम•

बढ़ता प्रश्न क्रम नियमानुसार प्राप्त घुचांक 11113 और $\overline{11115}$ का गुणनफल प्राप्त करना स्वयं एक प्रश्न बनता है। जिसके हल के लिए प्रश्न पद विस्तार–

3■ गुण्य 111113 और गुणक 88885 का गुणनफल गणना–
आधार 100000 से–

111113	11113	1113	113	13	3
88885	$\overline{11115}$	1115	115	15	5
98763 /	$\bar{1}\overline{235}\ \bar{2}$ /	$_{124}0$ /	$_{12}\bar{9}$ /	$_{1}\bar{9}$ /	$_{1}\bar{5}$

$=98763\bar{2}0\overline{995}$ $= 9876279005$ अभीष्ट गुणनफल

11113	1113	113	13	3
$\overline{11115}$	1115	115	15	5

के रूप में 5पदों में है।

टीप दोनों घुचांक अलग–अलग संख्यांकन आगर (धनात्मक) उना (ऋणात्मक)की है अतः गुणनफल का इकाई , दहाई सैकड़ा .... की ओर 5 स्थान तक के अंक उना (ऋणात्मक) संख्याकन में होंगे।

गणना क्रम दाँयी से बाँयी ओर →

प्रक्रम1 $3 * 5 = 15$ से गुणनफल का इकाई अंक $\bar{5}$ तथा हासिल 1 लिखा $_{1}\bar{5}$

प्रक्रम2 $(13 + 5 = 18)$ अथवा $(15 + 3 = 18)$ में प्रक्रम 1 से प्राप्त हसिल 1 का योग करने पर 18+1 =19 से गुणनफल का दहाई अंक $\bar{9}$ तथा हासिल 1 लिखा $_{1}\bar{9}$

प्रक्रम3 $(\mathbf{1}13 + 15 = 128)$ अथवा $(115 + 13 = 128)$ में प्रक्रम 2 से प्राप्त हसिल 1 का योग करने पर 128+1 =129 से गुणनफल का सैकड़ा अंक $\bar{9}$ तथा हासिल 12 लिखा $_{12}\bar{9}$

प्रक्रम4 $(\mathbf{11}13 + 115 = 1228)$ अथवा $(1115 + 113 = 1228)$ में प्रक्रम 3 से प्राप्त हसिल 12 का योग करने पर 1228+12 =1240 से गुणनफल का हजारवाँ अंक 0 तथा हासिल 124 लिखा $_{124}0$

प्रक्रम5 $(11113 + 1115 = 12228)$ अथवा $(11115 + 1113 = 12228)$ में प्रक्रम 4 से प्राप्त हसिल 124 का योग करने पर 12228+124 =12352 से गुणनफल का दसहजारवाँ अंक $\bar{2}$ तथा हासिल 1235 लिखा $_{1235}3$ ।

प्रक्रम 6 $(111113 - 11115 = 99998)$ अथवा $(88885 + 1113 = 99998)$ में प्रक्रम 5 से प्राप्त हसिल $\overline{1235}$ का योग करने पर 99998+$\overline{1235}$ =98763 को गुणनफल का लाखवाँ स्थान पर लिखा।

प्रक्रम 7 अभीष्ट गुणनफल $=98763\bar{2}0\overline{995}$ $= 9876279005$ होगा।

विवेचना इस विधि में गुणन संक्रिया की सरलता तभी है जब गुण्य और गुणक के घुचांकों में किसी एक का घुचांक मूलतः एक अंकीय अवश्य हो।बड़े मानों के गुण्य–गुणकों के लिए सरल है। धुचांको के बढ़ते मानों में घुचांको का गुणनफल प्राप्त करना स्वमेव प्रश्न बन जाता है। इस ओर अनुच्छेद 8-3 B में हल सुझाया गया है। सीमाबद्ध है। इस प्रकार यह विधि कभी सरल तो कभी कठिन प्रतीत होता है। गणित अध्ययन का एक उद्देश्य तार्किक ज्ञान को विकसित करने की ओर कड़ी अवश्य है। आगे अध्ययनों में ऐसी कठिनता को सरल करने स्वतः प्रेरित होंगे।

8-4 उपाधार चयन कर गुणनफल प्राप्त करना इस विधि द्वारा उपाधार के निकटतर गुण्य–गुणक का गुणनफल ज्ञात करना सरल होता है। गुणन संक्रिया प्रक्रम निम्नानुसार है।

प्रक्रम1 उपयुक्त उपाधार और मूलाधार चुनिए।

प्रक्रम2 उपाधार : मूलाधार† = R‡ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम3 गुणन संक्रिया दर्शित करने के लिए प्रथम पंक्ति में गुण्य और उसका उपाधार से धुचांक तथा द्वितीय पंक्ति में गुणक और उसका उपाधार से धुचांक दर्शित कीजिए।

प्रक्रम4 गुणफल के दो अनुभाग होंगे।

1■ **दाँया अनुभाग** इस अनुभाग में घुचांको का गुणनफल प्राप्त कीजिए। इस गुणनफल का इकाई, दहाई ....क्रम स्थान उतने ही स्थान की संख्या ले जितने चयनित आधाार में 0 (शून्य) की स्थान संख्या है।इसके लिए
आवश्यकतानुसार स्थानपूर्ति नियम से गुणनफल के बाँयी ओर 0(शून्य) बढ़ाये। तत्पश्चात् शेष उच्च स्थान से

† उपाधार : मूलाधार का अर्थ या तात्पर्य उपाधार और मूलाधार के बीच अनुपात संबंध से है। जो यह स्पष्ट करता है कि यदि मूलाधार 1 है तो उपाधार कितना होगा से है। ‡ उपाधार : मूलाधार =R का मान भिन्नात्मक संख्या $\frac{a}{b}$ भी हो सकता है।

बनी संख्या को द्वितीय बाँया अनुभाग में जोड़ने हेतू बतौर हासिल दर्शित करें।

2■ बाँया अनुभाग इस अनुभाग में [R*(गुण्य + गुणक का घुचांक)+दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल],

अथवा [R*(गुणक + गुण्य का घुचांक))+दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल], R का मान प्रक्रम 2 में प्राप्त है।

प्रक्रम 5 अभीष्ट गुणनफल प्रक्रम 4 से प्राप्त बाँया अनुभाग में दर्शित हासिल को छोडने और दोनो अनुभाग के मध्य विभाजन रेखा को हटाने से प्राप्त संख्या अभीष्ट गुणनफल होगा।

टीप साधित उदाहरण 3■ ,9■, में निर्मित समस्या और निवारण यथा उदाहरण अवलोकित कीजिए।

साधित उदाहरण■

1■ गुण्य 27 और गुणक 24 का गुणनफल गणना– उपाधार 20 एवं मूलाधार 10 से R=2 27 7 24 4 $2*31+2/_{2}8$ = 62+2/8 = 648 अभीष्ट गुणनफल	2■ गुण्य 27 और गुणक 24 का गुणनफल गणना– उपाधार 30 एवं मूलाधार 10 से R=3 27 $\bar{3}$ 24 $\bar{6}$ $3*21+1/_{1}8$ = 63+1/8 = 648 अभीष्ट गुणनफल	3■ गुण्य 27 और गुणक 24 का गुणनफल गणना– उपाधार 25 एवं मूलाधार 100 से R=$\frac{1}{4}$ 27 02 24 $0\bar{1}$ $\frac{1}{4}*26/0\bar{2} = 6/2*25/0\bar{2}$ $= 6/50+0\bar{2}$ =648अभीष्ट गुणनफल टीप $\frac{1}{4}$*26=26÷ 4 से भागफल 6 शेषफल 2 को 6_2 दर्शित किया है । शेषफल 2 को दाँया पक्ष में उपाधार 25 का गुणा कर 25*2=50 लाया गया है।
4■ गुण्य 55 और गुणक 57 का गुणनफल गणना– उपाधार 50 एवं मूलाधार 10 से R=5 55 5 57 7 $5*62+3/_{3}5$ = 310+3/5 = 3135 अभीष्ट गुणनफल	5■ गुण्य 55 और गुणक 57 का गुणनफल गणना– उपाधार 60 एवं मूलाधार 10 से R=6 55 $\bar{5}$ 57 $\bar{3}$ $6*52+1/_{1}5$ = 312+1/8 = 3135 अभीष्ट गुणनफल	6■ गुण्य 55 और गुणक 57 का गुणनफल गणना– उपाधार 50 एवं मूलाधार 100 से R=$\frac{1}{2}$ 55 05 57 07 $\frac{1}{2}*62/35$ $= 31_0/35 = 31/0+35$ = 3135 अभीष्ट गुणनफल **टीप** $\frac{1}{2}$*62=62÷ 2 से भागफल 31 शेषफल 0 को 31_0 दर्शित किया है । शेषफल 0 को दाँया पक्ष में उपाधार 50 का गुणा कर 50*0=0 लाया गया है।

7■ गुण्य 512 और गुणक 508 का गुणनफल गणना– उपाधार 500 एवं मूलाधार 1000 से $R=\frac{1}{2}$ 512 012 508 008 $\frac{1}{2}$*520 / 096 = 260/096 = 260096 अभीष्ट गुणनफल	8■ गुण्य 512 और गुणक 508 का गुणनफल गणना– उपाधार 500 एवं मूलाधार 100 से R=5 512 12 508 08 5*520/96 = 2600/96 = 260096 अभीष्ट गुणनफल	9■ गुण्य 2515 और गुणक 2516का गुणनफल गणना– उपाधार 2500 एवं मूलाधार 10000 से $R=\frac{1}{4}$ 2515 0015 2516 0 016 $\frac{1}{4}$*2531 / 0240 =632_3 / 0240 = 632/ 3*2500 + 240 = 632/7500 +240 = 6327740 अभीष्ट गुणनफल **टीप** $\frac{1}{4}$*2531=2531÷ 4 से भागफल 632 शेषफल 3 को 632_3 दर्शित किया है । शेषफल 3 को दाँया पक्ष में उपाधार 2500 का गुणा कर 2500*3=7500 लाया गया है।

8-5 गुण्य एवं गुणक के सापेक्ष अलग–अलग मूलाधार लिये जाने पर तर्क शक्ति विकसित करनें के क्रम में अलग–अलग मूलाधार की निकटतर संख्याए गुण्य एवं गुणक के रूप में लिये जाने पर गुणन संक्रिया प्रक्रम निम्नानुसार होंगे।

प्रक्रम1 अलग–अलग मूलाधार में से किसी एक मूलाधार को मानक मूलाधार तथा दूसरे मूलाधार को सहमूलाधार मानते हुए सहआधार : मानक आधार =R प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम2 गुणन संक्रिया दर्शित करने के लिए प्रथम पंक्ति में गुण्य और उसके मूलाधार से धुचांक तथा द्वितीय पंक्ति में गुणक और उसके मूलाधार से धुचांक दर्शित कीजिए।

प्रक्रम3 गुणनफल के दो अनुभाग होंगे।

1■ दाँया अनुभाग इस अनुभाग में घुचांको का गुणनफल प्राप्त कीजिए। इस गुणनफल का इकाई, दहाई ....क्रम स्थान उतने ही स्थान की संख्या ले जितने मानक आधार में 0 (शून्य) की स्थान संख्या है।इसके लिए आवश्यकतानुसार स्थानपूर्ति नियम से गुणनफल के बाँयी ओर 0(शून्य) बढ़ाये। तत्पश्चात् शेष उच्च स्थान से बनी संख्या को द्वितीय बाँया अनुभाग में जोड़ने हेतू बतौर हासिल दर्शित करें।अर्थात् मूलाधार 10^x के प्रति यदि घुचांक के वर्गमान में अंकों की स्थान संख्या x से कम हो तो बाँयी ओर 0 बढ़ाकर x स्थान पूरा कीजिए। और यदि घुचांक के वर्गमान में अंकों की स्थान संख्या x से अधिक हो तो इकाई, दहाई.......... की ओर से x स्थान तक के अंकों से बनी संख्या प्रतिस्थापित कर शेष अंकों से बनी संख्या को बतौर हासिल नीचे दर्शित कीजिए।

2■ बाँया अनुभाग इस अनुभाग में –

[(R*मानक आधार वाली संख्या + सहआधार वाली संख्या का घुचांक)+दाँया अनुभाग] से प्राप्त हासिल,]

अथवा [(सहआधार वाली संख्या + R*मानक आधार वाली का घुचांक)+ दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल,]

R का मान प्रक्रम 2 में प्राप्त है।

प्रक्रम 5 अभीष्ट गुणनफल प्राप्त करने प्रक्रम 4 से प्राप्त बाँया अनुभाग के हल के दाँयी ओर दाँया अनुभाग से दर्शित हासिल को छोड़ आधार में 0 की स्थान संख्या के तुल्य स्थान पर में दर्ज अंको से बनी संख्या को दर्शित करे।

टीप छोटे मूलाधार को मानक मूलाधार तथा बड़े मूलाधार को सहमूलाधार मानने से सहआधार : मानकआधार =R का मान 10, 100, 1000 ..... प्राप्त होगा। जबकि बड़े मूलाधार को मानक मूलाधार तथा छोटे मूलाधार को सहमूलाधार मानने से सहआधार : मानकआधार =R का मान $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{100}$ ..... प्राप्त होगा। अतः छोटे मूलाधार को मानक मूलाधार तथा बड़े मूलाधार को सहमूलाधार चयन किये जाने पर गुणन

संक्रिया सरल होगा जिसे बाँया अनुभाग में– [(R*मानक आधार वाली संख्या + सहआधार वाली संख्या का घुचांक)$(दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल)] का हल मान दर्शित करने पर और भी सरलता प्रदान करेगा। साधित उदाहरण अवलोकित कीजिए।

साधित उदाहरण■

1■ 100125*9995 का हल के लिए

हल 1• 100125 00125 मानक मूलाधार 100000

9995 000 $\bar{5}$ सह मूलाधार 10000 से R= $\frac{10000}{100000}=\frac{1}{10}$

[$\frac{1}{10}$* 100125 + $\bar{5}$] / 00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ **अथवा** [9995+ $\frac{1}{10}$* 125]/ 00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ --------(1)

[10012$\frac{5}{10}$ + $\bar{5}$] / 00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ **अथवा** [9995+ 12$\frac{5}{10}$]/ 00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ --------(2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = 100 07$\frac{5}{10}$/ 00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$

= 100 07/ 100000 का $\frac{5}{10}$+00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$

= 100 07/ 50000 +00 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$.

= 100 07 50 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ = 1000749375 अभीष्ट गुणनफल होगा।.

हल 2• 100125 00125 सह मूलाधार 100000

9995 000 $\bar{5}$ मानक मूलाधार 10000 से R= $\frac{100000}{10000}$ = 10

[10*9995+ 125] / 0 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ **अथवा** [100125 +10* $\bar{5}$] / 0 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ -------- (1)

[99950+ 125] / 0 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ **अथवा** [100125+$\bar{5}$0]/ 0 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$ ------------ (2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = 100 075/ 0 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$

= 100 0750 $\bar{6}\bar{2}\bar{5}$

= 1000749375 अभीष्ट गुणनफल होगा।

2■ 999983*9997 का हल के लिए

हल 1• 999983 0001$\bar{7}$ मानक मूलाधार 1000000

9997 000 $\bar{3}$ सह मूलाधार 10000 से R= $\frac{10000}{100000}=\frac{1}{100}$

[$\frac{1}{100}$* 999983 + $\bar{3}$] / 000 051 **अथवा** [9997+ $\frac{1}{100}$* $\bar{1}\bar{7}$]/ 000051 --------(1)

[9999$\frac{83}{100}$ + $\bar{3}$] / 000051 **अथवा** [9997+ $\frac{\bar{1}\bar{7}}{100}$]/ 000051 ---------------(2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = 9996 $\frac{83}{100}$ / 000051

= 9996/ 1000000 का $\frac{83}{100}$+000051

= 9996/ 830051

=9996 830051 अभीष्ट गुणनफल होगा।

हल 2• 999983 0001$\bar{7}$ सह मूलाधार 1000000

9997 000 $\bar{3}$ मानक मूलाधार 10000 है R= $\frac{1000000}{10000}$ = 100

[100*9997+ $\bar{1}\bar{7}$] / 0051 **अथवा** [999983+100* $\bar{3}$] / 0051 --------(1)

[999700+$\bar{1}\bar{7}$] / 0051 **अथवा** [999983+ $\bar{3}$00]]/ 0051 ---------------------(2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = 999683/ 0051

= 9996830051 अभीष्ट गुणनफल होगा।

3■ 10000625* 1005 का हल के लिए

हल 1• 10000625 0000625 मानक मूलाधार 10000000

1005 00 5 सह मूलाधार 1000 से R= $\frac{1000}{10000000}=\frac{1}{10000}$

$[\frac{1}{10000}*10000625+5]$ / 0003125 **अथवा** [1005+ $\frac{1}{10000}$ * 625]/ 0003125 --------(1)

[$1000\frac{0625}{10000}+5$] / 0003125 **अथवा** [1005+ $\frac{625}{10000}$]/ 0003125 --------(2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = [$1005\frac{0625}{10000}$] / 0003125

= 100 5/ 10000000 का $\frac{625}{10000}$+0003125

= 100 5/ 625000 +0003125 .

= 100 5/0628125 = 10050628125 अभीष्ट गुणनफल होगा।

हल 2• 10000625 0000625 सह मूलाधार 10000000

1005 00 5 मानक मूलाधार 10000 से`R= $\frac{10000000}{1000}$ = 10000

[10000*1005+ 625]+3/ $_3$125 **अथवा** [10000625 +10000*5] +3 / $_3$125 --------(1)

[10050000+ 625] + 3 / 125 **अथवा** [10000625+50000]+3/ 125 --------(2)

(1) अथवा (2) से गुणनफल = 100 50628/ 125 = 100 50628 125 अभीष्ट गुणनफल होगा।

----------08----------

अध्याय -9
देखते देखत गुणा

देखते देखत का अर्थ देखते ही देखते से है। इसी को वैदिक गणित शब्दावली में विलोकनम् (देखने मात्र से) सूत्र कहा गया है। गुणा के कुछ संदर्भ में गुण्य एवं गुणक का अंकन व्यवस्था गुण को देख्ने मात्र से बिना कोई गुणन संक्रिया किये गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है। गुण्य एवं गुणक का अंकन व्यवस्था गुण शीर्षक पर अनुच्छेद क्रम में प्रस्तुत है।

9-1 गुण्य एवं गुणक में कोई एक अथवा दोनों 10, 100, 1000, 10000 ---------मूलाधार की संख्या अर्थात् 2, 3, 4, ---------------n अंकों की सबसे छोटी संख्या हो

(संख्यां A)* (n अंकों की सबसे छोटी संख्या)= $A*10^{n-1}$ का गुणनफल = संख्या A के दाँयी ओर (n-1) स्थान तक शून्य दर्षाने मात्र से प्राप्त होता है।

या

संख्या A के दाँयीं ओर n अंकों की सबसे छोटी संख्या में निहित पूरे शून्य दर्शाने मात्र से प्राप्त होता है।

जैसे 1• 5*10 =50 2• 24*1000 = 24000 3• 11575*100000 = 1157500000

4• 100*100 = 10000 5• 7000* 10000 = 70000000 6• 1000 *1050 = 1050000

9-2 गुण्य एवं गुणक दोनो का प्रत्येक अंक 9-9 हो इस तरह के गुण्य गुणक होने पर थोड़े विस्तार पर गुण्य एवं गुणक में दर्शित 9 की स्थान संख्या की स्थिति पर सुझाया जा सकता है। गुण्य एवं गुणक का अंकन व्यवस्था गुण शीर्षक पर बिन्दु क्रम में प्रस्तुत है।

स्थिति (1) गुण्य एवं गुणक दोनों में 9 की स्थान संख्या समान हो

गुणनफल को दो अनुभाग बाँयें अनुभाग और दाँयें अनुभाग में बाँटते हुए– बाँया अनुभाग में गुण्य का उना (गुण्य –1) जो गुण्य के इकाई अंक 9 मात्र को उना (9 –1) करने से प्राप्त होगा दर्शित कीजिए। तथा दाँये अनुभाग में बाँये अनुभाग में प्राप्त हल के प्रत्येक अंको का 9 पुरनी‡ यथा क्रम दर्शित कीजिए।

जैसे 1■ 9 * 9 के लिए गुणन फल का बाँये अनुभाग में (गुण्य -1)= (9 – 1)= 8 तथा दाँये अनुभाग में बाँये
8 \ 1 अनुभाग में प्राप्त 8 का 9 पुरनी 1 दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 81 प्राप्त कीजिए।

2■ 99 * 99 के लिए गुणन फल का बाँये अनुभाग में (गुण्य -1)= (99 – 1)= 98 तथा दाँया अनुभाग में बाँये
98 \ 01 अनुभाग में प्राप्त 98 के दोनों अंक 9 और 8 का क्रमशः 9 पुरनी 0 और 1 दर्शित कीजिए । अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 9801 प्राप्त कीजिए।

3■ 999 * 999 के लिए गुणन फल का बाँये अनुभाग में (गुण्य –1)= (999 – 1)= 998 तथा दाँये अनुभाग में
998 \ 001 बाँये अनुभाग में प्राप्त 998 के तीनों अंक 9, 9 और 8 का क्रमशः 9 पुरनी 0, 0 और 1 दर्शित कीजिए । अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 998001 प्राप्त कीजिए।

इसी प्रकार प्राप्त कर कीजिए 9999 * 9999 =99980001 99999 * 99999 =9999800001

999999 * 999999 = 999998000001 9999999 * 9999999 = 99999980000001

स्थिति (2) गुण्य एवं गुणक दोनो में 9 की स्थान संख्या अलग–अलग हो ऐसी स्थिति में गुणा का क्रम अदल–बदल नियम (A*B=B*A) के अनुसार कम स्थान की संख्या को गुण्य तथा अधिक स्थान की संख्या को गुणक चुनिए। तब गुणक के दो खण्ड बाँया–दाँया इस प्रकार प्राप्त कीजिए कि दाँयें खण्ड में गुण्य की संख्या बने। बाँया खण्ड में उक्त दाँया खण्ड निश्चित होने के बाद स्वमेय गुणक शेष अंको से बनी संख्या होगी। इस प्रकार गुणक के दो खण्ड पूरा होने के बाद गुणनफल को बहुत ही सरलता से तीन अनुभाग– बाँयें \ मध्य\ दाँयें में बाँटते हुए बाँयें और दाँयें अनुभाग स्थिति 1 के यथा शब्दों में तथा मध्य अनुभाग में गुणक के बाँयें खण्ड की संख्या दर्शित कीजिए।

जैसे 1■ 9999 * 99 =99*9999 = 99 * 99\99 = 98\99\01 =989901

‡ 0 ← (9 पुरनी) → 9, 1 ← (9 पुरनी) → 8, 2← (9 पुरनी) → 7, 3 ← (9 पुरनी) →6, 4 ← (9 पुरनी) → 5

2■ $9999999 * 999 = 999 * 9999999 = 999 * 9999\backslash 999 = 998\backslash 9999\backslash 001 = 9989999001$

3■ $99999999 * 999999 = 999999 * 99999999 = 999999 * 99\backslash 999999$

$= 999998\backslash 99\backslash 000001 = 99999899000001$

स्थिति (3) गुण्य अथवा गुणक ही अंक 9 -9 से बनी संख्या हो ऐसी स्थिति में गुणा का क्रम अदल–बदल नियम (A*B=B*A) के अनुसार अंक 9 -9 से बनी संख्या को गुणक चुनिए।गुण्य का 9 -9 से बनी संख्या होने का प्रतिबंध नहीं है। तब गुणा की दो उपस्थिति बनती है।

A■ गुण्य एवं गुणक दोनो में अंकों की स्थान संख्या समान हो स्थिति 1 के अनुसार ही गुणनफल को दो अनुभाग बाँयें अनुभाग और दाँयें अनुभाग में बाँटते हुए– बाँयें अनुभाग में गुण्य का उना (गुण्य −1) जो गुण्य के इकाई अंक मात्र को उना करने से प्राप्त होगा दर्शित कीजिए। तथा दाँयें अनुभाग में बाँयें अनुभाग से प्राप्त हल के प्रत्येक अंको का 9 पुरनी यथा क्रम दर्शित कीजिए।

जैसे 1■ $\underline{4 * 9}$ के लिए गुणन फल का बाँयें अनुभाग में (गुण्य −1)= (4−1)= 3 तथा दाँयें अनुभाग में बाँयें

$3 \backslash 6$ अनुभाग में प्राप्त 3 का 9 पुरनी 6 दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 36 प्राप्त कीजिए।

2■ $\underline{58 * 99}$ के लिए गुणन फल का बाँयें अनुभाग में (गुण्य −1)= (58-1)= 57 तथा दाँयें अनुभाग में बाँया

$57 \backslash 42$ अनुभाग में प्राप्त 57 के दोनों अंक 5 और 7 का क्रमशः 9 पुरनी 4 और 2 दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 5742 प्राप्त कीजिए।

3■ $\underline{969 * 999}$ के लिए गुणन फल का बाँयें अनुभाग में (गुण्य −1)= (969-1)= 968 तथा दाँयें अनुभाग में बाँया

$968 \backslash 031$ अनुभाग में प्राप्त 968 के तीनों अंक 9,6 और 8 का क्रमशः 9 पुरनी 0, 3 और 1 दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाइये और अभीष्ट गुणनफल 968031 प्राप्त कीजिए।

इसी प्रकार प्राप्त कर कीजिए $4675 * 9999 = 46745325$ $23007 * 99999 = 23006769923$

$865421 * 999999 = 865420134579$ $1200045 * 9999999 = 1200044879955$

B■ गुण्य एवं गुणक दोनो में अंकों की स्थान संख्या अलग–अलग हो– ऐसी स्थिति में गुणा की दो स्थिति बनती है।

स्थिति B_1 गुणक में अंको की स्थान संख्या गुण्य के स्थान संख्या से आगर (अधिक) हो

स्थिति 2 के अनुसार ही गुणक के दो खण्ड बाँये–दाँयें इस प्रकार कीजिए कि दाँये खण्ड में गुण्य की स्थान संख्या मान पर 9-9 की स्थान संख्या हो। बाँये खण्ड में उक्त दाँयें खण्ड निश्चित होने के बाद स्वमेय गुणक के शेष अंक 9-9 की संख्या होगी। इस प्रकार गुणक का खण्ड पूरा होने के बाद गुणनफल को बहुत ही सरलता से तीन अनुभाग– बाँया\ मध्य\ दाँया में बाँटते हुए बाँयें और दाँयें अनुभाग स्थिति 3-A के यथा शब्दों में एवं मध्य अनुभाग में गुणक के बाँया खण्ड की संख्या दर्शित कीजिए।

जैसे 1■ $57 * 99999 = 57 * 999\backslash 99 = 56\backslash 999\backslash 43 = 5699943$

2■ $863 * 99999 = 863 * 99\backslash 999 = 862\backslash 99\backslash 137 = 86299137$

3■ $8889 * 9999999 = 8889 * 999\backslash 9999 = 8888\backslash 999\backslash 1111 = 88889991111$

4■ $96437 * 9999999 = 96437 * 99\backslash 99999 = 96436\backslash 99\backslash 03563 = 964369903563$

स्थिति B_2 गुणक में अंको की स्थान संख्या गुण्य के स्थान संख्या सेउना (कम)हो

स्थिति 2 के विपरीत ही गुण्य के दो खण्ड बाँयें–दाँयें इस प्रकार कीजिए कि दाँयें खण्ड में गुणक की स्थान संख्या मान पर संख्या हो। बाँयें खण्ड में उक्त दाँयें खण्ड निश्चित होने के बाद स्वमेय गुणक के शेष अंक की संख्या होगी। इस प्रकार गुण्य का खण्ड पूरा होने के बाद गुणनफल को बहुत ही सरलता से निम्नानुसार दो अनुभाग– बाँयें अनुभाग\ दाँये अनुभााग से प्राप्त कीजिए।

बाँयें अनुभाग में – (गुण्य का उना मान संख्या) – (गुण्य के बाँया खण्ड की संख्या) तथा दाँयें अनुभाग में – गुणक के दाँये खण्ड मान संख्या के इकाई अंक का दस पुरनी तथा शेष दहाई, सैकड़ा, हजार .... स्थान के अंकों का यथा स्थान क्रम नव पुरनी दर्शित करने से प्राप्त संख्या होगी। **अथवा** गुणक के दाँया खण्ड मान संख्या का उना मान संख्या के प्रत्येक अंकों का यथा स्थान क्रम नव पुरनी दर्शित करने से प्राप्त संख्या होगी।

जैसे 1■ $5437 * 99 = 54\backslash 37 * 99 = 5436 - 54\backslash 63 = 538263$

2■ $86354201 * 99999 = 863\backslash 54201 * 99999 = 86354200 - 863\backslash 45799 = 8635337645799$

3■ $123456789 * 999999 = 123\backslash 456789 * 999999 = 123456788 - 123\backslash 543211$

=123456665543211

4■ 999999999 * 9999= 99999\9999 * 9999 =999999998–99999 \0001

=9998999990001

पुनःपूर्व विधि स्थिति 2 के अनुसार – 999999999 * 9999= 9999 *99999 9999

=9999* 99999\9999

= 9998\99999\0001 =9998999990001

9-3 गुण्य एवं गुणक का सभी अंक 1-1 होने पर इस तरह के गुण्य गुणक होने पर थोड़े विस्तार पर गुण्य एवं गुणक में दर्शित 1 की स्थान संख्या की स्थिति पर सुझाया जा सकता है। गुण्य एवं गुणक का अंकन व्यवस्था गुण शीर्षक पर बिन्दु क्रम में प्रस्तुत है।

स्थिति (1) गुण्य एवं गुणक दोनो में 1 की स्थान संख्या समान हो

माना कि गुण्य एवं गुणक दोनो में 1 की स्थान संख्या समान रूप से m हो तो – गुणनफल को बहुत ही सरलता से तीन अनुभाग– बाँयें\ मध्य\ दाँयें में बाँटते हुए निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

बाँये अनुभाग में – बाँये से दाँये 1 से प्रारंभ कर आगर–आगर (बढ़ते क्रमागत) अंकन मे (m–1) स्थान तक के दर्शित अंको से बनी संख्या होगी। यथा $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12}-----(\underline{m-1})^{\dagger}$ मध्य अनुभाग में – केवल m का मान दर्शित कीजिए।

दाँये अनुभाग में – बाँये अनुभाग में दर्शित अंकन श्रृंखला को उलटकर दर्शित कीजिए।

यथा उपरोक्त बाँया अनुभाग में दर्शित $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12}-----(\underline{m-1})$

को उलटकर दाँया अनुभाग में $(\underline{m-1})----\underline{12},\underline{11},\underline{10},9,8,7,6,5,4,3,2,1$ दर्शित होगा।

साधित उदाहरण 1■ 11*11= 1\2\1 =121 2■ 111*111= 1,2\3\2,1 =12321

3■ 11111*11111= 1,2,3,4\5\4,3,2,1 =123454321

4■ 1111111111111*1111111111111=$1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12}\backslash\underline{13}\backslash\underline{12},\underline{11},\underline{10},9,8,7,6,54,3,2,1$

$=123456789_10\ _11_12\ _13\ _12\ _11_10987654321$

=1234567 9 01234320987654321

स्थिति (2) गुण्य एवं गुणक दोनो में 1 की स्थान संख्या अलग–अलग हो ऐसी स्थिति में गुणा का क्रम अदल–बदल नियम (A*B=B*A) के अनुसार कम स्थान की संख्या को गुण्य तथा अधिक स्थान की संख्या को गुणक चुनिए। इस प्रकार गुण्य एवं गुणक के चयन के बाद –

यदि अंक 1(एक) की स्थान गुण्य में संख्या m तथा गुणक में अंक की स्थान संख्या n हो तो स्थिति 1 के अनुसार ही गुणनफल को बहुत ही सरलता से तीन अनुभाग– बाँयें\ मध्य\ दाँयें में बाँटते हुए निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

बाँया और दाँये अनुभाग स्थिति 1 के शब्दों यथावत् गुण्य में 1 की स्थान संख्या m के लिए दर्शित कीजिए।

मध्य अनुभाग m की स्थान संख्या (n–m) का आगर [(n–m) + 1] बार दर्शित कीजिए।

साधित उदाहरण 1■ 11*111=1\22\1 =1221 m=2 , n=3 [(n–m)+1] =[(3–2)+1]= 2

2■ 11111*11111111=1234\5555\4321 =123455554321

m=5 , n=8 [(n–m)+1] =[(8–5)+1]= 4

3■ 1111111*11111111111=123456\77777\654321 =12345677777654321

m=7 , n=11 [(n–m)+1] =[(11–7)+1]= 5

4■ 1111111111111*111111111111111111 =

$= 1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12}\backslash\underline{13},\underline{13},\underline{13},\underline{13},\underline{13},\underline{13}\backslash\underline{12},\underline{11},\underline{10},9,8,7,6,5,4,3,2,1$

$=123456789_10\ _11_12\ _13_13\ _13_13_13_13_12\ _11_10987654321$ =1234567 9 0123444444320987654321

m=13 , n=18 [(n–m)+1] =[(18–13)+1]= 6

† यदि $m > 10$ हो तो क्रमागत अंकन नीचे रेखांकन पर $\underline{10},\underline{11},\underline{12}$ की भाँति दर्शित कीजिए। जिसका मानक संख्या निरूपण में इकाई बाद के अंकों से बनी संख्या को बतौर हासिल उच्च स्थान के अंकन में योग कीजिए। जैसे–$\underline{17} = {}_17$, $\underline{14},\underline{15} = {}_14\ {}_15$ = 155, $9,\underline{10},\underline{11},\underline{12} = 9\,{}_10\ {}_11\ {}_12 =$ 10122, $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12} =$ 12345679 0122

टीप गुणन संक्रिया बाँये से दाँये अथवा दाँयें से बाँयें किसी भी दिशा से प्रारंभ कर अंत किया जा सकता है। केवल 1से प्रारंभ और 1 से अंत ही महत्वपूर्ण है।

विस्तार उपरोक्त दोनों स्थितियो का लाभ अधोदर्शित उदाहरणों के सदृश्य गुण्य एवं गुणक का गुणनफल प्राप्त करने मे लीजिए।

1■ 22 *55 = (2*11)*(5*11) = 10*121 =1210
2■ 222 *555 = (2*111)*(5*111) = 10*12321 =123210
3■ 5555 *2222222= (5*1111)*(2*1111111) = 10*1234444321 =12344443210
4■ 444 *555= (4*111)*(5*111) = 20*12321 = 246420
5■ 6666*555555555= (6*1111)*(5*111111111) = 30*123444444321 =3 703333329630
6■ 8888*555555= (8*1111)*(5*11111) = 40*12344321 = 493772840
7■ 222222*25= (2*111111)*25 = 50*111111 = 5555550
8■ 4444444444*25= (4*1111111111)*25 = 100*1111111111 = 111111111100
9■ 88888888*125= (8*11111111)*125 = 1000*11111111 = 11111111000

----------09----------

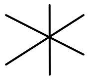
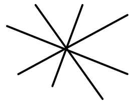
अध्याय -10
गुणा की व्यापक विधि

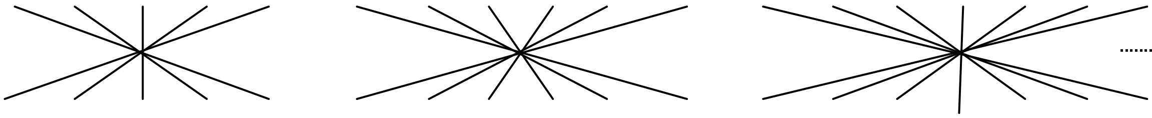
अध्याय 8 और 9 में कुछ चुने हुए व्यवस्थित विशेष नियमों के अन्तर्गत ही चयनित गुण्य एवं गुणक का तेज गति से गुणनफल प्राप्त करना सुझाया है।गुणनफल प्राप्त करने का तरीका ट्रिक्स (श्री सिद्ध) के श्रेणी में है। व्यवस्थित विशेष नियमों से अलग हटकर गुण्य एवं गुणक का गुणनफल प्राप्त करने की विधि को गुणा की व्यापक विधि कहते हैं। आधुनिक गणित में प्रचलित गुणा की एक मात्र गोमूत्री विधि ही व्यापक विधि है।

उक्त व्यापक विधि को छत्तीसगढ़ी गणित दर्शन में खड़ी–तिरछा विधि के नाम से विकसित किया जा सकता है।जिसका अर्थ है खड़ी का उर्ध्व एवं तिरछा का तिर्यक मिलाकर उर्ध्वतिर्यक वैदिक गणित में उर्ध्वतिर्यकभ्यां विधि कहा है।

गणित अध्ययन संकेत में खड़ी के लिये– | उत्तर–पष्चिम से दक्षिण –पूर्व तिर्यक के लिये – ╲

दक्षिण–पष्चिम से उत्तर –पूर्व तिर्यकके लिये ╱ उ.प. से द.पू. और द.प से उ.पू. का संयुक्त तिर्यक के लिये– ╲

| और ╳ का संयुक्तिकरण (संति)  का पुनः विस्तार क्रम 

 .... होगा।

0 से 9 तक की गुणन तालिका
गुण्य * गुणक = गुणक * गुण्य

गुण्य→ *गुणक↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

10-1 गुणन संक्रिया विश्लेषण– (A) गुण्य एवं गुणक में अंको की स्थान संख्या समान होने पर –

A_1 एक अंकीय गुण्य एवं गुणक का गुणन संक्रिया केवल खड़ी { | } संकेत अनुप्रयोग से–

गुण्य →	A	5	4	9	6	4	7	8	3
	|	|	|	|	|	|	|	|	|
* गुणक →	*B	*3	*6	*4	*5	*8	*2	*9	*7
गुणनफल →		15	24	36	30	32	14	72	21

A_2 दो अंकीय गुण्य एवं गुणक का गुणन संक्रिया खड़ी { | } और तिरछा { ╳ } संकेत अनुप्रयोग से–

प्रक्रम 1 दो अंकीय गुणक $A_2 A_1$ एवं गुणक $B_2 B_1$ को निम्नानुसार दर्शित करे।

गुण्य	•	•	A_2	A_1
' गुणक	•	•	B_2	B_1

प्रक्रम 2 गुणनफल के इकाई अंक के लिए–

A_1 • | B_1 •

से $A_1*B_1 = C_1$ का इकाई अंक गुणनफल का इकाई अंक इ. तथा शेष दहाई अंक हासिल हा. होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{\text{हा.}}$इ. दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 गुणनफल के दहाई अंक के लिए–

A_2 • •A_1 × B_2• • B_1

से $[\{A_2*B_1 + B_2*A_1\}$ + $_{\text{हा.}}$इ. $] = C_2$ का इकाई अंक गुणनफल का दहाई अंक द. तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल हा. होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{\text{हा.}}$द. दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 4 गुणनफल के सैकड़ा अंक के लिए–

A_2 • | B_2 •

से $[A_2*B_2 +$ $_{\text{हा.}}$इ.$] = C_3$ को सैकड़ा के स्थान पर दर्शित कीजिए।

इस प्रकार विश्लेषित प्रक्रमों का हल संकेतन

गुण्य	2	3	A_2	A_1
* गुणक	4	5	B_2	B_1

प्रक्रम 1 गुणनफल के इकाई अंक के लिए–

A_1 3 | B_1 5

से 3*5 = 15 का इकाई अंक गुणनफल का इकाई अंक 5 तथा शेष दहाई अंक हासिल 1 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_1$5 दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 गुणनफल के दहाई अंक के लिए–

A_2 2 3 A_1 × B_2 4 5 B_1

से [{2*5+ 4*3} + प्रक्रम 1 से प्राप्त हासिल 1] = 23 का इकाई अंक 3गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 2 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_2$3 दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 गुणनफल के सैकड़ा अंक के लिए–

A_2 2 | B_2 4

से [2*4 + प्रक्रम 2 से प्राप्त हासिल 2] = 10 को सैकड़ा के स्थान पर दर्शित कीजिए।

अभीष्ट हल विस्तार 2 3

* 4 5

2*4 \2*5+4*3\3*5 = 8\\$_2$2 \ $_1$5 = 10\3 \ 5 =1035 अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया 2 3

4 5

10\\$_2$3 \ $_1$5 =1035 अभीष्ट गुणनफल होगा।

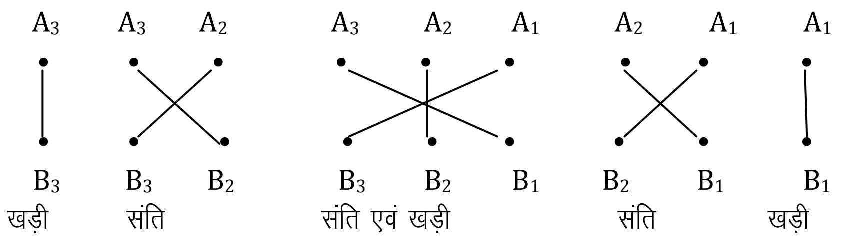
अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया द्वारा साधित उदाहरण■

1■ 13*12 के लिए– 1 3 * 1 2 1 \ 5 \ 6 = 156 अभीष्ट गुणनफल होगा।	2■ 53*39 के लिए– 5 3 * 3 9 20 \ $_{5}$6\ $_{2}$7 = 2067 अभीष्ट गुणनफल होगा।	3■ 76*47 के लिए– 7 6 * 4 7 35 \ $_{7}$7\ $_{4}$2 =3572 अभीष्ट गुणनफल होगा।	4■ 95*69 के लिए– 9 5 * 6 9 65 \ $_{11}$5\ $_{4}$5 = 6555 अभीष्ट गुणनफल होगा ।

तीन अंकीय गुण्य और गुणक का गुणनफल

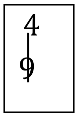
गुण्य	•	•	•	A_3	A_2	A_1
गुणक	•	•	•	B_3	B_2	B_1

हल प्रक्रम संकेत –



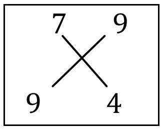
विश्लेषित साधित उदाहरण गुण्य 679 और गुणक 894 का गुणनफल प्राप्त करने दाँये से बाँये संकेत क्रम में हल प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल के इकाई अंक के लिए–



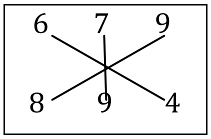
से 4*9 = 36 का इकाई अंक गुणनफल का इकाई अंक 6 तथा शेष दहाई अंक हासिल 3 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{3}$6 दर्शित कीजिए

प्रक्रम 2 गुणनफल के दहाई अंक के लिए–



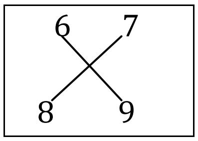
से [{7*4+ 9*9} + प्रक्रम 1 से प्राप्त हासिल 3] = 112 का इकाई अंक 2 गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 11 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{11}$2 दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 गुणनफल के सैकड़ा अंक के लिए–



से [{6*4 +8*9+ 7*9} + प्रक्रम 2 से प्राप्त हासिल 11] = 170 का इकाई अंक 0 गुणनफल का सैकड़ा अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 17 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{17}$0 दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 4 गुणनफल के हजार अंक के लिए–



से [{6*9+ 8*7} + प्रक्रम 3 से प्राप्त हासिल 17] = 127 का इकाई अंक 7 गुणनफल का हजार अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 12 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{12}$7 दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 5 गुणनफल के दस हजार अंक के लिए–

6
8

से [6*8+ प्रक्रम 4 से प्राप्त हासिल 12] = 60 को सैकड़ा के स्थान पर दर्शित कीजिए।

अभीष्ट हल विस्तार

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 9 \\ *\ 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline 6*8 \backslash 6*9+8*7 \backslash 6*4+8*9+7*9 \backslash 7*4+9*9 \backslash 9*4 \end{array}$$

$= 48\backslash 110 \backslash 159\backslash 109\backslash 36$

$= 60\backslash {}_{12}7 \backslash {}_{17}0\backslash {}_{11}2\backslash {}_{3}6 = 607026$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 9 \\ *\ 8 \quad 9 \quad 4 \\ \hline \end{array}$$

$60\backslash {}_{12}7 \backslash {}_{17}0\backslash {}_{11}2\backslash {}_{3}6 = 607026$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया द्वारा साधित उदाहरण■ तीन अंकीय गुण्य और गुणक का गुणनफल

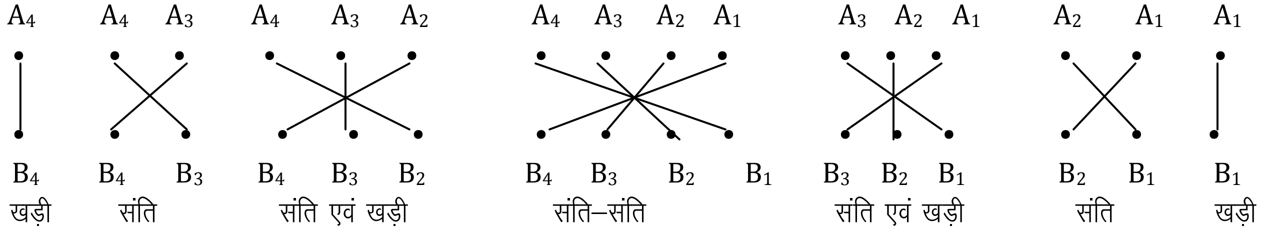
1■ 112*113 के लिए– 1 1 2 * 1 1 3 1\ 2\6 \ 5 \ 6 = 12656 अभीष्ट गुणनफल होगा।	2■ 571*609 के लिए– 5 7 1 * 6 0 9 $34\backslash {}_{4}7\backslash {}_{5}7\backslash {}_{6}3\backslash 9$ = 347739 अभीष्ट गुणनफल होगा।	3■ 999*587 के लिए– 9 9 9 * 5 8 7 $58\backslash {}_{13}6\backslash {}_{19}4\backslash {}_{14}1\backslash {}_{6}3$ =586413 अभीष्ट गुणनफल होगा।	4■ 742*441 के लिए– 7 4 2 * 4 4 1 $32 \backslash {}_{4}7\backslash {}_{3}2 \backslash {}_{1}2\backslash 2$ = 32722 अभीश्ट गुणनफल होगा।

चार अंकीय गुण्य और गुणक का गुणनफल

गुण्य • • • • A_4 A_3 A_2 A_1

गुणक • • • • B_4 B_3 B_2 B_1

हल प्रक्रम संकेत



विश्लेषित साधित उदाहरण■ गुण्य 6435 और गुणक 1728 का गुणनफल प्राप्त करने दाँये से बाँये संकेत क्रम में हल प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल के इकाई अंक के लिए–

5
8

से 5*8 = 40 का इकाई अंक गुणनफल का इकाई अंक 0 तथा शेष दहाई अंक हासिल 4 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{4}0$ दर्शित कीजिए ।

प्रक्रम 2 गुणनफल के दहाई अंक के लिए–

3 5
2 8

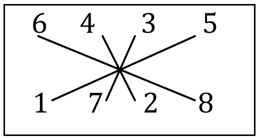
से [{3*8+ 2*5} + प्रक्रम 1 से प्राप्त हासिल 4] = 32 का इकाई अंक 2 गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 3 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{3}2$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 गुणनफल के सैकड़ा अंक के लिए–

4 3 5
7 2 8

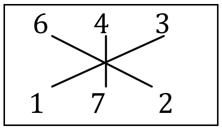
से [{4*8 +7*5+ 3*2}+ प्रक्रम 2 से प्राप्त हासिल 3] = 76 का इकाई अंक 6 गुणनफल का सैकड़ा अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 7 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{7}6$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 4 गुणनफल के हजार अंक के लिए–



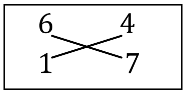
से [{6*8 +1*5+ 4*2+7*3} + प्रक्रम 3 से प्राप्त हासिल 7] = 89 का इकाई अंक 9 गुणनफल का हजार अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 8 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{8}9$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 5 गुणनफल के दस हजार अंक के लिए–



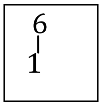
से [{6*2 +1*3+ 4*7} + प्रक्रम 4 से प्राप्त हासिल 8] = 51 का इकाई अंक 1 गुणनफल का दसहजार अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 5 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{5}1$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 6 गुणनफल के लाख अंक के लिए–



से [{6*7+ 1*4} + प्रक्रम 5 से प्राप्त हासिल 5] = 51 का इकाई अंक 1 गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 5 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{5}1$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 7 गुणनफल के दसलाख अंक के लिए–



से [6*1+ प्रक्रम 6 से प्राप्त हासिल 5] = 11 को दस लाख के स्थान पर दर्शित कीजिए।

अभीष्ट हल विस्तार

```
      6   4   3   5
  *   1   7   2   8
```

6 *1 \ 6*7++1*4 \ 6*2+1*3+4*7\6*8+1*5+4*2+7*3 \4*8+7*5+2*3 \3*8+2*5\8*5

= 6 \ 46\ 43\82 \73 \34\40

= 11 \ $_{5}1$\ $_{5}1$\ $_{8}9$ \ $_{7}6$ \ $_{3}8$\ $_{4}0$ = 11119680 अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया

```
      6   4   3   5
  *   1   7   2   8
```

11 \ $_{5}1$\ $_{5}1$\ $_{8}9$ \ $_{7}6$ \ $_{3}8$\ $_{4}0$ = 11119680 अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया द्वारा साधित उदाहरण–

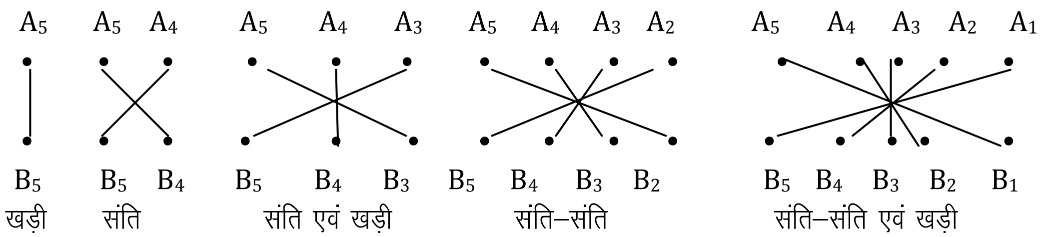
1■ 1234*5678 के लिए–	2■ 1278*9034 के लिए–	3■ 2792*1978 के लिए–
1 2 3 4 * 5 6 7 8 7\ $_{2}0$\ $_{4}0$ \ $_{6}6$ \ $_{6}6$ \ $_{5}5$\ $_{3}2$ = 7006652 अभीष्ट गुणनफल।	1 2 7 8 * 9 0 3 4 11\ $_{2}5$\ $_{7}4$ \ $_{8}5$ \ $_{3}4$ \ $_{5}5$\ $_{3}2$ = 11545452 अभीष्ट गुणनफल ।	2 7 9 2 * 1 9 7 8 5\ $_{3}5$\ $_{10}2$ \ $_{16}2$ \ $_{14}5$ \ $_{8}7$\ $_{1}6$ = 5522576 अभीष्ट गुणनफल ।

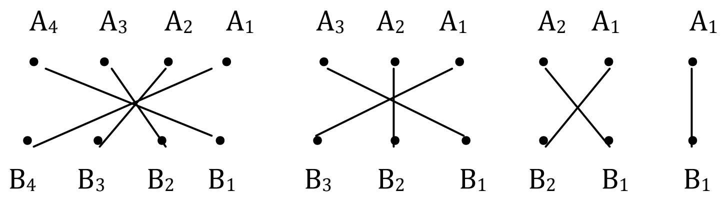
पाँच अंकीय गुण्य और गुणक का गुणनफल

गुण्य • • • • • A_5 A_4 A_3 A_2 A_1

गुणक • • • • • B_5 B_4 B_3 B_2 B_1

हल प्रक्रम संकेत

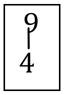




संति–संति संति खड़ी संति खड़ी

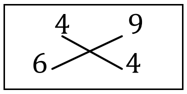
विश्लेषित साधित उदाहरण■ गुण्य 25049 और गुणक 13864 का गुणनफल प्राप्त करने दाँये से बाँये संकेत क्रम में हल प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल के इकाई अंक के लिए–



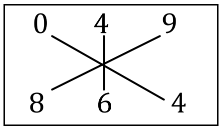
से 9*4 = 36 का इकाई अंक गुणनफल का इकाई अंक 6 तथा शेष दहाई अंक हासिल 3 होगा।
गुणनफल पंक्ति मे $_{3}6$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 गुणनफल के दहाई अंक के लिए–



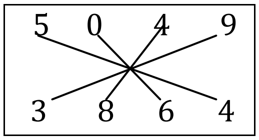
से [{4*4+ 6*9} + प्रक्रम 1 से प्राप्त हासिल 3] = 73 का इकाई अंक 3 गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 7 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{7}3$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 गुणनफल के सैकड़ा अंक के लिए–



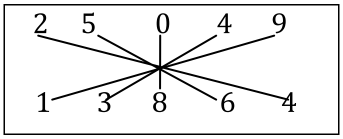
से [{0*4 +8*9+ 4*6} + प्रक्रम 2 से प्राप्त हासिल 7] = 103 का इकाई अंक 3 गुणनफल का सैकड़ा अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 10 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{10}3$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 4 गुणनफल के हजार अंक के लिए–



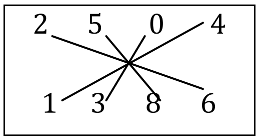
से [{5*4 +3*9+ 0*6+8*4} + प्रक्रम 3 से प्राप्त हासिल 10} = 89 का इकाई अंक 9 गुणनफल का हजार अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 8 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{8}9$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 5 गुणनफल के दसहजार अंक के लिए–



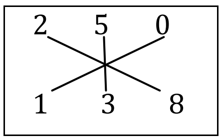
से [{2*4 +1*9+ 5*6+3*4+0*8} + प्रक्रम 4 से प्राप्त हासिल 8] = 67 का इकाई अंक 7 गुणनफल का दसहजार अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 6 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{6}7$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 6 गुणनफल के लाख अंक के लिए–



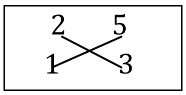
से [{2*6 +1*4+ 5*8+3*0}+ प्रक्रम 5 से प्राप्त हासिल 6] = 62 का इकाई अंक 2 गुणनफल का लाख अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 6 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{6}2$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 7 गुणनफल के दस लाख अंक के लिए–



से [{2*8 +5*3+ 1*0} + प्रक्रम 6 से प्राप्त हासिल 6] = 37 का इकाई अंक 7 गुणनफल का दसलाख अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 3 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{3}7$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 8 गुणनफल के करोड़ अंक के लिए–



से [{2*3+ 1*5} + प्रक्रम 7 से प्राप्त हासिल 3} = 14 का इकाई अंक 4 गुणनफल का दहाई अंक तथा शेष दहाई सैकड़ा अंक से बनी संख्या हासिल 1 होगा। गुणनफल पंक्ति मे $_{1}4$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 9 गुणनफल के दसकरोड़ अंक के लिए–

2 | 1	से [2*1+ प्रक्रम 8 से प्राप्त हासिल 1] = 3 को दस करोड़ के स्थान पर दर्शित कीजिए।

अभीष्ट हल विस्तार –

$$\begin{array}{r} 2\quad 5\quad 0\quad 4\quad 9 \\ *\ 1\quad 3\quad 8\quad 6\quad 4 \\ \hline \end{array}$$

2 *1 \ 2*3+1*5 \ 2*8+1*0+5*3\2*6+1*4+5*8+3*0\2*4+1*9+3*4+5*6+0*8 \5*4+3*9+0*6+8*4 \0*4+8*9+4*6\4*4+6*9\9*4

= 2 \ 11\ 31\56 \59 \79\96\70\36

$= 3\backslash {}_{1}4\backslash {}_{3}7\backslash {}_{6}2 \backslash {}_{6}7 \backslash {}_{8}9\backslash {}_{10}3\backslash {}_{7}3\backslash {}_{3}6 = 347279336$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया –

$$\begin{array}{r} 2\quad 5\quad 0\quad 4\quad 9 \\ *\ 1\quad 3\quad 8\quad 6\quad 4 \\ \hline \end{array}$$

$3\backslash {}_{1}4\backslash {}_{3}7\backslash {}_{6}2 \backslash {}_{6}7 \backslash {}_{8}9\backslash {}_{10}3\backslash {}_{7}3\backslash {}_{3}6 = 347279336$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया द्वारा साधित उदाहरण■

1■ 29989*17899 के लिए–	2■ 87265*32117 के लिए–	3■ 64231*78934 के लिए–
2 9 9 8 9 * 1 7 8 9 9 $5\backslash {}_{3}3\backslash {}_{10}6\backslash {}_{18}7\backslash {}_{2}0\backslash {}_{26}7 \backslash {}_{31}3 \backslash {}_{24}1 \backslash {}_{16}1\backslash {}_{8}1$ = 5367073111 अभीष्ट गुणनफल होगा।	8 7 2 6 5 * 3 2 1 1 7 $28\backslash {}_{4}0 \backslash {}_{3}2\backslash {}_{4}6\backslash {}_{9}9 \backslash {}_{7}0 \backslash {}_{3}0 \backslash {}_{5}0\backslash {}_{3}5$ = 2802690005 अभीष्ट गुणनफल होगा।	6 4 2 3 1 * 7 8 9 3 4 $50\backslash {}_{8}7\backslash {}_{11}0\backslash {}_{10}0\backslash {}_{9}0 \backslash {}_{5}9 \backslash {}_{2}7 \backslash {}_{1}5\backslash 4$ = 5070009754 अभीष्ट गुणनफल होगा।

छः अंकीय गुण्य और गुणक का गुणनफल

564235*678934 =

$$\begin{array}{r} 5\ 6\ 4\ 2\ 3\ 5 \\ *\ 6\ 7\ 8\ 9\ 3\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$38\backslash {}_{8}3\backslash {}_{12}0\backslash {}_{14}7\backslash {}_{14}8\backslash {}_{15}3\backslash {}_{12}2\backslash {}_{9}5\backslash {}_{6}4\backslash {}_{2}9\backslash {}_{2}0 = 383078325490$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

10-2 गुण्य एवं गुणक में अंको की स्थान संख्या असमान (अलग–अलग)हो। गुणन सँक्रिया के लिए–

1• गुण्य और गुणक में से जो भी कम स्थान की संख्या हो उसके बाँयें 0 (शून्य) बढ़ाकर गुण्य और गुणक को बराबर स्थान की संख्या बनाकर 9-1 के अनुसार गुणन संक्रिया सम्पन्न कीजिए।

यथा – 12345*678 = 12345*00678, 2049* 3458791 = 0002049*3458791

2• खड़ा तिरछा विधि का अनुप्रयोगएवं विश्लेषण अधो दर्शित उदाहरणों का अध्ययन कर स्वयं कीजिए

1■ 15 * 7 के लिए	2■ 249*8 के लिए
1 5 = 1 • \ 7 • 5 | 7 से * 7 =1*7\5*7 = $10\backslash {}_{3}5$ =105 अ.गु.फ	2 4 9 = 2 • • \ 8 • 4 • \ 8 • • 9 | 8 से * 8 $2*8\backslash 4*8\backslash 9*8 = 19\backslash {}_{3}9\backslash {}_{7}2$ =1992 अ.गु.फ

3■ 4578*123 के लिए

4 5 7 8 4 • • • 4 5 • • 4 5 7 • • 5 7 8 • • 7 8 • • • 8

= से

* 1 2 3 1 • • 1 2 • 1 2 3 1 2 3 • 2 3 • • 3

4*1\4*2+1*5\4*3+5*2 +7*1\5*3+1*8+7*2\7*3+8*2\8*3

$= 5\backslash{}_{1}6\backslash{}_{3}3\backslash{}_{4}0\backslash{}_{3}9\backslash{}_{2}4 = 563094$ अ.गु.फ

4■ 12345*89 के लिए

1 2 3 4 5 1 • • • • 1 2 • • • • 2 3 • • • • 3 4 • • • • 4 5 • • • • 5

=

* 8 9 8 • 8 9 8 9 8 9 8 9 • 9

से 1*8\1*9+8*2\2*9+8*3\3*9+8*4 \4*9+8*5\5*9

$=10\backslash{}_{2}9\backslash{}_{4}8\backslash{}_{6}7\backslash{}_{8}0\backslash{}_{4}5 = 1098705$ अ.गु.फ.

5■ 12345*2123 के लिए

1 2 3 4 5 1 • • • • 1 2 • • • 1 2 3 • • 1 2 3 4 • • 2 3 4 5

=

* 2 1 2 3 2 • • • 2 1 • • 2 1 2 • 2 1 2 3 2 1 2 3

• • 3 4 5 • • • 4 5 • • • • 5

• 1 2 3 • • 2 3 • • • 3

से 1*2\1*1+2*2\1*2+2*3+2*1\1*3+2*4+2*2+1*3\2*3+2.5+3*2+1*4

\3*3+1*5+4*2\4*3+2*5\ 5*3

$=• • • 2\backslash 6\backslash{}_{1}2\backslash{}_{2}0\backslash{}_{2}8\backslash{}_{2}4\backslash{}_{2}3\backslash{}_{1}5 = 26208435$ अ.गु.फ.

टीप उपरोक्त संक्रियाँ गणन में खड़े तिरछे अंको के यथा स्थान पर ही चिन्हित कर दर्शित किया गया है। गुण्य एवं गुणक के अंको के बढ़ते स्थान क्रम में खड़ी एवं संति का विस्तार क्रम बढ़ेगा। n अंकीय गुण्य एवं गुणक का गुणनफल 2n–1 प्रक्रम में खड़ी, संति, संति–खड़ी, संति–संति, संति–संति–खड़ी ,संति–संति–संति , संति–संति–संति–खड़ी – – – –nप्रक्रम – – – – संति–संति–संति–खड़ी, संति–संति–संति, संति–संति–खड़ी, संति–संति, संति–खड़ी,संति, खड़ी संकेत पर गणन संक्रिया सम्पन्न कर अभीष्ट गुणनफल प्राप्त कीजिए। अभ्यास उपरांत मौखिक योग एवं घटाना(उनागर संख्याओं के गुणा संक्रिया के संदर्भ में) उन्नत होकर एक पंक्ति में गुणनफल प्राप्त करने अवश्य ही रोमांचित होंगे।

----------10----------

अध्याय -11

उनागर सख्यांकन में गुण्य एवं गुणक का गुणनफल

सामान्य संख्यांकन के गुणन संक्रिया के अवलोकन से स्पष्ट कि गुण्य एवं गुणक के बढ़ते मानों के हल प्रक्रमों में बढ़ते योग के पद में बड़ी संख्या (5 से बड़े अंकों की संख्या) व्यापक विधि को कठिनतर प्रतीत करता है। ऐसे कठिनतर प्रतीत हो रहे गुणन संक्रिया को सामान्य संख्यांकन की संख्या को उनागर संख्याकन की संख्या में दर्शित करने का अनुप्रयोग एक इल्म ही सिद्ध होगा। सामान्य संख्यांकन की संख्यां के गुणन विधियों का अनुप्रयोग यथावत ही स्वीकार है। अलोकित कीजिए।

[1] घुचांक विधि• मुलाधार के प्रति

क्रमांक	सामान्य संख्यांकन की संख्यां	उनागर संख्याकन की संख्या में दर्शित करने का अनुप्रयोग
1■	95*97 के लिए मूलाधार 100 से 95 $\overline{05}$ * 97 $\overline{03}$ 92/ 15 =9215 अ. गु. फ.	95*97 = $10\bar{5} * 10\bar{3}$ के लिए मूलाधार 100 से $10\bar{5}$ $0\bar{5}$ * $10\bar{3}$ $0\bar{3}$ $10\bar{8}$/ 15 =9215 अ. गु. फ.
2■	998*887 के लिए मूलाधार 1000 से 998 $00\bar{2}$ * 887 $\overline{113}$ 885/ 226 = 885226 अ. गु. फ.	998*887 =$100\bar{2} * 1\bar{1}\bar{1}\bar{3}$ के लिए मूलाधार 1000 से $100\bar{2}$ $00\bar{2}$ * $1\bar{1}\bar{1}\bar{3}$ $\bar{1}\bar{1}\bar{3}$ $1\bar{1}\bar{1}\bar{5}$/ 226 = 885226 अ. गु. फ.
3■	1007*891 के लिए मूलाधार 1000 से 1007 007 * 891 $\overline{109}$ 898/ $\overline{763}$ =897237 अ. गु. फ.	1007*891 1007*$1\bar{1}0\bar{9}$ के लिए मूलाधार 1000 से 1007 007 * $1\bar{1}0\bar{9}$ $\bar{1}\,0\bar{9}$ $1\bar{1}0\bar{2}$ / $\bar{7}\bar{6}\bar{3}$ =$1\bar{1}0\bar{2}\,\bar{7}\bar{6}\bar{3}$ =897237 अ. गु. फ.
4■	9981*9991 के लिए मूलाधार 10000 से 9981 $\overline{0019}$ * 9991 $99\overline{0009}$ 9972/ 0171 =99720171 अ. गु. फ.	9981*9991=$100\bar{2}1 * 100\bar{1}1$के लिए मूलाधार 10000 से $100\bar{2}1$ $00\bar{2}1$ $100\bar{1}1$ $00\bar{1}1$ $100\bar{3}2$ /02 $\bar{3}1$ =99720171 अ. गु. फ

इसी प्रकार उपाधार के प्रति घुचांक विधि का अनु प्रयोग दर्शित किया जा सकता है।

व्यापक विधि•

क्रमांक	सामान्य संख्यांकन की संख्यां	उनागर संख्याकन की संख्या में दर्शित करने का अनुप्रयोग
1■	76*57 के लिए – 7 6 * 5 7 7*5/7*7+5*6/6*7 = 35/79/ 42 = 43/$_8$3/$_4$2 =4332 अ. गु. फ.	76*57 =$1\bar{2}\bar{4} * 1\bar{4}\bar{3}$ के लिए – 1 $\bar{2}$ $\bar{4}$ * 1 $\bar{4}$ $\bar{3}$ $1*1/ 1*\bar{4} + 1 * \bar{2} /1*\bar{3} + 1 * \bar{4} + \bar{2} *$ $\bar{4}/ \bar{2} * \bar{3} + \bar{4} * \bar{4}/ \bar{4} * \bar{3}$ =1/ $\bar{6}$/1/22 /12 =1/ $\bar{6}$/3/$_2$3/$_1$2 =$1\bar{6}332$ = 4332 अ. गु. फ.

2■	998*887 के लिए – 9 9 8 $* \; 8 \; 8 \; 7$ 9*8/9*8+8*9/9*7+8*8*9*8 / 9*7+8*8 / 8*7 = 72 / 144 / 199 /127/56 = 88 / $_{16}5$ / $_{21}2$ / $_{13}2$ / $_{5}6$ = 885226 अ. गु. फ.	$998*887 = 100\bar{2} * 1\bar{1}1\bar{3}$ के लिए $1 \; 0 \; 0 \; \bar{2}$ $1 \; \bar{1} \; 1 \; \bar{3}$ $1*1 \,/\, 1*\bar{1} + 1*0 \,/\, 1*\bar{1} + 1*0 + 0*\bar{1} \,/$ $1*\bar{3} + 1*\bar{2} + 0*\bar{1} + \bar{1}*0 \,/\, 0*\bar{3} + \bar{1}*\bar{2}$ $+ 0*\bar{1} \,/\, 0*\bar{3} + \bar{1}*\bar{2} \,/\, \bar{2}*\bar{3}$ $= 1/\,\bar{1}/\bar{1}/\,\bar{5}/2\,/\,2/6 = 1\,\bar{1}\bar{1}\,\bar{5}2\,26$ = 885226 अ. गु. फ.
3■	1007*891 के लिए मूलाधार 1000 से 1007 007 $* \; 891 \quad \overline{109}$ $898/\,\overline{763} \quad = 897237$ अ. गु. फ.	$1007*891 = 1007*1\bar{1}0\bar{9}$ के लिए मूलाधार 1000 से 1007 007 $* \; 1\bar{1}0\bar{9} \quad \bar{1}\,0\bar{9}$ $1\bar{1}0\bar{2} \,/\, \overline{7}6\bar{3} \quad = 1\bar{1}0\bar{2}\,\bar{7}6\bar{3}$ =897237 अ. गु. फ.
4■	9981*9991 के लिए मूलाधार 10000 से $9981 \quad \overline{0019}$ $* \; 9991 \quad \overline{0009}$ 9972/ 0171 =99720171 अ. गु. फ.	$9981*9991 = 100\bar{2}1 * 100\bar{1}1$ के लिए मूलाधार 10000 से $100\bar{2}1 \quad 00\bar{2}1$ $100\bar{1}1 \quad 00\bar{1}1$ $100\bar{3}2 \,/\, 02\,\bar{3}1$ =99720171 अ. गु. फ

अभ्यास उपरांत मन ही मन संक्रिया द्वारा साधित उदाहरण■

सामान्य संख्यांकन	उनागर संख्यांकन
1■ 95*69 के लिए– 9 5 $* \; 6 \; 9$ 65 \ $_{11}5$\ $_{4}5$ = 6555 अभीष्ट गुणनफल होगा।	$95*69 = 10\bar{5} * 1\bar{3}\bar{1}$ के लिए– $1 \; 0 \; \bar{5}$ $* \; 1 \; \bar{3} \; \bar{1}$ $1\backslash\bar{3}\backslash\,\bar{5}\,\backslash\,{}_{1}5\backslash\,5 = 1\,\bar{3}\;\;\bar{5}\,5\,5$ = 6555 अभीष्ट गुणनफल होगा।
2■ 379*287 के लिए– 3 7 9 $* \; 2 \; 8 \; 7$ 10\ $_{4}8$\ $_{10}7$\ $_{12}7$\ $_{6}3$ =108773 अभीष्ट गुणनफल होगा।	$379*287 = 4\bar{2}\bar{1} * 3\bar{1}\bar{3}$ केलिए– $4 \; \bar{2} \; \bar{1}$ $* \; 3 \; \bar{1} \; \bar{3}$ $11\backslash{}_{\bar{1}}\,\bar{1}\backslash{}_{\bar{1}}\,\bar{3}\backslash\;7\backslash\,3 = 11\bar{1}\bar{3}73$ =108773 अभीष्ट गुणनफल होगा।
3■ 2792*1978 के लिए– 2 7 9 2 $* \; 1 \; 9 \; 7 \; 8$ 5\ $_{3}5$\ $_{10}2$ \ $_{16}2$ \ $_{14}5$ \ $_{8}7$\ $_{1}6$ = 5521576 अभीष्ट गुणनफल होगा।	$2792*1978 = 3\bar{2}\bar{1}2*20\bar{2}\bar{2}$ के लिए– $3 \; \bar{2} \; \bar{1} \; 2$ $* \; 2 \; 0 \; \bar{2} \; \bar{2}$ $6\backslash\,\bar{4}\backslash\bar{8}\,\backslash 2\,\backslash\,6\,\backslash\,\bar{2}\backslash\,\bar{4} = 6\,\bar{4}\;\;\bar{8}\,2\,6\;\;\bar{2}\,\bar{4}$ = 5522576 अभीष्ट गुणनफल होगा।
4■ 64231*78934 के लिए– 6 4 2 3 1 $* \; 7 \; 8 \; 9 \; 3 \; 4$	$64231*78934 = 1\bar{4}4231 * 1\bar{2}\bar{1}\bar{1}34$ के लिए– $1 \; \bar{4} \; 4 \; 2 \; 3 \; 1$ $* \; 1 \; \bar{2} \; \bar{1} \; \bar{1} \; 3 \; 4$

$50\backslash{}_{8}7\backslash{}_{11}0\backslash{}_{10}0\backslash{}_{9}0\backslash{}_{5}9\backslash{}_{2}7\backslash{}_{1}5\backslash 4$ $= 5070009754$ अभीष्ट गुणनफल होगा।	$1\backslash\bar{5}\backslash{}_{1}1\backslash\bar{3}\backslash{}_{\bar{2}}0\backslash 0\backslash{}_{\bar{1}}0\backslash{}_{1}9\backslash{}_{1}7\backslash{}_{1}5\backslash 4$ $= 1\bar{5}1\bar{3}0009754 = 5070009754$ अभीष्ट गुणनफल होगा।
$5\bar{1}0$■564235*678934 के लिए– $\;\;5\;6\;4\;2\;3\;5$ $\underline{*\;6\;7\;8\;9\;3\;4}$ $38\backslash{}_{8}3\backslash{}_{12}0\backslash{}_{14}7\backslash{}_{14}8\backslash{}_{15}3\backslash{}_{12}2\backslash{}_{9}5\backslash{}_{6}4\backslash{}_{2}9\backslash{}_{2}0 = 383078325490$ अभीष्ट गुणनफल होगा।	$564235*678934 = 1\bar{4}\bar{4}4235*1\bar{3}\bar{2}\bar{1}\bar{1}34$ के लिए– $\;\;1\;\bar{4}\;\bar{4}\;4\;2\;3\;5$ $\underline{*\;1\;\bar{3}\;\bar{2}\;\bar{1}\;\bar{1}\;3\;4}$ $1\backslash\bar{7}\backslash 8\backslash{}_{2}3\backslash\bar{2}\backslash{}_{\bar{2}}\bar{1}\backslash{}_{\bar{5}}\tilde{6}\backslash{}_{\bar{1}}\bar{8}\backslash{}_{1}5\backslash{}_{1}4\backslash{}_{2}9\backslash{}_{2}0$ $=1\bar{7}831\bar{2}\bar{1}\tilde{6}\bar{8}5490 = 383078325490$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

विशेष गुणन प्रमेय गुण्य संख्या $p\backslash q$ और गुणक संख्या $p\backslash r$ का तात्पर्य – गुण्य और गुणक बराबर स्थानिक रूप में $(m+n)$ स्थान की है। जिनके बाँयें से दाँये प्रथम m स्थान का मान p है। तथा शेष n अंकों से बनी संख्या गुण्य और गुणक में क्रमशः q और r है ,जिनका योग मान $(q+r) =$ कोई मूलाधार संख्या 10^x हो तो $p\backslash q * p\backslash r = p*(p+1)\backslash p*q$ जहाँ $p*q$ का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति आधार 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा।

टीप बायें पक्ष में $p*(p+1) = p*(p$ का आगर) से आगर नियम प्रतिपादित होता है।

बीज गणितीय प्रमाण $\because\; r+q = 10^x$ प्रमेय प्रतिबंध में निहित है। $\therefore r = 10^x - q$

$p\backslash q * p\backslash r = p\backslash q * p\backslash(10^x - q) = (10^x p+q)*(10^x p + 10^x - q)$ संख्या प्रसारित संकेतन नियम से

$$= 10^{2x}p^2 + 10^x pq + 10^{2x}p + 10^x q - 10^x pq - q^2$$
$$= 10^{2x}p^2 + 10^{2x}p + 10^x q - q^2$$
$$= 10^{2x}p(p+1) + q(10^x - q)$$
$$= 10^{2x}p*(p+1) + q*r \qquad 10^x - q = r \text{ से।}$$
$$= [\underline{p*(p+1)}\;\; \underline{q*r}]_{10^{2x}} \qquad 10^{2x} \text{ के आधारमिति से।}$$
$$= p*(p+1)\backslash q*r \qquad \text{बाँया दाँया पक्ष विभाजन से}$$

अर्थात् $p\backslash q * p\backslash r = p*(p+1)\backslash p*q$ जहाँ $p*q$ का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा।

विश्लेषित उदाहरण 1■ 21*29 के हल के लिए– $21*29 = 2\backslash 1 * 2\backslash 9$ से $p = 2,\; q = 1,\; r = 9$

तथा $\{q+r = 1+9 = 10 = 10^1$ से $x=1\}$

$\therefore p\backslash q * p\backslash r = p*(p+1)\backslash p*q$ जहाँ $p*q$ का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा। के अनुसार–

$21*29 = 2\backslash 1 * 2\backslash 9 = 2*(2+1)\backslash 1*9$

$= 2*3\backslash 09$ ($1*9 = 9$ एक अंकीय है $x=1$ के प्रति 2 अंकीय होना है

$= 609$ अ.गु.फ होगा । अतः स्थान पूर्ति नियम से 9=09 दर्शित है।)

उदाहरण 2■ 387* 313 के हल के लिए– $387*313 = 3\backslash 87 * 3\backslash 13$ से $p = 3,\; q = 87,\; r = 13$

तथा $\{q+r = 87+13 = 100 = 10^2$ से $x=2\}$

$\therefore p\backslash q * p\backslash r = p*(p+1)\backslash p*q$ जहाँ $p*q$ का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा। के अनुसार–

$387*313 = 3\backslash 87 * 3\backslash 13 = 3*(3+1)\backslash 87*13$

$= 3*4\backslash 1131$ ($87*13 = 1131$ चार अंकीय है $x=2$ के प्रति 4 अंकीय होना है

$= 121131$ अ.गु.फ होगा । अतः स्थानपूर्ति नियम से 1131 ही दर्शित है।)

उदाहरण 3■ 5945* 5955 के हल के लिए– $5945*5955 = 59\backslash 45 * 59\backslash 55$ से $p = 59,\; q = 45,\; r = 55$

तथा $\{q+r = 45+55 = 100 = 10^2$ से $x=2\}$

∴ p\q * p\r =p*(p+1)\p*q जहाँ p*q का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा। के अनुसार–

5945*5955 =59\45 * 59\55 = 59*(59+1)\45*55

=59*60\2475 (45*55 =2475 चार अंकीय है x=2 के प्रति 4अंकीय होना है

= 35402475 अ.गु.फ होगा । अतः स्थानपूर्ति नियम से 2475 ही दर्शित है।)

उदाहरण 4■ 999995* 999005 के हल के लिए– 999995*999005 =999\995 * 999\005 से p =999 , q= 995 , r=005 तथा {q+r =995+005=1000 =10^3 से x=3}

∴ p\q * p\r =p*(p+1)\p*q जहाँ p*q का गुणनफल के अंकों की स्थान मूलाधार संख्या 10^x के प्रति 2x की पूर्ति नियम के अनुपालन में होगा। के अनुसार–

999995*999005 =999\995 * 999\005 =999(999+1)\995*005

=999*1000\004975 (995*005 =4975 चार अंकीय है x=3 के प्रति 6 अंकीय होना है

अतः स्थानपूर्ति नियम से 004975 दर्शित है।)

=999000004975 अ.गु.फ होगा ।

साधित हल■

1■ 12*18 = 1*2\2*8 = 216 अ. गु. .फ. होगा ।	2■ 36*34 = 3*4\6*4 = 1224 अ. गु. .फ होगा ।	3■ 61*69= 6*7\1*9 = 4209 अ. गु. .फ होगा । ।
4■ 846*854 = 8*9\46*54 = 722484 अ. गु. .फ होगा ।	5■ 1975*1925 = 19*20\75*25 = 3801975 अ. गु. .फ होगा ।	6■ 49967*49933 =499*500\ 67*33 =24952211 अ. गु. .फ होगा ।
7■ 5261*5739 =5*6\261*739 30192479 अ. गु. .फ होगा ।	8■ 56666*56334 =56*57\666*334 =3192\222444 =3192222444 । अ. गु. .फ होगा ।	9■ 899111 * 899889 = 899*900\111*889 =809100\098679 =809100098679 अ. गु .फ.. होगा ।
10■ 395*305 = 3 * 4\ 95*05 = 12\0475 = 120475 अ. गु. .फ होगा ।	11 ■ 8999*8001 = 8 * 9\ 999*001 = 72\000999 = 72000999 अ. गु. .फ होगा ।	12■ 799997*790003 = 79 * 80\ 9997*0003 = 6320\00029991 = 632000029991 अ. गु. फ.. होगा ।

----------11----------

अध्याय -12
वर्ग संख्या

12-1 वर्ग संख्या गुणन संक्रिया मे गुण्य = गुणक = कोई संख्या z हो तो गुण्य * गुणक के लिए प्राप्त गुणनफल m को z का वर्ग संख्या कहते है।अर्थात किसी संख्या में उसी संख्या का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल को उस संख्या का वर्ग संख्या कहते है।

स्केत यदि संख्या m संख्या z का वर्ग है तो संकेत में $z^2 = m$ दर्शित किया जाता है। और पढ़ते है z का वर्ग m

उदाहरण■ 4*4 =16 का संकेतन $4^2 = 16$ दर्शित कीजिए और पढ़े 4 का वर्ग का 16

8*8 =64 का संकेतन $8^2 = 64$ दर्शित कीजिए और पढ़े 8 का वर्ग का 64

(–5)*(–5) =25 का संकेतन $(-5)^2 = 25$ दर्शित कीजिए और पढ़े (–5) का वर्ग का 25

टीप चिन्ह गुणन संकेत नियम के अनुसार समान चिन्हों का गुणनफल सदैव धनात्मक होगा।

$(\pm z)*(\pm z) = S$ का संकेतन $(\pm z)^2 = S$ दर्शित कीजिए और पढ़े $(\pm z)$ का वर्ग का S

12 -2 संख्याओं का वर्ग मान ज्ञात करने की विधियाँ किसी का वर्ग ज्ञात करने रूप से अंकों का वर्ग मान तालिका अध्ययन पटल पर अथवा अन्तः मन में अवश्य होना चाहिए।

अंकों का वर्ग मान तालिका

अंक	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	±8	±9
वर्ग मान	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

(1) मूलाधार के पास की संख्याओं का वर्ग की घुचांक विधि इस विधि द्वारा गुणनफल की भाँति ही मूलाधार के पास–पास के संख्याओं का वर्गमान संख्या प्राप्त करते है। यदि संख्या z मूलाधार 10^x के पास की सं,ख्या हो तो संख्या z का वर्गमान गणना के दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग इस अनुभाग में घुचांक $v = (z - 10^x)$ के वर्गमान का मूलाधार 10^x के प्रति नियमानुसार† x स्थान से बनी संख्या दर्शित कीजिए।

2• बाँयें अनुभाग इस अनुभाग मे संख्या z और घुचांक v के योगमान में दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h (यदि हो तो)का योगफल संख्या दर्शित कीजिए।

अनुभाग विभाजन संकेत एवं दाँया अनुभाग मे दर्शित हासिल को छोड़कर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

विश्लेषित उदाहरण 1■ संख्या 12 का वर्गमान गणना के लिए संख्या z =12, मूलाधार $10=10^1$ से x=1 तथा घुचांक v=12–10 =2 प्रयुक्त कर संख्या 12 का वर्गमान गणना के दो अनुभाग निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग में घुचांक v=12–10 =2 का वर्गमान $2^2=4$ x=1 के प्रति एकअंकीय 4 ही दर्शित कीजिए।

2• बाँयें अनुभाग में संख्या z और घुचांक v के योगमान में दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h (यदि हो तो)का योगफल = 12+2 =14 दर्शित कीजिए। (दाँयें अनुभाग से प्राप्त हासिल h दर्शित नहीं है।)

अनुभाग विभाजन संकेत एवं दाँया अनुभाग मे दर्शित हासिल को छोड़ने पर– 144 अभीष्ट वर्गमान होगा।

गणना संकेत $12^2 = 12 + 2\backslash 2^2 = 14\backslash 4 = 144$ अभीष्ट वर्गमान होगा।

विश्लेषित उदाहरण 2■ संख्या 14 का वर्गमान गणना के लिए संख्या z =14, मूलाधार $10=10^1$ से x=1

† यदि घुचांक के वर्गमान में अंकों की स्थान संख्या x से कम हो तो बाँयी ओर 0 बढ़ाकर ग स्थान पूरा कीजिए। और यदि घुचांक के वर्गमान में अंकों की स्थान संख्या ग से अधिक हो तो इकाई, दहाई.......... की ओर से x स्थान तक के अंकों से बनी संख्या प्रतिस्थापित कर शेष अंकों से बनी संख्या को बतौर हासिल नीचे दर्शित कीजिए।

तथा घुचांक v=14–10

=4 प्रयुक्त कर संख्या 14 का वर्गमान गणना के दो अनुभाग निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

1• दाँये अनुभाग में घुचांक v =14–10 =4 का वर्गमान 4^2=16 x=1 के प्रति एकअंकीय 16 का इकाई अंक 6 दर्शित कीजिए और 16 के दहाई अंक 1 को बतौर हासिल 6 के दाँयी ओर नीचे दर्शित कीजिए। यथा– $_16$

2• बाँयें अनुभाग में संख्या z और घुचांक v के योगमान में दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h (यदि हो तो)का योगफल = 14+4+1 =19 दर्शित कीजिए। (दाँयें अनुभाग से प्राप्त हासिल h दर्शित नहीं है।)

अनुभाग विभाजन संकेत एवं दाँया अनुभाग मे दर्शित हासिल को छोड़ने पर– 196 अभीष्ट वर्गमान होगा।

गणना संकेत 14^2 = 14+4\\$4^2$ =18+1\\$_16$ =196 अभीष्ट वर्गमान होगा।

विश्लेषित उदाहरण 3■ संख्या 93 का वर्गमान गणना के लिए संख्या z =93, मूलाधार 100=10^2 से x=2 तथा घुचांक v=93–100 = $\bar{7}$ प्रयुक्त कर संख्या 93 का वर्गमान गणना के दो अनुभाग निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग में घुचांक v=93–100 =$\bar{7}$ का वर्गमान $\bar{7}^2$=49 x=2 के प्रति दो अंकीय 49 ही दर्शित कीजिए।

2• बाँयें अनुभाग में संख्या z और घुचांक v और दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h (यदि हो तो)का योगफल= 93+$\bar{7}$ =86 दर्शित कीजिए। (दाँयें अनुभाग से प्राप्त हासिल h दर्शित नहीं है।)

अनुभाग विभाजन संकेत एवं दाँया अनुभाग मे दर्शित हासिल को छोड़ने पर– 8649 अभीष्ट वर्गमान होगा।

गणना संकेत– $93^2 = 93 + \bar{7}\backslash\bar{7}^2 = 86\backslash 49 = 8649$ अभीष्ट वर्गमानहोगा।

विश्लेषित उदाहरण 4■ संख्या 103 का वर्गमान गणना के लिए संख्या z =103, मूलाधार 100=10^2 से x=2 तथा घुचांक v=103–100 = 3 प्रयुक्त कर संख्या 103 का वर्गमान गणना के दो अनुभाग निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग में घुचांक V=103–100 =3 का वर्गमान 3^2= 9 x=2 के प्रति दो अंकीय 09 दर्शित कीजिए।

2• बाँयें अनुभाग में संख्या z और घुचांक v के योग मान में दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h (यदि हो तो)का योगफल= 103+3 =106 दर्शित कीजिए। (दाँया अनुभाग से प्राप्त हासिल h दर्शित नहीं है।)

अनुभाग विभाजन संकेत एवं दाँया अनुभाग मे दर्शित हासिल को छोड़ने पर– 10609 अभीष्ट वर्गमान होगा।

गणना संकेत– $103^2 = 103 + 3\backslash 3^2 = 106\backslash 09 = 10609$ अभीष्ट वर्गमान होगा।

सांकेतिक हल उदाहरण■

मूलाधार 10 के पास की संख्याओं का वर्ग

उ.क्र.	संख्या	घुचांक	वर्ग संक्रिया
1■	5	$\bar{5}$	$5^2 = 5+\bar{5}\ \backslash\bar{5}^2 = 0\backslash{}_25 = 25$
2■	6	$\bar{4}$	$6^2 = 6+\bar{4}\ \backslash\bar{4}^2 = 2\backslash{}_16 = 36$
3■	7	$\bar{3}$	$7^2 = 7+\bar{3}\ \backslash\bar{3}^2 = 4\backslash 9 = 49$
4■	8	$\bar{2}$	$8^2 = 8+\bar{2}\ \backslash\bar{2}^2 = 6\backslash 4 = 64$
5■	9	$\bar{1}$	$9^2 = 9+\bar{1}\ \backslash\bar{2}^2 = 8\backslash 1 = 81$
6■	10	0	$10^2 = 10+0\ \backslash 0^2 = 10\backslash 0 = 100$
7■	11	1	$11^2 = 11+1\ \backslash 1^2 = 12\backslash 1 = 121$
8■	12	2	$12^2 = 12+2\ \backslash 2^2 = 14\backslash 4 = 144$
9■	13	3	$13^2 = 13+3\ \backslash 3^2 = 16\backslash 9 = 169$
10■	14	4	$14^2 = 14+4\ \backslash 4^2 = 18\backslash{}_16 = 196$
11■	15	5	$15^2 = 15+5\ \backslash 5^2 = 20\backslash{}_25 = 225$
12■	16	6	$16^2 = 16+6\ \backslash 6^2 = 22\backslash{}_36 = 256$

13■	17	4	$17^2 = 17+7 \backslash 7^2 = 24\backslash {}_{4}9 = 289$
14■	18	8	$18^2 = 18+8 \backslash 8^2 = 26\backslash {}_{6}4 = 324$
15■	19	9	$19^2 = 19+9 \backslash 9^2 = 28\backslash {}_{8}1 = 361$

मूलाधार 100 के पासकी संख्याओं का वर्ग

उ.क्र.	संख्या	घुचांक	वर्ग संक्रिया
1■	81	$\overline{19}$	$81^2 = 81+\overline{19} \backslash \overline{19}^2 = 62\backslash {}_{3}61 = 6561$
2■	82	$\overline{18}$	$82^2 = 82+\overline{18} \backslash \overline{18}^2 = 64\backslash {}_{3}24 = 6724$
3■	83	$\overline{17}$	$83^2 = 83+\overline{17} \backslash \overline{17}^2 = 66\backslash {}_{2}89 = 6889$
4■	84	$\overline{16}$	$84^2 = 84+\overline{16} \backslash \overline{16}^2 = 68\backslash {}_{2}56 = 7056$
5■	85	$\overline{15}$	$85^2 = 85+\overline{15} \backslash \overline{15}^2 = 70\backslash {}_{2}25 = 7225$
6■	86	$\overline{14}$	$86^2 = 86+\overline{14} \backslash \overline{14}^2 = 72\backslash {}_{1}96 = 7396$
7■	87	$\overline{13}$	$87^2 = 87+\overline{13} \backslash \overline{13}^2 = 74\backslash {}_{1}69 = 7569$
8■	88	$\overline{12}$	$88^2 = 88+\overline{12} \backslash \overline{12}^2 = 76\backslash {}_{1}44 = 7744$
9■	89	$\overline{11}$	$89^2 = 89+\overline{11} \backslash \overline{11}^2 = 78\backslash {}_{1}21 = 7921$
10■	90	$\overline{10}$	$90^2 = 90+\overline{10} \backslash \overline{10}^2 = 80\backslash {}_{1}00 = 8100$
11■	91	$\overline{9}$	$91^2 = 91+\overline{9} \backslash \overline{9}^2 = 82\backslash 81 = 8281$
12■	92	$\overline{8}$	$92^2 = 92+\overline{8} \backslash \overline{8}^2 = 84\backslash 64 = 8464$
13■	93	$\overline{7}$	$93^2 = 93+\overline{7} \backslash \overline{7}^2 = 86\backslash 49 = 8649$
14■	94	$\overline{6}$	$94^2 = 94+\overline{6} \backslash \overline{6}^2 = 88\backslash 36 = 8836$
15■	95	$\overline{5}$	$95^2 = 95+\overline{5} \backslash \overline{5}^2 = 90\backslash 25 = 9025$
16■	96	$\overline{4}$	$96^2 = 96+\overline{4} \backslash \overline{4}^2 = 92\backslash 16 = 9216$
17■	97	$\overline{3}$	$97^2 = 97+\overline{3} \backslash \overline{3}^2 = 94\backslash 09 = 9409$
18■	98	$\overline{2}$	$98^2 = 98+\overline{2} \backslash \overline{2}^2 = 96\backslash 04 = 9604$
19■	99	$\overline{2}$	$99^2 = 99+\overline{1} \backslash \overline{1}^2 = 98\backslash 01 = 9801$
20■	100	0	$100^2 = 100+0 \backslash 0^2 = 100\backslash 00 = 10000$
21■	101	1	$101^2 = 101+1 \backslash 1^2 = 102\backslash 01 = 10201$
22■	102	2	$102^2 = 102+2 \backslash 2^2 = 104\backslash 04 = 10404$
23■	103	3	$103^2 = 103+3 \backslash 3^2 = 106\backslash 09 = 10609$
24■	104	4	$104^2 = 104+4 \backslash 4^2 = 108\backslash 16 = 10816$
25■	105	5	$105^2 = 105+5 \backslash 5^2 = 110\backslash 25 = 11025$
26■	106	6	$106^2 = 106+6 \backslash 6^2 = 112\backslash 36 = 11236$
27■	107	4	$107^2 = 107+7 \backslash 7^2 = 114\backslash 49 = 11449$
28■	108	8	$108^2 = 108+8 \backslash 8^2 = 116\backslash 64 = 11664$
29■	109	9	$109^2 = 109+9 \backslash 9^2 = 118\backslash 81 = 11881$
30■	110	10	$110^2 = 110+10 \backslash 10^2 = 120\backslash {}_{1}00 = 12100$
31■	111	11	$111^2 = 111+11 \backslash 11^2 = 122\backslash {}_{1}21 = 12321$

32■	112	12	$112^2 = 112+12 \backslash 12^2 = 124\backslash_{1}44 = 12544$
33■	113	13	$113^2 = 113+13 \backslash 13^2 = 126\backslash_{1}69 = 12769$
34■	114	14	$114^2 = 114+14 \backslash 14^2 = 128\backslash_{1}96 = 12996$
35■	115	15	$115^2 = 115+15 \backslash 15^2 = 130\backslash_{2}25 = 13225$
36■	116	16	$116^2 = 116+16 \backslash 16^2 = 132\backslash_{2}56 = 13456$
37■	117	17	$117^2 = 117+17 \backslash 17^2 = 134\backslash_{2}89 = 13689$
38■	118	18	$118^2 = 118+18 \backslash 18^2 = 136\backslash_{3}24 = 13924$
39■	119	19	$119^2 = 119+19 \backslash 19^2 = 138\backslash_{3}61 = 14161$

मूलाधार 1000 के पास की संख्याओं का वर्ग

उ.क्र.	संख्या	घुचांक	वर्ग संक्रिया
1■	981	$\overline{19}$	$981^2 = 981+\overline{19} \backslash \overline{19}^2 = 962\backslash 361 = 962361$
2■	982	$\overline{18}$	$982^2 = 982+\overline{18} \backslash \overline{18}^2 = 964\backslash 324 = 964324$
3■	983	$\overline{17}$	$983^2 = 983+\overline{17} \backslash \overline{17}^2 = 966\backslash 289 = 966289$
4■	984	$\overline{16}$	$984^2 = 984+\overline{16} \backslash \overline{16}^2 = 968\backslash 256 = 968256$
5■	985	$\overline{15}$	$985^2 = 985+\overline{15} \backslash \overline{15}^2 = 970\backslash 225 = 970225$
6■	986	$\overline{14}$	$986^2 = 986+\overline{14} \backslash \overline{14}^2 = 972\backslash 196 = 972196$
7■	987	$\overline{13}$	$987^2 = 987+\overline{13} \backslash \overline{13}^2 = 974\backslash 169 = 974169$
8■	988	$\overline{12}$	$988^2 = 988+\overline{12} \backslash \overline{12}^2 = 976\backslash 144 = 976144$
9■	989	$\overline{11}$	$989^2 = 989+\overline{11} \backslash \overline{11}^2 = 978\backslash 121 = 978121$
10■	990	$\overline{10}$	$990^2 = 990+\overline{10} \backslash \overline{10}^2 = 980\backslash 100 = 980100$
11■	991	$\overline{9}$	$991^2 = 991+\overline{9} \backslash \overline{9}^2 = 982\backslash 081 = 982081$
12■	992	$\overline{8}$	$992^2 = 992+\overline{8} \backslash \overline{8}^2 = 984\backslash 064 = 984064$
13■	993	$\overline{7}$	$993^2 = 993+\overline{7} \backslash \overline{7}^2 = 986\backslash 049 = 986049$
14■	994	$\overline{6}$	$994^2 = 994+\overline{6} \backslash \overline{6}^2 = 988\backslash 036 = 988036$
15■	995	$\overline{5}$	$995^2 = 995+\overline{5} \backslash \overline{5}^2 = 990\backslash 025 = 990025$
16■	996	$\overline{4}$	$996^2 = 996+\overline{4} \backslash \overline{4}^2 = 992\backslash 016 = 992016$
17■	997	$\overline{3}$	$997^2 = 997+\overline{3} \backslash \overline{3}^2 = 994\backslash 009 = 994009$
18■	998	$\overline{2}$	$998^2 = 998+\overline{2} \backslash \overline{2}^2 = 996\backslash 004 = 996004$
19■	999	$\overline{2}$	$999^2 = 999+\overline{1} \backslash \overline{1}^2 = 998\backslash 001 = 998001$
20■	1000	0	$1000^2 = 1000+0 \backslash 0^2 = 1000\backslash 000 = 1000000$
21■	1001	1	$1001^2 = 1001+1 \backslash 1^2 = 1002\backslash 001 = 1002001$
22■	1002	2	$1002^2 = 1002+2 \backslash 2^2 = 1004\backslash 004 = 1004004$
23■	1003	3	$1003^2 = 1003+3 \backslash 3^2 = 1006\backslash 009 = 1006009$
24■	1004	4	$1004^2 = 1004+4 \backslash 4^2 = 1008\backslash 016 = 1008016$
25■	1005	5	$1005^2 = 1005+5 \backslash 5^2 = 1010\backslash 025 = 1010025$
26■	1006	6	$1006^2 = 1006+6 \backslash 6^2 = 1012\backslash 036 = 1012036$

27■	1007	4	1007^2 = 1007+7 \ 7^2 =1014\ 049=1014049
28■	1008	8	1008^2 = 1008+8 \ 8^2 =1016\ 064=1016064
29■	1009	9	1009^2 =1009+9 \ 9^2 =1018\081= 1018081
30■	1010	10	1010^2 =1010+10 \ 10^2 =1020\000= 1020000
31■	1011	11	1011^2 =1011+11 \ 11^2 =1022\121= 1022121
32■	1012	12	1012^2 =1012+12 \ 12^2 =1024\144= 1024144
33■	1013	13	1013^2 =1013+13 \ 13^2 =1026\169= 1026169
34■	1014	14	1014^2 =1014+14 \ 14^2 =1028\196= 1028196
35■	1015	15	1015^2 =1015+15 \ 15^2 =1030\225= 1030225
36■	1016	16	1016^2 =1016+16 \ 16^2 =1032\256= 1032256
37■	1017	17	1017^2 =1017+17 \ 17^2 =1034\289= 1034289
38■	1018	18	1018^2 =1018+18 \ 18^2 =1036\324= 1036324
39■	1019	19	1019^2 =1019+19 \ 19^2 =1038\361= 1038361

अभ्यास उपरांत मूलाधार 10^x के प्रति x बढ़ते मानों पर इनके पास की संख्याओं का वर्ग कम्प्यूटर से भी तेज गति से सरल एवं सीधा दर्शित कीजिए। जैसे– 999999889 के लिए मूलाधार 10^8 और घुचांक 111 से

$99999889^2 = 99999889 + \overline{111}\backslash\overline{111}^2$ =9999977800012321

(2) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनका सभी अंक 1 -1 हो m अंकीय संख्या जिनके सभी अंक 1-1 हो तो – इस संख्या का वर्गमान बहुत ही सरलता से तीन अनुभाग– बाँयें\ मध्य\ दाँयें में बाँटते हुए निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

बाँया अनुभाग में– बाँये से दाँये 1से प्रारंभ कर आगर–आगर (बढ़ते क्रमागत) अंकन मे (m–1) स्थान तक के दर्शित अंको से बनी संख्या होगी। यथा $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12} - - - - - (\underline{m-1})^{\dagger}$

मध्य अनुभाग में – केवल m का मान दर्शित कीजिए।

दाँया अनुभाग में – बाँया अनुभाग में दर्शित अंकन श्रृंखला को उलटकर दर्शित कीजिए।

यथा उपरोक्त बाँया अनुभाग में दर्शित $1,2,3,4,5,6,7,8,9,\underline{10},\underline{11},\underline{12} - - - - - (\underline{m-1})$

को उलटकर दाँया अनुभाग में $(\underline{m-1}) - - - - \underline{12},\underline{11},\underline{10},9,8,7,6,5,4,3,2,1$ दर्शित होगा।

साधित उदाहरण■

1■ 11^2= 1\2\1 =121

2■ 111^2= 1,2\3\2,1 =12321

3■ 1111^2= 1,2,3\4\3,2,1 =12321

4■ 11111^2= 1,2,3,4,\5\,4,3,2,1 =123454321

5■ 111111^2= 1,2,3,4,5\6\5,4,3,2,1 =12345654321

6■ 1111111^2= 1,2,3,4,5,6\7\6,5,4,3,2,1 =1234567654321

7■ 11111111^2= 1,2,3,4,5,6,7\8\7,6,5,4,3,2,1 =123456787654321

8■ 111111111^2= 1,2,3,4,5,6,7,8,\9\8,7,6,5,4,3,2,1 =12345678987654321

9■ 1111111111^2= 1,2,3,4,5,6,7,8,9\ $\underline{10}$\9,8,7,6,5,4,3,2,1 =1234567900987654321

10■ 11111111111^2= 1,2,3,4,5,6,7,8,9, $\underline{10}\backslash\underline{11}\backslash\underline{10}$9,8,7,6,5,4,3,2,1

=123456790120987654321

11■ 111111111111^2=1,2,3,4,5,6,7,8.9. $\underline{10},\underline{11}\backslash\underline{12}\backslash\underline{11},\underline{10}$ 9,8,7,6,5,4,3,2,1

=12345679012320987654321

12■ 1111111111111*1111111111111

= 1,2,3,4,5,6,7,8,9,$\underline{10}$, $\underline{11}$, $\underline{12}$\$\underline{13}$\$\underline{12}$, $\underline{11}$, $\underline{10}$, 9,8,7,6,54,3,2,1

= 1234567 9 01234320987654321

(3) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनका सभी अंक 9-9 हो वर्गमान को दो अनुभाग बाँयें अनुभाग और दाँयें अनुभाग में बाँटते हुए– बाँया अनुभाग में संख्या का उना (संख्या −1) जो संख्या के इकाई अंक 9 मात्र को उना (9 −1) करने से 8 प्राप्त होगा दर्शित कीजिए। तथा दाँया अनुभाग में बाँया अनुभाग में प्राप्त हल के प्रत्येक अंको का 9 पुरनी यथा क्रम दर्शित कीजिए।

साधित उदाहरण■

1■ 9^2= 8\ 1 =81 2■ 99^2= 98\ 01 =9801 3■ 999^2= 998\ 001 =998001

4■ 9999^2= 9998\ 0001 =99980001 5■ 99999^2= 99998\ 00001 =9999800001

6■ 999999^2=999998\ 00001 =999998000001 7■ 9999999^2= 9999998\ 0000001 =9999800001 8■ 99999999^2= 99999998\ 00000001 =9999999800000001

12-3 संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करने में आधार मिति का अनुप्रयोग–

(1) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनका इकाई अंक 5 हो

ऐसी संख्याएँ जिनका इकाई अंक **5** हो **A5** स्वरूप की संख्या होगी। तब **A5** का वर्गमान गणना निम्नानुसार दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग में इस अनुभाग में इकाई अंक 5 का वर्गमान 25 दर्शित कीजिए।

2• बाँयें अनुभाग में इकाई अंक **5** के अतिरिक्त शेष अंकों से बनी संख्या **A** और इसके आगर संख्या **(A+1)** का गुणनफल दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाकर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

हल संकेत **$(A5)^2$= A*(A+1)\25**

प्रमाण अध्याय 11 में दिये विशेष गुणन प्रमेय के अनुसार–

$(A5)^2 = (10A+5)^2 = 10^2A^2+100A+25 \quad = 10^2A^2+10^2A+25 = 10^2A(A+1)+25$

$= 100A^2 + 100A+25$

= 100 {A*(A+1} +25

= $[A*(A+1)/25]_{100}$ 100 के आधारमिति से।

= A*(A+1)\25 बाँया दाँया पक्ष विभाजन से **प्रमाणित।**

साधित उदाहरण■

संख्या	संख्या का वर्गमान	संख्या	संख्या का वर्गमान
15	15^2 =1*2\25 = 225	105	105^2 =10*11\25 = 11025
25	25^2 =2*3\25 = 625	115	115^2 =11*12\25 = 13225
35	35^2 =3*4\25 = 1225	125	125^2 =12*13\25 = 15625
45	45^2 =4*5\25 = 2025	135	135^2 =13*14\25 = 18225
55	55^2 =5*6\25 = 3025	145	145^2 =14*15\25 = 21025
65	65^2 =6*7\25 = 4225	155	155^2 =15*16\25 = 24025
75	75^2 =7*8\25 = 5625	165	165^2 =16*17\25 = 27225
85	85^2 =8*9\25 = 7225	175	175^2 =17*18\25 = 30625
95	95^2 =9*10\25 = 9025	185	185^2 =18*19\25 = 34225

(2) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनके इकाई एवं दहाई अंक से बनी संख्या 5^2=25 हो

ऐसी संख्याएँ जिनका दहाई एवं इकाई अंक से बनी संख्या **5^2 =25** हो **A25** स्वरूप की संख्या होगी। तब **A25** का वर्गमान गणना निम्नानुसार दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँयें अनुभाग में इस अनुभाग में दहाई एवं इकाई अंक से बनी संख्या 25 का वर्गमान 625 दर्शित कीजिए।

2• बाँया अनुभाग में दहाई अंक 2 के अतिरिक्त शेष अंकों से बनी संख्या A5 और दहाई एवं इकाई अंक क्रमशः 2 और 5 के अतिरिक्त अंकों से बनी संख्या A का गुणनफल दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाकर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

हल संकेत $(A25)^2 = A5*A\backslash 625$

प्रमाण $(A25)^2 = (100A + 25)^2 = 100^2A^2 + 5000A + 625$

$= 100^2A^2 + 2*25*100A + 625$

$= 1000A^2 + 1000A + 625$

$= 1000[A(10A + 5)] + 625$

$= [A * A5/625]_{1000}$ 1000 के आधारमिति से ।

$= A5*A\backslash 625$ बाँया दाँया पक्ष विभाजन से । **प्रमाणित**

साधित उदाहरण■

संख्या	संख्या का वर्गमान	संख्या	संख्या का वर्गमान
125	125^2 =15*1\625 = 15625	1125	1125^2 =115*11\625 = 1265625
225	225^2 =25*2\625 = 50625	1225	1225^2 =125*12\625 = 1500625
325	325^2 =35*3\625 = 105625	1325	1325^2 =135*13\625 = 1755625
425	425^2 =45*4\625 = 180625	1425	1425^2 =145*14\625 = 2030625
525	525^2 =55*5\625 = 275625	1525	1525^2 =155*15\625 = 2325625
625	625^2 =65*6\625 = 390625	1625	1625^2 =165*16\625 = 2640625
725	725^2 =75*7\625 = 525625	1725	1725^2 = 175 * 17\625= 2945625
825	825^2 =85*8\625 = 680625	1825	1825^2 =185*18\625 = 3330625
925	925^2 =95*9\625 = 855625	1925	1925^2 =195*19\625 =370 5625
1025	1025^2 =105*10\625 = 1050625	2025	2025^2 =205*20\625= 4100625

(3) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनके इकाई, दहाई एवं सैकड़ा के अंको से बनी संख्या 5^3=125 हो

ऐसी संख्याएँ जिनका सैकड़ा दहाई एवं इकाई अंक से बनी संख्या **5^3=125** हो **A125** स्वरूप की संख्या होगी। तब **A125** का वर्गमान गणना निम्नानुसार दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँया अनुभाग में इस अनुभाग में 5625 दर्शित कीजिए।

2• बाँया अनुभाग में सैकड़ा अंक 1 के अतिरिक्त शेष अंकों से बनी संख्या A25 और A का गुणनफल का आगर (एकाधिक) संख्या दर्शित कीजिए। अनुभाग विभाजन संकेत हटाकर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

हल संकेत $(A125)^2 = A25*A+1\backslash 5625$

प्रमाण $(A125)^2 = (1000A + 125)^2 = 1000^2A^2 + 250000A + 15625$

$= 1000000A^2 + 25*10000A + 10000 + 5625$

$= 10000\{A(100A + 25) + 1\} + 5625$

$= [A*(A25) + 1\} /5625]_{1000}$ 10000 आधारमिति पर ।

$= A25*A + 1\backslash 5625$ **प्रमाणित।**

साधित उदाहरण■

1125^2 =125*1+1\5625 = 1265625	8125^2 =825*8+1\5625= 6601562
2125^2 =225*2+1\5625 = 4515625	9125^2 =925*9+1\5625 =83265625
3125^2 =325*3+1\5625 = 9765625	10125^2 =1025*10+1\5625 =102515625
4125^2 =425*4+1\5625 = 17015625	11125^2 =1125*11+1\5625 =123765625
5125^2 =525*5+1\5625 = 26265625	12125^2 =1225*12+1\5625 =1470165625
6125^2 =625*6+1\5625 = 37515625	13125^2 =1325*13+1\5625 =172265625
7125^2 =725*7+1\5625 = 50765625	14125^2 =1425*14+1\5625 =199515625

(4) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनके इकाई , दहाई एवं सैकड़ा के अंको से बनी संख्या 5^4 =625 हो

ऐसी संख्याएँ जिनका सैकड़ा दहाई एवं इकाई अंक से बनी संख्या 5^4 =625 हो **A625** स्वरूप की संख्या होगी। तब **A625** का वर्गमान गणना निम्नानुसार दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँया अनुभाग में इस अनुभाग में 0625 दर्शित कीजिए।

2• बाँया अनुभाग में $A25 * (A + 1) + 14$ का हल मान होगा।

हल संकेत $(\mathbf{A625})^2 = A25 * (A + 1) + 14/0625$ से बाँया दाँया पक्ष विभाजक विलोपित कर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

प्रमाण $(A625)^2 = (1000A + 625)^2 = 1000^2A^2 + 1250000A + 390655$

$= 1000000A^2 + 125 * 10000A + 390000 + 0625$

$= 10O00\{100A^2 + 125A + 39) + 0625$

$= [(100A^2 + 125A + 39) / 0625]_{10000}$ $\underline{10000}$ आधारमिति पर ।

$= [\{(00A^2 + 125A + 25) + 14\}/0625]_{10000}$

$= [\{(100A * 25) * (A + 1) + 14\}/0625]_{10000}$

$= [A25 * (A + 1) + 14/0625]_{10000}$

$= A25 * (A + 1) + 14/0625$ **प्रमाणित।**

साधित उदाहरण■

1• 1625^2 = 125*(1+1)+14/0625 = 125*2+14/ 0625= 2640625

2• 2625^2 = 225*(2+1)+14/0625 = 225*3+14/ 0625= 6890625

3• 3625^2 = 325*(3+1)+14/0625 = 325*4+14/ 0625=13140625

4• 4625^2 = 425*(4+1)+14/0625 = 425*5+14/ 0625=21390625

5• 5625^2 = 525*(5+1)+14/0625 = 525*6+14/ 0625=31640625

6• 6625^2 = 625*(6+1)+14/0625 = 625*7+14/ 0625= 43890625

(5) उन संख्याओं का वर्गमान ज्ञात करना जिनके इकाई , दहाई , सैकड़ा एवं हजार के अंको से बनी संख्या 5^5 =3125 हो

ऐसी संख्याएँ जिनका सैकड़ा दहाई एवं इकाई अंक से बनी संख्या 5^5 =3125 हो **A3125** स्वरूप की संख्या होगी। तब **A3125** का वर्गमान गणना निम्नानुसार दो अनुभाग में कीजिए।

1• दाँया अनुभाग में इस अनुभाग में 65625 दर्शित कीजिए। **2• बाँया अनुभाग में** $A625 * A + 97$ का हल मान होगा।

हल संकेत $(\mathbf{A3125})^2 = A625 * A + 97/65625$ से बाँया दाँया पक्ष विभाजक विलोपित कर अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

प्रमाण $(A3125)^2 = (10000A + 3125)^2 = 10000^2A^2 + 62500000A + 9765655$

$= 100000000A^2 + 625 * 100000A + 970000 + 65625$

$= 10O000\{1000A^2 + 625A + 97) + 65625$

$= [(1000A^2 + 625A + 97) / 65625]_{100000}$ 100000 आधारमिति पर ।

$= [A * (1000A + 625) + 97/65625]_{100000}$

$= A625 * A + 97/65625$ **प्रमाणित।**

साधित उदाहरण■

1• 13125^2 = 1625*1+97/65625 =1625+97/65625 = 172265625

2• 23125^2 = 2625*2+97/65625 =5250+97/65625 = 534765625

3• $33125^2 = 3625*3+97/65625 = 10875+97/65625 = 1097265625$

4• $43125^2 = 4625*4+97/65625 = 18500+97/65625 = 1859765625$

5• $53125^2 = 5625*5+97/65625 = 28125+97/65625 = 2822265625$

6• $63125^2 = 6625*6+97/65625 = 39750+97/65625 = 3984765625$

(6) उन संख्या का वर्गमान ज्ञात करना जिसके बाँयी ओर से एक निश्चित संख्या मान A बाद इकाई ओर बढ़ते सभी अंक 9 n स्थानिक में 9- 9 हो। अर्थात् संकेतन में संख्या A999---999 दर्शित हो।

हल विस्तारित शब्दों में – बाँया पक्ष/दाँया पक्ष में –

बाँया पक्ष = [संख्या A का आगर मान (A+1)]*[संख्या **A999---999** का उना मान (A999---998) का हल मान

दाँया पक्ष= संख्या (999---999) का उना मान (999---998) के अंकों का 9 पुरनी 000-----001 दर्ज कीजिए।

संकेतन में $(\mathbf{A999---999})^2 = (A+1)*(A999----998)/\,000----001$

बाँया पक्ष/दाँया पक्ष विळाजन संकेत / हटाइये और अभीष्ट वर्गमान प्राप्त कीजिए।

उदाहरण **1■** $9^2 = (09)^2 = (0+1)*08/1 = 81$ **2■** $49^2 = (4+1)*48/1 = 5*48/1 = 2401$

3■ $699^2 = (6+1)*698/01 = 7*698/01 = 488601$

4■ $129999^2 = (12+1)*129998/0001 = 13*129998/0001 = 16899740001$

5■ $99989999^2 = (9998+1)*99989998/0001 = 9999*99989998/0001$

$= 9997999900020001$

12-4 व्यापक विधि किसी संख्या का वर्गमान संख्या को ही गुण्य और गुणक के रूप में प्रतिस्थापित करने प्राप्त गुणनफल से है, अतः गुणा के व्यापक विधि को किसी संख्या का वर्गमान प्राप्त करने की व्यापक विधि के रूप लिया जाना चाहिए।

सामान्य संख्यांकन में	उनागर संख्यांकन
1■$89^2 =$ 8 9 *8 9 $79 \backslash {}_{15}2 \backslash {}_{8}1$ =7921 अभीष्ट वर्गमान होगा।	$89^2 = (1\bar{1}\bar{1})^2 = 1\ \bar{1}\ \bar{1}$ $*1\ \bar{1}\ \bar{1}$ $1 \backslash \bar{2} \backslash \bar{1} \backslash 2 \backslash 1$ = 7921 अभीष्ट वर्गमान होगा।
2■$879^2 =$ 8 7 9 *8 7 9 $77 \backslash {}_{13}2 \backslash {}_{20}6 \backslash {}_{13}4 \backslash {}_{8}1$ =772641 अभीष्ट वर्गमान होगा।	$879^2 = (1\bar{1}\bar{2}\bar{1})^2 = 1\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}$ $*1\ \bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1}$ $1 \backslash \bar{2} \backslash \bar{3} \backslash 2 \backslash 6 \backslash 4 \backslash 1$ $1\bar{2}\bar{3}2641 = 772641$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
3■ $1978^2 =$ 1 9 7 8 * 1 9 7 8 $3 \backslash {}_{2}9 \backslash {}_{11}1 \backslash {}_{16}2 \backslash {}_{20}4 \backslash {}_{11}8 \backslash {}_{6}4$ = 3912484 अभीष्ट वर्गमान होगा।	$1978^2 = (20\bar{2}\,\bar{2})^2 = 2\ 0\ \bar{2}\ \bar{2}$ $*\ 2\ 0\ \bar{2}\ \bar{2}$ $4 \backslash 0 \backslash \bar{8} \backslash \bar{8} \backslash 4 \backslash 8 \backslash 4$ $= 40\bar{8}\bar{8}484 = 3912484$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
4■ $78934^2 =$ 7 8 9 3 4 * 7 8 9 3 4 $62 \backslash {}_{13}3 \backslash {}_{21}0 \backslash {}_{50}5 \backslash {}_{19}7 \backslash {}_{12}6 \backslash {}_{8}3 \backslash {}_{2}5 \backslash {}_{1}6$ = 6230576356 अभीष्ट वर्गमान होगा।	$78934^2 = (1\bar{2}\bar{1}\bar{1}34)^2 =$ $1\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{1}\ 3\ 4$ $*\ 1\ \bar{2}\ \bar{1}\ \bar{1}\ 3\ 4$ $1 \backslash \bar{4} \backslash 2 \backslash 3 \backslash {}_{1}1 \backslash \bar{4} \backslash {}_{\bar{2}}\bar{2} \backslash {}_{\bar{1}}\bar{4} \backslash 3 \backslash {}_{2}5 \backslash {}_{1}6$ $= 1\,\bar{4}231\bar{4}\bar{2}\bar{4}\,356 = 6230576356$ अभीष्ट वर्गमान होगा।

संशोधित व्यापक विधि• संशोघन हेतू विश्लेषण

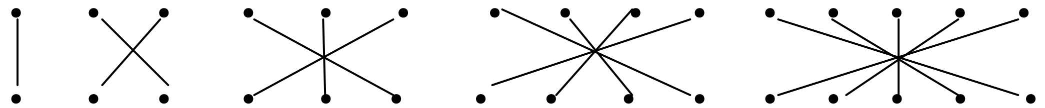
पाँच अंकीय गुण्य और गुणक का गुणन संक्रिया से

गुण्य • • • • • A_5 A_4 A_3 A_2 A_1

गुणक • • • • • A_5 A_4 A_3 A_2 A_1 गुण्य = गुणक लेने पर

हल प्रक्रम संकेत

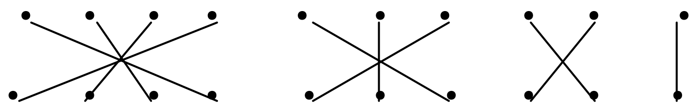
A_5 A_5 A_4 A_5 A_4 A_3 A_5 A_4 A_3 A_2 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1



A_5 A_5 A_4 A_5 A_4 A_3 A_5 A_4 A_3 A_2 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1

खड़ी संति संति एवं खड़ी संति–संति संति–संति एवं खड़ी

A_4 A_3 A_2 A_1 A_3 A_2 A_1 A_2 A_1 A_1



A_4 A_3 A_2 A_1 A_3 A_2 A_1 A_2 A_1 A_1

संति–संति संति खड़ी संति खड़ी से

संख्या $[A_5A_4A_3A_2A_1]^2 = A_5*A_5\backslash A_5*A_4+A_5*A_4\backslash A_5*A_3+A_5*A_3+A_4*A_4\backslash\ A_5*A_2+A_5*A_2+A_4*A_3+A_4*A_3\backslash A_5*A_1+A_5*A_1+A_4*A_2+A_4*A_2+A_3*A_3\backslash\ A_4*A_1+A_4*A_1+A_3*A_2+A_3*A_2\backslash A_3*A_1+A_3*A_1+A_2*A_2\backslash A_2*A_1+A_2*A_1\backslash A_1*A_1$

$=A_5^2\backslash 2A_5*A_4\backslash 2A_5*A_3+A_4^2\backslash 2A_5*A_2+2A_4*A_3\backslash 2A_5*A_1+2A_4*A_2+A_3^2\backslash 2A_4*A_1+2A_3*A_2\backslash 2A_3*A_1+A_2^2\backslash 2A_2*A_1\backslash A_1^2$ से नियमुसार अनुभाग विभाजन रेखा विलोपित करने से प्राप्त संख्या होगी।

उक्त छायांकित हल पद को छत्तीस गढ़ी में आड़ी (पंक्ति) गुणा सकेलन विधि का अनुप्रयोग कर सकते है।जिसे वैदिक गणित में द्वंदयोगा सूत्र कहा गया है। हिन्दी भाषा में द्वयात्मक संयोजन के रूप में जाना जा सकता है। उक्त विधि का व्यापक विश्लेषण के लिये–

1• यदि n अंकीय संख्या ($A_n A_{n-1} A_{n-2}$---------$A_3A_2A_1$) हो तो वर्गमान का गणना हल (2n-1) अनुभाग में पूरा होंगे।

2• वर्गमान का गणना हल (2n-1) अनुभाग में दाँये से बाँये अथवा बाँये से दाँये क्रमशः 1\2\3\ - - - \n-2\n-1\n\n-1\n-2\- - -\3\2\1 अंक के संगत द्वयात्मक संयोजन होगा।

3• द्वयात्मक संयोजन का स्वरूप

(1) सम स्थानिक (2, 4, 6, 8, 10----) अनुभाग के संदर्भ में केवल दोगुना के अर्थ स्वरूप में होगा। जिसके अनुसार आदि आदि और अंत की ओर से एक ही क्रम स्थान के अंकों के गुणनफलों का दोगुना योग कीजिए।

जैसे–2 अंक A_2, A_1 के संगत $A_2\ A_1 = 2A_2*A_1$

4 अंक A_4, A_3, A_2, A_1 के संगत $A_4\ A_3\ A_2\ A_1 = 2A_4*A_1+2A_3*A_2$

6 अंक $A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$ के संगत $A_6\ A_5\ A_4\ A_3\ A_2\ A_1 = 2A_6*A_1+2A_5*A_2+2A_4*A_3$

8 अंक $A_8, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$ के संगत $\quad A_8 \; A_7, \; A_6 \; A_5 \; A_4 \; A_3 \; A_2 \; A_1$

$$=2A_0 * A_1 + 2A_7 * A_2 + 2A_6 * A_3 + 2A_5 * A_4$$

10 अंक $A_{10}, A_9, A_8, A_7, A_6, A_5, A_4, A_3, A_2, A_1$ के संगत $\quad A_{10} \; A_9 \; A_8 \; A_7 \; A_6 \; A_5 \; A_4 \; A_3 \; A_2 \; A_1$

$$= 2A_{10} * A_1 + 2A_9 * A_2 + 2A_8 * A_3 + 2A_7 * A_4 + 2A_6 * A_5$$

(2) विषम स्थानिक (1, 3, 5, 7, 9----) अनुभाग के संदर्भ में दोगुना और वर्ग के अर्थ स्वरूप में होगा। इसी अर्थ भाव पर वैदिक गणित अध्ययन में यावदूनीम् च वर्ग योज्येत (दुगुना और वर्ग का योग कीजिए) सूत्र प्रतिपादित है जिसके अनुसार आदि और अंत की ओर से एक ही क्रम स्थान के अंकों के गुणनफलों का दुगुना में केवल मध्य अंक का वर्गमान का योग कीजिए। जैसे–

1 अंक A_1 के संगत $[A_1] \;= (A_1)^2$

3 अंक A_3, A_2, A_1 के संगत $\quad A_3 \; [A_2] \; A_1 \; = 2A_3 * A_1 + (A_2)^2$

5 अंक $A_5, A_4\, A_3, A_2, A_1$ के संगत $\quad A_5 \; A_4 \; [A_3] \; A_2 \; A_1 \; = 2A_5 * A_1 + 2A_4 * A_2 + (A_3)^2$

7 अंक $A_7, A_6\, A_5, A_4\, A_3, A_2, A_1$ के संगत $\quad A_7 \; A_6 \; A_5 \; [A_4] \; A_3 \; A_2 \; A_1$

$$=2A_7 * A_1 + 2A_6 * A_2 + 2A_5 * A_3 + (A_4)^2$$

9 अंक $A_9, A_8, A_7, A_6\, A_5, A_4\, A_3, A_2, A_1$ के संगत $\quad A_9 \; A_8 \; A_7 \; A_6 \; [A_5] \; A_4 \; A_3 \; A_2 \; A_1$

$$=2A_9 * A_1 + 2A_8 * A_2 + 2A_7 * A_3 + 2A_6 * A_4 + (A_5)^2$$

साधित उदाहरण■

सामान्य संख्याकन में	उनागर संख्यांकन में
1■ 69^2 $= 6^2\backslash 2*(6*9)\backslash 9^2$ $=36\backslash 108\backslash 81$ $= 47\backslash {}_{11}6\backslash {}_{8}1$ $=4761$ अभीष्ट वर्गमान होगा।	$69^2 = (1\bar{3}\bar{1})^2$ $= 1^2\backslash 2*(1*\bar{3})\backslash 2*(1*\bar{1})+\bar{3}^2\backslash$ $2*(\bar{3}*\bar{1})\backslash\bar{1}^2$ $= 1\backslash\bar{6}\backslash 7\backslash\ 6\backslash 1$ $= 1\bar{6}\,761$ $=4761$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
2■ $287^2 =\backslash 2^2\backslash 2*(2*8)\backslash 2*(2*7)+8^2\backslash$ $\backslash 2*(8*7)\backslash 7^2$ $= 4\backslash 32\backslash 92\backslash 112\backslash 49$ $= 8\backslash {}_{4}2\backslash {}_{10}4\backslash {}_{11}6\backslash {}_{4}9$ $= 82369$ अभीष्ट वर्गमान होगा।	$287^2 = 3\bar{1}\,\bar{3}\,^2$ $=\backslash 3^2\backslash 2*(3*\bar{1})\backslash 2*(3*\bar{3})+(\bar{1})^2\backslash 2*(\bar{1}*\bar{3})\backslash(\bar{3})^2$ $= 9\backslash\bar{6}\backslash\bar{1}\bar{7}\backslash 6\backslash 9$ $= 9\backslash\bar{7}\backslash {}_{\bar{1}}\bar{7}\backslash 6\backslash 9$ $= 82369$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
3■ 2792^2 $= 2^2\backslash 2*(2*7)\backslash 2*(2*9)+7^2\backslash$ $2*(2*2)+2*(7*9)\backslash 2*(7*2)+9^2\backslash 2*(9*2)\backslash 2^2$ $= 4\backslash 28\backslash 85\backslash 134\backslash 109\backslash 36\backslash 4$ $= 7\backslash {}_{3}7\backslash {}_{9}9\backslash {}_{14}5\backslash {}_{11}2\backslash {}_{3}6\backslash 4$ $= 7795264$ अभीष्ट वर्गमान होगा।	$2792^2 = (3\bar{2}\bar{1}2)^2$ $3^2\backslash 2*(3*\bar{2})\backslash 2*(3*\bar{1})+\bar{2}^2\backslash 2*(3*2)+2*(\bar{2}*$ $\bar{1})\backslash 2*(\bar{2}*2)+\bar{1}^2\backslash 2*(\bar{1}*2)\backslash 2^2$ $= 9\backslash\bar{1}\bar{2}\backslash\bar{2}\backslash 16\backslash\bar{7}\backslash\bar{4}\backslash 4$ $=8\backslash {}_{\bar{1}}\bar{2}\backslash\bar{1}\backslash {}_{1}6\backslash\bar{7}\backslash\bar{4}\backslash 4$ $= 8\bar{2}\bar{1}6\bar{7}\bar{4}4 = 7795264$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
4■ 64231^2 $=6^2\backslash 2*(6*4)\backslash 2*(6*2)+4^2\backslash 2*(6*3)+2(4*2$ $)\backslash 2*(6*1)+2*(4*3)+2^2\backslash 2*(4*1)+2*(2*3)\backslash$ $2*(2*1)+3^2\backslash 2*(3*1)\backslash 1^2$ $= 36\backslash 48\backslash 40\backslash 52\backslash 40\backslash 20\backslash 13\backslash 6\backslash 1$ $= 41\backslash {}_{5}2\backslash {}_{4}5\backslash {}_{5}6\backslash {}_{4}2\backslash {}_{2}1\backslash {}_{1}3\backslash 6\backslash 1$ $=4125621361$ अभीष्ट वर्गमान होगा।	$64231^2 = (1\bar{4}4231)^2$ $=1^2\backslash 2*(1*\bar{4})\backslash 2*(1*4)+\bar{4}^2\backslash 2*(1*2)+2*(\bar{4}*4)\backslash$ $2*(1*3)+2*(\bar{4}*2)+4^2\backslash 2*(1*1)+2*(\bar{4}*3)$ $+2*(4*2)\backslash 2*(\bar{4}*1)+2(4*3)+2^2\backslash 2*(4*1)$ $+2*(2*3)\backslash 2*(2*1)+3^2\backslash 2*(3*1)\backslash 1^2$ $= 1\backslash\bar{8}\backslash {}_{2}4\backslash {}_{\bar{2}}\bar{8}\backslash 6\backslash\bar{6}\backslash {}_{2}0\backslash {}_{2}0\backslash {}_{1}3\backslash 6\backslash 1$ $= 1\backslash\bar{6}\backslash {}_{2}2\backslash\bar{2}\backslash 6\backslash\bar{4}\backslash {}_{2}2\backslash {}_{2}1\backslash {}_{1}3\backslash 6\backslash 1$ $= 1\bar{6}2\bar{8}6\bar{4}21361 =4125621361$ अभीष्ट वर्गमान होगा।
5 ■ $8178932^2 =$ $8^2\backslash 2*(8*1)\backslash 2*(8*7)+1^2\backslash 2*(8*8)+2*(1*7)$ $\backslash 2*(8*9)+2*(1*8)+7^2\backslash 2*(8*3)+2*(1*9)+$ $2(7*8)\backslash 2*(8*2)+2(1*3)+2(7*9)+8^2\backslash 2*(1$ $*2)+2(7*3)+2(8*9)\backslash 2*(7*2)+2*(8*3)+9^2$ $\backslash 2*(8*2)+2*(9*3)\backslash 2*(9*2)+3^2\backslash 2*(3*2)\backslash$ 2^2 $=64\backslash 16\backslash 113\backslash 142\backslash 209\backslash 178\backslash 228\backslash 190\backslash 157$ $\backslash 86\backslash 45\backslash 12\backslash 4$ $=66\backslash {}_{2}8\backslash {}_{12}9\backslash {}_{16}4\backslash {}_{22}9\backslash {}_{20}2\backslash {}_{24}8\backslash {}_{20}6\backslash {}_{16}6\backslash {}_{9}0\backslash {}_{4}6$ $\backslash {}_{1}2\backslash 4$ $= 66894928660624$ अभीष्ट वर्गमान होगा।	$8178932^2 = (1\bar{2}2\bar{2}\bar{1}\bar{1}32)^2$ $= 1^2\backslash 2*(1*\bar{2})\backslash 2*(1*2)+\bar{2}^2\backslash 2*(1*\bar{2})+2*(\bar{2}*2)\backslash$ $2*(1*\bar{1})+2*(\bar{2}*\bar{2})+2^2\backslash 2*(1*\bar{1})+2*(\bar{2}*\bar{1})+$ $2*(2*\bar{2})\backslash 2*(1*3)+2*(\bar{2}*\bar{1})\ )+2*(2*\bar{1})+\bar{2}^2\backslash$ $2*(1*2)+2*(\bar{2}*3)+2*(2*\bar{1})+2*(\bar{2}*\bar{1})\backslash$ $2*(\bar{2}*2)+2*(2*3)+2*(\bar{2}*\bar{1})+\bar{1}^2\backslash 2*(2*2)+$ $2*(\bar{2}*3)+2*(\bar{1}*\bar{1})\backslash 2*(\bar{2}*2)+2*(\bar{1}*3)+\bar{1}^2\backslash$ $2*(\bar{1}*2)+2*(\bar{1}*3)\backslash 2(\bar{1}*2)+3^2\backslash 2*(3*2)\backslash 2^2$ $= 1\backslash\bar{4}\backslash 8\backslash\bar{1}\bar{2}\backslash 10\backslash\bar{6}\backslash 10\backslash\bar{8}\backslash 9\backslash\bar{2}\backslash\bar{1}\bar{3}\backslash\bar{1}0\backslash 5\backslash 12\backslash 4$ $= 1\backslash\bar{4}\backslash 7\backslash {}_{\bar{1}}\bar{1}\backslash {}_{1}0\backslash\bar{5}\backslash {}_{1}0\backslash\bar{8}\backslash 9\backslash\bar{3}\backslash {}_{\bar{1}}\bar{4}\backslash {}_{1}0\backslash 6\backslash {}_{1}2\backslash 4$ $=1\bar{4}7\bar{1}0\,\bar{5}0\bar{8}9\bar{3}\bar{4}0624$ $=6689\,4928660624$ अभीष्ट वर्गमान होगा।

विवेचना गुणा एवं वर्गमान ज्ञात करने की प्रतिबंध में प्रस्तुत विधियाँ जादुई हल देता प्रतीत होता पायेंगे। इसी तारतम्य में प्रस्तुत व्यापक विधि के अन्तर्गत विस्तारित हल का सतत् अभ्यास उपरांत सामान्य संख्यांकन में दो पद तथा उनागर संख्यांकन में तीन पद में ही दर्शित करने में सफल होंगे। 2, 3,4 अंकीय संख्याओं का सीधा मौखिक गणना अन्तर्गत अंतिम उत्तर पद ही देने में सक्षम होते पायेंगे ही साथ–साथ मौखिक जोड़ने–घटाने की संक्रिया में भी अपने आप को सक्षम होते पायेंगे।

12-5 गुणन संक्रिया में वर्गिक संख्या का अनुप्रयोग

बीजगणित अध्ययन अन्तर्गत सिद्ध किया जा चुका है कि– दो संख्याओं के योगमान एवं उनके बीच के अन्तर मान का गुणनफल उन संख्याओं के वर्गिक अन्तरमान के बराबर होता है।

संकेत में – संख्या A और संख्या B के लिए– $(A+B)*(A-B) = A^2 - B^2$

का अनुप्रयोग ऐसे गुण्य एवं गुणक का गुणनफल प्राप्त किया जा सकता है, जिनके एक **संख्या विशेष** से प्राप्त गुणय का घुचांक और गुणक का घुचांक एक दूसरे के प्रति योज्यप्रतिलोम हो। **संख्या विशेष** के प्रतिबंध पर प्रस्तुत है

(1) संख्या विशेष x की उना (पूर्ववर्ती) $(x-1)$ और आगर (परवर्ती) $(x+1)$ संख्याओं का गुणनफल –

$\mathbf{(x-1)*(x+1)= x^2 - 1}$ होगा।

जैसे संख्या विशेष 28 के पूर्ववर्ती 27 एवं परवर्ती 29 का गुणनफल $27*29=28^2 - 1 = 784 - 1 = 783$

संख्या विशेष 583 के पूर्ववर्ती 582 एवं परवर्ती 584 का गुणनफल $582*584 = 583^2 - 1 = 339889 - 1 = 339888$

(2) संख्या विशेष मुलाधार ,उपाधार, एवं इकाई अंक 5 वाली संख्या A के प्रति B उना (पूर्ववर्ती) $(A-B)$ और आगर (परवर्ती) $(A+B)$ संख्याओं का गुणनफल गणना में समिका $\mathbf{(A-B)*(A+B) = A^2 - B^2}$ का अनुप्रयोग कीजिए।

जैसे 1■ $42*58 = (50-8)*(50+8) = 50^2 - 8^2 = 2500 - 64 = 2436$

2■ $103*97 = (100+3)*(100-3) = 100^2 - 3^2 = 10000 - 9 = 9991$

3■ $611*589 = (600+11)*(600-11) = 600^2 - 11^2 = 360000 - 121 = 359879$

4■ $1035*965 = (1000+35)*(1000-35) = 1000^2 - 35^2 = 1000000 - 1225 = 998775$

5■ $34*16 = (25+9)*(25-9) = 25^2 - 9^2 = 625 - 81 = 544$

6■ $96*74 = (85+11)*(85-11) = 85^2 - 11^2 = 7225 - 121 = 7104$

7■ $122*108 = (115+7)*(115-7) = 115^2 - 7^2 = 13225 - 49 = 13176$

8■ $1136*914 = (1025+111)*(1025-111) = 1025^2 - 111^2 = 1050625 - 12321 = 1038304$

9■ $10033*10017 = (10025+8)*(10025-8) = 10025^2 - 8^2 = 100*1005\backslash 625 - 64$

$= 100500561$

10■ $111111*88889 = (100000+11111)*(100000-11111) = 100000^2 - 11111^2$

$= 10000000000 - 123454321$

$= 98765456789$

12-6 उपाधार $(a*10^x)$ के निकटतर संख्याओं का वर्गमान यदि कोई संख्या n उपाधार $(a*10^x)$ के निकटतर हो तो संख्या n का उपाधार $(a*10^x)$ से घुचांक $d = [n - (a*10^x)]$ होगा । से–

$n^2 = [a*10^x]*[(a*10^x) + 2d] + d^2 = a[(a*10^x) + 2d]\backslash d^2$ होगा। जहाँ d^2 का हल मान x अंकीय मान में होगा।

जैसे– 297^2 के लिए उपाधार $300 = 3*10^2$ से घुचांक= $297 - 300 = \overline{03}$

$\therefore n^2 = a[(a*10^x) + 2d]\backslash d^2$ से $297^2 = 3*[(3*10^x) + 2d]\backslash d^2$

$= 3*[300 + 2*\overline{03}]\backslash \overline{03}^2$

$= 3*294/09 = 88209$

जैसे – 4225^2 के लिए उपाधार $4000 = 4*10^3$ से घुचांक= $4225 - 4000 = 225$

$\therefore n^2 = a[(a*10^x) + 2d]\backslash d^2$ से $4225^2 = 4[(4*10^3) + 2d]\backslash d^2$

$= 4*[4000 + 2*225]/225^2$

$= 4*4450/_{50}625$

$= 17800/_{50}625$

$= 17850625$

12-6 **प्रमेय1** दो क्रमागत संख्याओं के गुंणनफल का चार गुना का आगर (परवर्ती/एकाधिक्य) संख्या उन दोनों संख्याओं के योगमान का वर्गमान होगा।

प्रमाण दो क्रमागत संख्श a और (a+1) के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*a*(a+1)+1 = 4a^2 + 4a + 1$

$$= (2a)^2 + 2*(2a)*1 + 1^2$$

$$= (2a+1)^2 = [a+(a+1)]^2$$ **सिद्ध।**

उदाहरण■

1■ दो क्रमागत संख्या 1 और 2 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*1*2+1 = 9 = 3^2 = (1+2)^2$

2■ दो क्रमागत संख्या 2 और 3 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*2*3+1 = 25 = 5^2 = (2+3)^2$

3■ दो क्रमागत संख्या 3 और 4 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*3*4+1 = 49 = 7^2 = (3+4)^2$

4■ दो क्रमागत संख्या 4 और 5 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*4*5+1 = 81 = 9^2 = (4+5)^2$

5■ दो क्रमागत संख्या 5 और 6 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*5*6+1 = 121 = 11^2 = (5+6)^2$

6■ दो क्रमागत संख्या 6 और 7 के गुंणनफल का चार गुना का आगर $= 4*6*7+1 = 169 = 13^2 = (6+7)^2$

प्रमेय2 तीन क्रमागत संख्याओं में पहली और तीसरी संख्या का गुंणनफल का आगर (परवर्ती/एकाधिक्य) उनके मध्य स्थित दूसरी संख्या का वर्गमान होगा।

प्रमाण तीन क्रमागत संख्याएँ r_1, r_2, r_3 क्रमशः a ,(a+1), (a+2) से

पहली और तीसरी संख्या का गुंणनफल का आगर $= a*(a+2)+1 = a^2 + 2a + 1$

$$= a^2 + 2*(a)*1 + 1^2$$

$$= (a+1)^2$$

a और (a+2) मध्य स्थित संख्या $= (a+1)$ **सिद्ध।**

उदाहरण■

1■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 1, 2 और 3 से – 1 और 3 के गुणनफल का आगर $= 1*3+1 = 4 = 2^2$

2■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 2, 3 और 4 से – 2 और 4 के गुणनफल का आगर $= 2*4+1 = 9 = 3^2$

3■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 3, 4 और 5 से – 3 और 5 के गुणनफल का आगर $= 3*5+1 = 16 = 4^2$

4■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 4, 5 और 6 से – 4 और 6 के गुणनफल का आगर $= 4*6+1 = 25 = 5^2$

5■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 5, 6 और 7 से – 5 और 7 के गुणनफल का आगर $= 5*7+1 = 36 = 6^2$

6■ तीन क्रमागत संख्शाएँ 6, 7 और 8 से – 6 और 8 के गुणनफल का आगर $= 6*8+1 = 49 = 7^2$

----------12----------

अध्याय -13
भाग की संक्रिया

13-1 भाग की संक्रिया

(1) सतत् घटाने के अर्थ में जिस प्रकार घटाना (व्यवकलन) संक्रिया जोड़ना (संकलन या येाग) संक्रिया का विपरीत संक्रिया है, उसी प्रकार भाग संक्रिया गुणा संक्रिया का विपरीत संक्रिया है। गणित अध्ययन में किसी संख्या विशेष का योग माला में बढ़ते क्रम योग (+) की बारंबारता गुण को गुणन संक्रिया या गुणा की संक्रिया कहते है। इसके विपरीत किसी वस्तु के बड़े भण्डारण अथवा संग्रहमान A में से किसी दूसरे मान B को सतत् रूप से घटाने की संक्रिया है, जो यह विदित कराता है कि संग्रहमान संख्या A में से किसी दूसरे मान की संख्या B को सतत् रूप से घटाने की अधिकतम बाम्बारता C है और जो बाकी बचत है वह B से छोटे मान की संख्या D है। जैसे धान बीज के 100 काठा के भण्डारण में से 7-7 काठा बीज प्रति कृषक दान करने पर सतत् घटाने की संक्रिया [1■ $(100-7=93)$, 2■ $(93-7=86$, 3■ $86-7=79$, 4■ $79-7=72$, 5■ $72-7=65$, 6■ $65-7=58$, 7■ $58-7=51$, 8■ $51-7=44$, 9■ $(44-7=37)$, 10■ $(37-7=30)$, 11■ $(30-7=23)$, 12■ $(23-7=15)$, 13■ $(15-7=9)$, 14■ $(9-7=2]$ बारम्बारता 14 है। और बाकी बचत मान 2 काठा है।

(2) तुलना के अर्थ में जारी वर्ष का वर्षा एवं फसल की तुलना बीते वर्ष से किया जाता है। जो वर्तमान संदर्भ में प्रतिशत (प्रत्येक सौ) मान पर किया जा रहा है।हमारे पूर्वज छत्तीसगढिया किसान तत्कालीन फसल की पैदावार को किसी सामान्य समय की पैदावार को सोलह आने (1रूपिया = 16आना) मानकर उससे कम होने पर (2 आना), (4 आना), (6 आना), (8 आना),(10 आना), (12 आना),, होने के शब्दों में तुलना करते और फसल की पैदावार कुछ भी न होने से कोरा अकाल होना बताते रहे है। इसी प्रकार बहुत अच्छा सामान्य से अधिक) पैदावार होने 18आना, 20आना बताते रहे है। जो कमोतर आज भी सुनने को मिलता है।

दो बैलों या दो पहलवानों की शक्ति एक दूसरे के बराबर की ओर होने पर उन्नीस –बीस होना कहते है। इस प्रकार का तुलनात्मक अध्ययन आधुनिक गणित में अनुपात अध्ययन के अन्तर्गत आता है। यदि सोमारू 8 आने और मंगलू 4 आने रोज कमाता है, तब मंगलू के 1आना कमाने पर सोमारू कितने आने कमा लेगा की तुलना करना 8 को 4 द्वारा विभाजन करने की प्रक्रिया के अन्तर्गत है। इस प्रकार की विभाजन करने की प्रक्रिया को भाग संक्रिया कहते है।

जोड़ना, धटाना एवं गुणा संक्रिया की भाँति भाग संक्रिया को सीखने– सिखाने विभिन्न आयामों में प्रस्तुत है।

भाग संक्रिया संकेतन सामान्य अध्ययन में भाग संक्रिया संकेतन ÷ माना गया है। जबकि भाग की गणन संक्रिया में $\overline{)}$ माना गया है। संख्या A को संख्या B द्वारा भाग देने की संक्रिया को $A \div B$ दर्शित कर इसे A भागित B पढ़ा जाता है। जबकि आवश्यक होने पर इसके गणन संक्रिया को $B\overline{)A}$ दर्शित कर आवश्यक गणना प्रक्रम प्रारंभ पूरा किया जाता है।

भाग संक्रिया गणन शब्दावली

1• भाज्य जिस संख्या मान को विभाजन या खण्ड किया जाता है उसे भाज्य कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में धान बीज का भण्डारण मात्रा काठा में 100 भाज्य मान संख्या है।

2• भाजक जिस संख्या मान द्वारा भाज्य को विभाजित किया जाता है उसे भाजक कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में प्रति कृषक को धान दान करने की मात्रा काठा में 7 भाजक मान संख्या है।

3• भागफल भाज्य को भाजक द्वारा विभाजित करने पर जो अधिकतम बारम्बारता मान प्राप्त होता है, उसे भागफल कहते है। उपरोक्त उदाहरण में अधिकतम बारम्बारता मान 14 भागफल होगा।

4• शेषफल जब भाज्य में से भाजक को बार–बार घटाने से एक ऐसी स्थिति अवश्य आती है कि बची मात्रा संख्या भाजक से कम मात्रा की है।तब इस प्रकार भाजक से कम मात्रा में बचत संख्यामान को शेषफल कहते है।

मूलतः भाग की संक्रिया भाज्य में से भाजक को कितनी बार पूरा–पूरा घटाया जा सकता है को सरलता से ज्ञात करने की संक्रिया मात्र है। अर्थात् भागफल C यह बतलाता कि दिये भाज्य A में से भाजक B को C बार तक पूरा–पूरा घटाने उपरांत शेषफल D भाजक B से छोटा एक पूर्ण संख्या है।

भाज्य , भाजक, भागफल और शेषफल में सम्बंध

भाज्य A = (भाजक B * भागफल C) +शेषफल D

13-2 भाग संक्रिया गणन की विधियाँ आधुनिक भाग संक्रिया गणन विधि के अतिरिक्त भाज्य एवं भाजक को दृष्टिगत करते हुए भाग संक्रिया गणन की प्रमुख अधोदर्शित तीन विधियाँ है।

1• अनुभाग विभाजन विधि (देखते –देखत या विलोकनम् विधि) **2•** सुभाजक विधि **3•** राजमणि विधि (झण्डा या धजांक विधि)।

[1] अनुभाग विभाजन विधि (देखते –देखत या विलोकनम् विधि) का स्थिति वार अध्ययन

स्थिति (1) यदि भाजक 10, 100 ,1000,10000 - - - - - हो 10, 100 ,1000,10000 - - - - - प्रकार के भाजक में निहित शून्य (0) की स्थान संख्या मान पर भाज्य के दाँयी (इकाई)ओर से बाँयी(दहाई, सैकड़ा,हजार– – – –)ओर अनुभाग विभाजन कर भाज्य को दो अनुभाग बाँये अनुभाग?दाँये अनुभाग में प्राप्त कीजिए। तब भाज्य इस प्रकार के अनुभाग विभाजन मात्र से ही बाँये अनुभाग की संख्या को भागफल तथा दाँये अनुभाग की संख्या को शेषफल निरूपित कर अभीष्ट भागफल और शेषफल प्राप्त कीजिए।

उदाहरण■

1■ $27 \div 10$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 2\7 से अभीष्ट भागफल 2 और शेषफल 7 होगा।

2■ $523 \div 10$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 52\3 से अभीष्ट भागफल 52 और शेषफल 3 होगा।

3■ $139 \div 100$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 1\39 से अभीष्ट भागफल 1 और शेषफल 39 होगा।

4■ $6328 \div 100$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 63\28 से अभीष्ट भागफल 63 और शेषफल 28 होगा।

5■ $1523678 \div 1000$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 1523\678 से अभीष्ट भागफल 1523 और शेषफल 678 होगा।

यदि भाज्य भागफल से छोटा है तो भागफल 0(शून्य) तथा शेषफल भाज्य ही होगा।

6■ $29 \div 1000$ के लिए भाज्य का अनुभाग विभाजन 0\029 से अभीष्ट भागफल 0 और शेषफल $029 = 29 =$ भाज्य ही है।

स्थिति (2) $(x > y)$ के लिए यदि $(p+x)$ अंकीय भाज्य और $(p+y)$ अंकीय भाजक के बाँयी ओर से प्रथम p अंक से बनी संख्या बराबर हो $(x > y)$ के लिए यदि $(p+x)$ अंकीय भाज्य और $(p+y)$ अंकीय भाजक के बाँयी ओर से प्रथम p अंकों से बनी संख्या बराबर हो तो –

बाँये से दाँये भाज्य और भाजक का निम्नानुसार बाँयें बाँयें अनुभाग विभाजन अंको के यथा क्रम स्थान पर निश्चित कीजिए।

बाँयें अनुभाग \ दाँयें अनुभाग

भाज्य से बाँयी ओर से प्रथम p अंक से बनी संख्या \शेष अंतिम x अंक से बनी संख्या

भाजक से बाँयी ओर से प्रथम p अंक से बनी संख्या \ शेष अंतिम y अंक से बनी संख्या

तब प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1]$ अंकों की सबसे छोटी संख्या (10, 100, 1000,- - - में से) होगी।

तथा प्रारंभिक शेषफल = दाँया अनुभाग से– भाज्य के शेष अंतिम x अंक से बनी संख्या के अंकों में से भाजक के शेष अंतिम y अंक से बनी संख्या के अंकों को जो बाँये से दाँये क्रम दर्शित है। यथा क्रम घटाये।

यदि यह प्रारंभिक शेषफल हल धनात्मक प्राप्त हो तो उक्त प्रारंभिक भागफल और शेषफल ही क्रमशः अभीष्ट भागफल और शेषफल होगा।

और यदि यह प्रारंभिक शेषफल हल ऋणात्मक प्राप्त हो तो अभीष्ट भ्रगफल $(x-y)$ अंक की सबसे बड़ी संख्या (9, 99, 999, 9999 - - - - - में से) होगा।

तथा अभीष्ट शेषफल = भाजक + (प्रारंभिक ऋणात्मक शेषफल)

विश्लेषित व्याख्या उदाहरण 1■ $2468679 \div 24689$ के लिए–

अनुभाग विभाजन– $(p\backslash x) \div (p\backslash y) = (2468\backslash 679) \div (2468\backslash 9)$ से

$p = 4$ $x = 3$ (679 के 3 अंकीय संख्या होने पर) तथा $y = 1$ (9 के 1 अंकीय संख्या होने पर)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(3-1)+1] = 3$ अंकों का सबसे छोटी संख्या =100

तथा प्रारंभिक शेषफल= क्रमशः अंक मान (6–9), 7, 9 से बनी संख्या = $\bar{3}79 = \bar{2}2\bar{1}$ ऋणात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= $(x-y) =$ 2 अंकों का सबसे बड़ी संख्या =99

तथा अभीष्ट शेषफल= भाजक + (प्रारंभिक ऋणात्मक शेषफल) $= 24689 + \bar{2}2\bar{1} = 24468$ होगा।

उदाहरण 2■ $9983 \div 995$ के लिए–

अनुभाग विभाजन – $(p\backslash x) \div (p\backslash y) = (99\backslash 83 \div (99\backslash 5)$ से

$p = 2$ $x = 2$ (83 के 2 अंकीय संख्या होने पर) तथा $y = 1$ (5 के 1 अंकीय संख्या होने पर)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(2-1)+1] = 2$ अंकों का सबसे छोटी संख्या =10

तथा प्रारंभिक शेषफल= क्रमशः अंक मान (8–5), 3, से बनी संख्या = 33 धनात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= प्रारंभिक भागफल = 10

तथा अभीष्ट शेषफल= प्रारंभिक शेषफल = 33 होगा।

उदाहरण 3■ 889835÷88932 के लिए–

अनुभाग विभाजन – $(p\backslash x)\div(p\backslash y) = (889\backslash 835) \div (889\backslash 32)$ से

$p=3$ $x=3$ (835 के 3 अंकीय संख्या होने पर) तथा $y=2$ (32 के 2 अंकीय संख्या होने पर)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(3-2)+1] = 2$ अंकों की सबसे छोटी संख्या =10

तथा प्रारंभिक शेषफल= क्रमशः अंक मान (8–3), (3–2),5 से बनी संख्या = 515 धनात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= प्रारंभिक भागफल = 10

तथा अभीष्ट शेषफल= प्रारंभिक शेषफल = 515 होगा।

उदाहरण 4■ 67534978÷ 67534 के लिए–

अनुभाग विभाजन – $(p\backslash x)\div(p\backslash y) = (67534\backslash 978) \div (67534\backslash ----)$ से

$p=5$ $x=3$ (978 के 3 अंकीय संख्या होने पर) $y=0$ (कोई अंकन नहीं है।)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(3-0)+1] = 4$ अंकों का सबसे छोटी संख्या =1000

तथा प्रारंभिक शेषफल= क्रमशः अंक मान 9,7,8 से बनी संख्या = 978 धनात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= प्रारंभिक भागफल = 1000

तथा अभीष्ट शेषफल= प्रारंभिक शेषफल = 978 होगा।

उदाहरण 5■ 77313÷ 779 के लिए–

अनुभाग विभाजन – $(p\backslash x)\div(p\backslash y) = (77\backslash 313) \div (77\backslash 9)$ से

$p=2$ $x=3$ (313 के 3 अंकीय संख्या होने पर) तथा $y=1$ (9 के 1 अंकीय संख्या होने पर)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(3-1)+1] = 3$ अंकों का सबसे छोटी संख्या =100

तथा प्रारंभिक शेषफल = क्रमशः अंक मान (3–9), 1, 3 से बनी संख्या = $\bar{6}13 = \bar{5}8\bar{7}$ ऋणात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= $(x-y) =$ 2 अंकों का सबसे बड़ी संख्या =99

तथा अभीष्ट शेषफल= भाजक + (प्रारंभिक ऋणात्मक शेषफल) = $779 + \bar{5}8\bar{7} = 2\bar{1}2 = 192$ होगा।

उदाहरण 6■ 67453421÷ 67487 के लिए–

अनुभाग विभाजन – $(p\backslash x)\div(p\backslash y) = (674\backslash 53421) \div (674\backslash 87)$ से

$p=3$ $x=5$ (53421 के 5अंकीय संख्या होने पर) $y=2$ (87 के 2 अंकीय संख्या होने पर)

अतः प्रारंभिक भागफल= $[(x-y)+1] = [(5-2)+1] = 4$ अंकों का सबसे छोटी संख्या =1000

तथा प्रारंभिक शेषफल= क्रमशः अंक मान (5–8),(3–7), 4,2,1 से बनी संख्या = $\bar{3}\bar{4}421 = \bar{3}3\bar{5}79$ ऋणात्मक है।

अतः अभीष्ट भागफल= $(x-y) =$ 3 अंकों की सबसे बड़ी संख्या =999

तथा अभीष्ट शेषफल= भाजक + (प्रारंभिक ऋणात्मक शेषफल) = $67487 + \bar{3}3\bar{5}7\bar{9} = 34\bar{1}1\bar{2} = 33908$ होगा।

स्थिति (3) भाजक n अंकों की सबसे बड़ी संख्या (9, 99, 999, 9999- - - - -) होने पर यदि भाजक n अंकों की सबसे बड़ी संख्या (9, 99, 999, 9999- - - - -) हो तो भाग की गणन संक्रिया को विभिन्न प्रगुणों पर विश्लेषित करना यथेष्ठ होगा। क्रमशः प्रस्तुत है।

स्थिति 3A■ भाज्य में अंकों की स्थान संख्या मान x भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y का दो गुना या दोगुना से कम हो –

संक्रिया गणना प्रक्रम भाज्य का दाँयें से बाँयें (इकाई से दहाई, सैकड़ा – – – की ओर)से भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y पर अनुभाग विभाजन कर भाज्य के दो अनुभाग

बाँये अनुभागm_L\ दाँये अनुभाग m_R प्राप्त कर

निम्नानुसार जाँच कीजिए और अभीष्ट भागफल एवं शेषफल का निष्कर्ष सीधे प्राप्त लीजिए।

जाँच एवं निष्कर्ष 1• यदि दोनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान भाजक संख्या मान से छोटा है तो–
अभीष्ट भागफल $= m_L$ तथा अभीष्ट शेषफल $= (m_L + m_R)$ योगमान होगा।

साधित उदाहरण■

1■ 62÷ 9 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R = 6\backslash 2$ से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 6+2=8 < (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L =6 तथा शेषफल =$(m_L + m_R)$ =8	2■ 317÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R = 3\backslash 17$ से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 3+17=20 < (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L =3 तथा शेषफल =$(m_L + m_R)$ =20
3■ 8213÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R = 82\backslash 13$ से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 82+13=95 < (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L =82 तथा शेषफल =$(m_L + m_R)$ =95	4■ 226347÷ 999 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R = 226\backslash 347$ से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 226+347=573 < (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L =226 तथा शेषफल =$(m_L + m_R)$ =573
5■ 596732180 ÷ 99999 के लिए– $m_L \backslash m_R = 5967\backslash 32180$ से जाँच– $(m_L + m_R)$ =5967+32180=38147< (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल = m_L=5967 तथा शेषफल = $(m_L + m_R)$ =38147	6■ 10000000231456÷ 9999999 के लिए– $m_L \backslash m_R$ =1000000\0231456 से जाँच– $(m_L + m_R)$ = 1000000+0231456 = 1231456< (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल = m_L =1000000 तथा शेषफल =$(m_L + m_R)$ =1231456

जाँच एवं निष्कर्ष 2• यदि दोनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान = भाजक संख्या है तो–
अभीष्ट भागफल = m_L का आगर संख्या = $(m_L + 1)$ तथा अभीष्ट शेषफल = 0 (शून्य) होगा।

साधित उदाहरण■

1■ 72÷ 9 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R = 7\backslash 2$ से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 7+2 =9 (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L का आगर =7 का आगर =7+1 =8 तथा शेषफल = 0	2■ 9504÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_R$ =95\04 से जाँच– दोनों अनुभाग मानों का योग=$(m_L + m_R) =$ 95+04 =99 (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल =m_L का आगर =95 का आगर =95+1 =96 तथा शेषफल = 0
3■ 594÷ 99 के लिए– $m_L \backslash m_R$ =5\94 से जाँच– $(m_L + m_R)$ = 5+94 = (भाजक) निष्कर्ष–अभीष्ट भागफल = m_L का आगर	4■ 4554÷ 99 के लिए– $m_L \backslash m_R$ =45\54 से जाँच– $(m_L + m_R)$ = 45+54 = (भाजक) निष्कर्ष–अभीष्ट भागफल = m_L का आगर

$=5+1=6$ तथा शेषफल $=0$	$=45+1=46$ तथा शेषफल $=0$
5■ $3996 \div 999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 3\backslash 996$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 3+996 =$ (भाजक) निष्कर्ष–अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $=3+1=4$ तथा शेषफल $=0$	6■ $324675 \div 999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 324\backslash 675$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 324+675 =$ (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $=324+1=325$ तथा शेषफल $= 0$
7■ $723276 \div 999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 723\backslash 276$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 723+276 =$ (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $=723+1=724$ तथा शेषफल $= 0$	8■ $1234587654 \div 99999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 12345\backslash 87654$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 12345+87654 =$ (भाजक) निष्कर्ष– अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $=12345+1=12346$ तथा शेषफल $= 0$

जाँच एवं निष्कर्ष 3• यदि दोनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान भाजक संख्या मान से बड़ा है तो–
अभीष्ट भागफल $=$ m_L का आगर संख्या $= (m_L + 1)$
तथा अभीष्ट शेषफल $= (m_L + m_R) -$ (भाजक)

अथवा

अभीष्ट शेषफल $= m_R - ($ m_L के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या) होगा।

अथवा

अभीष्ट शेषफल $= m_L - ($ m_R के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या) होगा।

विशेष टीप (m_L के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या) के लिये प्रथम m_L को भाजक के अंको के स्थान संख्या मान x के तुल्य स्थान की संख्या मे दर्शित होना आवश्यक है। इसके लिए आवश्यकतानुसार m_L के बाँयी ओर 0 बढ़ायें। विश्लेषित उदाहरण 2 का अवलोकन कीजिए।

विश्लेषित उदाहरण■ $4743567891 \div 99999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 47435\backslash 67891$ से जाँच–
$m_L + m_R = 47435+67891=115326 >$ (भाजक)
निष्कर्ष अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $=47436$ तथा
शेषफल $=(m_L + m_R) -$भाजक$= 115326-99999 = 15327$
अथवा शेषफल $= m_R - (m_L$ के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या$) = 67891 - 52564 = 15327$
अथवा शेषफल $= m_L - (m_R$ के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या$) = 47435 - 32108 = 15327$

साधित उदाहरण■

1■ $876579 \div 999$ के लिए– $m_L \backslash m_R = 876\backslash 579$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 876+579=1455 >$ (भाजक)   **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर $= 876+1 = 877$ तथा **शेषफल** $=(m_L + m_R) -$भाजक $=1455-999 = 456$ **अथवा** शेषफल $= m_R - ($ m_L के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या$) = 579-123 = 456$ **अथवा** शेषफल $= m_L - ($ m_R के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या$) = 876-420 = 456$

2■ 95906÷ 999 के लिए– $m_L \backslash m_R = 095\backslash 906$ से जाँच– $(m_L + m_R) = 095+906=1001 >$ (भाजक) **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर 095+1 =096 =96 तथा **शेषफल** $=(m_L + m_R)$ – भाजक =1001–999 =002 = 2 **अथवा** शेषफल $= m_R$ –(m_L के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या)= 906– 904 = 2 **अथवा** शेषफल $= m_L$ –(m_R के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या)= 095– 093 = 2
3■ 474356789127 ÷ 999999 के लिए– $m_L \backslash m_R$ = 474356/789127 से जाँच– $m_L + m_R$ = 474356+789127 = 1263483> (भाजक) **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल $= m_L$ का आगर =474357 तथा **शेषफल** $=(m_L + m_R)$ –भाजक= 1263483–999999 = 263484 **अथवा** शेषफल $= m_R$ –(m_L के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या)= 789127 – 525643 =26348 4 **अथवा** शेषफल $= m_L$ –(m_R के अंकों के 9 पुरनी से बनी संख्या)= 474356 –210872 =263484

स्थिति 3 B■ भाज्य में अंकों की स्थान संख्या मान x भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y का दोगुना से अधिक तीगुना तक ही हो –

संक्रिया गणना –प्रक्रम1 भाज्य का दाँये से बाँये (इकाई से दहाई, सैकड़ा – – – की ओर)से भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y पर अनुभाग विभाजन कर भाज्य के तीन अनुभाग

बाँया अनुभाग$m_L \backslash$मध्य अनुभाग $m_M \backslash$दाँया अनुभाग m_R प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 तीनों अनुभाग में प्राप्त संख्यामान को अलग–अलग मानकर तीनों अनुभाग के संख्याओं का योगमान $(m_L + m_M + m_R) = \Sigma m$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 [(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L] =§ का मान प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 निम्नानुसार जाँच कीजिए और अभीष्ट भागफल एवं शेषफल अथवा प्रथम प्रारंभिक भागफल‡ एवं शेषफल प्राप्त लीजिए।

जाँच एवं निष्कर्ष 1• यदि तीनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान $(m_L + m_M + m_R) = \Sigma m <$ भाजक संख्या मान हो तो– प्रारंभिक भागफल =[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या) $+ m_L$]= § तथा अभीष्ट शेषफल $=(m_L + m_M + m_R) = \Sigma m$ होगा।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ 341÷ 9 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_M \backslash m_R$ = 3\4\1 से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m = (m_L + m_M + m_R)$ = 3+4+1= 8< (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L]= § =34+3= 37 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ =37 तथा शेषफल $= \Sigma m$ =8	2■ 162345÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_M \backslash m_R$ = 45\23\45 से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m = (m_L + m_M + m_R)$ = 16+23+45= 84< (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L]= § =1623+16= 1639 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ =1639 तथा शेषफल $= \Sigma m$ =84
3■ 89462347÷ 999 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_M \backslash m_R$ = 89\462\347 से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m = (m_L + m_M + m_R)$ =	4■ 222322222221÷ 9999 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_M \backslash m_R$ = 2223\2222\2221 से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m = (m_L + m_M + m_R)$ =

$89+462+347=898<$ (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L]= § =89462+89= 895 51 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ =89551 तथा शेषफल $=\Sigma m$ =898	$2223+2222+2221=6666<$ (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या) + m_L]= § =22232222+2223= 22234447 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ =22234447 तथा शेषफल $=\Sigma m$ =6666

जाँच एवं निष्कर्ष 2• यदि तीनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान $(m_L+m_M+m_R)=$ भाजक संख्या मान हो तो– अभीष्ट भागफल=[{(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या) + m_L} +1)] = §+1तथा अभीष्ट शेषफल = 0 होगा।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ $243\div 9$ के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L\backslash m_M\backslash m_R$ $=2\backslash 4\backslash 3$ से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m=(m_L+m_M+m_R)=$ 2+4+3=9 = (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या) + m_L]= § =24+2= 26 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 =26+1=27 तथा शेषफल =0	2■ $210375\div 99$ के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L\backslash m_M\backslash m_R$ $=21\backslash 03\backslash 75$ से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m=(m_L+m_M+m_R)=$ 21+03+75= 99= (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या) + m_L]= § =2103+21= 2124 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 =2125 तथा शेषफल = 0
3■ $100473358\div 999$ के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L\backslash m_M\backslash m_R$ $=100\backslash 473\backslash 358$ से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m=(m_L+m_M+m_R)=$ 100+473+358 =999= (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L]= § =100473+100= 100573 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल = § + 1 =100574 तथा शेषफल =0	4■ $533423332332\div 9999$ के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L\backslash m_M\backslash m_R$ $=5334\backslash 2333\backslash 2332$ से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m=(m_L+m_M+m_R)=$ 5334+2333+2332=9999= (भाजक) तथा[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या)+ m_L]= § =53342333+5334=53347667 **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 =53347668 तथा शेषफल =0

जाँच एवं निष्कर्ष 3• यदि तीनों अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान $(m_L+m_M+m_R)>$ भाजक संख्या मान हो तो– प्रथंम क्रम का प्रारंभिक भागफल =[(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या m_L) +1]
तथा प्रथम क्रम का प्रारंभिक शेषफल $=[(m_L+m_M+m_R)$ –भाजक] होगा।
अब यदि यह प्रथम क्रम का प्रारंभिक शेषफल < भाजक हो तो यही प्रथंम क्रम का प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल ही अभीष्ट भागफल एवं शेषफल होगा। और यह प्रथम क्रम का प्रारंभिक शेषफल > भाजक हो तो इस प्रथम प्रारंभिक शेषफल के लिए उक्त नियमानुसार भाग संक्रिया प्रक्रम अन्तर्गत द्वितीय प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल की गणना कीजिए।

---

‡ (पृष्ठ 80) प्रथम प्रारंभिक भागफल एवं षेशफल इसलिए कहा गया है क्योंकि $(\Sigma m-$भाजक$)>$ भाजक के होने पर भाग संक्रिया क्रम पुनः $(\Sigma m-$भाजक$)$ के लिए करना होगा। ऐसी स्थिति भाजक के छोटे मानों पर भाज्य की अनुभाग विभाजन क्रम बढने से निर्मित होता है। जिससे प्रारंभिक भाग संक्रिया क्रम तब तक जारी रहता जब तक $(\Sigma m-$भाजक$)<$ भाजक प्राप्त न हो जाएं ।

इस प्रकार प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल की गणना का क्रम अंतिम शेषफल मान भाजक से छोटा प्राप्त होने तक कीतिए।
तब **अंतिम निष्कर्ष में** अभीष्ट भागफल = उपरोक्त क्रमानुसार प्राप्त समस्त भागफलो का योगमान
तथा अभीष्ट शेषफल = अंतिम शेषफल जो भाजक से छोटा प्राप्त है।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ $24315 \div 9$ के लिए–
भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_m \backslash m_R = 243\backslash 1\backslash 5$ से जाँच – तीनों अनुभाग मानों का योग Σm
$=(m_L + m_M + m_R) = 243+1+5=249 >$ (भाजक)
तथा [(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या + m_L]= $§_1$ =2431+243= 2674
प्रारंभिक निष्कर्ष प्रारंभिक भागफल$_1$ =$§_1$ + 1 =2675 तथा प्रारंभिक शेषफल$_1$ =(249 – भाजक) =240 > भाजक
अतः $240 \div 9$ के लिए $2\backslash 4\backslash 0$ से Σm =6 तथा $§_2$ = 24+2 =26

अंतिम निष्कर्ष भागफल$_2$ =$§_2$ =26 तथा शेषफल$_2$ = Σm =6< भाजक
∴अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ + भागफल$_2$ = 2675+ 26 =2701 एवं अभीष्ट शेषफल = शेषफल$_2$ = 6

2■ $3450027681 \div 999$ के लिए–
भाज्य का अनुभाग विभाजन $m_L \backslash m_m \backslash m_R = 3450\backslash 027\backslash 681$ से जाँच –
तीनों अनुभाग मानों का योग $\Sigma m = (m_L + m_M + m_R) = 3450+027+681= 4158 >$ (भाजक)
तथा [(m_L और m_M के सम्मिलन से बनी संख्या + m_L]= $§_1$ =3450027+3450= 3453477
प्रारंभिक निष्कर्ष प्रारंभिक भागफल$_1$ =$§_1$ + 1 =3453478 तथा प्रारंभिक शेषफल$_1$ =(4158 – भाजक)
= 3159 > भाजक अतः $3159 \div 999$ के लिए $3\backslash 159$ से Σm =162 तथा $§_2$ = 3

अंतिम निष्कर्ष भागफल$_2$ =$§_2$ =3 तथा शेषफल$_2$ = Σm = 162< भाजक
∴अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ + भागफल$_2$ = 3453478+ 3 =3453481 एवं अभीष्ट शेषफल = शेषफल$_2$ =162

व्यापकता व्यापकता में यदि भाज्य में अंकों की स्थान संख्या मान x भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y का z गुना के बराबर या अधिक (जहाँ $z \geq 2$) हो तो–

संक्रिया गणना

प्रक्रम 1 भाज्य का दाँये से बाँये (इकाई से दहाई, सैकड़ा – – – की ओर)से भाजक के अंकों की स्थान संख्या मान y पर अनुभाग विभाजन करते हुए यदि भाज्य के अंकों की स्थान संख्या x = y*z हो तो कुल अनुभाग संख्या z में $m_L \backslash m_{M_{z-2}} \backslash m_{M_{z-3}} \backslash m_{M_{z-4}} \backslash - \backslash - \backslash - \backslash - \backslash - \backslash m_{M_3} \backslash m_{M_2} \backslash m_{M_1} \backslash m_R$
और यदि भाज्य के अंकों की स्थान संख्या x = (y*z+a) जहाँ a < y हो तो कुल अनुभाग संख्या (z+1) में $m_L \backslash m_{M_{z-1}} \backslash m_{M_{z-2}} \backslash m_{M_{z-3}} \backslash - \backslash - \backslash - \backslash - \backslash - \backslash - \backslash m_{M_3} \backslash m_{M_2} \backslash m_{M_1} \backslash m_R$ दाँये से बाँये प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 समस्त अनुभाग में प्राप्त संख्यामान को अलग–अलग मानकर समस्त अनुभाग के संख्याओं का योगमान
; $m_L + m_{M_{z-1}} + m_{M_{z-2}} + m_{M_{z-3}} + - + - + - + - + m_{M_3} + m_{M_2} + m_{M_1} + m_R) = \Sigma m$ प्राप्त कीजिए

प्रक्रम 3 [{बाँये से दाँये(m_Lसे m_{M_1} तक के सम्मिलन से बनी संख्याS_1)+(m_Lसे m_{M_2} तक के सम्मिलन से बनी संख्याS_2)+(m_Lसे m_{M_3} तक के सम्मिलन से बनी संख्याS_3 – + – .(m_Lसे $m_{M_{z-3}}$ तक के सम्मिलन से बनी संख्याS_{z-3})+(m_Lसे $m_{M_{z-2}}$ तक के सम्मिलन से बनी संख्या S_{z-2})+(m_Lसे $m_{M_{z-1}}$ तक के सम्मिलन से बनी संख्या S_{z-1}) m_L] = § का मान प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 निम्नानुसार जाँच कीजिए और अभीष्ट भागफल एवं शेषफल अथवा प्रथम प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल प्राप्त लीजिए।

जाँच एवं निष्कर्ष 1•
यदि समस्त अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान = Σm < भाजक संख्या मान हो तो–
अभीष्ट भागफल = § तथा अभीष्ट शेषफल = Σm होगा।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ 23012÷ 9 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 2\3\0\1\2 से जाँच– समस्त अनुभाग मानों का योग Σm $=(2+3+0+1+2)=8<$ (भाजक) --------------------प्रक्रम 2 के अनुसार तथा § =2301+230 +23+2=2556 -----------------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ = 2556 तथा शेषफल = Σm =8
2■ 12430020635 ÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 1\24\30\02\06\35 से जाँच – समस्त अनुभाग मानों का योग Σm $=(1+24+30+02+06+35)=98<$ (भाजक) --------------------प्रक्रम 2 के अनुसार तथा § =124300206+1243002+12430+124+1=125555763 ---------------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ = 125555763 तथा शेषफल = Σm =98
3■ 1111111111111111111÷ 99999 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 1111\11111\11111\11111 से जाँच – समस्त अनुभाग मानों का योग Σm $=(1111+11111+11111+11111)=34444<$ (भाजक) -------------------- प्रक्रम 2 के अनुसार तथा § =11111111111111+111111111+1111=11111222223333 -----------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ = 11111222223333 तथा शेषफल = Σm =34444

जाँच एवं निष्कर्ष 2• यदि समस्त अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान = Σm = भाजक संख्या मान हो तो– अभीष्ट भागफल = §+1 तथा अभीष्ट शेषफल = 0 होगा।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ 23112÷ 9 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 2\3\1\1\2 से जाँच – समस्त अनुभाग मानों का योग Σm $=(2+3+1+1+2)=9=$ (भाजक) --------------------प्रक्रम 2 के अनुसार तथा = § =2311+231 +23+2=2567 ----------------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 = 2568 तथा शेषफल =0
2■ 210016182321 ÷ 99 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 21\00\16\18\23\21 से जाँच – समस्त अनुभाग मानों का योग $\Sigma m=(21+00+16+18+23+21)=99=$ (भाजक) --------------------प्रक्रम 2 के अनुसार तथा § =2100161823+21001618+210016+2100+21=2121375578 ---------------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 = 2121375579 तथा शेषफल = 0
3■ 1111222200006666 ÷ 9999 के लिए– भाज्य का अनुभाग विभाजन = 1111\2222\0000\6666 से जाँच – समस्त अनुभाग मानों का योग Σm $=(1111+2222+0000+6666)=9999=$ (भाजक) --------------------प्रक्रम 2 के अनुसार तथा §=111122220000+11112222+1111=111133333333 ------------प्रक्रम 3 के अनुसार **निष्कर्ष** अभीष्ट भागफल =§ + 1 = 111133333334 तथा शेषफल = 0

जाँच एवं निष्कर्ष 3•

यदि समस्त अनुभाग में अलग–अलग प्राप्त संख्या मान का योगमान = Σm > भाजक संख्या मान हो तो– प्रथंम प्रारंभिक भागफल = §+1 तथा प्रथम प्रारंभिक शेषफल =[Σm – भाजक] होगा।

अब यदि यह प्रथम प्रारंभिक शेषफल < भाजक हो तो यही प्रथंम प्रथम प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल ही अभीष्ट भागफल एवं शेषफल होगा। और यह प्रथम प्रारंभिक शेषफल > भाजक हो तो इस प्रथम प्रारंभिक शेषफल के लिए उक्त नियमानुसार भाग संक्रिया प्रक्रम अन्तर्गत द्वितीय प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल की गणना कीजिए।

....

....

इस प्रकार प्रारंभिक भागफल एवं शेषफल की गणना का क्रम अंतिम शेषफल मान भाजक से छोटा प्राप्त होने तक कीतिए।
तब **अंतिम निष्कर्ष** में अभीष्ट भागफल = उपरोक्त क्रमानुसार प्राप्त समस्त भागफलो का योगमान
तथा अभीष्ट शेषफल = अंतिम शेषफल जो भाजक से छोटा प्राप्त है।

विश्लेषित / साधित उदाहरण■

1■ $24315 \div 9$ के लिए–
भाज्य का अनुभाग विभाजन $= 2\backslash 4\backslash 3\backslash 1\backslash 5$ से जाँच
$\Sigma m = 2+4+3+1+5=15 >$ (भाजक)
त्था $\S_1 = (2431+243+24+2) = 2700$
निष्कर्ष प्रारंभिक भागफल$_1 = \S_1 + 1 = 2701$ एवं शेषफल$_1 = \Sigma m$ –भाजक $=15-9 = 6 <$ भाजक
∴ अभीष्ट भागफल = भागफल$_1 = 2701$ ही होगा एवं अभीघ्ट शेषफल = शेषफल$_1 = 6$

2■ $3450027681 \div 999$ के लिए–
भाज्य का अनुभाग विभाजन $= 3\backslash 450\backslash 027\backslash 681$ से जाँच
$\Sigma m = (3 + 450 + 027 + 681) = 1161 >$ (भाजक)
तथा $\S_1 = (3450027+3450+3) = 3453480$
निष्कर्ष प्रारंभिक भागफल$_1 = \S_1 + 1 = 3453481$ एवं शेषफल$_1 = \Sigma m$ –भाजक $= 1161-999$
$= 162 <$ भाजक
∴अभीष्ट भागफल = भागफल$_1 = 3453481$ ही होगा एवं अभीष्ट शेषफल = शेषफल$_1 = 162$

3■ $88888888888888888888 \div 99999$ के लिए–
भाज्य का अनुभाग विभाजन $= 88888\backslash 88888\backslash 88888\backslash 88888$ से जाँच
$\Sigma m = (88888 + 88888 + 88888 + 88888) = 355552 >$ (भाजक)
तथा $\S_1 = (888888888888888+8888888888+88888) = 888897777866664$
निष्कर्ष प्रारंभिक भागफल$_1 = \S_1 + 1 = 888897777866665$ एवं शेषफल$_1 = \Sigma m -$ भाजक
$= 355552-99999 = 255553 >$ भाजक
अतः $255553 \div 99999$ के लिए $2\backslash 55553$ से $\Sigma m = 2+55553 = 55555$ तथा $\S_2 = 2$
निष्कर्ष$_2$ भागफल$_2 = \S_2 = 2$ तथा शेषफल$_2 = \Sigma m = 55555 <$ भाजक
∴ अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ + भागफल$_2$ = $888897777866665+2 = 888897777866667$ एवं अभीष्ट शेषफल = शेषफल$_2 = 5555$ होगा।

विवेचना भाज्य के अंकों के स्थान संख्या x के सापेक्ष भाजक के अंकों की स्थान की संख्या y जितना छोटा होगा अभीष्ट भागफल एवं शेषफल प्राप्त करने का गणना प्रक्रम बढने की ओर होता है। फिर भी ऐसे प्रतिबंधित भाजक के प्रति आधुनिक भाग संक्रिया से कठिन कदापि प्रतीत नहीं होगा । बस थोड़े अभ्यास मात्र से सरल आत्मसाती होता अनुभव करेंगे।

----------13----------

अध्याय -14
सुभाजक द्वारा भाग संक्रिया

14-1 भाजक के प्रति सुभाजक यदि भाजक संख्या मूलाधार संख्या के निकटतर हो तो मूल भाजक के स्थान पर आधार से भाजक के घुचांक का योज्य प्रतिलोम द्वारा भाग गणन संक्रिया सम्पन्न करने की विधि में प्रयुक्त "आधार से भाजक के घुचांक का योज्य प्रतिलोम" को ही भाजक के प्रति सुभाजक या केवल सुभाजक कहते है।

अर्थात् सुभाजक = –(आधार से भाजक के घुचांक) = –(भाजक –आधार)= (आधार –भाजक)

जैसे भाजक 112 के लिए आधार 100 से घुचांक 12 का योज्य प्रतिलोम $\overline{1}\overline{2}$ सुभाजक होगा।इसी प्रकार भाजक 97 के लिए आधार 100 से घुचांक $0\overline{3}$ का योज्य प्रतिलोम 03 सुभाजक होगा।

टीप सुभाजक द्वारा भाग संक्रिया में भाज्य या भाजक अथवा दोनों को उनागर संख्यांकन पद्धत्ति में दर्शित किया जा सकता है।

14-2 भाग संक्रिया गणना में भाज्य का भागफल एवं शेषफल अनुभाग जितने अंकों का सुभाजक होगा उतने अंक के बाद भाज्य के दाँयी से बाँयी ओर (इकाई से दहाई, सैकड़ा, ----------------की ओर)एक अनुभाग विभाजन रेखा (\) डालने पर बाँयें अनुभाग में प्राप्त संख्या का अंक स्थान संख्या भागफल की स्थान संख्या एवं दाँयें अनुभाग में प्राप्त संख्या का अंक स्थान संख्या शेषफल की स्थान संख्या को सुनिष्चित करता है।

14-3 भाग संक्रिया गणना सुभाजक द्वारा भाग संक्रिया गणना को उदाहरणों के माध्यम से विश्लेषित करना ही यथेष्ठ होगा।

विश्लेषित उदाहरण■ 32 ÷ 9 के लिए–

प्रक्रम 1 सुभाजक = भाजक 9 के प्रति मूलाधार 10 से प्राप्त घुचांक का योज्य प्रतिलोम = 10 – 9 = 1

प्रक्रम 2 भाग संक्रिया गणना में भाज्य 32 का भागफल एवं शेषफल अनुभाग विभाजन – 3\2

प्रक्रम 3 भाग संक्रिया के लिए कीजिए ।

```
          9 ⌐3 \2
   सुभाजक 1
```

प्रक्रम 4 भागफल अनुभाग के संख्या के प्रथम अंक 3 और सुभाजक 1 का गुणनफल (3*1 =3) के अंकों को भाज्य के नीचे भाज्य के दुसरे अंक स्थान से दाँयी ओर क्रमशः दर्शित कीजिए।

```
          9 ⌐3 \2
   सुभाजक 1     \3
```

चूँकि भाज्य दो अंकीय और सुभाजक एक अंकीय है अतः इसे गुणनफल 3 को शेषफल अनुभाग में 2 के नीचे दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 5 स्तम्भानुसार योग करने पर अभीष्ट भागफल 3 और शेषफल 2+3 =5

अतः सम्पूर्ण संक्रिया

```
          9 ⌐3 \2
   सुभाजक 1     \3
           ---------
            3  \5
```

अभीष्ट भागफल 3 और शेषफल =5 होगा।

इसी प्रकार– 1■ 65 ÷ 8 = 1 $\overline{4}$ 5 ÷ 8 के लिए सुभाजक = 10–8 =2 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

```
          8 ⌐ 1 4̄\  5
   सुभाजक 2     2 \
                   \4̄
              ---------
               1 2̄  \ 1
```

सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक $\overline{2}$ से

अभीष्ट भागफल $1\overline{2}$ = 8 और शेषफल =1 होगा।

गणना प्रक्रम बाँयी से दाँयी ओर – भागफल अनुभाग में –

प्रथम भागफल अंक .= भाज्य का प्रथम अंक 1

दूसरा भागफल अंक .= भाज्य का दूसरा अंक $\overline{4}$ + सुभाजक 2* भाज्य का प्रथम अंक 1 = $\overline{4}$ + 2 = $\overline{2}$

शेषफल अनुभाग में

प्रथम और अंतिम शेषफल अंक = भाज्य का अंतिम अंक 5 + सुभाजक 2* भागफल का दूसरा अंक $\bar{2}$ =5+$\bar{4}$ = 1

2■ 23528÷ 98 के लिए सुभाजक = 100– 98=02 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

98 | 2 3 5\ 2 8

सुभाजक 0 2   0 4 \   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 2 से

0 \ 6   सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 3 से

\0 18   सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 9 से

2 3 9 \1 0 $_2$6

यहाँ शेषफल 106 > भाजक 98 ∴ 106 ÷ 98 का पुनःगणना

239 \1\0 6

\0 2

2 3 9 \1\0 8

अभीष्ट भागफल = 239 + 1 = 240 और शेषफल = 08 =8

3■ 1011538÷ 987 के लिए सुभाजक = 1000– 98=013 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

987 | 1 0 1 1\ 5 3 8

सुभाजक 0 1 3   0 1 3 \   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

0 0 \ 0   सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 0 से

0 \2 6   सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 2 से

\0 4 12   सुभाजक * भागफल का चौथा अंक 4 से

1 0 2 4 \8 $_1$5 $_2$0

अभीष्ट भागफल 1024 और शेषफल = 850

4■ 12344321÷ 1111 के लिए सुभाजक = 1000– 1111=$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1111 | 1 2 3 4 4\ 3 2 1

सुभाजक $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ \   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

$\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ \ 0   सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 1 से

$\bar{1}$ $\bar{1}$ \ $\bar{1}$ सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 1 से

$\bar{1}$ \ $\bar{1}$ $\bar{1}$ सुभाजक * भाज्य का चौथा अंक 1से

\ $\bar{1}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ सुभाजक * भाज्य का पाँचवा अंक 1से

1 1 1 1 1 \0 0 0

अभीष्ट भागफल 11111 और शेषफल = 0

5■ 1249÷ 61 =125$\bar{1}$ ÷ 1$\bar{4}$1 के लिए सुभाजक = 100– 1$\bar{4}$1 =4$\bar{1}$= द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1 $\bar{4}$ 1 | 1 2\ 5 $\bar{1}$

सुभाजक 4 $\bar{1}$ 4 \ $\bar{1}$ सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ 24 $\bar{6}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 6 से

1 6 \2 8 $\bar{7}$ यहाँ शेषफल 28$\bar{7}$ =273> भाजक 61 ∴ 28$\bar{7}$ ÷ 1$\bar{4}$1

3\ $\bar{3}$ 3   =3 $\bar{3}$ 3 ÷ 1$\bar{4}$1 का पुनः गणना

\ 12 $\bar{3}$ सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1से

3\ 9 0

अभीष्ट भागफल = 16 + 3 = 19 और शेषफल = 90

6■ 13291÷ 1125 के लिए सुभाजक = 1000– 1125=$\bar{1}\bar{2}\bar{5}$ द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

v1 1 2 5 | 1 3 \ 2 9 1

सुभाजक $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{5}$ $\bar{1}$ \ $\bar{2}$ $\bar{5}$ सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ $\bar{2}$ $\bar{4}$ $\overline{10}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 2 से

1 2 \ $\bar{2}$ 0 $\bar{9}$

$12 - 1\backslash 1125 + \bar{2}\,0\,\bar{9}$ =11\916

अभीष्ट भागफल 11 और शेषफल = 916

7■ 13357÷ 1012 के लिए सुभाजक = 1000– 1012=0$\bar{1}\bar{2}$ द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1012 | 1 3 \ 3 5 7

सुभाजक 0$\bar{1}\bar{2}$ 0 \ $\bar{1}$ $\bar{2}$ सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ 0 $\bar{1}$ $\bar{6}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 3 से

1 3 \2 2 1

अभीष्ट भागफल 13 और शेषफल = 221

8■ 426788÷ 829 के लिए सुभाजक = 1000– 829 = 171 = 2$\bar{3}$ 1 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

829 | 4 2 6 7 \ 7 8 8

सुभाजक 2$\bar{3}$ 1 8 $\overline{12}$ 4 \ सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 4 से

<u>20</u> $\overline{30}$ \ <u>10</u> सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक <u>10</u> से

<u>28</u> \ $\overline{42}$ <u>14</u> सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक <u>14</u> से

\ <u>18</u> $\overline{27}$ 9 सुभाजक * भागफल का चौथा अंक 9 से

4 <u>10</u> <u>14</u> 9 \ $\bar{7}$ $\bar{4}$ $_1$7

5 1 4 9 \ $\bar{7}$ $\bar{4}$ 7

5149\ $\bar{7}$ $\bar{3}\bar{3}$ = 5149–1\829+$\bar{7}\bar{3}\bar{3}$ = 5148\1$\bar{1}$6

अभीष्ट भागफल= 5148 और शेषफल = 1$\bar{1}$6 = 96

और कठिनतर उदाहरण■

9■ 52432256÷ 7998 के लिए सुभाजक = 10000– 7998 = 2002 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

7998 | 5 2 4 3 \ 2 2 5 6

सुभाजक 200 2 <u>10</u> 0 0 \ <u>10</u> सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 5 से

<u>24</u> 0 \ 0 <u>24</u> सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक <u>12</u> से

<u>56</u> \ 0 0 <u>56</u> सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक <u>28</u> से

\ <u>118</u> 0 0 <u>118</u> सुभाजक * भागफल का चौथा अंक <u>59</u> से

5 <u>12</u> <u>28</u> <u>59</u> \ <u>130</u> <u>26</u> <u>61</u> <u>124</u>

= 6 5 3 9 \ 133 334

6539\ 133334 यहाँ शेषफल 133334 > भाजक 7998 ∴ 133334 ÷ 7998

1 3 \ 3 3 3 4 का पुनः गणना

2 \ 0 0 2 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ <u>10</u> 0 0 <u>10</u> सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 5 से

1 5 \ <u>13</u> 3 5 <u>14</u>

1 5 \ 1 3 3 6 4 यहाँ शेषफल 13364 > भाजक 7998 ∴ 11154 ÷ 7998

1 \ 3 3 6 4 का पुनः गणना

\ 2 0 0 2 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

1 \ 5 3 6 6

अभीष्ट भागफल = 6539 + 15 + 1 = 6555 और शेषफल = 5366

10■ 345678 ÷ 9007 के लिए सुभाजक = 10000 – 9007 = 0993 = 1 0 $\bar{1}$3 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

9007 | 3 4 \ 5 6 7 8

सु.भा. 1 0 $\bar{1}$3   3 \ 0 $\bar{3}$ 9   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 3 से

\ 7 0 $\bar{7}$ $\underline{21}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 7 से

3 7 \ $\underline{12}$ 3 9 $\underline{29}$

= 3 7 \ 12 4 1 9   यहाँ शेषफल 12419 > भाजक 9007 ∴ 12419 ÷ 9007

1 \ 2 4 1 9 का पुनः गणना

\ 1 0 $\bar{1}$ 3   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

1 \ 3 4 0 $\underline{12}$

= 1 \ 3 4 1 2

अभीष्ट भागफल = 37 + 1 = 38 और शेषफल = 3412

11■ 13987900 ÷ 1124 के लिए सुभाजक = 1000 – 1124 = $\bar{1}\bar{2}\bar{4}$ द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1124 | 1 3 9 8 7 \ 9 0 0

सुभा. $\bar{1}\bar{2}\bar{4}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{4}$ \   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

$\bar{2}$ $\bar{4}$ $\bar{8}$ \   सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 2 से

$\bar{5}$ $\underline{10}$ \ $\overline{20}$ सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 5 से

5 \ $\underline{10}$ $\underline{20}$ सुभाजक * भागफल का चौथा अंक $\bar{5}$ से

\ 6 $\underline{12}$ $\underline{24}$ सुभाजक * भागफल का पाँचवाँ अंक $\bar{6}$ से

1 2 5 $\bar{5}$ $\bar{6}$ \ 5 $\underline{32}$ $\underline{24}$

= 12444 \ 8 4 4

अभीष्ट भागफल = 12444 और शेषफल = 844

12■ 2465493 ÷ 9999 के लिए सुभाजक = 10000 – 9999 = 0001 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

9999 | 2 4 6 \ 5 4 9 3

सुभा.. 0001   0 0 \ 0 2   सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

0 \ 0 0 4   सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 4 से

\ 0 0 0 6   सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 6 से

2 4 6 \ 5 6 $\underline{13}$ 9

= 246 \ 5 73 9

अभीष्ट भागफल = 246 और शेषफल = 5739

देखते ही हल से अभीष्ट भागफल = बाँया अनुभाग = 246

शेषफल = बाँया अनुभाग + दाँया अनुभाग = 246 + 5493 = 5739

13■ 11199171 ÷ 99979 के लिए सुभाजक = 100000 – 99979 = 00021द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

99979 ⌐ 1 1 1 \ 9 9 1 7 1

सु.भा. 00021 0 0 \ 0 2 1 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

0 \ 0 0 2 1 सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 1 से

\ 0 0 0 2 1 सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 1 से

1 1 1 \ 9 $\underline{11}$ 4 $\underline{10}$ 2

111\ 1 0 1 5 0 2 यहाँ शेषफल 101502 > भाजक 99979

1 \ 0 1 5 0 2 ∴ 101502 ÷ 99979

\ 0 0 0 2 1

1 11+1 =112\0 1 5 2 3

अभीष्ट भागफल = 112 और शेषफल = 01523 =1523

अथवा भाज्य का उनागर संख्याकन से

भाज्य 11199171 = 112 0$\bar{1}$2 $\bar{3}$1

99979 ⌐ 1 1 2 \ 0 $\bar{1}$ 2 $\bar{3}$ 1

सुभा.. 00021 0 0 \ 0 2 1 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

0 \ 0 0 2 1 सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 1 से

\ 0 0 0 4 2 सुभाजक * भागफल का तीसरा अंक 2 से

1 1 2 \ 0 $\underline{1}$ 5 2 3

अभीष्ट भागफल= 112 और शेषफल = 01523 =1523

14■ 1294567 ÷ 89997 के लिए

1294567 ÷ 89997 = 13$\bar{1}$5$\bar{4}\bar{3}\bar{3}$ ÷ 1$\bar{1}$000$\bar{3}$ से सुभाजक = 10003 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1$\bar{1}$000$\bar{3}$ ⌐ 1 3 \ $\bar{1}$ 5 $\bar{4}$ $\bar{3}$ $\bar{3}$

सु. 10003 1 \ 0 0 0 3 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ 4 0 0 0 $\underline{12}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 4 से

1 4 \ 3 5 $\bar{4}$ 0 9

14\ 3 4 6 0 9

अभीष्ट भागफल= 14 और शेषफल = 34609

15 ■ 15299999915 ÷ 899999995 के लिए

15299999915 ÷ 899999995 = 15300000$\bar{1}$15 ÷ 1$\bar{1}$0000000$\bar{5}$

से सुभाजक = 100000005 द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

1$\bar{1}$0000000$\bar{5}$ ⌐ 1 5\ 3 0 0 0 0 0 $\bar{1}$ 1 5

सुभा. 10000000 5 1 \ 0 0 0 0 0 0 0 5 सुभा. * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ 6 0 0 0 0 0 0 0 $\underline{30}$ सुभा. * भागफल का दूसरा अंक 6 से

1 6 \ 9 0 0 0 0 0 $\bar{1}$ 6 $\underline{35}$

= 1 6 \ 8 9 9 9 9 9 9 9 5 यहाँ प्राप्त शेषफल भाजक ही है।

∴ अभीष्ट भागफल= 16 + 1 = 17 और शेषफल = 0 (शून्य) होगा।

विवेचना सामान्यतः सुभाजक नियम लागू करने के लिये भाजक का बाँयी ओर से प्रथम अंक का 1 होना अनिवार्य है, जिसे उनागर संख्यांकन नियम से प्राप्त किया जा सकता है। यह नियम मूलतः मूलाधार (10,100,1000, -------10^n) के पास की भाजक संख्याओं के

अनकूल है। 9, 99, 999, 9999, ---------- जैसे भाजकों के लिए भाग गणन संक्रिया में केवल (1, 01, 001, 0001-------) जैसे सुभाजकों का अनुप्रयोग देखते –देखत विधि के व्यापकता में बढ़ते अनुभाग विभाजन का सरल विकल्प सिध्द होगा।।

मूल भाजक बाँयी ओर से प्रथम अंक का 5, 6, 7, 8, 9 हो तो भाग की यह गणन संक्रिया नियम सरल न्यूनतम गणन प्रक्रमों मे सम्पन्न हो जाता हैं लेकिन यदि मूल भाजक बाँयी ओर से प्रथम अंक 5 से छोटा हो तो गणन संक्रिया प्रक्रमों की संख्या लम्बी और उबाऊ होता जायेगा।अधोदर्शित उदाहरण का अवलोकन कीजिए।

$1011 \div 23$ के लिए सुभाजक $= 100 - 23 = 77$ द्वारा सम्पूर्ण संक्रिया

23 ⟌ 1 0 \ 1 1

सु.भा. 77 7 \ 7 सुभाजक * भाज्य का प्रथम अंक (भागफल का प्रथम अंक) 1 से

\ $\underline{49}$ $\underline{49}$ सुभाजक * भागफल का दूसरा अंक 7 से

1 7 \ $\underline{57}$ $\underline{50}$

= 1 7\ 6 2 0 यहाँ शेषफल 620 > भाजक 23 --------------(1)

6\ 2 0 ∴ $620 \div 23$

\ $\underline{42}$ $\underline{42}$

17+6= 2 3 \ $\underline{44}$ $\underline{42}$

= 2 3\4 8 2 यहाँ शेषफल 482 > भाजक 23 --------------(2)

4\ 8 2 ∴ $482 \div 23$

\ $\underline{28}$ $\underline{28}$

27\ $\underline{36}$ $\underline{30}$

= 2 7\3 9 0 यहाँ शेषफल 390 > भाजक 23 --------------(3)

3 \ 9 0 ∴ $390 \div 23$

\ $\underline{21}$ $\underline{21}$

3 0 \ $\underline{30}$ $\underline{21}$

= 3 0\ 3 2 1 यहाँ शेषफल 321 > भाजक 23 --------------(4)

3\ 2 1 ∴ $321 \div 23$

\ $\underline{21}$ $\underline{21}$

3 3 \ $\underline{23}$ $\underline{22}$

= 3 3 \2 5 2 यहाँ शेषफल 252 > भाजक 23 --------------(5)

2 \ 5 2 ∴ $252 \div 23$

\ $\underline{14}$ $\underline{14}$

3 5 \ $\underline{19}$ $\underline{16}$

= 3 5 \2 0 6 यहाँ शेषफल 206 > भाजक 23 --------------(6)

2 \ 0 6 ∴ $206 \div 23$

\ $\underline{14}$ $\underline{14}$

3 7\ $\underline{14}$ $\underline{20}$

= 3 7 \1 6 0 यहाँ शेषफल 160 > भाजक 23 --------------(7)

1 \ 6 0 ∴ $160 \div 23$

\ 7 7

3 8 \ $\underline{13}$ 7

= 3 8 \1 3 7 यहाँ शेषफल 137 > भाजक 23 --------------(8)

1 \ 3 7 ∴ $137 \div 23$

\ 7 7

3 9 \ $\underline{10}$ $\underline{14}$

$= \;\; 3 \;\; 9 \;\backslash\; 1 \;\; 1 \;\; 4$ यहाँ शेषफल 114 > भाजक 23 --------------(9)

$1 \;\backslash\; 1 \;\; 4$ $\therefore$ $114 \div 23$

$\backslash\; 7 \;\; 7$

$4 \;\; 0 \;\backslash\; 8 \;\; \underline{11}$

$= \;\; 4 \;\; 0 \;\backslash\; 9 \;\; 1$ यहाँ शेषफल 91 > भाजक 23 --------------(10)

$1 \;\backslash\; \bar{1} \;\; 1$ $\therefore$ $91 \div 23 = 1\bar{1}1 \div 23$

$\backslash\; 7 \;\; 7$

$4 \;\; 1 \;\backslash\; 6 \;\; 8$ यहाँ शेषफल 68 > भाजक 23 --------------(11)

$1 \;\backslash\; \bar{3} \;\; \bar{2}$ $\therefore$ $68 \div 23 = 1\bar{3}\bar{2} \div 23$

$\backslash\; 7 \;\; 7$

$4 \;\; 2 \;\backslash\; 4 \;\; 5$ यहाँ शेषफल 45 > भाजक 23 --------------(12)

$1 \;\backslash\; \bar{5} \;\; \bar{5}$ $\therefore$ $45 \div 23 = 1\bar{5}\bar{5} \div 23$

$\backslash\; 7 \;\; 7$

$4 \;\; 3 \;\backslash\; 2 \;\; 2$ यहाँ शेषफल 22 < भाजक 23 --------------(13)

इस प्रकार $1011 \div 23$ के लिये गणन संक्रिया 13 प्रक्रमों में पूरा हुआ ।

अभीष्ट भागफल= 43 और शेषफल = 22

तब प्रश्न बनता है, कि ऐसी परिस्थिति जन्य भाजकों के लिए सुभाजक विधि का अनुप्रयोग किया जा सकता है या नहीं। और किया जा सकता है ,तो कैसे ? इस प्रश्न का उत्तर बहुत ही सहज भाव से हाँ ही होगा। गुनित सुभाजक द्वारा भाग संक्रिया के नाम पर प्रतिपादित किया जा सकता है।

14-2 गुणित सुभाजक जब मूल भाजक मूलाधार के निकटतर संख्या न हो तो ऐसे भाजक का m गुना अथवा m वाँ भाग मान का भाजक संख्या किसी निकटतर मूलाधार के पास की संख्या के रूप प्राप्त करते हैं। तब यह प्राप्त संख्या गुनितसुभाजक कहलाता है। जैसे – भाजक 23 का 5 गुना =23*5 =115 मूलाधार 100 के निकटतर है। भाजक 198 $=20\bar{2}$ का दूसरा भाग $=20\bar{2} \div 2 = 10\bar{1}$ मूलाधार 100 के निकटतर है।

14-3 गुणित भाजक के प्रति गुणित सुभाजक द्वारा भाग संक्रिया

गुनित सुभाजक = –(आधार से गुनितभाजक का घुचांक) = –(गुनितभाजक –आधार)= (आधार –गुनितभाजक)

प्रक्रम 1 अनुच्छेद 14-1 के अनुसार भाग संक्रिया सम्पन्न कर भागफल और शेषफल प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 भागफल$_1$ एवं शेषफल$_1$ यदि गुनित सुभाजक मूल भाजक का m गुना हो तो प्रक्रम 1 से प्राप्त भागफल का m गुना और यदि गुनित सुभाजक मूल भाजक का m वाँ भाग हो तो प्रक्रम 1 से प्राप्त भागफल का m वाँ भाग कर भागफल$_1$ प्राप्त कीजिए। तथा प्रक्रम 1 से प्राप्त शेषफल को षेशफल$_1$ माने ।

प्रक्रम 3 भागफल$_1$ एवं शेषफल$_1$ से अभीष्ट भागफल एवं शेषफल

a• यदि शेषफल$_1$ < मूल भाजक हो तो–

अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ एवं शेषफल = शेषफल$_1$ ।

b• यदि शेषफल$_1$ = मूल भाजक हो तो–

अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ +1 एवं शेषफल = 0 ।

c• यदि शेषफल$_1$ ऋणात्मक हो तो–

1• ऋणात्मक शेषफल$_1$ का निरपेक्ष मान < भाजक हो तो

अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ $\bar{1}$ एवं शेषफल = मूल भाजक +(ऋणात्मक शेषफल$_1$)

2• ऋणात्मक शेषफल$_1$ का निरपेक्ष मान > भाजक हो और यह सरल तालिका अनुसार

x'भाजक +y में दर्शित होने पर जहाँ (y< भाजक)

अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ – (x+1) एवं शेषफल = भाजक – y

d• यदि प्रारंभिक शेषफल$_1$ > मूल भाजक हो तो–

शेषफल को नवीन भाज्य मान कर भाग संक्रिया दोहराये एवं प्रक्रम 2 के भाँति भागफल$_2$ और शेषफल$_2$ प्राप्त कीजिए।............ इस प्रकार भागफल$_1$ भागफल$_2$, भागफल$_3$......एवं शेषफल$_1$ शेषफल$_2$ शेषफल$_3$ .... प्राप्त करने का क्रम अंतिम शेषफल$_L$ $\le$ मूलभाजक होने तक जारी रखे। उपरोक्त नियम a ,b और c के प्रतिबंध पर अंतिम भागफल$_L$ और शेषफल$_L$ प्राप्त कीजिए।

तब अभीष्ट भागफल = समस्त भागफलों(भागफल$_1$ से भागफल$_L$ तक) का योगमान

एवं शेषफल =शेषफल$_L$ होगा।

उदाहरण 1■ 1699÷ 223 के लिए

तथा मूल भाजक 223 का गुणित भाजक = 223*4 =892=$1\bar{1}1\bar{2}$ के प्रति गुनित सुभाजक = $11\bar{2}$ द्वारा

$1\bar{1}1\bar{2}$ | 1 \ 6 9 9

सु.भा. $11\bar{2}$ | \ 1 1 $\bar{2}$

4 *1 \ 8 0 7

= 4 \ 8 0 7 यहाँ शेषफल 807 > भाजक

∴ भागफल$_1$ = 4 तथा शेषफल$_1$ = 807 = $1\bar{2}1\bar{3}$ के लिए भाग संक्रिया

1\ $\bar{2}$ 1 $\bar{3}$

\ 1 1 $\bar{2}$

4*1\ $\bar{1}$ 2 $\bar{5}$

4 \ $\bar{1}$ 2 $\bar{5}$ यहाँ शेषफल = $\bar{1}2\bar{5}$ ऋणात्मक है

∴ भागफल$_2$ = 4–1 =3 तथा शेषफल$_2$ = 223 +$\bar{1}2\bar{5}$ =$14\bar{2}$ =138

∴ अभीष्ट भागफल =भागफल$_1$ + भागफल$_2$ =4+3 =7 तथा शेषफल = शेषफल$_2$ =138

अथवा 1699÷ 223 के लिए भाज्य 1699 = $2\bar{3}0\bar{1}$

तथा मूल भाजक 223 का गुणित भाजक = 223*4 =892=$1\bar{1}1\bar{2}$ के प्रति गुनित सुभाजक = $11\bar{2}$ द्वारा

$1\bar{1}1\bar{2}$ | 2 \ $\bar{3}$ 0 $\bar{1}$

सुभा.. $11\bar{2}$ | \ 2 2 $\bar{4}$

4 *2 \ $\bar{1}$ 2 $\bar{5}$

= 8 \ $\bar{1}$ 2 $\bar{5}$ यहाँ शेषफल = $\bar{1}2\bar{5}$ ऋणात्मक है।

∴ अभीष्ट भागफल = 8–1 =7 तथा शेषफल = 223 +$\bar{1}2\bar{5}$ =$14\bar{2}$ =138

उदाहरण2■ 7685÷ 672 के लिए

तथा मूल भाजक 672 का छटवाँ भाग भाजक = 672÷ 6 =112= के प्रति गुनित सुभाजक = $\bar{1}\bar{2}$ द्वारा

112 | 7 6 \ 8 5

सुभा.. $\bar{1}\bar{2}$ | $\bar{7}$ \ $\overline{14}$

\ 1 2

$\frac{1}{6}$ * 7 $\bar{1}$ \ $\bar{5}$ 7

= *$\frac{1}{6}$ * 6 9 \ $\bar{5}$ 7 = $11\frac{3}{6}$ \ $\bar{5}$ 7 = 11 \ 3 * 112 + $\bar{4}$ 3

= 11\336 + $\bar{4}$ 3 = 11\ 3$\bar{1}$3 = 11\ 293 यहाँ शेषफल 293 < मूल भाजक

∴ अभीष्ट भागफल = 11 तथा शेषफल = 293

अथवा 7685÷ 672 के लिए भाज्य 7685 = $1\bar{2}3\bar{1}\bar{5}$

तथा मूल भाजक 672 का छटवाँ भाग भाजक = 672÷ 6 =112= के प्रति गुनित सुभाजक = $\bar{1}\bar{2}$ द्वारा

1112 | 1 $\bar{2}$ 3\ $\bar{1}$ $\bar{5}$

सु. $\bar{1}\bar{2}$ | $\bar{1}$ $\bar{2}$\

3 \ 6

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\quad \backslash\ 2 \quad 4 \\ \hline *\frac{1}{6}* \quad 1\ \ \bar{3}\ \ \bar{2}\ \ \backslash\ 7\ \ \bar{1} \end{array}$$

$= \ *\frac{1}{6}*6 \ \ 8 \backslash \ 6 \ \ 9 \ = 11\frac{2}{6} \ \backslash \ 6 \ \ 9 \ = \ 11 \ \backslash \ 2*112+69 = 11\backslash 224 + 69$

$= 11\backslash\ 293$ यहाँ शेषफल $293 <$ मूल भाजक

$\therefore$ अभीष्ट भागफल $= 11$ तथा शेषफल $= 293$

अथवा $7685 \div 672$ के लिए

मूल भाजक 672 का गुणित भाजक $= 672*2 = 1344 =$ के प्रति गुनित सुभाजक $= \bar{3}\bar{4}\bar{4}$ द्वारा

$$\begin{array}{llllll} 1344 & 7 & \backslash & 6 & 8 & 5 \\ \text{सु.भा. } \bar{3}\bar{4}\bar{4} & & \backslash & \overline{21} & \overline{28} & \overline{28} \\ \hline & 2*7 & \backslash & \overline{15} & \overline{20} & \overline{23} \end{array}$$

$= \ 1\ 4 \backslash \ \bar{1}\bar{7}\bar{2}\bar{3}$ यहाँ शेषफल $\bar{1}\bar{7}\bar{2}\bar{3}$ का निरपेक्ष मान $= 1723 >$ भाजक

$\therefore$ भागफल$_1 = 14$ तथा शेषफल$_1 = \bar{1}\bar{7}\bar{2}\bar{3} = \ \bar{2}3\bar{4}\bar{3}$ के लिए भाग संक्रिया

$$\begin{array}{lccc} \bar{2}\backslash & 3 & \bar{2} & \bar{3} \\ \ \ \backslash & 6 & 8 & 8 \\ \hline 2*\bar{2}\backslash & 9 & 6 & 5 \end{array}$$

$\bar{4}\backslash 965$ यहाँ शेषफल $=965 >$ भाजक

$\therefore$ भागफल$_2 = \bar{4} + 1 = \bar{3}$ तथा शेषफल$_2 = 965 - 672 = 293$

$\therefore$ अभीष्ट भागफल $=$ भागफल$_1$ $+$ भागफल$_2$ $= 14 + \bar{3} = 11$ तथा शेषफल $=$ शेषफल$_2$ $= 293$

अथवा $7685 \div 672$ के लिए भाज्य $7685 = 1\bar{2}\bar{3}\bar{1}\bar{5}$

तथा मूल भाजक 672 का गुणित भाजक $= 672*2 = 1344 =$ के प्रति गुनित सुभाजक $= \bar{3}\bar{4}\bar{4}$ द्वारा

$$\begin{array}{lllllll} 1344 & 1 & \bar{2} & \backslash & \bar{3} & \bar{1} & \bar{5} \\ \text{सु. } \bar{3}\bar{4}\bar{4} & & \bar{3} & \backslash & \bar{4} & \bar{4} & \\ & & & \backslash & \underline{15} & \underline{20} & \underline{20} \\ \hline & 2*1 & \bar{5} & \backslash & 8 & \underline{15} & \underline{15} \end{array}$$

$= 2*5\backslash 965 \ = 10\backslash\ 965$ यहाँ शेषफल $= 965 >$ भाजक

$\therefore$ भागफल$_1 = 10 + 1 = 11$ तथा शेषफल$_1 = 965 - 672 = 293$

$\therefore$ अभीष्ट भागफल $=$ भागफल$_1$ $= 11$ तथा शेषफल $=$ शेषफल$_1$ $= 293$

उदाहरण 3■ $1011 \div 23$ के लिए

तथा मूल भाजक 23 का गुणित भाजक $= 23*4 = 92$ के प्रति गुनित सुभाजक $(100-92) = 8 = 1\bar{2}$ द्वारा

$$\begin{array}{llllll} 92 & 1 & 0\backslash & 1 & 1 \\ \text{सु } 1\bar{2} & & 1\ \backslash & \bar{2} & \\ & & \backslash 1 & \bar{2} & \\ \hline & 4*1 & 1\backslash & 0 & \bar{1} \end{array}$$

$= \ 4\ 4 \backslash\ 0\ \bar{1}$ यहाँ शेषफल $0\bar{1}$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ अभीष्ट भागफल $= 44 - 1 = 43$ तथा शेषफल $= 23 + 0\bar{1} = 22$

अथवा $1011 \div 23$ के लिए

तथा मूल भाजक 23 का गुणित भाजक $= 23*5 = 115 =$ के प्रति गुनित सुभाजक $\bar{1}\bar{5}$ द्वारा

$$\begin{array}{llllll} 115 & 1 & 0\backslash & 1 & 1 \\ \text{सु } \bar{1}\bar{5} & & \bar{1}\ \backslash & \bar{5} & \\ & & \backslash 1 & 5 & \\ \hline & 5*1 & \bar{1}\backslash & \bar{3} & 6 \end{array}$$

$= 5\bar{5}\backslash\bar{2}\bar{4}$ या $5*9\backslash\bar{2}\bar{4}$

= 4 5 \ $\overline{2}\overline{4}$ यहाँ शेषफल $\overline{2}\overline{4}$ ऋणात्मक है। निरपेक्ष मान 24 = 1*23+1

∴ अभीष्ट भागफल = 45 –(1+1)=43 तथा शेषफल = 23–1 =22

विवेचना यह सुभाजक विधि भी एक सीमित विधि ही है। भाग संक्रिया की व्यापकता के निकटतर प्रतीत होता है। तब भाग गणन संक्रिया के लिए एक सर्व व्यापक विधि अवश्य होना चाहिए। आपको आश्चर्य होगा कि गुणा संक्रिया की भाँति आधुनिक विधि से हटकर यह सर्व व्यापक विधि का विस्तारित अध्ययन अग्र अध्याय में प्रस्तुत है।

-----------14----------

अध्याय -15
भाग गणन संक्रिया की सार्वभौमिक राजमणि विधि
धजांक सह खड़ी–तिरछा विधि

15-1 प्रस्तावना छत्तीसगढ अंचल के माननीय भाषाविद, साहित्यकार, लेखक, कवि गण अपने सतत् शोध परख आलेख प्रस्तुति के माध्यम से छत्तीसगढ़ी भाषा की भाव संप्रेषण क्षमताओं को देवभाषा संस्कृत (बौद्ध कालीन सभ्यता में पाली –संस्कृत) के शब्दों का सम्पुट से श्रृंगारित होना कोई अतिश्योक्ति नहीं मानते है। जिसका गणितीय अध्ययन में प्रमाण संख्याओं का उच्चारण सहज और बोधगम्य है। छत्तीसगढ़ी का उना और आगर शब्द क्रमशः देवभाषा संस्कृत में से उन और अग्र शब्द का सम्पुट है। इसी तारतम्य में गृह देवी–देवताओं के पूजन मे सामान्यतः लाल ,सफेद, और काले रंग के तिकोन कपड़े का तुकड़े को बीते भर नाप की लम्बी बॉस का तिली के ऊपर लगा कर पूजन स्थल पर गड़ाते हैं। इसे धजा चढ़ाना कहते है। (विशालता में संस्थागत एव धार्मिक भावना को प्रगाढ़ तो किया ही है, इनसे भी बढ़कर राष्ट्रीय सम्मान और अस्मिता के रूप में दुनिया के सभी राष्ट्रों ने स्वीकारा है। और अपना–अपना अलग–अलग राष्ट्रीय ध्वज राष्ट्र सम्मान स्वरूप अलग– अलग अन्तराष्ट्रीय मान्यता में स्थापित किये हैं। राष्ट्रध्वज कहलाता है। जैसा कि हमारा राष्ट्र ध्वज – तिरंगा। सामान्यतः अपना ध्वज अपने आन बान शान का प्रतीक होता है।) छत्तीसगढ़ी का यह धजा शब्द भी देवभाषा संस्कृत के ध्वज शब्द का सम्पुट है।राष्ट्र भाषा हिन्दीं मे ध्वज, पताका और झण्डा शब्द प्रयुक्त है।झण्डा/झण्डी शब्द का प्रयोग छत्तीसगढ़ी बोल–चाल मे भी मिलता है।

अध्याय 13 एवं 14 के प्रस्तुति में भाग संक्रिया की देखते–देखत ,एवं सुभाजक विधि प्रतिबंध के अन्तर्गत सरल ,छोटी, रूचिकर आत्मसाती एवं प्रज्ञावान है। लेकिन कुछ संदर्भ में उबाऊ तो नहीं लम्बी अवश्य हो जाती है। तब प्रतिबंध से परे सर्व व्यापक विधि आधुनिक विधि से आप सब अनभिज्ञ नहीं है। फिर भी इन सबसे परे जगत गुरू श्री श्री 1008 श्री स्वामी तीर्थराज जी महराज द्वारा लिखित वैदिक गणित में सार्वभौमिक विधि प्रतिपादित किये है। जिसे भाग संक्रिया में ध्वजांक विधि कहा गया है। उनके नाम पर भाग संक्रिया की इस विधि को राजमणि विधि भी कहते हैं। जिसके संबंध में उनका ही कथन है – यह विधि सार्व भौमिक अनु प्रयोग के अतिरिक्त विलोकनम् (देखते देखत) मात्र केसाथ एक पंक्ति वाले गणितीय संगत विधि वाले वैदिक आदर्शों का सर्वोत्तम तथा सर्वनिष्ठ प्रतिनिधित्व करने में पूर्ण समर्थ है।

उनके इस प्रतिपादन में उनागर संख्यांकन पद्धत्ति का अनुप्रयोग कर और नया आयाम देने वैदिक भाषा शब्द ध्वज के लिए छत्तीसगढ़ी शब्द "धजा" में अंक शब्द जोड़कर इस अध्याय का शीर्षक धजांक विधि प्रतिपादित किया गया है। इस विधि में "गणन संक्रिया अन्तर्गत गुणा संक्रिया प्रसंग में लियें अध्याय 10 गुणा की व्यापक विधि में खड़ी–तिरछा विधि का अनु प्रयोग को देखते हुए इस विधि का पूरा नाम धजांक सह खड़ी–तिरछा विधि यथेष्ठ होगा।

विशिष्ट अध्ययन क्रम में एक अंकीय धजांक, दो अंकीय धजांक तीन अंकीय धजांक--------n अंकीय धजांक पर क्रमशः प्रस्तुत है।

उदाहरण 1■ 58077÷ 73 का हल विश्लेषण राजमणि विधि द्वारा कीजिए।

हल विश्लेषण

प्रक्रम 1 भाजक 73 के दहाई अंक 7 को भाजक स्तम्भ में रखकर प्रकूचांक (आगे कूच कराने या आगे बढ़ाने वाला प्रतिनिधि अंक) प्राप्त कीजिए। इकाई अंक 3 को प्रकूचांक 7 के ऊपर धजांक दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1से धजांक 3 एक अंकीय है। अतः भाज्य के दाँयी ओर एक अंक स्थान बाद शेषफल स्तम्भ सुनिश्चित करने ⋮ दर्शित कीजिए।

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

3 धजांक / 7प्रकूचांक	5	$_5 8$	$_2 0$	$_3 7$	⋮ $_5 7$	सकल भाज्य पंक्ति
		58	$\bar{4}$	40		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	8	$\bar{1}$	5	⋮42	भागफल ⋮ शेषफल पंक्ति
			24	$\bar{3}$	15	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

प्रक्रम 3 प्रथम क्रियाशील भाज्य = प्रथम सकल भाज्य = 5 ∴ 5÷7 से प्राप्त भागफल 0 भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 5 को भाज्य का दूसरा अंक 8 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 58 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 से प्राप्त सकल भाज्य 58 में से प्रक्रम 3 से प्राप्त भागफल 0 और धजांक 3 का खड़ा तिरछा गुणा CP $[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}] = 0$ को घटाकर [58–0]= क्रियाशील भाज्य 58 प्राप्त कीजिए। 58 ÷7 से प्राप्त भागफल 8 को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 2 को भाज्य का तीसरा अंक 0 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 20 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 प्रक्रम 4 से प्राप्त सकल भाज्य 20 में से प्रक्रम 4 से प्राप्त भागफल 8 और धजांक 3 का खड़ा तिरछा गुणा CP $\begin{bmatrix}3\\8\end{bmatrix} = 24$ को घटाकर $[20-24]=$ क्रियाशील भाज्य $\bar{4}$ प्राप्त कीजिए। $\bar{4} \div 7$ से प्राप्त भागफल $\bar{1}$ को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 3 को भाज्य का चौथा अंक 7 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 37 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 6 प्रक्रम 5 से प्राप्त सकल भाज्य 37 में से प्रक्रम 5 से प्राप्त भागफल $\bar{1}$ और धजांक 3 का खड़ा तिरछा गुणा CP $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \bar{3}$ को घटाकर $[37-\bar{3}]=$ क्रियाशील भाज्य 40 प्राप्त कीजिए। $40 \div 7$ से प्राप्त भागफल 5 को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 5 को भाज्य का पाँचवाँ अंक 7 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 57 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 7 प्रक्रम 6 से प्राप्त सकल भाज्य 57 में से प्रक्रम 6 से प्राप्त भागफल 5 और धजांक 3 का खड़ा तिरछा गुणा CP $\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = 15$ को घटाकर $[57-15]=$ शेषफल 42 प्राप्त कीजिए।

अभीष्ट भागफल $= 08\bar{1}5 = 795$ तथा शेषफल $= 42$ होगा।

अथवा भाज्य को उनागर संख्यांकन में लेने पर

$58077 \div 73 = 1\bar{4}\bar{1}1\bar{2}\bar{3} \div 73$

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

3 धजांक / 7 प्रकूचांक	1	$_1\bar{4}$	$\bar{1}\bar{2}$	$\bar{1}1$	$\bar{3}\bar{2}$	$\vdots\ _3\bar{3}$	सकल भाज्य पंक्ति
		$1\bar{4}$	$\bar{1}\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}\bar{2}$		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	1	$\bar{2}$	0	$\bar{5}$	$\vdots\,42$	भागफल ⋮ शेषफल पंक्ति
		0	3	$\bar{6}$	0	$\bar{1}\bar{5}$	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

अभीष्ट भागफल $= 1\bar{2}0\bar{5} = 795$
और शेषफल $= 42$ होगा।

दो अंकीय धजांक

उदाहरण 2■ $6381827 \div 528$ का हल विश्लेषण राजमणि विधि द्वारा कीजिए।

हल विश्लेषण –

प्रक्रम 1 भाजक 528 के सैकड़ा अंक 5 को भाजक स्तम्भ में रखकर प्रकूचांक (आगे कूच कराने या आगे बढ़ाने वाला प्रतिनिधि अंक) प्राप्त कीजिए। दहाई एवं इकाई से बनी संख्या 28 को प्रकूचांक 5 के ऊपर धजांक दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1से धजांक 28 द्विअंकीय है। अतः भाज्य के दाँयी ओर दो अंक स्थान बाद शेषफल स्तम्भ सुनिश्चित करने ⋮ दर्शित कीजिए।

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

28 धजांक / 5 प्रकूचांक	6	$_1 3$	$_1 8$	$_1 1$	$_3 8$	$\vdots\ _4 27$	सकल भाज्य पंक्ति
	6	11	6	$\bar{7}$	34		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	1	2	1	$\bar{2}$	6	$\vdots 419$	भागफल ⋮ शेषफल पंक्ति
		2	12	18	4	8	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

प्रक्रम 3 प्रथम क्रियाशील भाज्य = प्रथम सकल भाज्य $= 6$ $\therefore 6 \div 5$ से प्राप्त भागफल 1 भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 1 को भाज्य का दूसरा अंक 3 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 13 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 से प्राम्त सकल भाज्य 13 में से प्रक्रम 3 से प्राप्त भागफल 1 और धजांक के प्रथम अंक 2 का खड़ा तिरछा गुणा CP $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = 2$ को घटाकर $[13-2]=$ क्रियाशील भाज्य 11 प्राप्त कीजिए। $11 \div 5$ से प्राप्त भागफल 2 को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 1 को भाज्य का तीसरा अंक 8 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 18 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 प्रक्रम 4 से प्राप्त सकल भाज्य 18 में से प्रक्रम 3 और 4 से प्राप्त भागफल 1 और 2 का धजांक 28 के दोनों अंक 2 और 8 से खड़ा तिरछा गुणा योग CP $\begin{bmatrix}2 & 8\\1 & 2\end{bmatrix} = 12$ को घटाकर $[18-12]=$ क्रियाशील भाज्य 6 प्राप्त कीजिए। $6 \div 5$ से प्राप्त भागफल 1 को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 1 को भाज्य का चौथा अंक 1 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 11 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 6 प्रक्रम 5 से प्राप्त सकल भाज्य 11 में से प्रक्रम 4 और 5 से प्राप्त भागफल 2 और 1 का धजांक 28 के दोनों अंक 2 और 8 से खड़ा तिरछा गुणा योग CP $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 18$ को घटाकर [11–18]= क्रियाशील भाज्य $\bar{7}$ प्राप्त कीजिए। $\bar{7} \div 5$ से प्राप्त भागफल $\bar{2}$ को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 3 को भाज्य का पाँचवाँ अंक 8 के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल भाज्य 38 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 7 प्रक्रम 6 से प्राप्त सकल भाज्य 38 में से प्रक्रम 5 और 6 से प्राप्त भागफल 1 और $\bar{2}$ का धजांक 28 के दोनों अंक 2 और 8 से खड़ा तिरछा गुणा योग CP $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & \bar{2} \end{bmatrix} = 4$ को घटाकर [38–4]= क्रियाशील भाज्य 34 प्राप्त कीजिए। 34 ÷5 से प्राप्त भागफल 6 को भागफल पंक्ति में तथा शेषफल 4 को भाज्य का छटवाँ अंक 2 (यहाँ शेषफल स्तम्भ का प्रथम और अंतिम अंक है) के नीचे बाँयी ओर दर्शित कर सकल शेषफल 427 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 8 प्रक्रम 7 से प्राप्त सकल शेषफल 427 में से [(प्रक्रम 7 से प्राप्त भागफल 6 का धजांक 28 के दूसरे अंक 8 से खड़ा तिरछा गुणा)+(प्रक्रम 6 और 7 से प्राप्त भागफल $\bar{2}$ और 6 का धजांक 28 के दोनों अंक 2 और 8 से खड़ा तिरछा गुणा योगका 10 गुना)] $= \left[CP \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \end{Bmatrix} + 10 * CP \begin{Bmatrix} 2 & 8 \\ \bar{2} & 6 \end{Bmatrix} \right] = 48 + 10 * \bar{4} = 48 + \bar{4}0 = 8$ को घटाकर [427–8]= शेषफल 419 प्राप्त कीजिए।

अभीष्ट भागफल $= 121\bar{2}6 = 12086$ तथा शेषफल $= 419$ होगा।

अथवा

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

28धजांक / 5प्रकूचांक	6	$_1 3$	$_1 8$	$_1 1$	$_{\bar{2}} 8$	: $\bar{3}27$	सकल भाज्य पंक्ति
	6	11	6	$\bar{7}$	$\bar{1}\bar{8}$		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	1	2	1	$\bar{1}$	$\bar{3}$		भागफल : शेषफल पंक्ति
		2	12	18	6	$\bar{1}6\bar{4}$	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

भागफल$_1 = 121\bar{1}\bar{3} = 12087$

और शेषफल$_1 = \bar{3}27 - [cp \begin{Bmatrix} 8 \\ \bar{3} \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} 2 & 8 \\ \bar{1} & \bar{3} \end{Bmatrix}] = \bar{3}27 - [\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}\bar{0}] = \bar{3}27 - \bar{1}6\bar{4} = \bar{2}91 = \bar{1}0\bar{9}$ ऋणात्मक है।

∴ अभीष्ट भागफल = 12087–1= 12086 तथा शेषफल = 528 + $\bar{1}0\bar{9}$ = $42\bar{1}$=419 होगा।

अथवा

केवल भाज्य को उनागर संख्यांकन लेने से भाज्य = 6381827 = $1\bar{4}4\bar{2}\ 2\bar{2}3\bar{3}$

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

28धजांक / 5प्रकूचांक	1	$_1 \bar{4}$	$_1 4$	$_2 \bar{2}$	$_1 2$	$\bar{1}\bar{2}$	: $\bar{3}3\bar{3}$	सकल भाज्य पंक्ति
	1	6	12	6	$\bar{6}$	$\bar{1}\bar{8}$	$\bar{1}0\bar{9}$	क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	1	2	1	$\bar{1}$	$\bar{3}$		भागफल : शेषफल पंक्ति
		0	2	12	18	6	$\bar{1}6\bar{4}$	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

भागफल$_1 = 0121\bar{1}\bar{3} = 12087$

और शेषफल$_1 = \bar{3}3\bar{3} - [cp \begin{Bmatrix} 8 \\ \bar{3} \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} 2 & 8 \\ \bar{1} & \bar{3} \end{Bmatrix}] = \bar{3}3\bar{3} - [\bar{2}\bar{4} + \bar{1}\bar{4}\bar{0}] = \bar{3}3\bar{3} - \bar{1}6\bar{4} = \bar{2}91 = \bar{1}0\bar{9}$ ऋणात्मक है।

∴ अभीष्ट भागफल = 12087–1= 12086 तथा शेषफल = 528 + $\bar{1}0\bar{9}$ = $42\bar{1}$=419 होगा।

अथवा

भाज्य और भाजक दोनों को उनागर संख्यांकन लेने से

भाज्य = 6381827 = $1\bar{4}4\bar{2}\ 2\bar{2}3\bar{3}$ भाजक 528 = $53\bar{2}$

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति• बाँयी से दाँयी ओर

$3\bar{2}$धजांक / 5प्रकूचांक	1	$_1 \bar{4}$	$_1 4$	$_1 \bar{2}$	$_4 2$	$_1 \bar{2}$	$_1 3\bar{3}$	सकल भाज्य पंक्ति
	1	6	11	4	46	$\bar{1}\bar{9}$	$4\ 2\bar{1}$	क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	1	2	0	9	$\bar{4}$		भागफल : शेषफल पंक्ति
		0	3	4	$\bar{4}$	27	$\bar{3}08$	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

∴ अभीष्ट भागफल = $01209\bar{4}$ =12086 तथा

शेषफल $= 13\bar{3} - [\text{cp}\begin{Bmatrix}\bar{2}\\4\end{Bmatrix} + 10 * \text{cp}\begin{Bmatrix}3 & \bar{2}\\9 & 4\end{Bmatrix}] = 13\bar{3} - [8 + \bar{3}00] = 13\bar{3} - \bar{3}08 = 127 + 30\bar{8} = 42\bar{1} = 419$ होगा।

तीन अंकीय धजांक

उदाहरण 3■ 3716281120000÷ 12734 का हल विश्लेषण राजमणि विधि द्वारा कीजिए।

हल विश्लेषण–

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति• बाँयी से दाँयी ओर

734धजांक / 12प्रकूचांक												
	3	$_{3}7$	$_{1}1$	$_{2}6$	$_{0}2$	$_{3}8$	$_{2}1$	$_{3}1$	$\bar{2}2$	$\bar{4}0$	: $_{7}000$	सकलभाज्य :शेषफल पंक्ति
	3	37	$\overline{10}$	24	$\overline{21}$	50	$\bar{9}$	34	$\overline{52}$	$\overline{17}$		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	3	$\bar{1}$	2	$\bar{2}$	4	$\bar{1}$	3	$\bar{4}$	$\bar{2}$	: 8628	भागफल : शेषफल पंक्ति
		0	21	2	23	$\overline{12}$	30	$\bar{3}$	34	24	$\overline{1628}$	खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

भागफल अनुभाग का सांकेतिक हल व्याख्या तालिका

प्रकूचांक = भाजक 12347 के बाँयी ओर प्रथम दो अंक से बनी संख्या = 12

तथा धजांक के अंक = शेष अंतिम तीन अंक 7 3 4

प्रक्रम	सकल भाज्य	खड़ा तिरछा गुना योग C. P.	क्रियाशील भाज्य A–B	C ÷ प्रकूचांक12 से भागफल	C ÷ प्रकूचांक12 से शेषफल	शेषफल को भाज्य के आगे क्रमकेअंक के बाँयी ओर नीचेदर्शित करनेपर अगले प्रक्रम का सकल भाज्य
	A	B	C	D	E	F
1	3	----	3	0	3	$_{3}7$ =37
2	37	$\begin{Bmatrix}7\\0\end{Bmatrix} = 0$	37	3	1	$_{1}1$=11
3	11	$\begin{Bmatrix}7 & 3\\0 & 3\end{Bmatrix} = 21$	$\overline{10}$	$\bar{1}$	2	$_{2}6$=26
4	26	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\0 & 3 & \bar{1}\end{Bmatrix}=2$	24	2	0	$_{0}2$ =2
5	2	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\3 & \bar{1} & 2\end{Bmatrix}= 23$	$\overline{21}$	$\bar{2}$	3	$_{3}8$=38
6	38	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\\bar{1} & 2 & \bar{2}\end{Bmatrix}=\overline{12}$	50	4	2	$_{2}1$=21
7	21	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\2 & \bar{2} & 4\end{Bmatrix}=30$	$\bar{9}$	$\bar{1}$	3	$_{3}1$=31
8	31	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\\bar{2} & 4 & \bar{1}\end{Bmatrix}=\bar{3}$	34	3	$\bar{2}$	$_{\bar{2}}2=\overline{18}$
9	$\overline{18}$	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\4 & \bar{1} & 3\end{Bmatrix}=34$	$\overline{52}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$_{\bar{4}}0= \overline{40}$
10	$\overline{40}$	$\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\\bar{1} & 3 & \bar{4}\end{Bmatrix}=\overline{23}$	$\overline{17}$	$\bar{2}$	7	सकल शेषफल $_{7}000$ =7000

अभीष्ट भागफल $= 03\bar{1}2\bar{2}4\bar{1}3\bar{4}\bar{2} = 291839258$ तथा

शेषफल = सकल शेषफल – $[\text{cp}\begin{Bmatrix}4\\\bar{2}\end{Bmatrix} + 10\begin{Bmatrix}3 & 4\\\bar{4} & \bar{2}\end{Bmatrix} + 100 * \text{cp}\begin{Bmatrix}7 & 3 & 4\\3 & \bar{4} & \bar{2}\end{Bmatrix}]$ 1620 28 1592

$= 7000 - [\bar{8} + \overline{220} + \overline{1400}\ ] = 7000 - \overline{1628} = 8628$

15_2 n अंकीय धजांक और x अंकीय भागफल अनुभाग के प्रति खड़ा तिरछा योग C. P. गणना प्रक्रम और अभीष्ट शेषफल गणना के संदर्भ में व्याख्या

बाँया से दाँया भागफल गणना का कुल x प्रक्रम होंगे। जिसके लिए खड़ा तिरछा गुना योग C. P. करने का प्रतिबंध निम्नानुसार होगा।

1• $r<n$ तक के लिए भागफल का r वां अंक प्राप्त करने के संदर्भ में $(r-1)$ अंक तक प्राप्त हो चुके बाँयें से दाँये भागफल अंकों का और n अंकीय धजांक मे से बाँयें से दाँये $(r-1)$ अंकों के बीच खड़ा तिरछा गुना योग C. P. व्यवस्थित करते है।

उक्त प्रतिबंध पर $r=1$ से $(r-1)=(1-1)=0$ होगा। अतः भागफल का पहला अंक प्राप्त करने के संदर्भ में खड़ा तिरछा गुना योग C. P व्यवस्थित नहीं होगा।

2• $r \geq n$ (जहाँ r का न्यूनतम् मान 1 और अधिकतम् मान x होगा) तक के लिए भागफल का r वां अंक प्राप्त करने के संदर्भ में $(r-1)$ अंक तक प्राप्त हो चुके बाँयें से दाँये भागफल अंको में से अंतिम n अंकों का और n अंकीय धजांक के बीच खड़ा तिरछा गुना योग C. P. व्यवस्थित करते है।

3• अभीष्ट शेषफल गणना यदि n अंकीय धजांक संख्या के अंक बाँये से दाँये

क्रमशः $d_1, d_2, d_3, ------ d_{n-2}, d_{n-1}, d_n$ तथा गणना क्रम में प्राप्त x अंकीय भागफल$_1$ दाँये से बाँये

क्रमशः $a_{x-(n-1)}, a_{x-(n-2)}, a_{x-(n\_3)}$ -------------$a_{x-2}, a_{x-1}\ a_x$ हो तो–

इनके बीच क्रमशः (1_1) , (2_2), (3_3) - - - - - (n_n) अंकीय खड़ा तिरछागुना योग C. P

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ a_x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} d_{n-1} & d_n \\ a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} d_{n-2} & d_{n-1} & d_n \\ a_{x-2} & a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix} ---$$

$$-\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & - & - & - & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n \\ a_{x-(n-!)} & a_{x-(n-2)} & a_{x-(n-3)} & - & - & - & a_{x-2} & a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix} \text{के}$$

लिए क्रमशः $\{C.P.\}_1, \{C.P.\}_2, \{C.P.\}_2, -----\{C.P.\}_n$ प्राप्त होने पर–

अभीष्ट शेषफल $=$ सकल शेषफल$-[\{C.P.\}_1 + 10 * \{C.P.\}_2 + 10^2 * \{C.P.\}_3 ------ +10^{(n-3)} * \{C.P.\}_{n-2} + 10^{(n-2)} * \{C.P.\}_{n-1} + 10^{(n-1)} * \{C.P.\}_n]$

किसी हल प्रक्रम के लिए सकल भाज्य , क्रियाशील भाज्य , भागफल एवं शेषफल गणना उपरोक्त विश्लेषित हल उदाहरणों से समझा जा सकता है अतः अतिरिक्त व्याख्या आवश्यक नहीं है।

टीप– यदि n अंकीय धजांक के और गणना क्रम में प्राप्त x अंकीय भागफल$_1$ में $x<n$ हो तो इनके बीच क्रमशः (1_1) , (2_2), (3_3) - - - - - (n_n) अंकीय खड़ा तिरछागुना योग C. P.

$$\begin{Bmatrix} d_n \\ a_x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} d_{n-1} & d_n \\ a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} d_{n-2} & d_{n-1} & d_n \\ a_{x-2} & a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix} --$$

$$--\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & - & - & - & d_{n-2} & d_{n-1} & d_n \\ a_{x-(n-!)} & a_{x-(n-2)} & a_{x-(n-3)} & - & - & - & a_{x-2} & a_{x-1} & a_x \end{Bmatrix}$$

का सामान्य प्रस्तुति में भागफल के बाँयी ओर आवश्यकतानुसार (शून्य) बढ़ाकर $[\{C.P.\}_1 + 10 * \{C.P.\}_2 + 10^2 * \{C.P.\}_3 ----- +10^{(n-3)} * \{C.P.\}_{n-2} + 10^{(n-2)} * \{C.P.\}_{n-1} + 10^{(n-1)} * \{C.P.\}_n]$का गणना पूर्ति करना चाहिए। इस प्रकार C.P. की गणन संक्रिया के लिए वैदिक गणित अध्ययन में परावर्त्य योज्येत गणन बहा गया है। अतः इस राजमणि विधि को परावर्त्य योज्येत विधि नाम दिया गया है। अधोदर्शित साधित हल क्रमांक 7■ का या में शेषफल$_2$ एवं 8■का गणना अवलोकन कीजिए।

साधित हल■

1■ 1011÷ 23 के लिए	2■ 7632÷ 94 के लिए
$\begin{array}{r\|llll} 3 & 1 & {}_1 0 & {}_0 1 & \vdots\ {}_0 1 \\ 2 & 1 & 10 & \overline{14} & \\ \hline & 0 & 5 & \overline{7} & \vdots\ 22 \end{array}$	$\begin{array}{r\|llll} 4 & 7 & {}_7 6 & {}_4 3 & \vdots\ {}_2 2 \\ 9 & 7 & 76 & 11 & \\ \hline & 0 & 8 & 1 & \vdots\ 18 \end{array}$
शेषफल $= 01 - cp \begin{Bmatrix} 3 \\ \overline{7} \end{Bmatrix} = 01 - \overline{2}\ \overline{1} = 22$	शेषफल $= 22 - cp \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix} = 22 - 4 = 18$
अभीष्ट भागफल $= 5\overline{7} = 43$	अभीष्ट भागफल $= 081 = 81$

या भाज्य का उनागर से 7632÷ 94

=1 $\bar{2}\bar{4}$ 3 32÷ 94 के लिए

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{4} & 1 & {}_1\bar{2} & \bar{1}\bar{4} & {}_0 3 & \vdots & {}_2 2 \\ 9 & 1 & 8 & \bar{1}\bar{8} & 11 & & \\ \hline & 0 & 1 & \bar{2} & 1 & \vdots & 18 \end{array}$$

शेषफल $= 22 - cp \begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} = 22 - 4 = 18$

अभीष्ट भागफल =01$\bar{2}$ 1=81

3■ 2976÷ 62 के लिए

$$\begin{array}{c|ccccc} \underline{2} & 2 & {}_2 9 & {}_5 7 & \vdots & {}_1 6 \\ 6 & 2 & 29 & 49 & & \\ \hline & 0 & 4 & 8 & \vdots & 0 \end{array}$$

शेषफल $= 16 - cp \begin{Bmatrix} 2 \\ 8 \end{Bmatrix} = 16 - 16 = 0$

अभीष्ट भागफल =048=48

या भाज्य का उनागर से 2976÷ 62

= 3 0 $\bar{2}$ $\bar{4}$ ÷ 62 के लिए

$$\begin{array}{c|ccccc} \underline{2} & 3 & {}_3 0 & {}_0\bar{2} & \vdots & {}_0\bar{4} \\ 6 & 3 & 30 & \bar{1}\bar{2} & & \\ \hline & 0 & 5 & \bar{2} & \vdots & 0 \end{array}$$

अभीष्ट भागफल =05$\bar{2}$=48

शेषफल $= 0\bar{4} - cp \begin{Bmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \end{Bmatrix} = \bar{4} - \bar{4} = 0$

4■ 251104÷ 532 के लिए

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{32} & 2 & {}_2 5 & {}_0 1 & {}_1 1 & \vdots & {}_0 04 \\ 5 & 2 & 25 & \bar{1}\bar{4} & 10 & & \\ \hline & 0 & 5 & \bar{3} & 2 & \vdots & 0 \end{array}$$

अभीष्ट भागफल =05$\bar{3}$ 2=472

शेषफल $= 004 - [cp \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix}]$

$= 4-[4+10*0] = 4-4 = 0$

5■ 200836÷ 389 के लिए भाजक 389 =4$\bar{1}\bar{1}$ से

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{\bar{1}\bar{1}} & 2 & {}_2 0 & {}_0 0 & {}_1 8 & \vdots & {}_0 36 \\ 4 & 2 & 20 & 5 & 24 & & \\ \hline & 0 & 5 & 1 & 6 & \vdots & 112 \end{array}$$

शेषफल $= 036 - [cp \begin{Bmatrix} \bar{1} \\ 6 \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ 1 & 6 \end{Bmatrix}]$

$= 36-[\bar{6}+10*\bar{7}] = 36-\bar{7}\bar{6} = 112$

अभीष्ट भागफल =0516=516

6■ 978121÷ 989 के लिए

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{89} & 9 & {}_0 7 & {}_{\bar{1}} 8 & {}_{\bar{2}} 1 & \vdots & {}_{\bar{2}} 21 \\ 9 & 9 & \bar{1} & \bar{1}\bar{1} & \bar{1}\bar{1} & & \\ \hline & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \vdots & 0 \end{array}$$

शेषफल $= \bar{2}21 - [cp \begin{Bmatrix} 9 \\ \bar{1} \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} 8 & 9 \\ \bar{1} & \bar{1} \end{Bmatrix}]$

$= \bar{1}\bar{7}\bar{9} - [\bar{9}+10*\bar{1}\bar{7}] = \bar{1}\bar{7}\bar{9} - \bar{1}\bar{7}\bar{9} = 0$

अभीष्ट भागफल = 10$\bar{1}$ $\bar{1}$ = 989

या 978121÷ 989 के लिए

भाजक = 10$\bar{1}$ $\bar{1}$ से

$$\begin{array}{c|cccccc} \underline{\bar{1}\bar{1}} & 9 & \bar{1}7 & \bar{2}8 & \bar{1}1 & \vdots & {}_0 21 \\ 10 & 9 & \bar{2} & \bar{1}\bar{1} & \bar{1}0 & & \\ \hline & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \vdots & 0 \end{array}$$

शेष्फल $= 021 - [cp \begin{Bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{Bmatrix}]$

$= 21 - [1+10*2] = 21-21 = 0$

अभीष्ट भागफल = 10$\bar{1}$ $\bar{1}$ = 989

या 978121÷ 989 के लिए

भाज्य = 10$\bar{2}$ $\bar{2}$ 1 2 1 भाजक = 10$\bar{1}$ $\bar{1}$ से

$$\begin{array}{c|ccccccc} \underline{\bar{1}\bar{1}} & 1 & {}_1 0 & 0\bar{2} & \bar{1}\bar{2} & \bar{1}1 & \vdots & {}_0 21 \\ 10 & 1 & 10 & \bar{1} & \bar{1}\bar{1} & \bar{1}0 & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & \vdots & 0 \end{array}$$

शेषफल $= 021 - [cp \begin{Bmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{Bmatrix} + 10 * cp \begin{Bmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{Bmatrix}]$

$= 21-[1+10*2] = 21-21 = 0$

अभीष्ट भागफल =010$\bar{1}$ $\bar{1}$ = 989

या 6■ 978121÷ 989 के लिए उनागर संख्यांकन

भाज्य = 10$\bar{2}$ $\bar{2}$ 1 21 भाजक = 10$\bar{1}$ $\bar{1}$ से

$0\,\bar{1}\,\bar{1}$ ⌐ $1 \quad {}_{0}0 \quad \bar{2} \quad \bar{2} \quad \vdots\ {}_{0}121$

$1 \qquad 1 \quad 0 \quad \bar{1} \quad \bar{1}$

$1 \quad 0 \quad \bar{1} \quad \bar{1} \quad \vdots\ 0$ अभीष्ट भागफल $=10\bar{1}\bar{1}= 989$ तथा

शेषफल= $0121-[cp\begin{Bmatrix}\bar{1}\\ \bar{1}\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}\bar{1} & \bar{1}\\ \bar{1} & \bar{1}\end{Bmatrix}+100*cp\{\begin{matrix}0 & \bar{1} & \bar{1}\\ 0 & \bar{1} & \bar{1}\end{matrix}\}]$ =121−[1 +10*2 +100*1]

= 121−121 = 0

7■ 9168456 ÷ 8567 के लिए

67 ⌐ $9 \quad {}_{9}1 \quad {}_{6}6 \quad {}_{60}8 \quad {}_{6}4 \quad \vdots\ {}_{22}56$

$85 \qquad 9 \quad 91 \quad 60 \quad 601 \quad 22$

$0 \quad 1 \quad 0 \quad 7 \quad 0 \quad \vdots\ 1766$ अभीष्ट भागफल = 01070 = 1070

शेषफल= $2256-[cp\begin{Bmatrix}7\\0\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}6 & 7\\7 & 0\end{Bmatrix}$=2256−[0+10*49] = 2256 – 490 = 1766

7■ या 9168456÷ 8567 **के लिए उनागर संख्यांकन**

भाज्य $=1\bar{1}2\bar{3}1\bar{5}\bar{4}\bar{4}$ भाजक $=1\bar{1}\bar{4}33$ से

$\bar{1}\,\bar{4}\,\bar{3}\,\bar{3}$ ⌐ $\bar{1}\ \bar{1} \quad {}_{0}2 \quad {}_{0}\bar{3} \quad \vdots\ {}_{0}\,\bar{1}\bar{5}\bar{4}\bar{4}$

$1 \qquad 1 \quad 0 \quad 6 \quad 6$

$1 \quad 0 \quad 6 \quad 6 \quad \vdots\ 36034$

शेषफल$_1$ $= 0\bar{1}\bar{5}\bar{4}\bar{4}-[cp\begin{Bmatrix}\bar{3}\\6\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}\bar{3} & \bar{3}\\6 & 6\end{Bmatrix}+100*cp\begin{Bmatrix}\bar{4} & \bar{3} & \bar{3}\\0 & 6 & 6\end{Bmatrix}+1000\{\begin{matrix}\bar{1} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{3}\\1 & 0 & 6 & 6\end{matrix}\}$

$=\bar{1}\bar{5}\bar{4}\bar{4}-[\bar{1}\bar{8}+\bar{3}\bar{6}0+\bar{4}\bar{2}00+\bar{3}\bar{3}000]=\bar{1}\bar{5}\bar{4}\bar{4}-[\bar{3}\bar{7}\,\bar{5}\,\bar{7}\,\bar{8}]=36034 >$ भाजक

$\therefore 36034 = 4\bar{4}034$ को $1\bar{1}\bar{4}\bar{3}\bar{3}$ } द्वारा विभाजित करने पर

$\bar{1}\,\bar{4}\,\bar{3}\,\bar{3}$ ⌐ $4 \quad \vdots\ {}_{0}\,\bar{4}034$

$1 \qquad 4$

$4 \quad \vdots\ 1766$

शेषफल$_2$ $= 0\bar{4}034-[cp\begin{Bmatrix}\bar{3}\\4\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}\bar{3} & \bar{3}\\0 & 4\end{Bmatrix}+100*cp\begin{Bmatrix}\bar{4} & \bar{3} & \bar{3}\\0 & 0 & 4\end{Bmatrix}+1000\{\begin{matrix}\bar{1} & \bar{4} & \bar{3} & \bar{3}\\0 & 0 & 0 & 4\end{matrix}\}]$

$=0\bar{4}034-[cp\begin{Bmatrix}\bar{3}\\4\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}\bar{3}\\4\end{Bmatrix}+100*cp\begin{Bmatrix}\bar{4}\\4\end{Bmatrix}+1000\{\begin{matrix}\bar{1}\\4\end{matrix}\}]$

$= \bar{4}034-[\bar{1}\bar{2}+\bar{1}\bar{2}0+\bar{1}\bar{6}00+\bar{4}000]=\bar{4}034-[\bar{5}\bar{7}\,\bar{3}\,\bar{2}]=1766$

या सीधा हल–चूंकि सुभाजक एक अंकीय है ∴शेषफल$_2$ $= 0\bar{4}034-[\bar{1}\,\bar{4}\,\bar{3}\,\bar{3}*4]=\bar{4}034-[\bar{5}\bar{7}\,\bar{3}\,\bar{2}]=1766$

∴ अभीष्ट शेषफल = 1766 भागफल =1066+4 =1070

8■ 6804057 ÷ 212034 के लिए–

2034 ⌐ $6 \quad {}_{6}8 \quad {}_{5}0 \quad \vdots\ {}_{2}4057$

$21 \qquad 6 \quad 68 \quad 44$

$0 \quad 3 \quad 2 \quad \vdots\ 18969$

शेषफल= $24057-\left[cp\begin{Bmatrix}2\\4\end{Bmatrix}+10*cp\begin{Bmatrix}3 & 4\\3 & 2\end{Bmatrix}\right]+100*cp\begin{Bmatrix}0 & 3 & 4\\0 & 3 & 2\end{Bmatrix}+1000*cp\begin{Bmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\0 & 0 & 3 & 2\end{Bmatrix}$ = 24057 – [8+180+900+ 4000] = 24057– 5088 = 18969

अभीष्ट भागफल = 0 32 =32 शेषफल = 18969

9■ 642456 ÷ 6398 के लिए–

$$\begin{array}{l|lllll} 98 & 6 & {}_{6}4 & {}_{1}2 & {}_{3}4 & \vdots\ {}_{26}56 \\ 63 & 6 & 64 & 3 & 26 & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots\ 2656 \end{array}$$

अभीष्ट भागफल $= 0100 = 100$

शेषफल$= 2656 - \left[cp\begin{Bmatrix}8\\0\end{Bmatrix} + 10 * cp\begin{Bmatrix}9 & 8\\0 & 0\end{Bmatrix}\right] = 2656$

या $642456 \div 6398$ के लिए

$$\begin{array}{l|llll} 3\,98 & 6 & {}_{0}4 & {}_{1}2 & \vdots\ {}_{3}456 \\ 6 & 6 & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & 0 & \vdots\ 2656 \end{array}$$

अभीष्ट भागफल $= 100$

शेषफल $= 3456 - \left[cp\begin{Bmatrix}8\\0\end{Bmatrix} + 10 * cp\begin{Bmatrix}9 & 8\\0 & 0\end{Bmatrix} + 100 * cp\begin{Bmatrix}3 & 9 & 8\\1 & 0 & 0\end{Bmatrix}\right] = 3456 - 800 = 2656$

विवेचना अध्याय 13,14 एवं 15 में भाग संक्रिया को भाज्य एवं भाजक के प्रकृति या गुणधर्म का अध्ययन कर विविध आयामों में प्रस्तुत किया गया है। कहीं अति सरल कहीं कठिन तो नहीं लम्बी अवश्य हो जाती है। अभ्यास उपरांत प्रश्न की प्रकृति को दृष्टिगत करते सहज एवं सरल विधि का चयन कर अपने तर्क शक्ति को विकसित करने का लाभ लेते हुए आत्मसात कर सकते है। फिर भी आधुनिक भाग संक्रिया को भी आत्मसात किया जाना चाहिए। जिससे स्वतंत्र भाव से भाग संक्रिया को सम्पन्न करने पूर्णता का परिचय दे सकते है।

15-3 का एवं कोष्टक का अनुप्रयोग गणितीय अध्ययन में कई ऐसे व्यापक एवं प्रतिबंधित प्रश्नों का सामना करना होता है जिनके हल के लिए केवल मूलभूत संक्रिया (योग,व्यवकलन,गुणा एवं भाग) चिन्ह का अनुप्रयोग ही पर्याप्त नहीं होता है। पर्याप्तता के क्रम में प्रतिबंधानुसार प्रश्नों के लिए का एवं कोष्टक (जिसके अन्तः भाग में का और मूलभूत संक्रिया में से एक या अधिक संक्रिया सम्मिलित होता है) का अनुप्रयोग करना होता है।

पर्याप्तता के क्रम में अपनाये गये कोष्टक नाम और उनके संकेत निम्नानुसार है।

1• रेखा कोष्टक ——— **2•** छोटा कोष्टक ( )

3• धनु या मझला कोष्टक { } **4•** बड़ा कोष्टक [ ]

का का अनुप्रयोग– का का अनुप्रयोग गुणा संक्रिया के रूप में किया जाता है।

15-4 व्यापक एवं प्रतिबंधित प्रश्नों के हल के लिए का , मूलभूत संक्रिया (+ , −, ∗ ,÷) एव कोष्टकों का हल क्रम

1• सर्वप्रथम कोष्टकों में निहित प्रतिबंधों का हल किया जाना चाहिए। जिसके लिए भी हल क्रम उपरोक्त क्रमानुसार ही है। अर्थात् सर्वप्रथम रेखा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। तत्पश्चात दूसरे क्रम में छोटा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। फिर तीसरे क्रम में धनु या मझला कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। अंतिम चौथे क्रम में बड़ा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए।

2• कोष्टक के बाहर हो या भीतर (अन्दर) प्रथम दो संख्याओं के बीच निहित **का** को सबसे पहले हल कीजिए। तत्पश्चात दूसरे क्रम में दो संख्याओं के बीच निहित ÷ को हल कीजिए । फिर तीसरे क्रम ∗ से सम्बद्ध रखने वाले समस्त संख्या को एक साथ हल कीजिए। अंतिम चौथे क्रम में + एवं − का एकमुस्त सँयुक्त हल करे।

3• किसी कोष्टक के बाहर + चिन्हांकित होने पर कोष्टक का हल मान यथावत लिए जाते हैं। जबकि कोष्टक के बाहर − चिन्हांकित होने पर कोष्टक का हल मान + का − और − का + में बदल कर लिए जाते हैं।

4• दो या दो से अधिक कोष्टकों के बीच कोई संक्रिया संकेत दर्ज नहीं होने पर इन कोष्टकों में निहित प्रतिबंध के अनुसार प्राप्त हल मानों का गुणा किया जाना चाहिए। अर्थात दो या दो से अधिक कोष्टकों के बीच कोई संक्रिया संकेत दर्ज नहीं होने पर इनके बीच गुणा संक्रिया ही माना जावे।

उदाहरण 1■ $1000 + 15 \div 3 - 5$ **का** $4 * 12 = 1000 + 15 \div 3 - 20 * 12$

$= 1000 + 5 - 20 * 12$

$= 1000 + 5 - 240$

$= 845$ **उत्तर।**

उदाहरण 2■ $1000 \div 5$ **का** $4 + 15 * 12 - 3 = 1000 \div 20 + 15 * 12 - 3$

$= 50 + 15 * 20 - 3$
$= 50 + 300 - 3$
$= 347$ **उत्तर।**

उदाहरण 3■ $2[\,2999 - 29 - \{625 \text{ का } 5 \div (10 * 4 - \overline{4 * 4 - 1})\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - \{625 \text{ का } 5 \div (10 * 4 - \overline{16 - 1})\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - \{625 \text{ का } 5 \div (10 * 4 - 15)\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - \{625 \text{ का } 5 \div (40 - 15)\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - \{625 \text{ का } 5 \div 25\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - \{3125 \div 25\}]$
$= 2[\,2999 - 29 - 125]$
$= 2[\,2845]$
$= 5690$ **उत्तर।**

संक्रिया संकेतन की उत्पत्ति का स्वयं का तर्क

1• योग संक्रिया संकेत दो या दो से अधिक संख्याओं के योग संक्रिया में संख्या स्तम्भ { | | | } (इकाई, दहाई, सैकड़ा ....) योग के लिए गये संख्याओं की पंक्ति ☰ का संयुक्त सरलतम रूप. + को योग संक्रिया संकेत माना गया है।

2• घटाना संक्रिया संकेत चूकि घटाना संक्रिया में किसी संख्या में से एक बार में एक ही संख्या को घटाया जा सकता है। अतः इस घटने वाली संख्या की एक पंक्ति —— को ही दृष्टिगत करते हुए − को घटाना संक्रिया संकेत माना गया है।

3• गुणा संक्रिया संकेत

भारतीय गणित पद्धत्ति में उत्तर–पश्चिम से दक्षिण–पूर्व के तिरछा लिये – \
और दक्षिण–पश्चिम से उत्तर–पूर्व के तिरछा लिये – / का संयुक्त सरलतम रूप × को गुणा संक्रिया संकेत माना गया है।

अन्तराष्ट्रीय गणित पद्धत्ति में उत्तर–पश्चिम से दक्षिण –पूर्व के तिरछा लिये – \
दक्षिण–पश्चिम से उत्तर –पूर्व के तिरछा लिये – /
और खड़ी के लिये | का संयुक्त सरलतम रूप * को गुणा संक्रिया संकेत माना गया है।

4• भाग संक्रिया संकेत

भाज्य P अनुपात भाजक Q (P:Q) के सापेक्ष भाजक के एक होने पर भाज्य मान प्राप्त करना भाग संक्रिया को परिभाषित करता है। अतः अनुपात संकेत के ऊपर बिन्दु के लिये भाज्य तथा नीचे बिन्दु के लिये भाजक दर्शाने एवं आड़ी विभाजन रेखा डालने का संयुक्त सरलतम रूप ÷ को भाग संक्रिया संकेत माना गया है। जो आगे अध्ययन क्रम में भिन्न एवं परिमेय निरूपण में $(\frac{P}{Q})$ दर्शित होता है।

----------15----------

अध्याय 16
मूलांक या एक अंकीययोग

16-1 मूलांक या एकअंकीय योग

महान ज्योतिष शास्त्री कीरो ने सर्व प्रथम ज्योतिष विज्ञान में जन्म तिथि के अंकों का मूलांक को महत्व देते हुए मूलांक आधारित भविष्यवाणी करते रहे। जो आज भी कीरो का अंक ज्योतिष के नाम पर विख्यात है। जिसके अनुसार दो या दो से अधिक अंक की संख्या के प्रति एक अंक मान (1,2,3,4,5,6,7,8,9) प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार के प्राप्त एक अंक मान को मूलांक या एक अंकीययोग कहते है। निम्न दो नियम के अनुसार प्राप्त किया जा सकता है।

नियम 1• जिस संख्या का मूलांक या एकअंकीययोग ज्ञात करना है उसके सभी अंकों के योगमान को 9 के द्वारा विभाजित करे और शेषफल (0.1,2,3,4,5,6,7,8) में से कोई एक होगा, प्राप्त कीजिए। यह प्राप्त शेषफल ही संख्या का अभीष्ट मूलांक या एकअंकीय योग होगा। शेषफल 0(शून्य) के लिए मूलांक 9 माने।

जैसे संख्या 4567 का मूलांक $= (4+5+6+7) \div 9 = 22 \div 9$ से प्राप्त शेषफल $= 4$

संख्या 5673304 का मूलांक $= (5+6+7+3+3+0+4) \div 9 = 28 \div 9$ से प्राप्त शेषफल $= 1$

नियम 2• जिस संख्या का मूलांक या एकअंकीययोग ज्ञात करना है उसके सभी अंकों के योगमान प्राप्त कीजिए। यदि यह योगमान दो या दो से अधिक अंकों का हो तो पुनः इस योगमान संख्या के अंकों का योगमान प्राप्त कीजिए। ऐसा योग प्राप्त करनें का क्रम योगमान संख्या के अंको का योग एकअंकीय होने तक कीजिए। यह प्राप्त एकअंकीय योग ही संख्या का अभीष्ट मूलांक या एकअंकीययोग होगा।

जैसे संख्या 4567 का मूलांक $= (4+5+6+7) = 22$ से $2+2 = 4$

संख्या 5673304 का मूलांक $= (5+6+7+3+3+0+4) = 28$ से $2+8 = 10$ से $1+0 = 1$

16--2 मूलांक किसी संख्या का प्राप्त करने मे 9 का महत्व उपरोक्त नियमों के अनुसार किसी संख्या का मूलांक प्राप्त करने मे 9 का महत्व निम्नानुसार है।

1• यथार्थ शब्दों में किसी संख्या का मूलांक उस संख्या को 9 द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल ही है। प्राप्त शेषफल 0,1,2,3,4,5,6,7,8 में से कोई एक अंक होगा। प्राकृत संख्यांकन के तारतम्य में शेषफल 0 पर संख्या का मूलांक या एकअंकीययोग 9 होता है।

2• किसी संख्या के समस्त अंकों के योगमान को 9 द्वारा भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है वह उस संख्या का मूलांक होता है।

3• किसी संख्या के मूलांक गणना में संख्या स्थित 9 को छोड़ देने पर मूलांक गणना में कोई अन्तर या प्रभाव नहीं पड़ता है।

4• संख्या या संख्या में स्थित अंकों का योग 9 द्वारा पूर्ण विभाजित हो तो उस संख्या का मूलांक 9 होगा ।

5• उना संख्यांकन में प्राप्त मूलांक $\bar{x}$ का मानक मूलांक $= 9-x$ होगा। अर्थात् $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ का मानक मूलांक क्रमशः 8, 7, 6,5,4,3,2,1,0 होगा।

6• मूलांक 0 और $\bar{9}$ का मानक मूलांक 9 ही होगा।

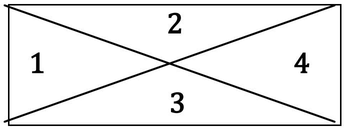
16-3 मूलांकों का उपयोग

[1] अंक ज्योतिष शास्त्र में चराचर जगत में किसी स्थान विशेष संरचना जीव जन्तु एवं व्यक्ति के प्रति क्षण प्रति क्षण होने वाले घटनाओं की अनुभूति में खगोलीयतत्व (ग्रह, नक्षत्र राशि उल्का पिंड, तारे आदि के गतिमानों) ,भौगोलिक तत्व (अक्षांश एवं देशांश रेखा,) पर्यावर्णीय तत्व (आकाशीय ओजोन पर्त, भूतलीय हवा पानी, भूगर्भीय हलचल के कारक) का अध्ययन किया जाता है। इस अध्ययन क्षेत्र के जीवन ज्योति प्रदर्शक ज्ञान को **ज्योतिष विज्ञान** कहते है। जिसकी एक शाखा अंक ज्योतिष है। जिसके अन्तर्गत उक्त कारक तत्वों का मूलांक ज्ञात किया जाता है। जैसे मेरा फलादेश (कुण्डली) तैयार करने में मेरे जन्मतिथि 15.06.1951 का मूलांक 1 (एक) प्रभावी कारकों मे से एक होगा। इस विषय पर विशेष अध्ययन के लिए विषय विशेषज्ञ ही अधिकृत होंगे। यहाँ केवल प्रसंगवश इतना ही काफी है।

[2] मूलभूत गणितीय संक्रिया की जाँच में अध्याय 2 के अनुच्छेद 2-2 के अनुसार कार्यालयीन एवं व्यापारिक लेन–देन में मूलभूत गणितीय संक्रियाओं को करने में बड़ी बड़ी संख्याओं की लम्बी सूची होती है। जिससे निश्चित परिणाम प्राप्त करने की संक्रिया में त्रुटि सम्भव है। ऐसे त्रुटि को जाँचने की कोई सटीक विधि आधुनिक गणित में उपलब्ध नहीं है। अतः जाँच के नाम पर पुनः संक्रिया दोहराते तिहराते है।किसी दूसरे तीसरे महानुभाव को जचवाते है। यद्यपि आधुनिक इलेक्ट्रानिक युग में त्रुटि के लिए कोई स्थान नहीं है। अब हम अपने द्वारा की गई संक्रिया से प्राप्त परिणाम को तभी स्वीकारते हैं जब गणक (केलकुलेटर) स्वीकारता है। गणक से प्राप्त परिणाम को

किसी ने जाँचने की सोचां भी नहीं होगा। इस प्रकार डगमगाता आत्मविश्वास गणित सिखने सिखाने के प्रारंभिक चरण मूलभूत गणितीय संक्रिया में ही कमजोर हो रहा है। यह कहने में मुझे तनिक भी संकोच नहीं है कि–"बच्चों को गणित ज्ञान के प्रति नित कमजोर ही कराने के प्रति हमारा प्रयोगवादी शिक्षण तंत्र षडयंत्रों का प्रयोगशला ही सिद्ध हो रहा है, जिसका परिणाम पूरा विश्व समुदाय गणित मास्टर की कमी से जूझ रहा है"। अतः गणित सिखने सिखाने में मूलभूत गणितीय संक्रिया (जोड़ना, घटाना, गुणा भाग)में ही ऐसा कर दिखाना होगा ,जिससे बच्चों में आत्म विश्वास बड़े । इस ओर पाद् पूज्यमाननीय गुरूदेव नरेन्द्रपुरीजी ने समस्त मूलभूत गणितीय संक्रिया के हल की सत्यता जाँच के लिए मूलांक विधि को वैदिक गणित पुष्पमाला में जुटाये है। जिसके अनुसार –

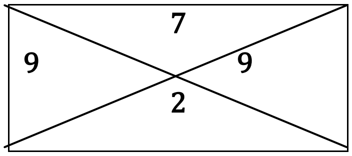
दो संख्या के जोड़ या योग संक्रिया की जाँच



संख्या A+ संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C का मूलांक, अनुभाग 2 में संख्या A का मूलांक, अनुभाग 3 में संख्या B का मूलांक तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का मूलांकों के योगमान का मूलांक दर्शाइये।

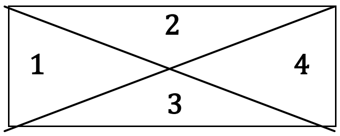
निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक होने पर की गयी योग संक्रिया को सही मानिए।

उदाहरण■ 3256 +9371 =12627 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =12627 का मूलांक =9, अनुभाग 2 में संख्या A =3256 का मूलांक =7 अनुभाग 3 में संख्या B =9371 का मूलांक=2 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का मूलांकों के योगमान 7+2=9 का मूलांक =9 दर्शाइये।



निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक 9 = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक 9 अतः की गयी योग संक्रिया सही है।

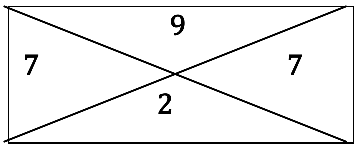
घटाना संक्रिया की जाँच



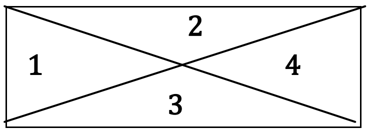
संख्या A– संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C का मूलांक, अनुभाग 2 में संख्या A का मूलांक, अनुभाग 3 में संख्या B का मूलांक तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 से प्राप्त मूलांक में से अनुभाग 3 से प्राप्त का मूलांक घटाने से प्राप्त संख्या का मुलांक दर्शाइये। .

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक होने पर की गयी घटाने की संक्रिया को सही मानिए।

उदाहरण■ 12627 –9371 = 3256 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =3256 का मूलांक =7, अनुभाग 2 में संख्या A = 12627 का मूलांक =9 अनुभाग 3 में संख्या B =9371 का मूलांक =2 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 से प्राप्त मूलांक में से और अनुभाग 3 प्राप्त मूलांक को घटाने से प्राप्त संख्या का मूलांक 9–2=7 का मूलांक 7 होगा।



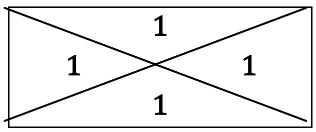
दो संख्या के गुणा कीसंक्रिया की जाँच



संख्या A ' संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C का मूलांक, अनुभाग 2 में संख्या । का मूलांक, अनुभाग 3 में संख्या B का मूलांक तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 से प्राप्त का मूलांकों के गुणनफल का मूलांक दर्शाइये।

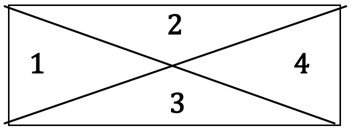
निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक होने पर की गयी गुणा संक्रिया को सही मानिए।

उदाहरण■ 325 * 937 = 30 4525 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =304525 का मूलांक =1, अनुभाग 2 में संख्या A= 325 का मूलांक =1 अनुभाग 3 में संख्या B =937 का मूलांक =1 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का मूलांकों के गुणनफल 1*1=1 का मूलांक =1 दर्शाइये।



निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक 1 = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक 1 अतः की गयी गुणा की संक्रिया सही है।

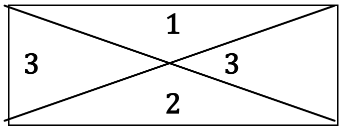
भाग संक्रिया की जाँच



संख्या A ÷ संख्या B से भागफल संख्या C और शेषफल संख्या D प्राप्त हो तो A= B*C+D होगा। तब जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या A का मूलांक, अनुभाग 2 में संख्या B और संख्या C के मूलांकों के गुणनफल का मूलांक, अनुभाग 3 में संख्या D का मूलांक तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 से प्राप्त का मूलांकों के योगमान का मूलांक दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक = अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक होने पर की गयी भाग संक्रिया को सही मानिए।

उदाहरण■ 304842÷ 325 को हल करने पर प्राप्त भागफल =937 तथा शेषफल = 317 की सत्यता जाँच कीजिए। अनुभाग 1 में संख्या A=304842 का मूलांक =3 अनुभाग 2 में संख्या B= 325 और संख्या C =937 के मूलांकों के गुणनफल 1*1 =1 का मूलांक 1अनुभाग 3 में संख्या D=317 का मूलांक =2 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का मूलांकों के योगमान 1+2 =3 का मूलांक 3 दर्शाने पर।



निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित मूलांक 3= अनुभाग 4 में दर्शित मूलांक 3 अतः की गयी भाग संक्रिया सही है।

विस्तार विस्तार क्रम में 2 से अधिक संख्याओं का योग एवं गुणा संक्रिया पर ही यह विधि विस्तारित होगा।

(1) 2 से अधिक संख्याओं का योग संक्रिया जाँच

संख्याएँ $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + -,-,-,- + A_m = S$ सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 योगफल S का मूलांक =r प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, A_4, -,-,-, A_m$ का अलग–अलग मूलांक क्रमशः $r_1, r_2, r_3, r_4, -,-,-, r_m$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त मूलांकों का योगमान$(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + -,-,- + r_m = t)$ का मूलांक t_r

निष्कर्ष यदि प्रक्रम 1 से प्राप्त मूलांक r = प्रक्रम 3 से प्राप्त मूलांक t_r है ,तो की गयी योग संक्रिया सही है और यदि प्रक्रम 1 से प्राप्त मूलांक ≠ प्रक्रम 3 से प्राप्त मूलांक t_r है ,तो की गयी योग संक्रिया गलत है।

उदाहरण■ संख्याएँ $341 + 566 + 1069 + 1597 + 5006 = 8579$ सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 योगफल S=8579 का मूलांक r=2

प्रक्रम 2 संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, A_4, -,-,-,, A_m$ का अलग–अलग मूलांक क्रमशः 8, 8, 7, 4, 2

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त मूलांकों का योगमान$(8 + 8 + 7 + 4 + 2 = 29)$ का मूलांक t_r=2

प्रक्रम 1 से प्राप्त मूलांक 2 = प्रक्रम 3 से प्राप्त मूलांक 2

निष्कर्ष की गयी योग संक्रिया सही है।

(2) 2 से अधिक संख्याओं का गुणन संक्रिया जाँच–

संख्याएँ $A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * -,-,-,- * A_m = M$ सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल M का मूलांक =r प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2. संख्याएँ $A_1, A_2, A_3, A_4, -,-,-,, A_m$ का अलग–अलग मूलांक क्रमशः $r_1, r_2, r_3, r_4, -,-,-, r_m$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त मूलांकों का गुणनफल $(r_1 * r_2 * r_3 * r_4 * -,-,- * r_m = t)$ का मूलांक t_r

निष्कर्ष प्रक्रम 1 से प्राप्त मूलांक r = प्रक्रम 3 से प्राप्त मूलांक t_r होने पर, की गयी गुणा की संक्रिया को सही मानिए।

उदाहरण■ संख्याएँ 15*27*99*217 = 8700615 सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल M=8700615 का मूलांक r=9

प्रक्रम 2 संख्याएँ 15, 27, 99, 217 का अलग–अलग मूलांक क्रमशः 6, 9, 9, 1

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त मूलांकों का गुणनफल 6*9*9*1 का मूलांक t_r=9

प्रक्रम 1 से प्राप्त मूलांक 9 = प्रक्रम 3 में प्राप्त मूलांक 9

निष्कर्ष की गयी गुणा संक्रिया सही है

ध्यानाकर्षण चूँकि–**1•** गुणन संक्रिया में ली गई संख्याओं में से कोई भी एक संख्या का मूलांक 9 होने पर समस्त संख्याओं के गुणनफल का मूलांक 9 ही होगा।

2• मूलांक में 9 एवं 0 को जोड़ने अथवा घटाने से मूलांक मान यथावत ही रहता है।

3• संख्या में प्रयुक्त अंकों के स्थान परिवर्तन से प्राप्त नवीन संख्या का मूलांक पूर्व संख्या का ही मूलांक होता है।

अतः जाँच संक्रिया में उक्त बिन्दुओं का ध्यान रखा जाना चाहिए।

विवेचना संख्या के अंक स्थान बदल जाने पर संख्या का मान बदल जाता लेकिन प्राप्त इस नवीन संख्या का मूलांक यथावत् बना रहता है, अतः मूलांक द्वारा गणितीय मूलभूत संक्रिया जाँच करने में त्रुटियों की सम्भावना से इन्कार नहीं किया जा सकता। इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि इस विधि को नकार दिया जाये। त्रुटियाँ के संबंध में चिन्तन ही नया मार्ग दिखाता है। इसी चिन्तन में अध्याय 17 के अनुच्छेद 17-1 बिन्दु 7 में दिये– भाजक संख्या 11 द्वारा किसी भाज्य संख्या के विभाज्य होने की जाँच नियम का अनुप्रयोग किया जा सकता है जो कि अनुच्छेद 17-9 मे विस्तारपूर्वक विश्लेषित है।

[3] विभाज्यता जाँच में भाज्य संख्या जो चाहे कितनी बड़ी हो दिये भाजक द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने की जाँच भाग की संक्रिया किये बिना करने के विषय में सर्व व्यापक नियम प्रतिपादित नहीं किया जा सकता। फिर भी गणित अध्ययन की सुविधा की दृष्टि से आधुनिक गणित में संख्याएँ 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11 को भाजक मानकर इनसे पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने के परिपेक्ष्य में भाज्य संख्या के प्रतिबंध एवं गुण सुझाये गये। इसी कड़ी या श्रृंखला में अभाज्य संख्याएँ 7, 13, 19, 23 ,29, 31---------- को भाजक मानकर इनसे पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने पर गणना नियम का प्रतिपादन किया जा सकता है। इन सब के अध्ययन के पूर्व केवल भाज्य संख्या के मूलांक को ही दृष्टिगत कर भाजक संख्या 3, 6 और 9 के द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने का निम्नानुसार प्रतिपादित होंगे।

भाज्य संख्या के मूलांक को दृष्टिगत करते हुये भाजक संख्या 3, 6 और 9 के द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने का कथन

1■ यदि भाज्य संख्या का मूलांक 3, 6 और 9 हो तो वह भाज्य संख्या भाजक 3 द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होगा।

जैसे 117 का मूलांक 9 , 20013 का मूलांक 6 , 12456453 का मूलांक 3 , अतः संख्या 117, 20013 , 12456453 भाजक 3 द्वारा पूरा–पूरा विभाज्य है।

2■ यदि भाज्य संख्या का इकाई अंक 0, 2, 4, 6 एवं 8 हो तथा मूलांक 3, 6 और 9 हो तो वह भाज्य संख्या भाजक 3 और 6 द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होगा।

जैसे 942 का मूलांक 6 , 7824 का मूलांक 3 , 6530022 का मूलांक 9 अतः संख्या 942, 7824 , 6530022 भाजक 3 और 6 द्वारा पूरा–पूरा विभाज्य है।

3■ यदि भाज्य संख्या का मूलांक केवल 9 हो तो वह भाज्य संख्या भाजक 3 और 9 द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होगा।

जैसे 63 का मूलांक 9 , 117 का मूलांक 9 , 246411 का मूलांक 9 अतः संख्या 63, 117 , 246411 भाजक 3 और 9 द्वारा पूरा–पूरा विभाज्य है।

4■ यदि भाज्य संख्या का इकाई अंक 0, 2, 4, 6 एवं 8 हो तथा मूलांक केवल 9 हो तो वह भाज्य संख्या भाजक 3 ,6 और 9 द्वारा पूरा–पूरा (षून्य षेशफल पर) विभाज्य होगा।

जैसे 9342 का मूलांक 9 , 781524 का मूलांक 9 , 653182524 का मूलांक 9 अतः संख्या 9342, 781524 , 653182524 भाजक 3 , 6 और 9 द्वारा पूरा–पूरा विभाज्य है।

टीप उपरोक्त विभाज्यता जाँच नियमों को $\overline{6}, \overline{3}$,(0 /$\overline{9}$) मूलांक के क्रम पर यथा क्रम बिन्दु 1,2,3,4 के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

----------16----------

अध्याय -17
विभाज्यता जाँच की आश्लेषक विधि

17-1 आधुनिक सरल विभाज्यता जाँच आधुनिक गणित मे भाजक संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 एवं 11 द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने वाले भाज्य संख्या के गुणों को प्रतिपादित गया है। जिनका संक्षिप्त विवरण निम्नानुसार है।

1■ 2 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनका इकाई अंक 0, 2, 4, 6, 8, हो , भाजक 2 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 70, 32 , 54, 76 ,798,

2■ 3 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनके अंको का योगफल 3 द्वारा विभाज्य हो , भाजक 3 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 21, 342, 156442

3■ 4 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई और दहाई अंक दोनों 0 हो या इनमें स्थित अंकों से बनी संख्या 4 द्वारा विभाज्य हो , भाजक 4 द्वारा विभाज्य होंगे। **जैसे** 904 , 1508 , 156444

4■ 5 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनका इकाई अंक 0 या 5 हो , भाजक 5 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 75, 3180 , 145, 6130 , 79815,

5■ 6 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनका इकाई अंक 0, 2, 4, 6, 8, हो और अंको का योगफल 3 द्वारा विभाज्य हो भाजक 6 द्वारा विभाज्य होंगे। जैसे 12, 31230, 168972

6■ 8 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनका इकाई , दहाई और सैकड़ा अंक तीनों 0 हो या इनमें स्थित अंकों से बनी संख्या 8 द्वारा विभाज्य हो , भाजक 8 द्वारा विभाज्य **होंगे। जैसे** 9016 , 6112, 156408

7■ 9 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनके अंको का योगफल 9 द्वारा विभाज्य हो ,भाजक 9 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 27, 342, 1564425

8■ 10 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनका इकाई अंक 0 होगा। 10 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 210, 34200, 156442000

9■ 11 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनके बाँयें से दाँयें अथवा दाँयें से बाँयें सम स्थान (दूसरा, चौथा, छटवाँ..............) के अंकों का योग तथा विषम स्थान के अंकों का योग का अन्तर 0 या 11 से विभाज्य होगा। 11 द्वारा विभाज्य होंगे।
जैसे 561, 504030736

10■ 25 द्वारा विभाज्य संख्याएँ वे सभी संख्याएँ जिनके इकाई और दहाई अंक दोनों 0 हो अथवा इनमें स्थित अंकों से बनी संख्या 25, 50, 75 हो , भाजक 25 द्वारा विभाज्य होंगे। **जैसे** 200 , 1525 , 3564450 , 453347675

17-2 विभाज्यता जाँच की आश्लेषक विधि

उपरोक्त सामान्य गणित अध्ययन में विभाज्यनीयता जाँच प्रसंग में 2, 3, 4 5, 6, 8, 9,10,11, 25 द्वारा विभाज्य संख्या के विशिष्ट सरल सर्वमान्य गुणों को प्रतिपादित किया गया है। जिनमें से 3, 6, 9 द्वारा विभाज्य संख्या की जाँच को मूलांक विधि में और भी सरलता से प्रस्तुत किया जा चुका है, किन्तु व्यापक कथन में ऐसे भाजक जिनका इकाई अंक 1, 3, 7, 9 हो , के प्रति भाज्य का कोई सर्वमान्य गुणों को प्रतिपादन नहीं किया जा सकता है। तब प्रश्न बनता है ऐसे भाजक के द्वारा विभाज्यता जाँच के लिए समुन्नत विधि अवश्य होगी ? जिसके तारतम्य में जगत गुरू शंकराचार्य श्री स्वामी तीर्थराज जी महाराज की कृति वैदिक गणित के अनुसार एक नियम के तहत् कार्यवाहक संख्यांक प्राप्त करते है । यह कार्यवाहक संख्यांक भाजक से बहुत ही निकट का संबंध रखता है। चूकि किसी के कार्य को पूरा करने में बहुत ही निकट का (आशातीत) संबंध रखता है उसे आश्लेषक कहते है। अतः विभाज्यता जाँच की इस नवीन संदर्भ में विभाज्यता जाँच की आश्लेषक विधि ही कहना यथेष्ठ होगा। आश्चर्य होगा कि यह आश्लेषक विधि यथा शब्दों मे भिन्नों के दशमलव निरूपण के संदर्भ में आर्वती दशमलव निरूपण में प्रासांगिक है। विस्तारित व्यापक अध्ययन के लिए अध्याय 21 में पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण की आश्लेषक विधि (एक जादुई विधि) का अवलोकन कीजिए।

आश्लेषक के प्रकार विभाज्यता जाँच की आश्लेषक विधि के लिए आश्लेषक के दो प्रकार होंगे।
(1) आगर आश्लेषक (2) उना आश्लेषक

(1) आगर आश्लेषक x अंकीय भाजक में दाँयें से बाँयें की ओर (इकाई से दहाई सैकड़ा हजार............की ओर) $(r \leq x)$ के लिये r स्थान तक बनी संख्या का प्रत्येक अंक 9 _9 हो तो आगर आश्लेषक प्राप्त होगा। जो सरल शब्दों में r वें अंक के बाद के $(x-r)$ अंको से बनी संख्या का आगर (एक अधिक) होगा। संकेत में P_r दर्शित करते है। जिसे विश्लेषित रूप में न्यूनतम r अंकीय संख्यांक में दर्शित किया जाता है। r अंकीय संख्यांक में दर्शित करने के लिए नियमानुसार बाँयी ओर शून्य बढ़ाये।

आगर आश्लेषक का बीजगणितीय निरूपण में भाजक m\999 -------r स्थान तक के लिए आश्लेषक $P_r = (m+1)$ होगा।

आगर आश्लेषक का स्तर मान उपरोक्त आश्लेषक गणना नियम के अनुसार प्राप्त आश्लेषक P_r का आगर आश्लेषक का स्तर मान r होगा।

जैसे भाजक 9 =09 के लिए $P_1 = 0+1 = 1$ भाजक 19 के लिए $P_1 = 1+1 = 2$

भाजक 29 के लिए $P_1 = 2+1 = 3$ भाजक 39 के लिए $P_1 = 3+1 = 4$

इसी प्रकार भाजक 49, 59 , 69, 79, 89, 99 ,109 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक P_1= (4+1=5), (5+1=6), (6+1=7), (7+1=8), (8+1=9), (9+1=10), (10+1=11),------------ दर्शित होगा।

भाजक 99 =099 के लिए $P_2 = 0+1 = 01$ भाजक 199 के लिए $P_2 = 1+1 = 02$

भाजक 299 के लिए $P_2 = 2+1 = 03$ भाजक 399 के लिए $P_1 = 3+1 = 04$

इसी प्रकार भाजक 499, 599 , 699, 799, 899, 999 ,1099 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक P_2=05, 06, 07, 08, 09, 10, 11,------------ दर्शित होगा।

भाजक 999 =0999 के लिए $P_3 = 0+1 = 001$ भाजक 1999 के लिए $P_3 = 1+1 = 002$

भाजक 2999 के लिए $P_3 = 2+1 = 003$ भाजक 3999 के लिए $P_3 = 3+1 = 004$

इसी प्रकार भाजक 4999, 5999 , 6999, 7999, 8999, 9999 ,10999 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक P_3=005, 006, 007, 008, 009, 010, 011,------------ दर्शित होगा।

■ **इकाई अंक 1, 3, 7 वाले भाजकों के प्रति आगर आश्लेषक प्राप्त करना** इसके लिए दिये भाजक को ऐसे अंक या संख्या से गुणा करते है कि प्राप्त गुणनफल का कम से कम इकाई अंक या इकाई से दहाई सैकड़ा हजार............की ओर वांछित (आवश्यकतानुसार चाही गई)स्थान तक के अंक 9-9 प्राप्त हो जावे। फिर इस गुणनफल के लिए उपरोक्तानुसार प्राप्त आश्लेषक ही दिये भाजक के प्रति आगर आश्लेषक होगा।

जैसे भाजक 7 के लिए 7*7 =49 से आगर आश्लेषक $P_1 = 4+1 = 5$ होगा ।

भाजक 23 के लिए 23*3 =69 से आगर आश्लेषक $P_1 = 6+1 = 7$ होगा ।

इसी प्रकार–

1• इकाई अंक 1 वाली संख्या 11, 21, 31,- - - - - - m\1 को 9 से गुणा करते हैं। और आगर आश्लेषक क्रमशः P_1= 10, 19, 28 -------(9*m+1) प्राप्त करते हैं।

2• इकाई अंक 3 वाली संख्या 13, 23, 33,- - - - - - m\3 को 3 से गुणा करते हैं। और आगर आश्लेषक क्रमशः P_1= 4, 7, 10 -------(3*m+1) प्राप्त करते हैं।

3• इकाई अंक 7 वाली संख्या 07 17, 27, 37,- - - - - - m\7 को 7 से गुणा करते हैं। और आगर आश्लेषक क्रमशः
P_1= 5, 12, 19 -------(7*m+5) प्राप्त करते हैं।

कुछ जटिल भाजकों के लिए आगर आश्लेषक

111 के लिए 111*9 = 999 =0999 से $P_3 = 0+1 = 001$

211 के लिए 211*9 = 1899 से $P_2 = 18+1 = 19$

421 के लिए 421*19 = 7999 से $P_3 = 7+1 = 008$

283 के लिए 283*53= 14999 से $P_3 = 14+1 = 015$

433 के लिए 433*3 = 1299 से $P_2 = 11+1 = 12$

157 के लिए 157*7 = 1099 से $P_2 = 10+1 = 11$

347 के लिए 347*317 = 109999 से $P_4 = 10+1 = 11$

647 के लिए $647*7 = 10999$ से $P_3 = 10 + 1 = 11$

857 के लिए $857*7 = 5999$ से $P_3 = 5 + 1 = 6$

(2) उना आश्लेषक x अंकीय भाजक में दाँयी से बाँयी ओर (इकाई से दहाई सैकड़ा हजार............की ओर) $(r\leq x)$ के लिये r स्थान तक बनी संख्या का इकाई अंक 1 तथा दहाई से r वें स्थान 0_0 हो तो उना आश्लेषक प्राप्त होगा।अर्थात् r वें अंक के बाद शेष (x-r) स्थान तक के अंक को उना संख्यांकन में दर्शित संख्या होगी। संकेत में N_r दर्शित करते है। जिसे विश्लेषित रूप न्यूनतम r अंकीय संख्यांक में दर्शित किया जाता है। r अंकीय संख्यांक में दर्शित करने के लिए नियमानुसार बाँयी ओर शून्य बढ़ाये।

जैसे भाजक 11 के लिए $N_1 = \bar{1}$ भाजक 21 के लिए $N_1 = \bar{2}$ भाजक 31 के लिए $N_1 = \bar{3}$

इसी प्रकार भाजक 41, 51 , 61, 71, 81, 91 ,101 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक $N_1=\bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \overline{10}$----------- दर्शित होगा।

भाजक 101 के लिए $N_2 = 0\bar{1}$, भाजक 201 के लिए $N_2 = 0\bar{2}$, भाजक 301 के लिए $N_2 = 0\bar{3}$

इसी प्रकार भाजक 401, 501 , 601, 701, 801, 901 ,1001 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक $N_2=0\bar{4}, 0\bar{5}, 0\bar{6}, 0\bar{7}, 0\bar{8}, 0\bar{9}, \overline{10}$----------- दर्शित होगा।

भाजक 1001 के लिए $N_3 = 00\bar{1}$, भाजक 2001 के लिए $N_3 = 00\bar{2}$, भाजक 3001 के लिए $N_3 = 00\bar{3}$

इसी प्रकार भाजक 4001, 5001 , 6001, 7001, 8001, 9001 ,10001 ---- के लिए क्रमशः आश्लेषक $N_3=00\bar{4}, 00\bar{5}, 00\bar{6}, 00\bar{7}, 00\bar{8}, 00\bar{9}, \overline{100}$----------- दर्शित होगा।

बीजगणितीय निरूपण में–

भाजक[m\दहाई से r वें स्थान के लिए 000 -------(r-1) बार \ इकाई में 1] के लिए

$N_r = 000\ (r-1)$ बार तक बाद $\bar{m}$ दर्शित होगा।

■ **इकाई अंक 3, 7, 9 वाले भाजकों के प्रति उना आश्लेषक प्राप्त करना** इसके लिए दिये भाजक को ऐसे अंक या संख्या से गुणा करते है कि प्राप्त गुणनफल का कम से कम इकाई अंक 1या इकाई अंक 1 के पहले दहाई सैकड़ा हजार............की ओर वांछित (आवश्यकतानुसार चाही गई)स्थान तक के अंक 0_0 प्राप्त हो जावे। फिर इस गुणनफल के लिए ऊपर अनुच्छेद 17-5 के अनुसार प्राप्त आश्लेषक ही दिये भाजक के प्रति उना आश्लेषक होगा।

जैसे भाजक 7 के लिए $7*3 = 21$ से उना आश्लेषक $N_1 = \bar{2}$ होगा ।

भाजक 23 के लिए 23*87 =2001 से उना आश्लेषक $N_2 = \overline{20}$ तथा $N_3 = 00\bar{2}$ होगा ।

इसी प्रकार 1• इकाई अंक 3 वाली संख्या 03 ,13, 23, 33,- - - - - - m\3 को 7 से गुणा करते हैं। और उना आश्लेषक क्रमशः

$N_1 = \bar{2}, \bar{9}, \overline{16}, \overline{23}$ -------$(\overline{7*m+2})$ प्राप्त करते हैं।

2• इकाई अंक 7 वाली संख्या 07 ,17, 27, 37,- - - - - - m\7 को 3 से गुणा करते हैं। और उना आश्लेषक क्रमशः

$N_1 = \bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{11}$ -------$(\overline{3*m+2})$ प्राप्त करते हैं।

3• इकाई अंक 9 वाली संख्या 09 ,19, 29, 39,- - - - - - m\9 को 9 से गुणा करते हैं। और उना आश्लेषक क्रमशः

$N_1 = \bar{8}, \overline{17}, \overline{26}, \overline{35}$ -------$(\overline{9*m+8})$ प्राप्त करते हैं।

कुछ जटिल भाजकों के लिए उना आश्लेषक

1501 के लिए $N_2 = \overline{15}$, 5001 के लिए $N_3 = 00\bar{5}$, 70001 के लिए $N_4 = 000\bar{7}$, 800001 के लिए $N_5 = 0000\bar{8}$

17000001 के लिए $N_6 = \overline{17}$, 120000001 के लिए $N_7 = \overline{12}$, 467 के लिए 467*3=1401 से $N_2 = \overline{14}$

1579 के लिए 1579*9 =30001 से $N_4 = 000\bar{3}$

17-3 आगर आश्लेषक, उना आश्लेषक और भाजक में सम्बंध किसी भाज्य संख्या का भाजक संख्या D द्वारा पूरा–पूरा (शून्य शेषफल पर) विभाज्य होने की जाँच के संदर्भ में भाजक के लिए चयनित समान स्तर r पर आगर आश्लेषक P_r और उना आश्लेषक N_r के निरपेक्ष मानों का योगफल भाजक संख्या D के बराबर होता है।

अतः आगर आश्लेषक, उना आश्लेषक और भाजक में सम्बंध समिका $|\mathbf{P_r}| + |\mathbf{N_r}| = \mathbf{D}$ होगा।

उक्त समिका अनुप्रयोग कर कोई दो अवयव का मान ज्ञात होने पर तीसरे अवयव का मान प्राप्त कर सकते हैं।

जैसे 1• भाजक संख्या 11 के लिए 11*9 =99 से आगर आश्लेषक $P_1 = 9 + 1 = 10$

और उना आश्लेषक $N_1 = \bar{1}$ से $|P_r| + |N_r| = |10| + |\bar{1}| = 10 + 1 = 11 =$ भाजक संख्या

अतः आगर आश्लेषक , उना आश्लेषक और भाजक में सम्बंध समिका – $|P_r| + |N_r| = D$ प्रमाणित।

2• भाजक संख्या 201 के लिए $201*99 = 19899$ से आगर आश्लेषक $P_2 = 198 + 1 = 199$

और उना आश्लेषक $N_2 = \bar{2}$ से $|P_r| + |N_r| = |199| + |\bar{2}| = 199 + 2 = 201 =$ भाजक संख्या

अतः आगर आश्लेषक , उना आश्लेषक और भाजक में सम्बंध समिका – $|P_r| + |N_r| = D$ प्रमाणित।

3• भाजक संख्या 13 के लिए $13*923= 11999$ से आगर आश्लेषक $P_3 = 11 + 1 = 12$

और $13*77=1001$ से उना आश्लेषक $N_3 = \bar{1}$ से $|P_r| + |N_r| = |12| + |\bar{1}| = 12 + 1 = 13 =$ भाजक संख्या

अतः आगर आश्लेषक , उना आश्लेषक और भाजक में सम्बंध समिका – $|P_r| + |N_r| = D$ प्रमाणित।

17-4 आश्लेषक स्तर r पर आगर आश्लेषक P_r और उना आश्लेषक N_r के लिए भाजक का गुणज विस्तार प्राप्त करना एवं आगर आश्लेषक P_r और आश्लेषक N_r सुनिश्चित करना

उदाहरण 1■ भाजक संख्या 71 के द्वारा विस्तारित अध्ययन विश्लेषित है।

(1) आगर आश्लेषक P_r का गुणज विस्तार प्राप्त करना एवं आगर आश्लेषक P_r सुनिश्चित करना

P_1 के लिए $\because$ 71 का इकाई अंक 1 (एक) है। $\therefore$ 1 (एक) को 9 से गुणा करना होगा।

तब p_1 के लिए गुणज $= 71*9= 639$ से $P_1 = 63 + 1 = 64$ होगा।

P_2 के लिए $\because$ p_1 के लिए गुणज $=71*9= 639$ का दहाई अंक 3 है। यहाँ 9 होने के लिए $9 - 3 = 6$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $71 * 6 = 426$ का इकाई अंक 6 होगा।

अर्थात p_2 के लिए गुणज $= 71*69= 4899$ से $P_2 = 48 + 1 = 49$ होगा।

P_3 के लिए $\because$ p_2 के लिए गुणज $=71*69= 4899$ का सैकड़ा अंक 8 है।यहाँ 9 होने के लिए $9 - 8 = 1$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $71 * 1 = 71$ का इकाई अंक 1 होगा।

अर्थात p_3 के लिए गुणज $= 71*169= 11999$ से $P_3 = 11 + 1 = 12 = 012$ होगा।

P_4 के लिए $\because$ p_3 के लिए गुणज $=71*169= 11999$ का हजार अंक 1 है।यहाँ 9 होने के लिए $9 - 1 = 8$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $71 * 8 = 568$ का इकाई अंक 8 होगा।

अर्थात p_4 के लिए गुणज $= 71*8169= 579999$ से $P_3 = 57 + 1 = 58 = 0058$ होगा।

P_5 के लिए $\because$ p_4 के लिए गुणज $=71*8169= 579999$ का दसहजार अंक 7 है।यहाँ 9 होने के लिए $9 - 7 = 2$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $71 * 2 = 142$ का इकाई अंक 2 होगा।

अर्थात p_5 के लिए गुणज $= 71*28169= 1999999$ से $P_5 = 19 + 1 = 20 = 00020$ होगा।

P_6 के लिए $\because$ p_5 के लिए गुणज $=71*28169= 1999999$ में बाँये से प्रथम अंक 1 के बाद इकाई तक अंक 9 की स्थान संख्या 6 है अतः 1999999 से $\mathbf{P_6} = 1 + 1 = 2$ होगा।

(2) आगर आश्लेषक P_r ,उना आश्लेषक N_r और भाजक D में सम्बंध समिका $|P_r| + |N_r| = D$ से $|N_r| = D - |P_r|$ या $N_r = \overline{D - P_r}$ से N_r का गुणज विस्तार प्राप्त करना

$N_1 = \overline{D - P_1} = \overline{71 - 64} = \bar{7}$ से N_1 के लिए गुणज =71

$N_2 = \overline{D - P_2} = \overline{71 - 49} = \overline{22} = \overline{22}$ से N_2 के लिए गुणज =2201

$N_3 = \overline{D - P_3} = \overline{71 - 12} = \overline{59} = 0\overline{59}$ से N_3 के लिए गुणज =59001

$N_4 = \overline{D - P_4} = \overline{71 - 58} = \overline{13} = 00\overline{13}$ से N_4 के लिए गुणज =130001

$N_5 = \overline{D - P_5} = \overline{71 - 20} = \overline{51} = 000\overline{51}$ से N_5 के लिए गुणज =5100001

$N_6 = \overline{D - P_6} = \overline{71 - 2} = \overline{69} = 0000\overline{69}$ से N_6 के लिए गुणज =6900001

उदाहरण 2■ भाजक संख्या 43 के द्वारा विस्तारित अध्ययन विश्लेषित है।

(1) उना आश्लेषक N_r का गुणज विस्तार प्राप्त करना एवं आगर आश्लेषक N_r सुनिश्चित करना

N_1 के लिए $\because$ 43 का इकाई अंक 3 है। $\therefore$ 3 को 7 से गुणा करना होगा।

तब N_1 के लिए गुणज = 43*7= 301 से $N_1 = P = \overline{30}$ होगा।

N_2 के लिए $\because$ N_1 के लिए गुणज =301 में इकाई अंक 1 के पहले 0 की स्थान संख्या 2-1 =1 है।

अतः 301 से $N_2 = 0\bar{3}$ होगा।

N_3 के लिए $\because$ N_2 के लिए गुणज =43*7= 301 का सैकड़ा अंक 3 है।यहाँ 0 होने के लिए $10-3=7$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $43*90=3870$ का दहाई अंक 7 होगा।

अर्थात N_3 के लिए गुणज = 43*907=39001 से $N_3 = 0\overline{39}$ होगा।

N_4 के लिए $\because$ N_3 के लिए गुणज =39001 का हजार अंक 9 है।यहाँ 0 होने के लिए $10-9=1$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $43*7=301$ का इकाई अंक 1होगा।

अर्थात N_4 के लिए गुणज = 43*7907 = 340001 से $N_4 = 00\overline{34}$ होगा।

N_5 के लिए $\because$ N_4 के लिए गुणज = 340001 का दसहजार अंक 4 है।यहाँ 0 होने के लिए $10-4=6$ जोड़ना होगा । जिसके लिए $43*2=86$ का इकाई अंक 6 होगा।

अर्थात N_5 के लिए गुणज = 43*27907= 1200001 से $N_5 = 000\overline{12}$ होगा।

(2) आगर आश्लेषक P_r उना आश्लेषक N_r और भाजक D में सम्बंध समिका• $|P_r| + |N_r| = D$ से $|P_r| = D - |N_r|$ से P_r का गुणज विस्तार प्राप्त करना

$P_1 = D - |N_1| = 43 - 30 = 13$ से P_1 के लिए गुणज =129

$P_2 = D - |N_2| = 43 - 3 = 40$ से P_2 के लिए गुणज = 3999

$P_3 = D - |N_3| = 43 - 39 = 4$ से P_3 के लिए गुणज = 3999

$P_4 = D - |N_4| = 43 - 34 = 9$ से P_4 के लिए गुणज = 89999

$P_5 = D - |N_5| = 43 - 12 = 31$ से P_5 के लिए गुणज = 3099999

इसी प्रकार

3 से 100 तक की इकाई अंक 1,3,7,9 वाले भाजक संख्या के लिए आगर आश्लेषक P_r ,उना आश्लेषक N_r और भाजक D में सम्बंध समिका – $|P_r| + |N_r| = D$ प्रमाण तालिका

भाजक D	समान स्तर r पर भाजक D का गुणज			आगर आश्लेषक P_r	उना आश्लेषक N_r	$\lvert P_r\rvert + \lvert N_r\rvert = D$
	आश्लेषक स्तर r	आगर आश्लेषक P_r के लिए गुणज	उना आश्लेषक N_r के लिए गुणज			
1	2	3	4	5	6	7
3	1	09	21	1	$\bar{2}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=3=D
	2	99	201	01	$0\bar{2}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=3=D
	3	999	2001	001	$00\bar{2}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=3=D
7	1	49	21	5	$\bar{2}$	$\lvert 5\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=7=D
	2	399	301	04	$0\bar{3}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\bar{3}\rvert$=7=D
	3	5999	1001	006	$00\bar{1}$	$\lvert 6\rvert + \lvert\bar{1}\rvert$=7=D
	4	19999	50001	0002	$000\bar{5}$	$\lvert 5\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=7=D
9	1	09	81	1	$\bar{8}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{2}\rvert$=9=D
	2	99	801	01	$0\bar{8}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{8}\rvert$=9=D
	3	999	8001	001	$00\bar{8}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{8}\rvert$=9=D
	4	9999	80001	0001	$000\bar{8}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{8}\rvert$=9=D

11	1	99	11	10	$\bar{1}$	$\|10\| + \|\bar{1}\|=11=D$
	2	99	1001	01	$\bar{1}0$	$\|1\| + \|\bar{1}0\|=11=D$
	3	9999	100I	010	$00\bar{1}$	$\|10\| + \|\bar{1}\|=11=D$
	4	9999	100001	0001	$00\bar{1}0$	$\|1\| + \|\bar{1}0\|=11=D$
13	1	39	91	4	$\bar{1}$	$\|4\| + \|\bar{9}\|=13=D$
	2	299	1001	03	$\bar{1}0$	$\|3\| + \|\bar{1}0\|=13=D$
	3	11999	1001	12	$00\bar{1}$	$\|12\| + \|\bar{1}\|=13=D$
17	1	119	51	12	$\bar{5}$	$\|12\| + \|\bar{5}\|=17=D$
	2	799	901	08	$0\bar{9}$	$\|8\| + \|\bar{9}\|=17=D$
	3	10999	6001	011	$00\bar{6}$	$\|11\| + \|\bar{6}\|=17=D$
	4	129999	40001	0013	$000\bar{4}$	$\|13\| + \|\bar{4}\|=17=D$
19	1	19	171	2	$\overline{17}$	$\|2\| + \|\overline{17}\|=19=D$
	2	399	1501	04	$\bar{1}\bar{5}$	$\|4\| + \|\bar{1}\bar{5}\|=19=D$
	3	7999	11001	008	$0\bar{1}\bar{1}$	$\|8\| + \|\bar{1}\bar{1}\|=19=D$
	4	159999	30001	0016	$\bar{3}$	$\|16\| + \|\bar{3}\|=19=D$
21	1	189	21	19	$\bar{2}$	$\|19\| + \|\bar{2}\|=21=D$
	2	399	1701	04	$\overline{17}$	$\|4\| + \|\overline{17}\|=21=D$
	3	12999	8001	013	$0\bar{8}$	$\|13\| + \|\bar{8}\|=21=D$
	4	159999	50001	0016	$\bar{5}$	$\|16\| + \|\bar{5}\|=21=D$
23	1	69	161	7	$\overline{16}$	$\|7\| + \|\overline{16}\|=23=D$
	2	299	2001	03	$\bar{2}0$	$\|3\| + \|\bar{2}0\|=23=D$
	3	20999	2001	021	$00\bar{2}$	$\|21\| + \|\bar{2}\|=23=D$
	4	89999	140001	0009	$00\bar{1}\bar{4}$	$\|9\| + \|\bar{1}\bar{4}\|=23=D$
27	1	189	81	19	$\bar{8}$	$\|19\| + \|\bar{8}\|=27=D$
	2	999	1701	10	$\bar{1}\bar{7}$	$\|10\| + \|\bar{1}\bar{7}\|=27=D$
	3	999	26001	001	$0\bar{2}\bar{6}$	$\|1\| + \|\bar{2}\bar{6}\|=27=D$
	4	189999	80001	0019	$000\bar{8}$	$\|19\| + \|\bar{8}\|=27=D$
29	1	29	261	3	$\overline{26}$	$\|3\| + \|\overline{26}\|=29=D$
	2	899	2001	09	$\bar{2}0$	$\|9\| + \|\bar{2}0\|=29=D$
	3	26999	2001	027	$0\bar{2}$	$\|27\| + \|\bar{2}\|=29=D$
	4	229999	60001	0023	$000\bar{6}$	$\|23\| + \|\bar{6}\|=29=D$
31	1	279	31	28	$\bar{3}$	$\|28\| + \|\bar{3}\|=31=D$
	2	899	2201	09	$\bar{2}\bar{2}$	$\|9\| + \|\bar{2}\bar{2}\|=31=D$
	3	3999	27001	004	$0\bar{3}\bar{1}$	$\|4\| + \|\bar{3}\bar{1}\|=31=D$
	4	189999	120001	0019	$00\bar{1}\bar{2}$	$\|19\| + \|\bar{1}\bar{2}\|=31=D$
33	1	99	231	10	$\overline{23}$	$\|10\| + \|\overline{23}\|=33=D$

	2	99	3201	01	$\bar{3}\bar{2}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{3}\bar{2}\rvert=33=D$
	3	9999	23001	010	$0\bar{2}\bar{3}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\bar{2}\bar{3}\rvert=33=D$
	4	9999	320001	0001	$00\overline{32}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{3}\bar{2}\rvert=33=D$
37	1	259	111	26	$\overline{11}$	$\lvert 26\rvert + \lvert\overline{11}\rvert=37=D$
	2	999	2701	10	$\bar{2}\bar{7}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\bar{2}\bar{7}\rvert=37=D$
	3	999	36001	001	$0\bar{3}\bar{6}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{3}\bar{6}\rvert=37=D$
	4	259999	110001	0026	$00\bar{1}\bar{1}$	$\lvert 26\rvert + \lvert\bar{1}\bar{1}\rvert=37=D$
39	1	39	351	4	$\overline{35}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\overline{35}\rvert=39=D$
	2	1599	2301	16	$\bar{2}\bar{3}$	$\lvert 16\rvert + \lvert\bar{2}\bar{3}\rvert=39=D$
	3	24999	14001	025	$0\bar{1}\bar{4}$	$\lvert 25\rvert + \lvert\bar{1}\bar{4}\rvert=39=D$
	4	219999	170001	0022	$00\overline{17}$	$\lvert 22\rvert + \lvert\overline{11}\rvert=39=D$
41	1	369	41	37	$\bar{4}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\bar{4}\rvert=41=D$
	2	1599	2501	16	$\bar{2}\bar{5}$	$\lvert 16\rvert + \lvert\bar{2}\bar{5}\rvert=41=D$
	3	17999	23001	018	$0\bar{2}\bar{3}$	$\lvert 18\rvert + \lvert\bar{2}\bar{3}\rvert=41=D$
	4	99999	310001	0010	$00\bar{3}\bar{1}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\bar{3}\bar{1}\rvert=41=D$
	5	99999	4000001	00001	$000\bar{4}0$	$\lvert 1\rvert + \lvert\bar{4}0\rvert=41=D$
	6	36999999	4000001	000037	$00000\bar{4}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\bar{4}\rvert=41=D$
43	1	129	301	13	$\overline{30}$	$\lvert 13\rvert + \lvert\overline{30}\rvert=43=D$
	2	3999	301	40	$0\bar{3}$	$\lvert 40\rvert + \lvert\bar{3}\rvert=43=D$
	3	3999	39001	004	$0\bar{3}\bar{9}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\bar{3}\bar{9}\rvert=43=D$
	4	89999	340001	0009	$00\bar{3}\bar{4}$	$\lvert 9\rvert + \lvert\bar{3}\bar{4}\rvert=43=D$
47	1	329	141	33	$\overline{14}$	$\lvert 33\rvert + \lvert\overline{14}\rvert=47=D$
	2	799	3901	08	$\bar{3}\bar{9}$	$\lvert 8\rvert + \lvert\bar{3}\bar{9}\rvert=47=D$
	3	28999	18001	029	$0\bar{1}\bar{8}$	$\lvert 29\rvert + \lvert\bar{1}\bar{8}\rvert=47=D$
	4	169999	300001	0017	$00\bar{3}\bar{0}$	$\lvert 17\rvert + \lvert\bar{3}\bar{1}\rvert=47=D$
	5	4399999	300001	00044	$0000\bar{3}$	$\lvert 44\rvert + \lvert\bar{3}\rvert=47=D$
49	1	49	441	5	$\overline{44}$	$\lvert 5\rvert + \lvert\overline{44}\rvert=49=D$
	2	2499	2401	25	$\bar{2}\bar{4}$	$\lvert 25\rvert + \lvert\bar{2}\bar{4}\rvert=49=D$
	3	26999	22001	027	$0\bar{2}\bar{2}$	$\lvert 27\rvert + \lvert\bar{2}\bar{2}\rvert=49=D$
	4	369999	120001	0037	$00\bar{1}\bar{2}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\bar{1}\bar{2}\rvert=49=D$
	5	3799999	1100001	00038	$000\bar{1}\bar{1}$	$\lvert 38\rvert + \lvert\bar{1}\bar{1}\rvert=49=D$
	6	42999999	6000001	000043	$00000\bar{6}$	$\lvert 43\rvert + \lvert\bar{6}\rvert=49=D$
51	1	459	51	46	$\bar{5}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\bar{5}\rvert=51=D$
	2	2499	2601	25	$\bar{2}6$	$\lvert 25\rvert + \lvert\bar{2}\bar{6}\rvert=51=D$
	3	27999	23001	028	$0\bar{2}\bar{3}$	$\lvert 28\rvert + \lvert\bar{2}\bar{3}\rvert=51=D$
	4	129999	380001	0013	$00\bar{3}\bar{8}$	$\lvert 13\rvert + \lvert\bar{1}\bar{2}\rvert=51=D$

	5	3699999	1400001	00037	000$\overline{14}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\overline{14}\rvert$=51=D
	6	18999999	32000001	000019	0000$\overline{32}$	$\lvert 19\rvert + \lvert\overline{32}\rvert$=51=D
	7	69999999	440000001	0000007	00000$\overline{44}$	$\lvert 7\rvert + \lvert\overline{44}\rvert$=53=D
53	1	159	371	16	$\overline{37}$	$\lvert 16\rvert + \lvert\overline{37}\rvert$=53=D
	2	4399	901	44	0$\overline{9}$	$\lvert 44\rvert + \lvert\overline{9}\rvert$=53=D
	3	14999	38001	015	0$\overline{38}$	$\lvert 15\rvert + \lvert\overline{38}\rvert$=53=D
	4	279999	250001	0028	00$\overline{25}$	$\lvert 28\rvert + \lvert\overline{25}\rvert$=53=D
	5	2399999	2900001	00024	00$\overline{29}$	$\lvert 24\rvert + \lvert\overline{29}\rvert$=53=D
	6	12999999	40000001	000013	0000$\overline{40}$	$\lvert 13\rvert + \lvert\overline{40}\rvert$=53=D
	7	489999999	40000001	0000049	000000$\overline{4}$	$\lvert 49\rvert + \lvert\overline{4}\rvert$=53=D
57	1	399	171	40	$\overline{17}$	$\lvert 40\rvert + \lvert\overline{17}\rvert$=57=D
	2	399	5301	04	$\overline{53}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\overline{53}\rvert$=57=D
	3	45999	11001	046	0$\overline{11}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\overline{11}\rvert$=57=D
	4	159999	410001	0016	00$\overline{41}$	$\lvert 16\rvert + \lvert\overline{41}\rvert$=57=D
	5	1299999	4400001	00013	000$\overline{44}$	$\lvert 13\rvert + \lvert\overline{44}\rvert$=57=D
	6	6999999	50000001	000007	0000$\overline{50}$	$\lvert 7\rvert + \lvert\overline{50}\rvert$=57=D
	7	519999999	50000001	0000052	000000$\overline{5}$	$\lvert 52\rvert + \lvert\overline{5}\rvert$=57=D
59	1	59	531	6	$\overline{53}$	$\lvert 6\rvert + \lvert\overline{53}\rvert$=59=D
	2	3599	2301	36	$\overline{23}$	$\lvert 36\rvert + \lvert\overline{23}\rvert$=59=D
	3	38999	20001	039	0$\overline{20}$	$\lvert 39\rvert + \lvert\overline{20}\rvert$=59=D
	4	569999	20001	0057	000$\overline{2}$	$\lvert 57\rvert + \lvert\overline{2}\rvert$=59=D
61	1	549	61	55	$\overline{6}$	$\lvert 55\rvert + \lvert\overline{6}\rvert$=61=D
	2	3599	2501	36	$\overline{25}$	$\lvert 36\rvert + \lvert\overline{25}\rvert$=61=D
	3	27999	33001	028	0$\overline{33}$	$\lvert 28\rvert + \lvert\overline{33}\rvert$=61=D
	4	149999	460001	0015	00$\overline{15}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\overline{15}\rvert$=61=D
63	1	189	441	19	$\overline{44}$	$\lvert 19\rvert + \lvert\overline{44}\rvert$=63=D
	2	4599	1701	46	$\overline{17}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\overline{17}\rvert$=63=D
	3	54999	8001	055	00$\overline{8}$	$\lvert 55\rvert + \lvert\overline{8}\rvert$=63=D
	4	369999	260001	0037	00$\overline{26}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\overline{26}\rvert$=63=D
	5	999999	5300001	00010	000$\overline{53}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\overline{53}\rvert$=63=D
	6	999999	62000001	000001	000$\overline{53}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\overline{62}\rvert$=63=D
67	1	469	201	47	$\overline{20}$	$\lvert 47\rvert + \lvert\overline{20}\rvert$=67=D
	2	6499	201	65	0$\overline{2}$	$\lvert 65\rvert + \lvert\overline{2}\rvert$=67=D
	3	39999	27001	040	0$\overline{27}$	$\lvert 40\rvert + \lvert\overline{27}\rvert$=67=D
	4	39999	630001	0004	00$\overline{63}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\overline{63}\rvert$=67=D
69	1	69	201	7	$\overline{20}$	$\lvert 7\rvert + \lvert\overline{20}\rvert$=69=D

	2	4899	201	49	$0\overline{2}$	$\lvert 49\rvert + \lvert\overline{2}\rvert = 69 = D$
	3	66999	2001	067	$00\overline{2}$	$\lvert 67\rvert + \lvert\overline{2}\rvert = 69 = D$
	4	549999	140001	0055	$00\overline{14}$	$\lvert 55\rvert + \lvert\overline{14}\rvert = 69 = D$
	5	3999999	2900001	00040	$000\overline{29}$	$\lvert 40\rvert + \lvert\overline{29}\rvert = 69 = D$
	6	3999999	65000001	000004	$0000\overline{65}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\overline{65}\rvert = 69 = D$
71	1	639	71	64	$\overline{7}$	$\lvert 64\rvert + \lvert\overline{7}\rvert = 71 = D$
	2	4899	2201	49	$\overline{22}$	$\lvert 49\rvert + \lvert\overline{22}\rvert = 71 = D$
	3	11999	59001	012	$0\overline{59}$	$\lvert 12\rvert + \lvert\overline{59}\rvert = 71 = D$
	4	579999	130001	0058	$00\overline{13}$	$\lvert 58\rvert + \lvert\overline{13}\rvert = 71 = D$
	5	1999999	5100001	00020	$000\overline{51}$	$\lvert 20\rvert + \lvert\overline{51}\rvert = 71 = D$
	6	1999999	69000001	000002	$0000\overline{69}$	$\lvert 2\rvert + \lvert\overline{69}\rvert = 71 = D$
73	1	219	511	22	$\overline{51}$	$\lvert 22\rvert + \lvert\overline{51}\rvert = 73 = D$
	2	4599	2701	46	$\overline{27}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\overline{27}\rvert = 73 = D$
	3	62999	10001	063	$0\overline{10}$	$\lvert 63\rvert + \lvert\overline{10}\rvert = 73 = D$
	4	719999	10001	0072	$000\overline{1}$	$\lvert 72\rvert + \lvert\overline{1}\rvert = 73 = D$
	5	5099999	2200001	00051	$000\overline{22}$	$\lvert 51\rvert + \lvert\overline{22}\rvert = 73 = D$
	6	26999999	46000001	000027	$0000\overline{46}$	$\lvert 27\rvert + \lvert\overline{46}\rvert = 73 = D$
	7	99999999	630000001	0000010	$00000\overline{63}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\overline{63}\rvert = 73 = D$
	8	99999999	7200000001	00000001	$000000\overline{72}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\overline{72}\rvert = 73 = D$
77	1	539	231	54	$\overline{23}$	$\lvert 54\rvert + \lvert\overline{23}\rvert = 77 = D$
	2	6699	1001	67	$\overline{1}0$	$\lvert 67\rvert + \lvert\overline{1}0\rvert = 77 = D$
	3	75999	1001	076	$00\overline{1}$	$\lvert 76\rvert + \lvert\overline{1}\rvert = 77 = D$
	4	229999	540001	0023	$00\overline{54}$	$\lvert 23\rvert + \lvert\overline{54}\rvert = 77 = D$
	5	999999	6700001	00010	$000\overline{67}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\overline{67}\rvert = 77 = D$
	6	999999	76000001	000001	$0000\overline{72}$	$\lvert 1\rvert + \lvert\overline{76}\rvert = 77 = D$
79	1	79	711	8	$\overline{71}$	$\lvert 8\rvert + \lvert\overline{71}\rvert = 79 = D$
	2	6399	1501	64	$\overline{15}$	$\lvert 64\rvert + \lvert\overline{15}\rvert = 79 = D$
	3	37999	41001	038	$0\overline{41}$	$\lvert 38\rvert + \lvert\overline{41}\rvert = 79 = D$
	4	669999	120001	0067	$00\overline{12}$	$\lvert 67\rvert + \lvert\overline{12}\rvert = 79 = D$
81	1	729	81	73	$\overline{8}$	$\lvert 73\rvert + \lvert\overline{8}\rvert = 81 = D$
	2	6399	1701	64	$\overline{17}$	$\lvert 64\rvert + \lvert\overline{17}\rvert = 81 = D$
	3	54999	26001	055	$0\overline{26}$	$\lvert 55\rvert + \lvert\overline{26}\rvert = 81 = D$
	4	459999	350001	0046	$00\overline{35}$	$\lvert 46\rvert + \lvert\overline{35}\rvert = 81 = D$
	5	3699999	4400001	00037	$000\overline{44}$	$\lvert 37\rvert + \lvert\overline{44}\rvert = 81 = D$
	6	27999999	53000001	000028	$0000\overline{53}$	$\lvert 28\rvert + \lvert\overline{53}\rvert = 81 = D$
	7	189999999	620000001	0000019	$00000\overline{62}$	$\lvert 19\rvert + \lvert\overline{62}\rvert = 81 = D$

	8	999999999	7100000001	00000010	$000000\bar{7}\bar{1}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\bar{7}\bar{1}\rvert=81=D$
	9	999999999	80000000001	000000001	$0000000\bar{8}0$	$\lvert 1\rvert + \lvert\ \bar{8}0\rvert=81=D$
83	1	249	581	25	$\overline{58}$	$\lvert 25\rvert + \lvert\overline{58}\rvert=83=D$
	2	4399	3901	44	$\bar{3}\bar{9}$	$\lvert 44\rvert + \lvert\bar{3}\bar{9}\rvert=83=D$
	3	20999	62001	021	$0\bar{6}\bar{2}$	$\lvert 21\rvert + \lvert\bar{6}\bar{2}\rvert=83=D$
	4	169999	660001	0017	$00\bar{6}\bar{6}$	$\lvert 17\rvert + \lvert\bar{6}\bar{6}\rvert=83=D$
	5	1099999	7200001	00011	$000\bar{7}\bar{2}$	$\lvert 11\rvert + \lvert\bar{7}\bar{2}\rvert=83=D$
87	1	609	261	61	$\overline{26}$	$\lvert 61\rvert + \lvert\overline{26}\rvert=87=D$
	2	5699	2001	57	$\bar{2}0$	$\lvert 57\rvert + \lvert\bar{2}0\rvert=87=D$
	3	84999	2001	085	$00\bar{2}$	$\lvert 85\rvert + \lvert\bar{2}\rvert=87=D$
	4	519999	350001	0052	$00\bar{3}\bar{5}$	$\lvert 52\rvert + \lvert\bar{3}\bar{5}\rvert=87=D$
	5	3999999	4700001	00040	$000\bar{4}\bar{7}$	$\lvert 40\rvert + \lvert\bar{4}\bar{7}\rvert=87=D$
	6	3999999	83000001	000004	$0000\bar{8}\bar{3}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\bar{8}\bar{3}\rvert=87=D$
89	1	89	801	9	$\overline{80}$	$\lvert 9\rvert + \lvert\overline{80}\rvert=89=D$
	2	8099	801	81	$0\bar{8}$	$\lvert 81\rvert + \lvert\bar{8}\rvert=89=D$
	3	16999	72001	017	$0\bar{7}\bar{2}$	$\lvert 17\rvert + \lvert\bar{7}\bar{2}\rvert=89=D$
	4	639999	250001	0064	$00\bar{2}\bar{5}$	$\lvert 64\rvert + \lvert\bar{2}\bar{5}\rvert=89=D$
91	1	819	91	82	$\bar{9}$	$\lvert 82\rvert + \lvert\bar{9}\rvert=91=D$
	2	8099	1001	81	$\bar{1}0$	$\lvert 81\rvert +\lvert\bar{1}0\ \rvert=91=D$
	3	89999	1001	090	$00\bar{1}$	$\lvert 90\rvert + \lvert\bar{1}\rvert=91=D$
	4	89999	820001	0009	$00\bar{8}\bar{2}$	$\lvert 9\rvert + \lvert\bar{8}\bar{2}\rvert=91=D$
93	1	279	651	28	$\overline{65}$	$\lvert 28\rvert + \lvert\overline{65}\rvert=93=D$
	2	3999	5301	40	$\bar{5}\bar{3}$	$\lvert 40\rvert +\lvert\bar{5}\bar{3}\ \rvert=93=D$
	3	3999	89001	004	$0\bar{8}\bar{9}$	$\lvert 4\rvert + \lvert\bar{8}\bar{9}\rvert=93=D$
	4	189999	740001	0019	$00\bar{7}\bar{4}$	$\lvert 19\rvert + \lvert\bar{7}\bar{4}\rvert=93=D$
	5	6699999	2600001	00067	$000\bar{2}\bar{6}$	$\lvert 26\rvert + \lvert\bar{6}\bar{7}\rvert=93=D$
97	1	679	291	68	$\overline{29}$	$\lvert 68\rvert + \lvert\overline{29}\rvert=97=D$
	2	6499	3201	65	$\bar{3}\bar{2}$	$\lvert 65\rvert +\lvert\bar{3}\bar{2}\ \rvert=97=D$
	3	54999	42001	055	$0\bar{4}\bar{2}$	$\lvert 55\rvert + \lvert\bar{4}\bar{2}\rvert=97=D$
	4	539999	430001	0054	$00\bar{4}\bar{3}$	$\lvert 54\rvert + \lvert\bar{4}\bar{3}\rvert=97=D$
	5	8299999	1400001	00083	$000\bar{1}\bar{4}$	$\lvert 83\rvert + \lvert\bar{1}\bar{4}\rvert=97=D$
	6	17999999	79000001	000018	$0000\bar{7}\bar{9}$	$\lvert 18\rvert + \lvert\bar{7}\bar{9}\rvert=97=D$
99	1	99	891	10	$\overline{89}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\overline{89}\rvert=99=D$
	2	99	9801	01	$\bar{9}\bar{8}$	$\lvert 1\rvert +\lvert\bar{9}\bar{8}\ \rvert=99=D$
	3	9999	89001	010	$0\bar{8}\bar{9}$	$\lvert 10\rvert + \lvert\bar{8}\bar{9}\rvert=99=D$
	4	9999	980001	0001	$00\bar{9}\bar{8}$	$\lvert 1\rvert +\lvert\bar{9}\bar{8}\ \rvert=99=D$

	5	999999	8900001	00010	$00\overline{89}$	$\|10\| + \|\overline{89}\|=99=D$
	6	999999	98000001	000001	$000\overline{98}$	$\|1\| +\|\overline{98}\|=99=D$

17-5 विभाज्यता जाँच में आश्लेषकों का अनुप्रयोग भाजक D द्वारा भाज्य A की विभाज्यता जाँच करने की व्याख्या प्रक्रम निम्नानुसार होगा।

1■जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक D के लिए आवश्यकतानुसार आगर आश्लेषक P_r अथवा उना आश्लेषक N_r प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति में इकाई से बाँयी ओर r अंको के समूह में भाज्य A का अनुभाग में विभाजन दर्शित कीजिए। यथा– $n_x\backslash n_{x-1}\backslash n_{x-2}\backslash------\backslash n_3\backslash n_2\backslash n_1$

यह अनुभाग विभाजन भाज्य A के r*x अंकीय होने पर x अनुभागों मे, तथा(a<r) के प्रतिबंध पर (r*x+a) अंकीय भाज्य A के (x+1) अनुभागों में होंगे।जिसका अंतिम (x+1) वाँ अनुभाग a अंकीय होगा।

2■ जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * (P_r\backslash N_r) + n_2] = s_1$ को द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r अंको के समूह नियम (दाँये से बाँये r अंकों से बनी संख्या (r1) एवं शेष अंको से बनी संख्या को बतौर हासिल $_{(w1)}$ दर्ज करते हुए) के अनुसार $_{(w1)}(r1)$ दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 $[(r1)^* (P_r\backslash N_r) + (w1) + n_3] = s_2$ को तीसरे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में प्रक्रम 1 की भाँति $_{(w2)}(r2)$ दर्शित कीजिए। यथा अनुभाग पंक्ति.→ – – – – – –\ n_3\ n_2 \ n_1

जाँच पंक्ति→ – – – – – – \ $_{(w1)}(r1)$\

प्रक्रम 3 $[(r2)^* (P_r\backslash N_r) + (w2) + n_4] = s_3$ को चौथे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में प्रक्रम 1 की भाँति $_{(w3)}(r3)$ दर्शित कीजिए। यथा अनुभाग पंक्ति.→ – – – – – – \ n_4 \ n_3\ n_2 \ n_1

जाँच पंक्ति→ – – – – – – \ $_{(w2)}(r2)$\ $_{(w1)}(r1)$\

– –

– –

प्रक्रम (k+1) $[(rk)^* (P_r\backslash N_r) + (wk) + n_{k+2}] = s_{k+1}$ को (k+2) वाँ अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में प्रक्रम 1 की भाँति $_{[w(k+1)]}[r(k+1)]$ दर्शित कीजिए।

यथा अनुभाग पंक्ति.→ – – – – – –\ n_{k+2} \ – –\ n_4 \ n_3 \ n_2 \ n_1

जाँच पंक्ति→ – – – – – – –\ $_{[w(k+1)]}[r(k+1)$\ – – –\ $_{(w3)}(r3)$\ $_{(w2)}(r2)$\ $_{(w1)}(r1)$\

इसी भाँति कुल अनुभाग संख्या L के प्रति अंतिम (L–1) वाँ प्रक्रम के तक गणना करने से प्राप्त s_{L-1} को अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत दर्शित कीजिए।

अनुभाग पंक्ति→ \ n_L \ – –\ n_{k+2} \ – –\ n_4 \ n_3 \ n_2 \ n_1

जाँच पंक्ति→ \ s_{L-1}\ – – \ $_{[w(k+1)]}[r(k+1)$\ – – –\ $_{(w3)}(r3)$\ $_{(w2)}(r2)$\ $_{(w1)}(r1)$\

निष्कर्ष

जाँच में अंतिम स्वतंत्र भाव से दर्शित संख्या s_{L-1} स्वयं भाजक या भाजक का सरल गुणज या शून्य मान की हो तो भाज्य भाजक द्वारा पूर्ण विभाज्य होगा। अन्यथा अविभाज्य होगा।

विश्लेषित उदाहरण■

(A) आगर आश्लेषक P_r के संदर्भ में

उदाहरण 1■ भाजक 7 के लिए आगर आश्लेषक P_1 प्राप्त कीजिए और P_1 के द्वारा भाजक 7 के प्रति भाज्य 343 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 7 के लिए आगर आश्लेषक P_1 की गणना– 7*7 =49 से आगर आश्लेषक P_1 = 4+1=5 होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर 1 अंकीय में भाज्य 343 का 3 अनुभाग में विभाजन 3\4\3 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * P_r + n_2] = s_1 \Rightarrow$ 3*5+4 =19 द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_1$9 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 3 \ 4 \ 3

जाँच पंक्ति → \ $_1$9 \

प्रक्रम 2 अंतिम $[(r1)^* P_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow$ 9*5+1+3 =49 अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 49 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 3 \ 4 \ 3

जाँच पंक्ति → 49 \ $_1$9 \

निष्कर्ष. प्रक्रम 2 में अंतिम दर्शित संख्या 49 भाजक 7 का सरल गुणज है। अतः जाँच भाज्य 343 जाँच भाजक 7 से पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 2■ भाजक 179 के लिए आगर आश्लेषक P_1 प्राप्त कीजिए और P_1 के द्वारा भाजक 179 के प्रति भाज्य 7145501 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

179 द्वारा भाज्य 7145501 की विभाज्यता जाँच करने की व्याख्या प्रक्रम निम्नानुसार होगा।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 179 के लिए आगर आश्लेषक P_1 = 17+1 =18 होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर 1 अंकीय में भाज्य 7145501 का 7 अनुभाग में विभाजन 7\1\4\5\5\0\1 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * P_r + n_2] = s_1 \Rightarrow$ 1*18+0 =18 को द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_1$8 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\1\4\5\5\ 0 \1

जाँच पंक्ति→ \ $_1$8 \

प्रक्रम 2 $[(r1)^* P_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow$ 8*18+1+5 =150 को तीसरे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{15}$0 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\1\4\5\ 5 \ 0 \ 1

जाँच पंक्ति → \ $_{15}$0 \ $_1$8 \

प्रक्रम 3 $[(r2)^* P_r + (w2) + n_4] = s_3 \Rightarrow$ 0*18+15+5 =20 को चौथे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_2$0 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\1\ 4 \ 5 \ 5 \ 0 \ 1

जाँच पंक्ति → \ $_2$0 \ $_{15}$0 \ $_1$8 \

प्रक्रम 4 $[(r3)^* P_r + (w3) + n_5] = s_4 \Rightarrow$ 0*18+2+4 =6 को पाँचवें अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_0$6 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\ 1 \ 4 \ 5 \ 5 \ 0 \ 1

जाँच पंक्ति→ \ $_0$6 \ $_2$0 \ $_{15}$0 \ $_1$9 \

प्रक्रम 5 $[(r4)^* P_r + (w4) + n_6] = s_5 \Rightarrow$ 6*18+0+1=109 को छटवें अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{10}$9 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\ 1 \ 4 \ 5 \ 5 \ 0 \ 1

जाँच पंक्ति → \ $_{10}$9 \ $_0$6 \ $_2$0 \ $_{15}$0 \ $_1$8 \

प्रक्रम 6 अंतिम. $[(r5)^* P_r + (w5) + n_7] = s_6 \Rightarrow$ 9*18+10+7 =179 को अंतिम सातवें अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 179 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 7 \ 1 \ 4 \ 5 \ 5 \ 0 \ 1

जाँच पंक्ति → 179 \ $_{10}$9 \ $_0$6 \ $_2$0 \ $_{15}$0 \ $_1$9 \

निष्कर्ष प्रक्रम 6 में अंतिम दर्शित संख्या 179 स्वयं भाजक संख्या है । अतः जाँच भाज्य 7145501 जाँच भाजक 179 द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 3■ भाजक 433 के लिए आगर आश्लेषक P_2 प्राप्त कीजिए और P_2 के द्वारा भाजक 433 के प्रति भाज्य 4902228096 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

भाजक 433 द्वारा भाज्य 9102228096 की विभाज्यता जाँच करने की व्याख्या प्रक्रम निम्नानुसार होगा।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 433 के लिए आगर आश्लेषक P_2 की गणना – 433*3 =1299 से P_2 =12+1=13 होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=2 अंकीय में भाज्य 9102228096 का 5 अनुभाग में विभाजन 91\02\22\80\96 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * P_r + n_2] = s_1 \Rightarrow$ 96*13+80 = 1328 को द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=2 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{13}$28 दर्शित कीजिए। ।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 91\02\22\ 80 \96

जाँच पंक्ति → \ $_{13}$28 \

प्रक्रम 2 $[(r1)^* P_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow$ 28*13+13+22 =399 को तीसरे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=2 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_3$99 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 91\02\ 22 \ 80 \96

जाँच पंक्ति → \ $_3$99 \ $_{13}$28\

प्रक्रम 3 $[(r2)^* P_r + (w2) + n_4] = s_3 \Rightarrow$ 99*13+3+02 =1292 को चौथे अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=2 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{12}$92 दर्शित कीजिए। ।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 91 \ 02 \ 22 \ 80 \96

जाँच पंक्ति → \ $_{12}$92 \ $_3$99 \ $_{13}$28\

प्रक्रम 4 अंतिम $[(r3)^* P_r + (w3) + n_5] = s_4 \Rightarrow$ 92*13+12+91 =1299 को पाँचवें अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 1299 दर्शित कीजिए। ।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 91 \ 02 \ 22 \ 80 \96

जाँच पंक्ति → 1299\ $_{12}$92 \ $_3$99 \ $_{13}$28\

निष्कर्ष . प्रक्रम 4 में अंतिम दर्शित संख्या 1299 भाजक संख्या 433 का सरल गुणज है । अतः जाँच भाज्य 9102228096 जाँच भाजक 433 द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 4■ भाजक 37 के लिए आगर आश्लेषक P_3 प्राप्त कीजिए और P_3 के द्वारा भाजक 37 के प्रति भाज्य 1850333 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

भाजक 37 द्वारा भाज्य 1850333 की विभाज्यता जाँच करने की व्याख्या प्रक्रम निम्नानुसार होगा।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 37 के लिए आगर आश्लेषक P_3 की गणना – 37*27 =999=0999 से P_3 =0+1=001 होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=3 अंकीय में भाज्य 1850333 का 3 अनुभाग में विभाजन 1\850\333 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * P_r + n_2] = s_1 \Rightarrow$ 333*001+850 = 1183 को द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=3 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_1$183 दर्शित कीजिए। ।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 1\ 850 \333

जाँच पंक्ति→ \ $_1$183 \

प्रक्रम 2 अंतिम $[(r1)^* P_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow$ 183*001+1+1 =185 अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 185 दर्शित कीजिए।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 1\ 850 \333

जाँच पंक्ति → 185 \ $_1$183 \

निष्कर्ष प्रक्रम 2 में अंतिम दर्शित संख्या 185=5*37 भाजक संख्या 37 का सरल गुणज है । अतः जाँच भाज्य 1850333 जाँच भाजक 37 द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 5■ भाजक 229 के लिए आगर आश्लेषक P_4 प्राप्त कीजिए और P_4 के द्वारा भाजक 229 के प्रति भाज्य 79158435287 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

भाजक 229 द्वारा भाज्य 79158435287 की विभाज्यता जाँच करने की व्याख्या प्रक्रम निम्नानुसार होगा।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 229 के लिए आश्लेषक P_4 की गणना – 229*131 =29999 से P_4 =2+1=0003 होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=4 अंकीय में भाज्य 79158435287 का 3 अनुभाग में विभाजन 791\5843\5287 प्राप्त कीजिए।

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * P_r + n_2] = s_1 \Rightarrow$ 5287*0003+5843 = 21644 को द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=4 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_2$1644 दर्शित कीजिए।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 791\ 5843 \5287

जाँच पंक्ति→ \ $_2$1644 \

प्रक्रम 2 अंतिम $[(r1)^* P_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow$ 1644*0003+2+791 =5725 अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 5725 दर्शित कीजिए।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 791 \ 5843 \5287

जाँच पंक्ति→ 5725 \ $_2$1644 \

निष्कर्ष प्रक्रम 2 में अंतिम दर्शित संख्या 5725=229*25 भाजक संख्या 229 का सरल गुणज है । अतः जाँच भाज्य 79158435287जाँच भाजक 229 द्वारा पूर्ण विभाज्य है।

(B) उना आश्लेषक N_r के संदर्भ में

उदाहरण 1■ भाजक 7 के लिए उना आश्लेषक N_1 प्राप्त कीजिए और N_1 के द्वारा भाजक 7 के प्रति भाज्य 7203 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 7 के लिए उना आश्लेषक N_1 की गणना– 7*3 =21 से उना आश्लेषक $N_1 = \bar{2}$ होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर 1 अंकीय में भाज्य 7203 का 4 अनुभाग में विभाजन 7\2\0\3 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow 3*\bar{2}+0 =\bar{6}$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_0\bar{6}$ दर्शित कीजिए। ।

यथा– भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 7\2 \ 0\ 3

जाँच पंक्ति → \ $_0\bar{6}$ \

प्रक्रम 2 $[(r1)^* N_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow \bar{6}*\bar{2}+0+2 =14$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_1$4 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति→ 7\ 2 \ 0\ 3

जाँच पंक्ति→ \ $_1$4 \ $_0\bar{6}$ \

प्रक्रम 3 अंतिम- $[(r2)^* N_r + (w2) + n_4] = s_3 \Rightarrow 4*\bar{2}+1+7 =0$ अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 0 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 7\ 2 \ 0\ 3

जाँच पंक्ति → 0 \ $_1$4 \ $_0\bar{6}$ \

निष्कर्ष प्रक्रम 3 में अंतिम दर्शित संख्या 0 है। अतः जाँच भाज्य 7203 जाँच भाजक 7 से पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 2■ भाजक 67 के लिए उना आश्लेषक N_2 प्राप्त कीजिए और N_2 के द्वारा भाजक 67 के प्रति भाज्य 1043391 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 67 के लिए उना आश्लेषक N_2 की गणना– 67*3 =201 से उना आश्लेषक $N_2 = 0\bar{2}$ होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=2 अंकीय में भाज्य 1043391 का 4 अनुभाग में विभाजन 1\04\33\91 प्राप्त कीजिए

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow 91*0\bar{2}+33 = \bar{1}\bar{4}\bar{9}$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=2 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{\bar{1}}\bar{4}\bar{9}$ दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 1\04\ 33 \91

जाँच पंक्ति → \ $_{\bar{1}}\bar{4}\bar{9}$\

प्रक्रम 2 $[(r1)^* N_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow \bar{4}\bar{9}*\bar{2}+\bar{1}+04 = 101$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=1 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_1$4 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 1 \04 \ 33 \91

जाँच पंक्ति → \$_1$01 \ $_{\bar{1}}\bar{4}\bar{9}$ \

प्रक्रम 3 अंतिम $[(r2)^* N_r + (w2) + n_4] = s_3 \Rightarrow 01*\bar{2}+1+1 = 0$ अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 0 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 1 \04 \ 33 \91

जाँच पंक्ति → 0 \$_1$01 \ $_{\bar{1}}\bar{4}\bar{9}$ \

निष्कर्ष प्रक्रम 3 में अंतिम दर्शित संख्या 0 है। अतः जाँच भाज्य 1043391 जाँच भाजक 67 से पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 3■ भाजक 359 के लिए उना आश्लेषक N_3 प्राप्त कर इसके द्वारा भाजक 359 के प्रति भाज्य 8673117259 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 359 के लिए उना आश्लेषक N_3 की गणना– 359*39 =14001 से उना आश्लेषक $N_3 = \bar{1}\,\bar{4}$ होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=3 अंकीय में भाज्य 8673117259 का 4 अनुभाग में विभाजन 8\673\117\259 प्राप्त कीजिए।

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow 259*\bar{1}\bar{4}+117 = \bar{3}\bar{5}0\bar{9}$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=3 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{\bar{3}}\,\bar{5}0\bar{9}$ दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 8\673\ 117 \259

जाँच पंक्ति → \ $_{\bar{3}}\,\bar{5}0\bar{9}$ \

प्रक्रम 2 $[(r1)^* N_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow \bar{5}0\bar{9}*\bar{1}\bar{4}+\bar{3}+673 = 7796$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=3 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_7$796 दर्शित कीजिए। ।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 8\ 673 \ 117 \259

जाँच पंक्ति → \$_7$796\$_{\bar{3}}$ $\bar{5}0\bar{9}$ \

प्रक्रम 3 अंतिम $[(r2)^* N_r + (w2) + n_4] = s_3 \Rightarrow 796*\ \bar{1}\bar{4}\ +7+8 = \bar{1}\bar{1}\bar{1}2\bar{9}$ अंतिम अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत $\bar{1}\bar{1}\bar{1}2\bar{9}$ दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 8 \ 673 \ 117 \259

जाँच पंक्ति → $\bar{1}\bar{1}\bar{1}2\bar{9}$ \$_7$796\ $_{\bar{3}}$ $\bar{5}0\bar{9}$\

जाँच पंक्ति में अंतिम चौथे अनुभाग में दर्शित संख्य सामान्य जाँच के लिए बड़ी संख्या है। अतः नियमानुसार पुनः –

प्रक्रम 3_1अंतिम $\overline{11}\overline{129}$ का 2 अनुभाग विभाजन $\overline{11}\backslash\overline{129}$ से $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow \overline{129} * \overline{14} + \overline{11} = 1795$ अंतिम द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 1795 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → $\overline{11}$ \ $\overline{129}$

जाँच पंक्ति → \1795\ 1795 = 5*359

निष्कर्ष 1795 = 5*359 अतः जाँच भाज्य 8673117259 जाँच भाजक 359 से पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 4■ भाजक 6667 के लिए उना आश्लेषक N_4 प्राप्त कर इसके द्वारा भाजक 6667 के प्रति भाज्य 44488896667 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 6667 के लिए उना आश्लेषक N_4 की गणना– 6667*3 =20001 से उना आश्लेषक $N_4 = 000\overline{2} = \overline{2}$ होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=4 अंकीय में भाज्य 44488896667 का 3 अनुभाग में विभाजन 444\8889\6667 प्राप्त कीजिए।

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow 6667*\overline{2}+8889 = \overline{4445}$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=4 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_0\overline{4445}$ दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 444\ 8889 \6667

जाँच पंक्ति → \$_0\overline{4445}$ \

प्रक्रम 2 अंतिम. $[(r1)* N_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow \overline{4445}*\overline{2} + 0 + 444 = 13334$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 13334 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 444 \ 8889 \6667

जाँच पंक्ति → 13334 \$_0\overline{4445}$ \

निष्कर्ष 13334 = 2*6667 अतः जाँच भाज्य 44488896667 जाँच भाजक 6667 से पूर्ण विभाज्य है।

उदाहरण 5■ भाजक 16667 के लिए उना आश्लेषक N_5 प्राप्त कर इसके द्वारा भाजक 16667 के प्रति भाज्य 27777888889 की विभाज्यता जाँच व्याख्या प्रक्रम दीजिए।

जाँच तैयारी प्रक्रम

प्रक्रम 1 भाजक 16667 के लिए उना आश्लेषक N_5 की गणना– 16667*3 =500001 से उना आश्लेषक $N_5 = 0000\overline{5} = \overline{5}$ होगा।

प्रक्रम 2 इकाई से बाँयी ओर r=5 अंकीय में भाज्य 27777888889 का 3 अनुभाग में विभाजन 2\77778\88889 प्राप्त कीजिए।

जाँच पंक्ति प्रक्रम

प्रक्रम 1 $[n_1 * N_r + n_2] = s_1 \Rightarrow 88889*\overline{5}+77778 = \overline{366667}$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में r=5 अंकीय समूह नियम के अनुसार $_{\overline{3}}\ \overline{66667}$दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 2\ 77778 \88889

जाँच पंक्ति → \ $_{\overline{3}}\ \overline{66667}$\

प्रक्रम 2 अंतिम $[(r1)* N_r + (w1) + n_3] = s_2 \Rightarrow \overline{66667} *\overline{5} + \overline{3} + 2 = 333334$ द्वितीय अनुभाग के नीचे जाँच पंक्ति में यथावत 333334 दर्शित कीजिए।

यथा भाज्य अनुभाग विभाजन पंक्ति → 2 \ 77778 \88889

जाँच पंक्ति → 333334 \ $_{\overline{3}}\ \overline{66667}$\

निष्कर्ष 333334 = 2*16667 अतः जाँच भाज्य 2 77778 88889 जाँच भाजक 6667 से पूर्ण विभाज्य है।

17-6 विभाज्यता की दृष्टि से प्राकृत संख्या का वर्गीकरण

प्राकृत संख्या समुच्चय के शब्दों में वे सभी संख्याएँ जो स्पष्ट दृश्यभाव में नाम विशेष का गिनने का बोध कराता है, प्राकृत संख्या के अवयव होंगे। अध्ययन संकेत N है।

जैसे 21 मजदूर धान कटाई में लगे हैं। हमारे विद्यालय में कुल 526 छात्र – छात्राएँ अध्ययनरत हैं। संतरे की एक टोकरी में 50 संतरे है।

N =[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11----------------]अपरिमित रूप से विस्तारित है,

विभाज्यता की प्राकृत संख्या का वर्गीकरण निम्नानुसार है।

1• केवल एक और स्वयं के द्वारा विभाज्य संख्याएँ । **जैसे** 2,3,5,7,11,13,17,19,23,-----------

2• एक और स्वयं के अतिरिक्त केवल एक और तीसरी संख्या द्वारा विभाज्य संख्याएँ ।

जैसे 4,9,25, 49, 64, 121, 169---------------------

3• एक और स्वयं के अतिरिक्त कम से कम दो और अन्य संख्या द्वारा विभाज्य संख्या ।

जैसे 6,8,10,12,14,15,18,20,21,24 ------------

उपरोक्त वर्गीकरण से प्रथम क्रम की वर्गीकृत संख्याएँ अभाज्य संख्या कहलाती है। दूसरे और तीसरे वर्गीकृत की संख्याएँ भाज्य संख्या कहलाती है। जिसमें दूसरे क्रम की वर्गीकृत संख्या प्रथम क्रम की वर्गीकृत मूल संख्या का वर्गमान संख्या के रूप में परिभाषित होगा।

इस प्रकार के वर्गीकरण से अभाज्य संख्या एवं भाज्य संख्या निम्नानुसार परिभाषित होंगे।

अभाज्य प्राकृत संख्या वे सभी संख्याएँ जो एक और स्वयं से ही विभाज्य होती हैं, अभाज्य प्राकृत संख्या के अवयव होंगे।

भाज्य प्राकृत संख्या वे सभी संख्याएँ जो एक और स्वयं के अतिरिक्त कम से कम एक और तीसरी संख्या द्वारा विभाज्य होती है। भाज्य प्राकृत संख्या के अवयव होंगे।

घ्यानाकर्षण यदि a और b दोनों अभाज्य संख्या हो तो कोई भाज्य संख्या भाजक संख्या a और भाजक संख्या b द्वारा अलग –अलग विभाज्य हो तो यह भाज्य संख्या a*b =c द्वारा भी विभाज्य होगा।

जैसे भाजक 5 और 13 के द्वारा संख्या 195 विभाज्य है तो संख्या 195 5*13=65 द्वारा भी विभाज्य होगा।

17-7 भाजक 11 द्वारा विभाज्यता जाँच नियम का गणितीय मूलभूत संक्रिया जाँच हेतु अनुप्रयोग

अनुच्छेद 16 -2 में किसी संख्या का मूलांक प्राप्त करने के लिए 9 के महत्व के तारतम्य में बिन्दु 1 में स्पष्ट रूप से प्रतिपादित किया गया है कि किसी संख्या का मूलांक उस संख्या को 9 द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त शेषफल है जो 0,1,2,3,4,5,6,7,8 में से कोई एक अंक होगा। प्राकृत संख्यांकन के तारतम्य में शेषफल 0 पर संख्या का मूलांक या एकअंकीययोग 9 होता है।जबकि किसी भाज्य संख्या का भाजक 11 हो तो भाजक 11 द्वारा विभाज्यता जाँच नियम के शब्दों मे शेषफल गणना निम्नानुसार प्रतिपादित होंगे–

→ दाँयी ओर से [{संख्या के विषम स्थान (ईकाई,सैकड़ा........) के अंकों के योग से बनी संख्या } –{ संख्या के सम स्थान (दहाई ,हजार ......) के अंकों के योग से बनी संख्या}]

अथवा संख्या का

[(इकाई अंक) –(दहाई अंक) +(सैकड़ा अंक) – (हजार अंक) +(दस हजारअंक) – ---- +--------- – ------+] =

1• 0 प्राप्त होने पर $0 \div 11$ से शेषफल 0 प्राप्त होगा।

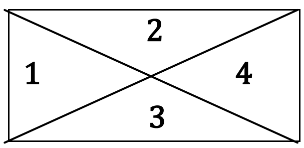
2• $11*m + y$ प्राप्त होने पर $(11*m+y) \div 11$ से शेषफल y प्राप्त होगा।

3• $11*\bar{m} + \bar{y}$ प्राप्त होने पर $(11*\bar{m} + \bar{y}) \div 11$ से शेषफल $(11+\bar{y})$ प्राप्त होगा।

जहाँ $m \geq 0$ तथा $1 \leq y \leq 10$ होगा।

उक्त शेषफल प्राप्त होने के तीनों स्थितियों को दृष्टिगत करते हुए अनुच्छेद 16-3 मूलांकों का उपयोग बिन्दु 2 में मूलभूत गणितीय संक्रिया की जाँच में प्रतिपादित मूलांक नियम के अनुसार प्रस्तुत कर सकते हैं। मात्र मूलांक के स्थान पर शेषफल दर्शित करना होगा। यथा अवलोकन कीजिए।

दो संख्या के जोड़ या योग संक्रिया की जाँच

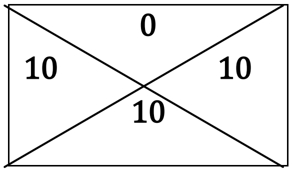


संख्या A+ संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच– अनुभाग 1 में संख्या C के प्रति प्राप्त शेषफल अनुभाग 2 में संख्या A के प्रति प्राप्त शेषफल, अनुभाग 3 में संख्या B के प्रति प्राप्त शेषफल तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का शेषफलों का योगमान के प्रति प्राप्त शेषफल दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल होने पर की गयी योग

संक्रिया सही होगा।

उदाहरण■ 3256 +9371 =12627 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =12627 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए

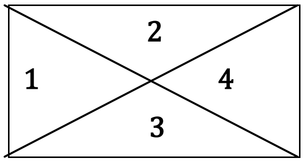


[(7+6+1)–(2+2) =10 से शेषफल =10 , अनुभाग 2 में संख्या A =3256 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(6+2)–(5+3) =0 से शेषफल =0 ,अनुभाग 3 में संख्या B =9371 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(1+3)–(7+9)= $\overline{12}$ =11* $\overline{1}$ + $\overline{1}$ से शेषफल =11+ $\overline{1}$, =10 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त शेषफलों का योगमान 0+10=10 के प्रति प्राप्त शेषफल =10 होगा।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल 10 = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल 10 है ,अतः की गयी योग संक्रिया सही है।

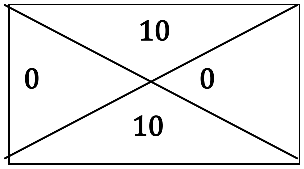
घटाना संक्रिया की जाँच

संख्या A – संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C के प्रति प्राप्त शेषफल , अनुभाग 2 में संख्या A के प्रति



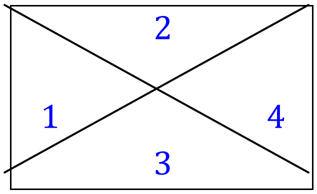
प्राप्त शेषफल, अनुभाग 3 में संख्या B के प्रति प्राप्त शेषफल तथा अनुभाग 4 में (अनुभाग 2) – (अनुभाग 3) से प्राप्त अन्तर मान के प्रति प्राप्त शेषफल दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल होने पर की गयी घटाने की संक्रिया सही होगा।



उदाहरण■ 12627 –9371 =3256 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =3256 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(6+2)–(5+3) =0 से शेषफल =0] अनुभाग 2 में संख्या =12627 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(7+6+1)–(2+2) =10 से शेषफल =10 , अनुभाग 3 में संख्या B =9371 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(1+3)–(7+9) = $\overline{12}$ =11* $\overline{1}$ + $\overline{1}$ से शेषफल =11+ $\overline{1}$] =10 तथा अनुभाग 4 में (अनुभाग 2) – (अनुभाग 3) से प्राप्त अन्तर मान 10−10 = 0 के प्रति प्राप्त शेषफल =0 होगा।

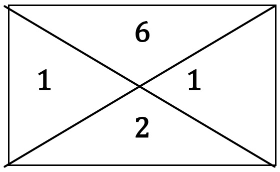
दो संख्या के गुणन संक्रिया की जाँच



संख्या A* संख्या B = संख्या C की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C के प्रति प्राप्त शेषफल, अनुभाग 2 में संख्या A के प्रति प्राप्त शेषफल, अनुभाग 3 में संख्या B के प्रति प्राप्त शेषफल तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का शेषफलों के गुणनफल के प्रति शेषफल संख्या दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल होने पर की गयी गुणन संक्रिया सही होगा।

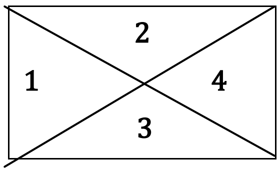
उदाहरण■ 325 *937 =304525 की जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या C =304525 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए



[(5+5+0)–(2+4+3) =1 से शेषफल =1 , अनुभाग 2 में संख्या A =325 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(5+3)–(2) =6 से शेषफल =6 , अनुभाग 3 में संख्या B =937 के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए [(7+9)–3] = 13 से 3 − 1 = 2 से शेषफल =2 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त शेषफलों का गुणनफल 6*2 = 12 के प्रति शेषफल के लिए 2 − 1 =1 से शेषफल =1 **या** 12=11*1 +1 से शेषफल =1 दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल 1 = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल 1 है। अतः की गयी गुणन संक्रिया सही है।

भाग संक्रिया की जाँच

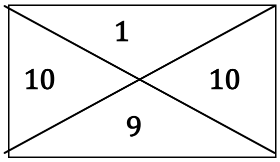


संख्या A ÷ संख्या B से भागफल संख्या C और शेषफल संख्या D प्राप्त हो तो A= B*C+D होगा। तब जाँच के लिए जाँच अनुभाग 1 में संख्या A के प्रति प्राप्त शेषफल, अनुभाग 2 में संख्या B और संख्या C के प्रति प्राप्त शेषफलों के गुणनफल के प्रति प्राप्त शेषफल, अनुभाग 3 में संख्या D के प्रति प्राप्त शेषफल तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त का शेषफलों का योगमान के प्रति प्राप्त शेषफल दर्शाइये।

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल = अनुभाग 4 में दर्शित शेषफल होने पर की गयी भाग संक्रिया सही होगा ।

उदाहरण■ 304842÷ 325 को हल करने पर प्राप्त भागफल =937 तथा शेषफल = 317 की सत्यता जाँच कीजिए।

अनुभाग1 में भाज्य संख्या A=304842 के प्रति शेषफल के लिए $(2–4+8–4+0–3)=\bar{1}$ से शेषफल $=11+\bar{1}=10$ अनुभाग



2 में भाजक संख्या B*भागफलसंख्या C =325*937 के गुणनफल के प्रति प्राप्त शेषफल के लिए (5-2+3)*(7-3+9) =6*13 =78 से शेषफल = 8-7 =1 अनुभाग 3 में संख्या D=317 के प्रति प्राप्त शेषफल =7-1+3=9 तथा अनुभाग 4 में अनुभाग 2 और अनुभाग 3 में प्राप्त शेषफलों का योगमान 1+9 =10 दर्शाने पर–

निष्कर्ष अनुभाग 1 में दर्शित शेषफल 10= अनुभाग 4 में दर्शित संख्या 10 है अतः संक्रिया परिणाम सही है।

विस्तार विस्तार क्रम में 2 से अधिक संख्याओं का योग एवं गुणा संक्रिया पर ही यह विधि विस्तारित होगा।

(1) दो से अधिक संख्याओं का योग संक्रिया जाँच

संख्याएँ $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \,–,–,–,– + A_m = S$ सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम

प्रक्रम 1 योगफल S के प्रति शेषफल =r प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 संख्याएँ A_1, A_2, A_3, A_4 ,–,–,–,,A_m के प्रति प्राप्त अलग–अलग शेषफल क्रमशः $r_1, r_2, r_3, r_4,–,–,–, r_m$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त शेषफलों का योगमान$(r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + –,–,– + r_m = t)$ के प्रति शेषफल t_r प्राप्त कीजिए।

निष्कर्ष प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल r = प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल t_r होने पर की गयी योग संक्रिया सही होगा।

उदाहरण■ संख्याएँ 341 + 566 + 1069 + 1597 + 5006 = 8579 सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 S= 8579 के प्रति शेषफल r प्राप्त करने के लि, $(9–7+5–8) =\bar{1}$ से $r=11+\bar{1}=10$

प्रक्रम 2 संख्याएँ 341, 566 ,1069 ,1597, 5006 के प्रति प्राप्त अलग–अलग शेषफल क्रमशः r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 =

क्रमशः (1–4+3),(6–6+5),(9–6+0–1),(7–9+5–1),(6–0+0–5)=क्रमशः 0,5,2,2,1

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त शेषफलों का योगमान (0 + 5 + 2 + 2 + 1) = 10 से t_r=10

;प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल r= 10) = ;प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल t_r=10)

निष्कर्ष की गयी योग संक्रिया सही है ।

दो से अधिक संख्याओं का गुणन संक्रिया जाँच

संख्याएँ $A_1 * A_2 * A_3 * A_4 * \,–,–,–,– * A_m = S$ सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल M के प्रति शेषफल =r प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 संख्याएँ A_1, A_2, A_3, A_4 ,–,–,–,,A_m के प्रति प्राप्त अलग–अलग शेषफल क्रमशः $r_1, r_2, r_3, r_4,–,–,–, r_m$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त शेषफलों का गुणनफल $(r_1 * r_2 * r_3 * r_4 * –,–,– * r_m = t)$ के प्रति शेषफल t_r प्राप्त कीजिए।

निष्कर्ष प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल r = प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल t_r होने पर की गयी गुणन संक्रिया सही होगा।

उदाहरण संख्याएँ 15*27*99*217 = 8700615 सत्यता जाँच करने लिए जाँच प्रक्रम–

प्रक्रम 1 गुणनफल M =8700615 के प्रति शेषफल r प्राप्त करने के लिए (5–1+6–0+0–7+8)= 11 से शेषफल r =0 होगा।

प्रक्रम 2 संख्याएँ 15, 27, 99, 217 के प्रति प्राप्त अलग–अलग शेषफल क्रमशः r_1, r_2, r_3, r_4, =क्रमशः (5–1),(7–2),(9–9),(7–1+2),=क्रमशः 4,5,0,8,1

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त शेषफल का गुणनफल (4 ∗ 5 ∗ 0 ∗ 8 ∗ 1) = 0 से t_r=0

;प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल r= 0) =;प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल t_r=0)

निष्कर्ष की गयी गुणन संक्रिया सही है ।

----------17----------

अध्याय -18
गुणज, अभाज्य गुणनखण्ड, लघुत्तमसमापवर्त्य एव महत्तमसमावर्तक

18-1 गुणज संख्या यदि संख्या a संख्या b द्वारा विभाज्य हो तो संख्या a को संख्या b का एक गुणज संख्या कहते है। किसी संख्या के अनन्त गुणज होते हैं,जो उस संख्या के सरल गुणन तालिका (पहाड़ा) रचना से प्राप्त किये जा सकते है।जबकि कोई संख्या विशेष एक और स्वयं का गुणज अवश्य होगा । लेकिन कोई संख्या विशेष एक और स्वयं का गुणज के अतिरिक्त अन्य संख्याओं का गुणज होने उनके द्वारा विभाज्य होने पर प्रतिबंध है, जो कि सीमित है।

जैसे संख्या 12 के गुणज समुच्चय M ={12,24,36,48,72,84,96,108,120, 128-----------M*N} में अनन्त अवयव है।जबकि संख्या 12 जिनके गुणज है का समुच्चय D = {1,2,3,4,612} में 6 अवयव है।

गणित अध्ययन में उक्त गुणज संख्या कथन को अपवर्त्य एवं अपवर्तक शब्द से परिभाषित किया गया है।

अपवर्त्य किसी संख्या के सरल गुणन तालिका (पहाड़ा) रचना से प्राप्त समुच्चय के समस्त अवयव जिन्हे संख्या का गुणज कहा जा चुका है। उस संख्या का अपवर्त्य कहलाता है।

जैसे 2 का अपवर्त्य समुच्चय $C_2 = \{2,4,6,8,10,12$--------------$2*N\}$

x का अपवर्त्य समुच्चय $C_x = \{x, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x$ ----------------$N*C\}$

$\because$ N का विस्तार अनन्त है $\therefore$ किसी संख्या के अनन्त अपवर्त्य होंगे।

18-2 यथार्थ भाजक किसी संख्या n का यथार्थ भाजक वे सभी भाजक कहलाते है, जिनके द्वारा भाज्य n पूरा–पूरा (शून्य शेष पर) विभाजित होता है या संख्या n के सभी गुणनखण्ड को संख्या n के यथार्थ भाजक के रूप में जाना जाना चाहिये।

संख्या n के यथार्थ भाजक समुच्चय (समूह) के अवयवों में कम से कम दो अवयव सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1(एक) और स्वयं संख्या n अवश्य होगा।

1 से 20 तक की संख्या के यथार्थ भाजक तालिका

संख्या	यथार्थ भाजक	संख्या	यथार्थ भाजक
1	भाज्य है, न अभाज्य	11	1, 11
2	1, 2	12	1, 2, 3, 4, 6,12
3	1,3	13	1, 13
4	1, 2, 4	14	1, 2, 7, 14
5	1, 5	15	1, 3, 5, 15
6	1, 2, 3, 6	16	1, 2, 4, 8, 16
7	1, 7	17	1, 17
8	1, 2, 4, 8	18	1, 2, 3, 6, 9, 18
9	1, 3,9	19	1, 19
10	1, 5, 10	20	1, 2, 4, 5,10, 20

अपवर्तक किसी भाज्य विशेष के प्रति सभी यथार्थ भाजक उस भाज्य विशेष के अपवर्तक कहलाते है।

जैसे 2 का अपवर्तक समुच्चय $D_2 = \{1,2\}$ 3 का अपवर्तक समुच्चय $D_2 = \{1,3\}$

4 का अपवर्तक समुच्चय $D_4 = \{1,2\ 4\}$ 5 का अपवर्तक समुच्चय $D_5 = \{1,5\}$

6 का अपवर्तक समुच्चय $D_6 = \{1,2\}$ 7 का अपवर्तक समुच्चय $D_7 = \{1,7\}$

8 का अपवर्तक समुच्चय $D_8 = \{1,2,4,8\}$ 9 का अपवर्तक समुच्चय $D_9 = \{1,3,9\}$

10 का अपवर्तक समुच्चय $D_{10} = \{1,2\ 5,10\}$ 11 का अपवर्तक समुच्चय $D_{11} = \{1, 11\}$

....

....

इसी प्रकार 100 का अपवर्तक समुच्चय $D_{100} = \{1,2,4,, 5,10, 20,25,50,100\}$

उपरोक्त अपवर्तक समुच्चय विश्लेषण से स्पष्टतः दर्शित हो रहा है कि –

1• कुछ संख्याओं के अपवर्तक समुच्चय में केवल दो अवयव एक और स्वयं संख्या ही है।

2• कुछ संख्याओं के अपवर्तक समुच्चय में एक और स्वयं संख्या मिलाकर दो से अधिक अवयव है।

तब अपर्तक समुच्चय के शब्द में अभाज्य संख्या एवं भाज्य संख्या निम्नानुसार परिभाषित होंगे।

अभाज्य संख्या वे सभी संख्याएँ जिनके अपवर्तक समुच्चय में केवल दो अवयव एक और स्वयं संख्या होते हैं अभाज्य संख्या कहलाते हैं।

भाज्य संख्या वे सभी संख्याएँ जिनके अपवर्तक समुच्चय में एक और स्वयं संख्या मिलाकर दो से अधिक अवयव है। अभाज्य संख्या कहलाते हैं।

विशेष भाज्य संख्या के परिभाषा अन्तर्गत ऐसे भाज्य संख्या भी जिनके अपवर्तक समुच्चय में एक और स्वयं संख्या मिलाकर केवल तीन ही अवयव है। संदर्भित भाज्य संख्या अपने अपवर्तक समुच्चय में दर्शित एक और स्वयं संख्या के अतिरिक्त तीसरे अभाज्य अवयव का वर्गमान होता है।

इसीप्रकार $D_9 = \{1,\mathbf{3}\ 9\}$ से $9 = 3 * 3 = 3^2$ $\quad D_{25} = \{1,\mathbf{5}\ ,25\}$ से $25 = 5 * 5 = 5^2$

$D_{49} = \{1,\mathbf{7}, 49\}$ से $49 = 7 * 7 = 7^2$ $\quad D_{121} = \{1,\mathbf{11}\ 9\}$ से $121 = 11 * 11 = 11^2$

टीप संख्या 1(एक) न अभाज्य है और न ही भाज्य है।

अभाज्य संख्याओं की सूची तैयार करना विभाज्यता जाँच नियम के का अनुपालन करते हुए सरलता से अभाज्य संख्याओं की सूची तैयार कर सकते हैं। माना कि 1से 100 केबीच की अभाज्य संख्या प्राप्त करना है।

प्रक्रम1 1 से 100 की समस्त संख्या दर्शित कीजिए। यथा →

प्रक्रम2 संख्या 1 न भाज्य अभाज्य अतः इसे कट–मट कीजिए।

प्रक्रम3 प्रथम अभाज्य संख्या 2 निश्चित कीजिए।

प्रक्रम4 उन सभी संख्याओं को काटिए जिनका इकाई अंक 0, 2 ,4, 6, 8 हो और दूसरी अभाज्य संख्या 3 निश्चित कीजिए।

~~1~~	**2**	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~	~~16~~	**17**	~~18~~	**19**	~~20~~
~~21~~	~~22~~	**23**	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	**29**	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	**47**	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	**53**	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	**59**	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	**73**	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	**83**	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	**89**	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	**97**	~~98~~	~~99~~	~~100~~

प्रक्रम5 उन सभी संख्याओं को काटिए जिनका मूलांक 3,6,9 हो और तीसरी अभाज्य संख्या 5 निश्चित कीजिए।

प्रक्रम 6 उन सभी संख्याओं को काटिए जिनका इकाई अंक 5 हो और चौथी अभाज्य संख्या 7 निश्चित कीजिए।

प्रक्रम7 7 द्वारा विभाज्यता नियम का अनुप्रयोगकर 7 द्वारा विभाज्य संख्या 49. 77, 91 को काटिए और पाँचवी अभाज्य संख्या 11 निश्चित कीजिए।

चूँकि $11^2 = 11 * 11 = 121 > 100$ अतः 1 से 100 तक की अभाज्य सूची पूर्ण हुआ।

इस प्रकार 1से 100 तक की अभाज्य 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79, 83, 89,97 प्राप्त होगा जो सूची में गाढ़े काले रंग में दर्शित है।

यमज अभाज्य संख्या वे अभाज्य संख्या युग्म जिनके बीच केवल एक ही भाज्य संख्या हो यमज अभाज्य संख्या कहलाता है।

जैसे– (3_5), (5_7) ,(11_13),(17_19),(41_43),(59_61), (71_73) 1से 100 तक की यमज अभाज्य संख्या है।

18-3 गुणनखण्ड किसी संख्या मान को दो या दो से अधिक दो अधिक संख्या के गुणन संक्रिया रूप में प्रदर्शित किया जाए तो गुणन संक्रिया पक्ष की सभी संख्याएँ उस संख्या मान का गुणनखण्ड कहलाता है।

संख्या $A = P * Q * R - - - -$ से संख्याएँ P, Q, R - , - ,- संख्या A के गुणनखण्ड होंगे।

$$36 = 1 * 36 = 2 * 18 = 3 * 12 = 4 * 9 = 6 * 6 = 1 * 2 * 18 = 2 * 2 * 9 = 3 * 3 * 4 = 2 * 3 * 6$$
$$= 2 * 2 * 3 * 3$$

अभाज्य गुणनखण्ड किसी संख्या मान को दो या दो से अधिक दो संख्या के गुणन संक्रिया रूप में इस प्रकार प्रदर्शित किया जाए कि तो गुणन संक्रिया पक्ष की सभी संख्याएँ अभाज्य संख्याएँ ही हो तो प्राप्त गुणनखण्ड उस संख्या मान का अभाज्य गुणनखण्ड कहलाता है। उपरोक्त उदाहरण में 36=2*2*3*3 से 36 का अभाज्य गुणनखण्ड 2*2*3*3 होगा।

किसी भाज्य संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करना

प्रक्रम 1 इसके लिए अभाज्य संख्याओं की सूची तैयार करने के नियम से आवश्यकतानुसार क्रमानुसार अभाज्य संख्या (2 , 3 , 5 , 7, 11 , 13--------------)सूची प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम2 विभाज्यता जाँच नियम से प्रथम अभाज्य संख्या 2 के द्वारा भाज्य संख्या विभाज्य हो तो भाज्य संख्या को प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित कर भागफल प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम3 विभाज्यता जाँच नियम से प्रथम अभाज्य संख्या 2 के द्वारा प्रक्रम 2 से प्राप्त भागफल विभाज्य हो तो भाज्य संख्या को प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित कर भागफल प्राप्त कीजिए।

इस प्रकार प्राप्त भागफलों को प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित करने का क्रम विभाजित होने तक कीजिए।

अब जब प्रक्रम 2 या आगे प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित करने का क्रम विभाजित होने तक के प्रक्रम से प्राप्त भागफल प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित नहीं है तो– उक्त प्रक्रमों को दूसरे क्रम की अभाज्य संख्या 3 के प्रति दोहराये।

इसी प्रकार आवश्यकतानुसार अभाज्य संख्याएँ 5 , 7, 11 , 13------------- के प्रति अंतिम भागफल अभाज्य संख्या प्राप्त होने तक दोहरावें।

उदाहरण■

1■ 16 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 16 2 | 8 2 | 4 2 अभाज्य है ∴ 16 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*2*2*2 होगा।	2■ 28 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 28 2 | 14 7 अभाज्य है ∴ 28 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*2*7 होगा।	3■ 36 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 36 2 | 18 3 | 9 3 अभाज्य है ∴ 36 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*2*3*3 होगा।
5■ 4900 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 400 2 | 200 2 | 100 2 | 50 5 | 25 5 अभाज्य है। ∴ 400का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*2*2*2*5*5 होगा।	5■ 4900 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 4900 2 | 2450 5 | 1225 5 | 225 7 | 49 7 अभाज्य है। ∴ 4900का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*2*5*5*7*7 होगा।	5■ 69938 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करना– 2 | 69938 11 | 34969 11 | 3179 17 | 289 17 अभाज्य है। ∴ 69938 का अभाज्य गुणनखण्ड = 2*11*11*17*17 होगा।

18- 4 लघुत्तम समापवर्त्य दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य उनके विस्तारित अपवर्त्य समुच्चयों में से सबसे छोटा सर्वनिष्ठ अपवर्त्य होता है। या दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह छोटी सी छोटी संख्या होती है जो उन संख्याओं से अलग–अलग विभाज्य हो।

जैसे – 4, 6 एवं 8 का लघुत्तम समापवर्त्य के लिए–

संख्या 4 का अपवर्त्य का समुच्चय C_4 ={4, 8, 12 , 16, 20, 24, 28, 33, 36 ------------ 4*N}

संख्या 6 का अपवर्त्य का समुच्चय C_6 ={6, 12, 18 , 24, 30, 36 , 42, 48, 54 ------------ 6*N}

संख्या 8 का अपवर्त्य का समुच्चय C_8 ={8, 16, 24 , 32, 36, 40, 48, 56, 68 72 , ------------ 8*N}

∴ C_4 , C_6 एवं C_8 में सबसे छोटा सर्वनिष्ठ अपवर्त्य 24 संख्याएँ 4,6 एवं 8 का लघुत्तम समापवर्त्य होगा।

अध्ययन संकेत– अध्ययन संकेत में लघुत्तम समापवर्त्य के लिए ल. स. है।

18- 5 ल.स. ज्ञात करने की विधियाँ

[1] अपवर्त्य विधि

प्रक्रम1 दी हुई संख्याएँ a, b, c – – – – – – के लिए उनके अलग–अलग अपवर्त्य का समुच्चय C_a, C_b, C_c – – – –विस्तारित कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से प्राप्त समुच्चयों C_a, C_b, C_c – – – – में से सबसे छोटा (प्रथम) सर्वनिष्ठ अपवर्त्य चिन्हांकित कीजिए।

निष्कर्ष– प्रक्रम 2 के अनुसार यह चिन्हांकित सर्वनिष्ठ अपवर्त्य ही संख्याएँ a, b, c – – – – – – का ल.स. होगा। वास्तव में लघुत्तम समापवर्त्य इसी प्रतिकार्य का नाम है।

जैसे 12, 15 एवं 20 का लघुत्तम समापवर्त्य के लिए–

संख्या 12 का अपवर्त्य का समुच्चय C_{12} ={12, 24, 36 , 48, **60,** 72, ------------ 12*N}

संख्या 15 का अपवर्त्य का समुच्चय C_{15} ={15, 30, 45 , **60**, 75, 90 , ------------ 15*N}

संख्या 20 का अपवर्त्य का समुच्चय C_{20} ={20, 40, **60** , 80, 100, ------------ 20*N}

∴ C_{12} , C_{15} एवं C_{20} में सबसे छोटा सर्वनिष्ठ अपवर्त्य **60** संख्याएँ 12, 15 एवं 20 का लघुत्तम समापवर्त्य होगा।

[2] अभाज्य गुणनखण्ड विधि – (A) एकल विधि

प्रक्रम1 दी हुई संख्याएँ a, b, c – – – – – – का अलग–अलग अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम2 प्रक्रम 1 से संख्याएँ a, b, c – – – – – – के लिए प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में से उन सभी गुणनखण्डों को चिन्हाँकित कीजिए जो कम से कम किन्हीं दो संख्या या दो से अधिक या सभी संख्याओं के गुणनखण्डों में उभयनिष्ठ है। चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या लीजिए।

तब ल.स- = (चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल)* (उन सभी गुणनखण्ड का गुणनफल जो चिन्हाँकित अथवा उभयनिष्ठ नहीं है।)

उदाहरण 1■ 4,16, 36, 60 का ल. स. ज्ञात करने के लिए–

$4 = \mathbf{2} * \mathbf{2}$ $16 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * 2 * 2$ $36 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * \mathbf{3} * 3$ $60 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * \mathbf{3} * 5$ में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड गाढ़े काले रंग में चिन्हाँकित है। तब

ल.स. =(चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल)* (उन सभी गुणनखण्ड का गुणनफल जो चिन्हाँकित अथवा उभयनिष्ठ नहीं है।) =(2*2*3)*(2*2*3*5) =12*60 =720 होगा।

उदाहरण 2- 8, 28 , 49 ,77 121 का ल. स. ज्ञात करने के लिए–

$8 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * 2$ $28 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * \mathbf{7}$ $49 = \mathbf{7} * 7$ $77 = \mathbf{7} * \mathbf{11}$ 121= **11***11 में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड गाढ़े काले रंग में चिन्हाँकित है। तब

ल.स. =(चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल)* (उन सभी गुणनखण्ड का गुणनफल जो चिन्हाँकित अथवा उभयनिष्ठ नहीं है।) =(2*2*7*11)*(2*7*11) =308*154= 47432 होगा।

(B) सँयुक्त विधि

प्रक्रम 1 दी हुई संख्याएँ a, b, c – – – – – – क्षैतिज क्रम में दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 गुणनखण्ड ज्ञात करने के नियमानुसार संख्याएँ a, b, c – – – – – – में से कम से कम किन्हीं दो संख्या या दो से अधिक या सभी संख्याएँ जो–जो प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होती है, उनके भाजक 2 के प्रति प्राप्त अलग–अलग भागफल एवं वे संख्याएँ जो प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित नहीं है, उन्हें यथावत दूसरे पंक्ति में दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 इस पंक्ति के लिए प्रक्रम 2 के अनुसार पुनः प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होने की स्थिति बनती है तो उक्त नियमानुसार ही तीसरी पंक्ति की संख्याएँ प्राप्त कीजिए।

ऐसे ही आगे की पंक्ति प्रक्रम 2 के अनुसार प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होने तक जारी रखे।

अब जब प्रक्रम 1 या आगे प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित करने का क्रम विभाजित होने तक के प्रक्रम से प्राप्त पंक्ति के लिए प्रथम अभाज्य संख्या 2 के प्रति प्रक्रम 1 की स्थिति नहीं है तो– उक्त प्रक्रमों के अनुरूप दूसरे क्रम की अभाज्य संख्या 3 के प्रति दोहराये। आवश्यकतानुसार उक्त प्रक्रम बिन्दुओं को अभाज्य संख्याएँ 5 , 7, 11 , 13------------- के प्रति अंतिम पंक्ति प्राप्त होने तक दोहराये। स्पष्टतः इस अंतिम पंक्ति में कोई ऐसी दो संख्या नहीं होगी जो अभाज्य संख्या द्वारा विभाज्य हो।

तब **ल.स.** = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्या का आवृत्तियों का गुणनफल)'(अंतिम पंक्ति मेंप्राप्त संख्याओं का गुणनफल) होगा।

उदाहरण 1■ 4,16, 36, 60 का ल. स. ज्ञात करने के लिए–

2	4	16	36	60
2	2	8	18	30
3	1	4	9	15
	1	4	3	5

ल.स. = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्या का आवृत्तियों गुणनफल)'(अंतिम पंक्ति मेंप्राप्त संख्याओं का गुणनफल)

से **ल.स. =** $(2 * 2 * 3) * (1 * 4 * 3 * 5) = 12 * 60 = 720$ होगा।

उदाहरण 2■ 8, 28 , 49 ,77 121 का ल. स. ज्ञात करने के लिए–

2	8	28	49	77	121
2	4	14	49	77	121
7	2	7	49	77	121
11	2	1	7	11	121
	2	1	7	1	11

ल.स. = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्या का आवृत्तियों गुणनफल)'(अंतिम पंक्ति मेंप्राप्त संख्याओं का गुणनफल)

से – **ल.स.** = $(2 * 2 * 7 * 11) * (2 * 1 * 7 * 1 * 11) = 308 * 154 = 47432$ होगा।

18-6 महत्तम समापवर्तक दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्त्य उनके अलग–अलग प्राप्त अपवर्तक समुच्चयों में से सबसे बड़ा सर्वनिष्ठ अपवर्तक होता है। **या** किन्हीं दो या दो से अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह बड़ी सी बड़ी संख्या होती है जिसके द्वारा वे संख्याएँ अलग–अलग विभाज्य हो।

जैसे 24, 54 एवं 84 का महत्तम समापवर्त्य के लिए–

संख्या 24 का अपवर्तक समुच्चय D_{24} ={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

संख्या 54 का अपवर्तक समुच्चय D_{54} ={1, 2, 3, 6 , 9, 18 , 27, 54 }

संख्या 84 का अपवर्तक समुच्चय D_{84} ={1, 2, 3, 4, 6, 7 ,12, 14 ,21, 28, 42, 84}

D_{24}, D_{54}, D_{84} के सर्वनिष्ठ अपवर्तकों का समुच्चय = {1, 2, 3, 6} में सबसे बड़ा अपवर्तक 6 है।

∴ 24, 54, एवं 84 का महत्तम समापवर्तक 6 होगा।

अध्ययन संकेत– अध्ययन संकेत में महत्तम समापवर्त्य के लिए म. स. है।

18-7 म.स. ज्ञात करने की विधियाँ

[1] अपवर्तक विधि

प्रक्रम 1 दी हुई संख्याएँ a, b, c – – – – – – के लिए उनके अलग–अलग अपवर्तक का समुच्चय D_a, D_b, D_c – – – –विस्तारित कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से प्राप्त समुच्चयों D_a, D_b, D_c – – – – में से सभी सर्वनिष्ठ अपवर्तक चिन्हांकित कीजिए।

निष्कर्ष प्रक्रम 2 के अनुसार चिन्हांकित सर्वनिष्ठ अपवर्तकों में सबसे बड़ा (अंतिम) अपवर्तक संख्याएँ a, b, c – – – – – – का म.स. होगा। वास्तव में महत्तम समापवर्त्य इसी प्रतिकार्य का नाम है।

जैसे 12, 15 एवं 24 का महत्तम समापवर्तक के लिए–

संख्या 12 का अपवर्तक समुच्चय D_{12} ={1, 2, 3 ,4,6,12}

संख्या 15 का अपवर्तक समुच्चय $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

संख्या 24 का अपवर्तक समुच्चय $D_{24} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$\therefore D_{12}, D_{15}$ एवं D_{24} के सर्वनिष्ठ अपवर्तक $\{1, 2, 3\}$ में सबसे बड़ा अपवर्तक 3 संख्याएँ 12, 15 एवं 24 का महत्तम समापवर्तक होगा।

[2] अभाज्य गुणनखण्ड विधि (A) एकल विधि

प्रक्रम 1 दी हुई संख्याएँ a, b, c — — — — — का अलग–अलग अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से संख्याएँ a, b, c — — — — — के लिए प्राप्त अभाज्य गुणनखण्ड में से उन सभी गुणनखण्डों को चिन्हाँकित कीजिए जो सभी संख्याओं के गुणनखण्डों में उभयनिष्ठ है। चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या लीजिए।

तब ल.स. =(चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल)

उदाहरण 1■ 16, 36, 60 का म स. ज्ञात करने के लिए–

$16 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * 2 * 2$ $36 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * 3 * 3$ $60 = \mathbf{2} * \mathbf{2} * 3 * 5$ में उभयनिष्ठ गुणनखण्ड गाढ़े काले रंग में चिन्हाँकित है। तब

म.स- =(चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल) =2*2 =4 होगा।

उदाहरण 2■ 12, 36, 42 60 का म स. ज्ञात करने के लिए–

$12 = \mathbf{2} * 2 * \mathbf{3}$ $36 = \mathbf{2} * 2 * \mathbf{3} * 3$ $42 = \mathbf{2} * \mathbf{3} * 7$ $60 = \mathbf{2} * 2 * \mathbf{3} * 5$ में उभयनिश्ठ गुणनखण्ड गाढ़े काले रंग में चिन्हाँकित है। तब

म.स. =(चिन्हाँकित प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के प्रति एक–एक संख्या का गुणनफल) =2*3 =6 होगा।

(B) उभयनिष्ठ अभाज्य संख्या भाजक विधि

प्रक्रम 1 दी हुई संख्याएँ a, b, c — — — — — क्षैतिज क्रम में दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 2 गुणनखण्ड ज्ञात करने के नियमानुसार संख्याएँ a, b, c — — — — — सभी संख्याएँ प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होती है, उनके भाजक 2 के प्रति प्राप्त अलग–अलग भागफल दूसरे पंक्ति में दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 इस पंक्ति के लिए प्रक्रम 2 के अनुसार पुनः प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होने की स्थिति बनती है तो उक्त नियमानुसार तीसरी पंक्ति की संख्याएँ प्राप्त कीजिए।

ऐसा ही आगे की पंक्ति प्रक्रम 2 के अनुसार प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित होने तक जारी रखे।

अब जब प्रक्रम 2 या आगे प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा विभाजित करने का क्रम विभाजित होने तक के प्रक्रम से प्राप्त पंक्ति के लिए प्रथम अभाज्य संख्या 2 द्वारा के प्रति प्रक्रम 2 की स्थिति नहीं है तो– उक्त प्रक्रमों के शब्दों में दूसरे क्रम की अभाज्य संख्या 3 के प्रति दोहराये। आवश्यकतानुसार इन्हीं शब्दौं में ही अभाज्य संख्याएँ 5 , 7, 11 , 13------------- के प्रति अंतिम पंक्ति प्राप्त होने तक दोहराये। स्पष्टतः इस अंतिम पंक्ति की सभी संख्याओं के उभयनिष्ठ अभाज्य संख्या भाजक नहीं होगा।

तब म.स. = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्यओं का आवृत्तियों का गुणनफल) होगा।

उदाहरण 1■ 16, 36, 60 का म. स. ज्ञात करने के लिए–

2	16	36	60
2	8	18	30
	4	9	15

म.स. = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्याओं के आवृत्तियों का गुणनफल) से

म.स. $= (2 * 2) = 4$ होगा।

उदाहरण 2■ 12,36, 42, 60 का म. स. ज्ञात करने के लिए–

2	12	36	42	60
3	6	18	21	30
	2	6	7	10

म.स. = (अंतिम पंक्ति प्राप्त करने तक प्रयुक्त समस्त अभाज्य संख्याओं के आवृत्तियों का गुणनफल) से

म.स. $= (2 * 3) = 6$ होगा।

[3] भागविधि

प्रक्रम 1 दी हुई संख्याएँ a, b, c – – – – – – में से प्रथम दो संख्या a,b लीजिए। इन संख्याओं में से बड़ी संख्या को भाज्य तथा छोटी संख्या को भाजक मानकर भाग की संक्रिया पूर्ण कीजिए। यदि भाग की संक्रिया उपरांत शेषफल शून्य प्राप्त होता है तो माना गया भाजक ही ली गई दोनों संख्याओं का मस. होगा और यदि शेषफल शून्य न हो तो –

प्रक्रम 2 के लिए पूर्व प्रक्रम 1 से प्राप्त शून्येतर (शून्य नहीं) शेषफल एवं भाजक को क्रमशः भाजक एवं भाज्य मानकर भाग की संक्रिया पूरा कीजिए। यदि भाग की संक्रिया उपरांत शेषफल शून्य प्राप्त होता है तो माना गया भाजक ही ली गई दोनों संख्याओं का मस. होगा और यदि शेषफल शून्य न हो तो –

प्रक्रम 3 के लिए पूर्व प्रक्रम 2 से प्राप्त शून्येतर (शून्य नहीं) शेषफल एवं भाजक को क्रमशः भाजक एवं भाज्य मानकर भाग की संक्रिया पूरा कीजिए। यदि भाग की संक्रिया उपरांत शेषफल शून्य प्राप्त होता है तो माना गया भाजक ही ली गई दोनों संख्याओं का मस. होगा। और यदि शेषफल शून्य न हो तो –

अग्र प्रक्रम के क्रम में 2 या 3 के नियमों को दोहरावें । अन्ततः r वाँ प्रक्रम अवश्य आयेगा जिसके लिए पूर्व प्रक्रम $(r-1)$ से प्राप्त शून्येतर (शून्य नहीं) शेषफल एवं भाजक को क्रमशः भाजक एवं भाज्य मानकर भाग की संक्रिया पूरा करने पर शेषफल शून्य प्राप्त होगा।

निष्कर्ष 1 इस r वाँ प्रक्रम का भाजक जो $(r-1)$ वें प्रक्रम में शेषफल है, ली गई दोनों संख्या a,b का म.स- = $(\text{म.स.})_{a,b}$ होगा।

पुनः तीन संख्या a, b, c का म.स. के गणना केलिए $(\text{म.स.})_{a,b}$ एवं तीसरी संख्या c के लिए उपरोक्तानुसार गणना सम्पन्न कीजिए। और

निष्कर्ष 2 $(\text{म.स.})_{ab}$ एवं तीसरी संख्या c का म. स. ही तीन संख्या a, b, c का म.स.= $(\text{म.स.})_{ab,c}$ प्राप्त कीजिए।

ध्यानाकर्षण $(\text{म.स.})_{a,b} = (\text{म.स.})_{a,b,c}$ हो सकता है।

इसी प्रकार पुनः चार संख्या a,b,c,d का म.स. के गणना केलिए $(\text{म.स.})_{a,b,c}$ एवं चौथी d संख्या के लिए उपरोक्तानुसार गणना सम्पन्न कीजिए। और

निष्कर्ष 3 $(\text{म.स.})_{abc}$ एवं चौथी संख्या d का म. स. ही चार संख्या a, b, c d का म.स.= $(\text{म.स.})_{a,b,c,d}$ प्राप्त कीजिए।

इस प्रकार गणना विस्तार संख्याओं के बढ़ते प्रकार के लिए पुनः और पुनःबढ़ाये।

ध्यानाकर्षण $(\text{म.स.})_{,b}$ त्र$(\text{म.स.})_{\text{ए}b,c}$ =$(\text{म.स.})_{,b,c,d}$ .... हो सकता है।

उदाहरण 2■ 40, 60, 130 का म. स. ज्ञात करने के लिए–

पहलें 40 और 60 का म.स. गणना कीजिए।यथा–

60 ÷ 40 से भागफल 1 शेषफल 20 40 ÷ 20 से भागफल 2 शेषफल 00

निष्कर्ष 1 40 और 60 का म.स. = 20 होगा ।

पुनः (40 और 60 का म.स. = 20) और तीसरी संख्या 130 का म.स. गणना कीजिए।यथा–

130 ÷ 20 से भागफल 6 शेषफल 10 20 ÷ 10 से भागफल 2 शेषफल 00

निष्कर्ष 2 (40 और 60 का म.स. = 20) और तीसरी संख्या 130 का म.स. = 10

अंतिम निष्कर्ष 40, 60, 130 का म. स.= (40 और 60 का म.स. = 20) और तीसरी संख्या 130 का म.स. = 10 होगा।

18- 7 दो संख्याओं के लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक के विषयक महत्वपूर्ण कथन

1• दो संख्या में कोई एक अथवा दोनों अभाज्य हो तो उन दोनों संख्याओं का ल. स. =
उन दोनों संख्याओं का गुणनफल होगा तथा उन दोनों संख्याओं का म. स. = 1 होगा।

जैसे – अभाज्य संख्या 17 और भाज्य संख्या 21 का ल.स. = 17*21 =357 एवं म.स. = 1

अभाज्य संख्या 17 और अभाज्य संख्या 23 का ल.स. = 17*23 =401 एवं म.स. = 1

2• दोनों संख्या का गुणनफल = उनके ल. स. और म. स. का गुणनफल होगा।

जैसे – 40 और 60 का ल.स. = 120 40 और 60 का म.स. = 20 से

संख्या$_1$' संख्या$_2$= 40*60 =2400 एवं इनके ल.स-* म. स. = 120*20 =2400

अध्याय -19
संख्या जगत और भिन्न

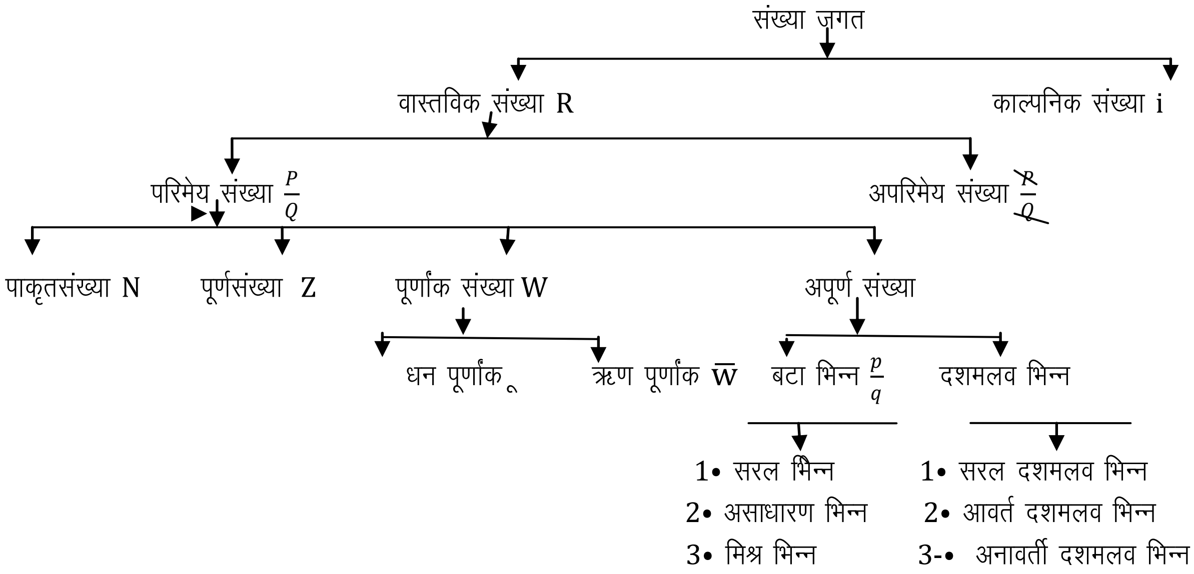
19-1 समुच्चय सुपरिभाषित गुण अथवा नाम से प्रदर्शित / संयोजित संग्रह या समूह को समुच्चय कहते हैं।

जैसे भारतीय संख्यांकन पद्धत्ति के अंको का समुच्चय D ={१ , २ , ३ , ४ , ५ , ६ , ७ , ८ , ६ , ०}

ऑग्ल भाषा के स्वरों का समुच्चय $V = \{a, e, i, o, u\}$

नगर अर्जुन्दा के तालाबों का समुच्चय T = {पीलसाय ,माहरा , कहिया , छितका ,रामा , कालेज}

अपने अध्ययन विस्तार के साथ असंख्य समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं। समुच्चय का व्यापक अध्ययन बहुत विशाल है। जो अपने आप में स्वयं एक अध्याय अथवा किताब होगा। अध्याय प्रसंग में बस इतना ही।



गणित अध्ययन विस्तार क्रम में विभिन्न संख्याओं का समुचित अध्ययन आवश्यक है। अध्ययन सुविधा की दृष्टि से उपरोक्त संख्या जगत वर्गीकरण चार्ट प्रस्तुत है। जिसके अनुसार संख्या के मुख्य दो वर्ग है।

[1] वास्तविक संख्या वे सभी संख्याएँ जिनको सामान्य अध्ययन मे परिभाषित एवं संख्या रेखा मे दर्शित कराया जा सकता है। वास्तविक संख्या होती है। इसका समुच्चय संकेत R है।

[2] काल्पनिक संख्या वास्तविक संख्या के विपरीत वे संख्याएँ जिनको सामान्य अध्ययन मे परिभाषित एवं संख्या रेखा में दर्शित नहीं कराया जा सकता है।काल्पनिक संख्या होती है। इसका समुच्चय संकेत i है।

इनके पुनः वर्गीकरण निम्नानुसार किया गया है।

वास्तविक संख्या का वर्गीकरण वास्तविक संख्या को दो वर्ग में वर्गीकृत किया गया है।

(1) परिमेय संख्या वे सभी वास्तविक संख्या जिन्हें $\frac{P}{Q}$ के रूप में दर्शित किया जा सकता है ,परिमेय संख्या होती है। जहाँ P को अंश कहते है जो पूर्णांक संख्या समुच्चय का एक अवयव होगा तथा Q को हर कहते है जो शून्येतर (0 नहीं) पूर्णांक संख्या समुच्चय का एक अवयव होगा। P और Q को अलग करने वाले मध्य लाइन को बटे या बटा की लाइन कहते है।

परिमेय संख्या को पढ़ना परिमेय संख्या $\frac{P}{Q}$ को p (पी) बटे Q (क्यू) पढा जाता है।

परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ को 2 (दो) बटे 3 (तीन) पढा जाता है।

परिमेय संख्या $\frac{\overline{2}}{5}$ को $\overline{2}$ (उना दो) बटे 5 (पाँच) पढा जाता है।

परिमेय संख्या $\frac{\overline{2}}{\overline{11}}$ को $\overline{2}$ (उना दो) बटे $\overline{11}$ (उना ग्यारह) पढा जाता है।

(2) अपरिमेय संख्या परिमेय संख्या के विपरीत वे सभी वास्तविक संख्या जिन्हें $\frac{P}{Q}$ के रूप में दर्शित नहीं किया जा सकता है , अपरिमेय संख्या होती है।

परिमेय संख्या का वर्गीकरण परिमेय संख्या को चार वर्ग में वर्गीकृत किया गया है।

(1) पाकृत संख्या समुच्चय स्पष्टतः प्रकृति अथवा क्षेत्र विशेष में दृश्य संज्ञात्मक अवयव को उनके सम्पूर्णता पर गिनने का भाव जागने में जीवन व्यवहार में प्रयुक्त संख्या को पाकृत संख्या कहते हैं। समुच्चय संकेत N है।

जैसे हमारे कक्षा में आज की छात्र उपस्थिति 23 है।

खेत में 37 मजदूर धान की रोपाई कर रहे है।

पाकृत संख्या समुच्चय $N = \{1,2,3,4 - - - - - - -\}$

19-2 शून्य की खोज प्रकृति अथवा क्षेत्र विशेष में किसी अदृश्य संज्ञा विशेष अवयव की उपस्थिति दर्ज है। हमारे दृष्टि पटल पर दर्शित नही है अथवा गणितीय शब्दावली में प्रकृति या क्षेत्र विशेष में उस अदृश्य संज्ञा विशेष अवयव के प्रति हमारे जीवन व्यवहार में गिनने का भाव जागने में प्रयुक्त पाकृत संख्या समुच्चय अपने आप में रिक्त है। इसी रिक्तता के भाववाची संज्ञा को शून्य के नाम पर गणित अध्ययन में शून्य की खोज के रूप में लिया गया। प्रकृति में कई अदृश्य संज्ञात्मक शक्तियाँ है जिनका हमारी ज्ञानेन्द्रियाँ केवल आभास कर सकती है। आध्यात्मिक ज्ञान क्षेत्र में ऐसे आभासीभाव से भी परे आदि मान पराशक्ति को स्वीकारा गया है जिनके बन्धन में सारा अखिल ब्रम्हाण्ड है। जिसका हमें दर्शन तो क्या आभास मात्र भी दुर्लभ प्रतीत होता है। जिसके सम्पूर्णता पर यह श्लोक उद्‌धृत है –

" ऊँ पूर्णमदः पूर्णमिदं , पूर्णात् पूर्णमुदच्यते । पूर्णस्य पूर्णमादाय, पूर्णमेवावशिष्यते " भावार्थ – **ऊं के उच्चारण में यह पूर्ण है। पूर्ण रहता सदा। पूर्ण में से पूर्ण दे निकाल तब भी शेष पूर्ण रहता सदा।** गणित मे उक्त भावार्थ को सम्पूर्णता प्रदान करने वाला अंक शून्य है। जिसके संकेतन के लिए अदृश्य प्राण वायु ग्रहण करने एवं मरण वायु बाहर निकालने नाक मे बने दो वलय छिद्र या अदृश्य आवाज को सुनने दोनों कानों में बने कर्ण वलय छिद्र को दृष्टिगत कर शून्य का संकेतन 0 चुना गया। इसी प्रकार आन बान शान का प्रतीक अंग नाक के ऊपरी लम्बाई को एक का संकेतन (1) चुने जाने का भाव बनता है। ब्रिटिश संखाकन पद्धत्ति में एक का संकेतन केवल नाक की लम्बाई संकेतन में 1 तथा हिन्दीं अरेबिक संख्याकन पद्धत्ति में नाक के वलय छिद्र संकेतन 0 और नाक की लम्बाई संकेतन 1 मिलाकर १ लिया है। प्राकृत संख्या समुच्चय N के किसी अवयव n के दॉयी (अध्ययन कर्ता के लिये उसके बॉयी) 0 का चाहे कितना भी विशाल संग्रह 0n, 00n, 000n, 0000n, 00000n,--------- लिया जाय n ही मान्य होगा। जबकि उक्त प्राकृत संख्या अवयव n के बॉयी (अध्ययन कर्ता के लिये उसके दॉयी) ओर प्रतिस्थापित करने पर n0 , n00 n000, n0000, n00000 क्रमशः n को दस , सौ ,हजार , दसहजार लाख .,--------- मान शक्ति में बढ़ा देता है। जिसे 10 के घात (पावर) शक्ति मान में क्रमशः $n*10$, $n*10^2$, $n*10^3$, $n*10^4$, $n*10^5$,------- दर्शित किया जाता है।

प्रसंग वश विदित हो कि विवाह संस्कार की वैदिक कर्मकाण्ड में सात फेरे पूरे होने तक वर पुरूष के वामांग (दॉयी भुजा की ओर) में बिठायें वधु कन्या को बामांग (बॉयी भुजा की ओर) में आने –लेने की शर्त वाचन उपरांत ही सर्वोच्च कड़ी में वर पुरूष के बामांग(बॉयी भुजा की ओर) में वधु कन्या को बिठाकर वर–वधु स्वरूप में स्वीकारा जाता है। उक्त शून्य (0) के प्रतिस्थापन शक्ति विस्तार का सर्वोच्च शिखर भाव ही है।

पाकृत संख्या और व्यवकलन संक्रिया के शब्द में शून्य एक वृक्ष में 50 पक्षी बैठे हैं। बंदूक के धमाके आवाज सुन सभी पक्षी वृक्ष को छोड़ उड जाते है। तो उस वृक्ष में पक्षियों की संख्या को दर्शित करने या पाकृत संख्या और घटाना संक्रिया के शब्द में किसी पाकृत संख्या में से उसी पाकृत संख्या को घटाने पर रिक्तता का भाव निर्मित होता है। जिसके लिए गणित अध्ययन में शून्य मान कहा गया है।

गणितीय अध्ययन संकेत– गणित अध्ययन में शून्य का अध्ययन संकेत 0 संख्यांकन की सभी पद्धत्तियों में स्वीकार्य है।

(1) पूर्ण संख्या समुच्चय शून्य और पाकृत संख्या समुच्चय सम्मिलन से प्राप्त संख्या समुच्चय पूर्ण संख्या का समुच्चय होगा। पूर्ण संख्या समुच्चय $Z = \{0,1,2,3,4 - - - - - - -\}$

19-3 योज्य प्रतिलोम संख्या किसी पाकृत संख्या में से उसी पाकृत संख्या को घटाने पर रिक्तता का भाव निर्मित होता है।

जिसके लिए गणित अध्ययन में शून्य मान कहा गया है। इस कथन के विपरीत 0(शून्य) में से किसी पाकृत संख्या को घटाने पर जो

संख्या मान स्वीकारा गया है उसे उस पाकृत संख्या का योज्य प्रतिलोम मान कहा गया है।

गणितीय अध्ययन संकेत गणित अध्ययन में किसी पाकृत संख्या का योज्य प्रतिलोम मान उस पाकृत संख्या के ऊपर एक रेखा जिसे शिरो रेखा कहा जाता है डालकर कर संकेत देने का प्रसंग "BHARGAVA'S STANDARD ILLUSTRATED DICTIONARY OF THE ENGLISH LANGUAGE (Anglo –Hindi Edition) Compited & Edited *Prof* R. C. PATHAK, B.A. L .T. *Publisher* Bhargava Book Depot Chowk, Varanasi के पृष्ठ संख्या 1049 में Anglo शब्द Vinculum विन् –क्यु–लम् का अर्थ मिलाप का बन्धन , गणित में अंकों के ऊपर खींची हुई रेखा जिससे इनको परस्पर सम्बद्ध करने का अभिप्राय होता है।" दर्शित है। जो हमारे उनागर संख्यांकन पद्धत्ति में उना संख्यांकन के अर्थ में चिन्हित किया जा चुका है। जिसके अनुसार $\mathbf{0 - N = \overline{N}}$ स्वीकार्य है। जबकि आधुनिक गणित में अभी भी $0 - N = -N$ मान को $-N$ ही दर्शित किया जा रहा है और ऋणात्मक संख्या कहा जा रहा है। गणित अध्ययन विकास क्रम में विचारणीय है। इस विचार क्रान्ति पर ही आधारित अब तक के अध्ययन को आत्मसात करने उपरांत आगे अध्ययन में यह क्रान्ति विचार आत्मसात करेंगे।

पाकृत संख्या का योज्यप्रतिलोम/उना संख्या समुच्चय $\overline{N} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4} ------\}$ होगा।

पूर्णांक संख्या समुच्चय– पाकृत संख्या का योज्यप्रतिलोम/उना संख्या समुच्चय और पाकृत संख्या समुच्चय सम्मिलन से प्राप्त संख्या समुच्चय पूर्ण संख्या का समुच्चय होगा।

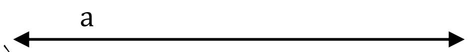
पूर्णांक संख्या समुच्चय $W = \{\overline{N} ----- \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2, 3, 4, ----- N\}$

19-4 बिन्दु , रेखा , रेखाखण्ड और संख्या रेखा की संकल्पना संकल्पना का अर्थ किसी सार्थक शब्द को परिभाषित करने के प्रति ऐसी सार्वभौमिक कल्पना से है जो चिन्हांकन या प्रदर्शन में पूर्ण सत्य तो नहीं लेकिन सत्य के रूप में स्वीकार्य हो या सत्यार्थ के अतिनिकटतर हो। जिसके अनुसार ज्यामिति अध्ययन में मूल शब्दों को परिभाषित करने के प्रति सार्वभौमिक संकल्पना ही किया जा सकता है। निम्नानुसार है।

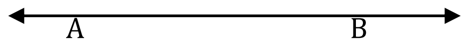
1■ **बिन्दु** ज्यामिति अध्ययन के अनुसार किसी तल पर नुकीली पेन्सिल से बनाया गया छोटा सा छोटा चिन्ह बिन्दु की संकल्पना है।

2■ **रेखा** सामान्य शब्दों में बिन्दु पथ को रेखा कहते हैं। ज्यामिति अध्ययन के अनुसार तनी हुई रस्सी रेखा की संकल्पना है। किसी समतल पर रेखा का विस्तार अपरिमित है। किसी रेखा में अनन्त बिन्दु विद्यमान होते हैं।

अध्ययन संकेत ज्यामिति अध्ययन में किसी समतल पर स्थित रेखा का अध्ययन संकेत के दो प्रकार है।

1• अंग्रेजी के छोटे अक्षर से- 

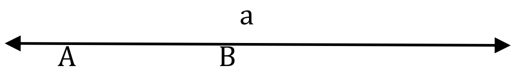
लघु संकेत में $\overleftrightarrow{a}$ इसे पढ़ेंगे रेखा a ।

2• अंग्रेजी के दो बड़े अक्षर से– 

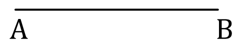
लघु संकेत में $\overleftrightarrow{A\ B}$ इसे पढ़ेंगे रेखा A B । प्रचलन में यही दूसरा स्वरूप मान्य है।

3■ **रेखाखण्ड** किसी रेखा में से लिया गया खण्ड रेखा ख्ण्ड कहलाता है। अर्थात किसी रेखा के दो अन्त्य बिन्दुओं के बीच के खण्ड को रेखाखण्ड कहते है। रेखाखण्ड का आदि और अंत बिन्दु होता है।

जसे



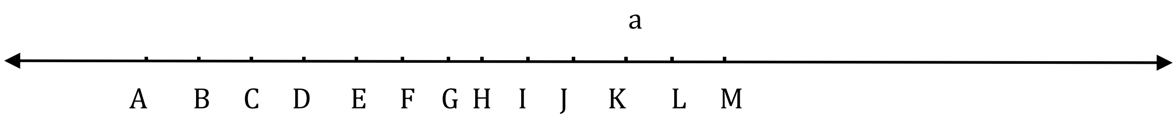
में रेखा a का रेखाखण्ड AB है।

अध्ययन संकेत अंग्रेजी के दो बड़े अक्षर से– 

लघु संकेत में $\overline{A\ B}$ इसे पढ़ेंगे रेखाखण्ड A B । आधुनिक अध्ययन में रेखाखण्ड के लिए रेखा शब्द ही जारी है।

4■ **इकाई रेखाखण्ड** किसी रेखा या रेखा खण्ड के समान दूरी पर बिन्दुओं के निर्धारण उपरांत किन्हीं क्रमागत दो बिन्दुओं के मध्य के रेखाखण्ड को उस रेखा या रेखाखण्ड के प्रति इकाई रेखाखण्ड कहते हैं।

जसे 1 रेखा a के इकाई रेखाखण्ड $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} -------$



2 रेखाखण्ड $\overline{AB}$ के इकाई रेखाखण्ड $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} -------= \overline{MB}$

A C D E F G H 1 J K L M B

पूर्णांक संख्या रेखा किसी रेखा के एक बिन्दु को 0 (शून्य) बिन्दु निश्चित कर एक इकाई रेखाखण्ड माप अन्तराल इसके बाँयी ओर क्रमशः उना (ऋणात्मक) संख्याओं को तथा दाँयी ओर पाकृत (धनात्मक) संख्याओं से दर्शित रेखा को पूर्णांक संख्या रेखा कहते हैं।

पूर्णांक संख्या रेखा

$\overline{N}$ - - - $\overline{3}$ $\overline{2}$ $\overline{1}$ 0 1 2 3 - - - N

पूर्णांक संख्या रेखा विच्छेदन

1■ पूर्ण संख्या रेखा

1• पूर्ण संख्या रेखा

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 - - - Z

2• पाकृत संख्या रेखा

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 - - - N

3• उना संख्या रेखा

$\overline{N}$ - - - $\overline{12}$ $\overline{11}$ $\overline{10}$ $\overline{9}$ $\overline{8}$ $\overline{7}$ $\overline{6}$ $\overline{5}$ $\overline{4}$ $\overline{3}$ $\overline{2}$ $\overline{1}$ 0

महत्वपूर्ण संख्या रेखा से स्पष्ट है कि–

1• किसी संख्या x के बाँयी ओर स्थित समस्त संख्याएँ संख्या x मान से छोटे मान के होते हैं।

2• किसी संख्या x के दाँयी ओर स्थित समस्त संख्याएँ संख्या x मान से बड़े मान के होते हैं।

3• संख्या रेखा द्वारा दो संख्या के बीच संकलन और व्यवकलन की सँक्रिया को समझने समझाने में आसान प्रतीत होगा।

19-5 पूर्णांकों का परिमेय निरूपण किसी पूर्णांक W का परिमेय निरूपण $\frac{P}{Q}$ के लिए अंश P= W हर Q= 1 दर्शित कीजिए। और पूर्णांक W का अभीष्ट परिमेय निरूपण $=\frac{W}{1}$ प्राप्त कीजिए।

जैसे पूर्णांक $\overline{5}$ का परिमेय निरूपण $=\frac{\overline{5}}{1}$ पूर्णांक 0 का परिमेय निरूपण $=\frac{0}{1}$

पूर्णांक 6 का परिमेय निरूपण $=\frac{6}{1}$ पूर्णांक 51 का परिमेय निरूपण $=\frac{51}{1}$

भिन्न भिन्न स्वयं में परिमेय संख्या समुच्चय का अवयव है । जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में दर्शित किया जाता है ।, जहाँ p को अंश कहते है जो पूर्ण संख्या समुच्चय का एक अवयव होगा तथा q को हर कहते है जो पाकृत संख्या समुच्चय का एक अवयव होगा। p और q को अलग करने वाले मध्य लाइन को बटे या बटा की लाइन कहते है। जो बाँटना या बँटवारा करने के अर्थ में है।

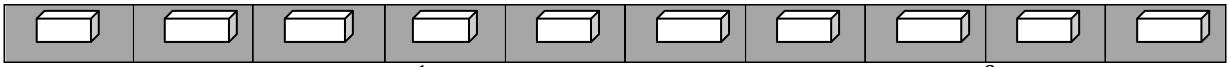
जैसे $\frac{1}{2}$, $\frac{0}{5}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{234}{538}$, $\frac{12567}{16890}$ ---------- इत्यादि।

परिमेय संख्या को पढ़ना परिमेय संख्या $\frac{P}{Q}$ को p (पी) बटे q (क्यू) पढा जाता है।

भिन्न $\frac{2}{3}$ को 2 (दो) बटे 3 (तीन) पढा जाता है।

19-6 भिन्न का श्रोत भिन्न का श्रोत किसी माप राशि को बराबर–बराबर बाँटना होता है। जिसके लिए गणितीय संक्रिया भाग है।

जैसे – 10 नग चाकलेट को 5 बच्चों में बराबर–बराबर बाँटना का अर्थ 10÷ 5 से है जिसे भिन्न के रूप में $\frac{10}{5}$ दर्शित किया जाता है। 10÷ 5 =2 अब यदि 10 चाकलेट का 1 पत्ता में 1_1 चाकलेट अलग–अलग हो तो पत्ते के हिसाब से –



1 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{1}{10}$ वाँ हिस्सा   2 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{2}{10}$ वाँ हिस्सा

3 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{3}{10}$ वाँ हिस्सा   4 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{4}{10}$ वाँ हिस्सा

5 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{5}{10}$ वाँ हिस्सा   6 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{6}{10}$ वाँ हिस्सा

7 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{7}{10}$ वाँ हिस्सा   8 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{8}{10}$ वाँ हिस्सा

9 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{9}{10}$ वाँ हिस्सा   10 चाकलेट, पूरे एक चाकलेट पत्ते का $\frac{10}{10}$ वाँ हिस्सा

19-7 भिन्न के प्रकार

1• **सम भिन्न** जिस भिन्न का अंश मान हर मान से छोटा होता है, सम भिन्न कहलाता है। अर्थात यदि $\frac{a}{b}$ सम भ्भिन्न का उदाहरण है तो $a<b$ होगा । **जैसे** $-\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{101}{200}$

2• **विषम भिन्न** जिस भिन्न का अंश मान हर मान से बड़ा होता है, विषम भिन्न कहलाता है। अर्थात यदि $\frac{a}{b}$ सम भिन्न का उदाहरण है तो $a>b$ होगा । **जैसे** $-\frac{5}{2}, \frac{13}{9}, \frac{377}{157}$

3• **मिश्र भिन्न** पाकृत संख्या एवं सम भिन्न के योग संक्रिया को बिना य्रोग संक्रिया संकेतन से दर्शित करना अथवा विषम भिन्न के अंश a को हर b द्वारा विभाजित करने से प्राप्त भागफल n जो एक पाकृत संख्या होगा, एवं शेषफल r जो कि हर b के सापेक्ष सम भिन्न $\frac{r}{b}$ होगा । तब n और $\frac{r}{b}$ को साथ $n\frac{r}{b}$ दर्शित करना, मिश्र भिन्न कहलाता है। जैसे- $\frac{13}{5}$ से $13 \div 5$ से भागफल 2 शेषफल 3 से विषम $\frac{13}{5}$ का मिश्र भिन्न प्रतिरूप $2\frac{3}{5}$ होगा और इसे पढ़ेंगे दो सही तीन बटा पाँच ।

मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में बदलना मिश्र भिन्न $n\frac{r}{b} = \frac{n*b+r}{b}$ का हल विषम भिन्न होगा।

जैसे $2\frac{3}{5} = \frac{2*5+3}{5} = \frac{13}{5}$, $13\frac{7}{13} = \frac{13*13+7}{13} = \frac{176}{13}$, $17\frac{13}{19} = \frac{17*19+13}{19} = \frac{236}{19}$,

भिन्नों की तुलना भिन्नों की तुलना का अर्थ दो या दो से अधिक भिन्न में से किसी एक भिन्न के सापेक्ष अन्य भिन्न को छोटा, बराबर, या बड़ा दर्शित करना है।

19-8 भिन्नों के तुलना का नियम

(1) **हरों का तुल्यता नियम** यदि दिये भिन्नों के हर तुल्य (समान) हो तो हरों के बढ़ते क्रम के सापेक्ष भिन्नों को बढ़ते क्रम तथा हरों के घटते क्रम के सापेक्ष भिन्नों को घट़ते क्रम दर्शित किया जा सकता है।

जैसे $\frac{21}{25}, \frac{37}{25}, \frac{15}{25}$ के हर समान रूप से 25 है। अतः हरों के बढ़ते क्रम $15 < 21 < 37$ के सापेक्ष $\frac{15}{25} < \frac{21}{25} < \frac{37}{25}$ बढ़ते क्रम तथा हरों के घट़ते क्रम $35 > 21 > 15$ के सापेक्ष $\frac{15}{25} > \frac{21}{25} > \frac{37}{25}$ घटते क्रम में दर्शित होंगे।

(2) **अंशों का तुल्यता नियम** यदि दिये भिन्नों के अंश तुल्य (समान) हो तो हरों के बढ़ते क्रम के सापेक्ष भिन्नों को घट़ते क्रम तथा हरों के घटते क्रम के सापेक्ष भिन्नों को बढ़ते क्रम दर्शित किया जा सकता है।

जैसे $\frac{25}{21}, \frac{25}{37}, \frac{25}{15}$ के अंश समान रूप से 25 है। अतः हरों के बढ़ते क्रम $15 < 21 < 37$ के सापेक्ष $\frac{25}{15} > \frac{25}{21} > \frac{25}{37}$ बढ़ते क्रम तथा हरों के घट़ते क्रम $37 > 21 > 15$ के सापेक्ष $\frac{25}{37} < \frac{25}{21} < \frac{25}{15}$ घटते क्रम में दर्शित होंगे।

मानक भिन्न वह भिन्न जिसके हर और अंश दोनों का 1 (एक) के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ यथार्थ भाजक न हो मानक भिन्न कहलाता है। अथवा महत्तम समापवर्तक के संदर्भ में वह भिन्न जिसके हर और अंष दोनों का महत्तम समापवर्तक 1 (एक) हो मानक भिन्न कहलाता है। **जैसे** $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{17}{5}, \frac{31}{38}$

मानक भिन्न का तुल्य भिन्न श्रृंखला यदि $\frac{a}{b}$ मानक भिन्न हो तो मानक भिन्न $\frac{a}{b}$ के तुल्य भिन्न श्रृंखला क्रम

$\frac{2*a}{2*b}=\frac{3*a}{3*b}=\frac{4*a}{4*b}=\frac{5*a}{5*b}---=\frac{n*a}{n*b}$ होंगे। किसी मानक भिन्न के तुल्य भिन्न की श्रृंखला अनन्त है।

जैसे $\frac{1}{2}$ का तुल्य भिन्न श्रृंखला क्रम $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=------=\frac{n}{2n}$

$\frac{5}{8}$ का तुल्य भिन्न श्रृंखला क्रम $\frac{5}{8}=\frac{10}{16}=\frac{15}{24}=\frac{20}{32}=\frac{25}{40}=------=\frac{5n}{8n}$

$\frac{7}{3}$ का तुल्य भिन्न श्रृंखला क्रम $\frac{7}{3}=\frac{14}{6}=\frac{21}{9}=\frac{28}{12}=\frac{35}{15}=------=\frac{7n}{3n}$

विभिन्न हर वालें दो भिन्नों के हर समान कर, उनकी तुलना करना तथा ,योग, एवं व्यवकलन की संक्रिया में महत्तम समापर्वक और में तिरछा (तिर्यक) गुणा विधि का अनुप्रयोग– उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करना यथेष्ट होगा–

उदाहरण■– $\frac{7}{8}$ और $\frac{5}{6}$ के हरों को तुल्य कर दोनों भिन्नों की तुलना , योग एवं बड़े भिन्न में छोटे भिन्न का व्यवकलन कीजिए।

हल

2	8	6
	4	3
	7	5

प्रक्रम 1 $\frac{7}{8}$ और $\frac{5}{6}$ के हरों 8 और 6 का महत्तम समापवर्तक निकालने की संक्रिया कीजिए।

प्रक्रम 2 8 और 6 अंतिम अपवर्तक क्रमशः 4 और 3 के नीचे हरों के संगत अंश का दर्शित कीजिए ।

यथा 4 3

7 5

प्रक्रम 3 तुल्य–हर = महत्तम समापवर्तक*(अंतिम अपवर्तकों का गुणनफल) = 2*(4*3)=2*12 =24

प्रक्रम 4 इस तुल्य हर के प्रति अंश तिर्यक गुणा सूत्र द्वारा निम्नानुसार होगा।

$\frac{7}{8}=\frac{m_1}{24}$ हो तो $m_1 =$ 7 3 =7*3 =21

$\frac{5}{6}=\frac{m_2}{24}$ हो तो $m_2 =$ 4 5 = 4*5 =20

अतः $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$ तथा $\frac{5}{6}=\frac{20}{24}$ तुलना करने पर – $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}$

योग करने पर $\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{21}{24}+\frac{20}{24}=\frac{41}{24}=1\frac{17}{24}$

व्यवकलन करने पर $\frac{7}{8}-\frac{5}{6}=\frac{21}{24}-\frac{20}{24}=\frac{1}{24}=\frac{1}{24}$ होगा।

तुल्य सदृश्य भिन्न एवं इसका मानक भिन्न जिस भिन्न के अंश और हर दोनों का दो या दो से अधिक उभयनिष्ठ अपवर्तक होते है, वह भिन्न तुल्य सदृश्य भिन्न कहलाता है। जिसका मानक भिन्न प्राप्त करने के लिए इसके हर और अंश का महत्तम समापवर्तक द्वारा ही इन हर और अंश को विभाजित कीजिए। संगत भागफल ही तुल्य सदृश्य भिन्न का मानक भिन्न निरूपित वाले क्रमशः हर और अंश होंगे।

यथा तुल्य सदृश्य भिन्न $\frac{15}{20}$ का मानक भिन्न प्राप्त कीजिए –

हल 15 और 20 का महत्तम समापवर्त्य = 5

∴ तुल्य सदृष्य भिन्न $\frac{15}{20}$ का मानक भिन्न $=\frac{15\div5}{20\div5}=\frac{3}{4}$ होगा।

अथवा अंश और हर का उभयनिष्ठ अभाज्य संख्या भाजक विधि द्वारा महत्तम समापवर्त्य ज्ञात प्रक्रिया पूरा कीजिए।

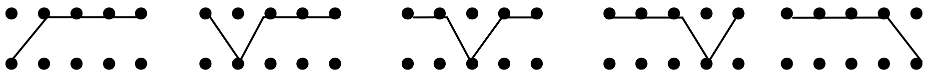
यथा

	अंश	हर
5	15	20
	3	4

अंतिम प्राप्त अपवर्तक 3 और 4 ही क्रमशः मानक भिन्न के अंश और हर होंगे।

∴ तुल्य सदृश्य भिन्न $\frac{15}{20}$ का मानक भिन्न $=\frac{3}{4}$ होगा।

19-9 दो या दो से अधिक से अधिक दिये भिन्नों की तुलना,योग एवं व्यकलन की संयुक्त संक्रिया में महत्तम समापकवर्तक एवं (पंक्तिक एवं तिर्यक) गुणा विधि



का अनुप्रयोग उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट करना यथेष्ठ होगा–

उदाहरण■ $\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{11}{16},\frac{13}{24}$ के हरों को तुल्य कर भिन्नों को घटते क्रम में दर्शित कीजिए और योग फल ज्ञात कीजिए।

हल

2	8	6	16	24
	4	3	8	12
	7	5	11	13

प्रक्रम 1 $\frac{7}{8},\frac{5}{6},\frac{11}{16},\frac{13}{24}$ के हरों 8,6,16,24 का महत्तम समापवर्तक निकालने की संक्रिया कीजिए।

प्रक्रम 2 हरों 8,6,16,24 के अंतिम अपवर्तक क्रमशः 4,3,8,12 के नीचे हरों के संगत अंश को दर्शित कीजिए।

यथा
4 3 8 12
7 5 11 13

प्रक्रम 3 तुल्य–हर = महत्तम समापवर्तक*(अंतिम अपवर्तकों का गुणनफल)
= 2*(4*3*8*12)=2*1152 =2304

प्रक्रम 4 इस तुल्य–हर के प्रति अंश तिर्यक गुणा सूत्र द्वारा निम्नानुसार होगा।

$\frac{7}{8}=\frac{m_1}{2304}$ के लिए m_1 = 4 3 8 12 = 7*3*8*12 = 2016
7 5 11 13

$\frac{5}{6}=\frac{m_2}{2304}$ के लिए m_2= 4 3 8 12 = 5*4*8*12 = 1920
7 5 11 13

$\frac{11}{16}=\frac{m_3}{24}$ के लिए m_3= 4 3 8 12 = 11*4*3*12 = 1584
7 5 11 13

$\frac{5}{6}=\frac{m_4}{24}$ के लिए m_3 = 4 3 8 12 = 13*8*3*4 = 1248
7 5 11 13

अतः तुलना करने पर घटते क्रम में– 2016 > 1920>1548> 1248 से $\frac{7}{8}>\frac{5}{6}>\frac{11}{16}>\frac{13}{24}$

योगफल $= \frac{7}{8}+\frac{5}{6}+\frac{11}{16}+\frac{13}{24} = \frac{2016}{2304}+\frac{1920}{2304}+\frac{1584}{2304}+\frac{1248}{2304} = \frac{6848}{2304} = \frac{6848\div144}{2304\div144} = \frac{47}{16} = 2\frac{15}{16}$ होगा।

हल लघुत्तम समापवर्त्य विधि उपरोक्त विधि दो भिन्न के तुलना, योग एवं अन्तर के लिए निश्चित रूप से सरल एवं आत्साती है। लेकिन अप्रतिबंधित हरों वाले 3 या 3 से अधिक भिन्नों के तुलना, योग एवं योग अंतर (घटाना) की संयुक्त संक्रिया के संदर्भ में लम्बी एवं जटिल प्रतीत होता है। फिर भी प्रासांगिक उपयोगिता से नकारा जाना यथेष्ठ नहीं होगा। इस प्रकार की उत्पन्न जटिलता को लघुत्तम समापवर्त्य विधि सरलता की ओर अग्रेषित करता है। विधि प्रक्रम निम्नानुसार है।–

प्रक्रम1 दिये हरों का न्यूनतम तुल्य–हर प्राप्त करना दिये हरों का लघुत्तम समाापवर्त्य ज्ञात कीजिए । यह प्राप्त लघुत्तम समाापवर्त्य ही दिये हरों का न्यूनतम तुल्य हर होगा।

प्रक्रम2 प्रक्रम 1 से प्राप्त न्यूनतम तुल्य हर के सापेक्ष भिन्नों का सापेक्ष–अंश प्राप्त करना प्रक्रम 1 से प्राप्त न्यूनतम तुल्य हर को संगत भिन्न के हर द्वारा भाग देकर भागफल प्राप्त कीजिए। इस प्राप्त भागफल का अंष से गुणा कीजिए । यह प्राप्त गुणनफल ही न्यूनतम तुल्य–हर के सापेक्ष भिन्न का सापेक्ष–अंश होगा।

अर्थात तुल्य हर के सापेक्ष भिन्न का सापेक्ष–अंश = अंश * (तुल्य हर ÷ हर)

प्रक्रम3 प्रश्नानुसार दिये भिन्नों की तुलना , योग एवं योग व्यकलन की संयुक्त संक्रिया प्राप्त सापेक्ष–अंश पर ही कीजिए। इन समस्त प्रश्नों के हल में अभीष्ट हर तुल्य–हर ही होगा।

उपरोक्त उदाहरण का हल के लिए

2	8	6	16	24

2	4	3	8	12
2	2	3	4	6
3	1	3	2	3
	1	1	2	1

प्रक्रम 1 $\frac{7}{8}, \frac{5}{6}, \frac{11}{16}, \frac{13}{24}$ के हरों 8,6,16,24 का लघुत्तम समापवर्त्य निकालने की संक्रिया कीजिए।

हरों का न्यूनतम तुल्य–हर = लघुत्तम समापवर्त्य = 2*2*2*3*2=48 होगा।

प्रक्रम 2 तुल्य–हर 48 के सापेक्ष दिये भिन्न के सापेक्ष–अंश = अंश * (तुल्य हर ÷ हर) से– $\frac{7}{8} = \frac{7*(48 \div 8)}{48} = \frac{7*6}{48} = \frac{42}{48}$, $\frac{5}{6} = \frac{5*(48 \div 6)}{48} = \frac{5*8}{48} = \frac{40}{48}$,
$\frac{11}{16} = \frac{11*(48 \div 16)}{48} = \frac{11*3}{48} = \frac{33}{48}$, $\frac{13}{24} = \frac{13*(48 \div 16)}{48} = \frac{13*2}{48} = \frac{26}{48}$, से भिन्नों की तुलना
$\frac{42}{48} > \frac{40}{48} > \frac{33}{48} > \frac{26}{48}$ है। अतः $\frac{7}{8} > \frac{5}{6} > \frac{11}{16} > \frac{13}{24}$ होगा।

अथवा - $\frac{\cancel{3}}{\underset{1}{\cancel{4}}} * \frac{\cancel{8}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{1*2}{1*5} = \frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ का अंश 3 और $\frac{8}{15}$ का हर 15 को इनके उभयनिष्ठ अपवर्तक 3 8 से कटाने पर क्रमशः कटान मान 1 और 5 एवं $\frac{3}{4}$ का हर 4 और $\frac{8}{15}$ का अंश को इनके उभयनिष्ठ अपवर्तक 4 से कटाने पर क्रमशः कटान मान 1 और 2 दर्शित करने पर।

उदाहरण■ $\frac{34}{15} * \frac{10}{51} * \frac{6}{5} = \frac{34*10*6}{15*51*5} = \frac{2040}{3825} = \frac{2040 \div 255}{3825 \div 255} = \frac{8}{15}$ $\frac{2040}{3825}$ तुल्य सदृश्य भिन्न है जिसके अंश 2040 और हर 3875 को इनके महत्तम समापवर्तक 255 द्वारा विभाजित कर मानक भिन्न $\frac{8}{15}$ किया गया है।

अथवा $\frac{34}{15} * \frac{10}{51} * \frac{6}{5} = \frac{2*17}{3*5} * \frac{2*5}{3*17} * \frac{2*3}{5} = \frac{2*2*2}{3*5} = \frac{8}{15}$ अशों एवं हरों के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों को हटाने पर।

अथवा $\frac{34}{15} * \frac{10}{51} * \frac{6}{5} = \frac{34 \div 17}{15 \div 5} * \frac{10 \div 5}{51 \div 17} * \frac{6}{5} = \frac{2}{3 \div 3} * \frac{2}{3} * \frac{6 \div 3}{5} = \frac{2}{1} * \frac{2}{3} * \frac{2}{5} = \frac{2*2*2}{1*3*5} = \frac{8}{15}$

अंशों एवं हरों को उनके उभयनिष्ठ अपवर्तक के द्वारा विभाजित करने पर ।

$\frac{\overset{2}{\cancel{34}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{15}}} * \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{3}{\cancel{51}}} * \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{5} = \frac{2*2*2}{1*3*5} = \frac{8}{15}$

$\frac{34}{15}$ का अंश 34 और $\frac{10}{51}$ का हर 51 को इनके उभयनिष्ठ अपवर्तक 17 से कटाने पर क्रमशः कटान मान 2 और 3 एवं $\frac{34}{15}$ का हर 15 और $\frac{10}{51}$ का अंश 10 को इनके उभयनिष्ठ अपवर्तक 5 से कटाने पर क्रमशः कटान मान 2 और 3 दर्शित करने पर, पुनः $\frac{34}{15}$ के अंश 15 का कटान मान 3 और $\frac{6}{5}$ के अंश 6 को इनके उभयनिष्ठ अपवर्तक 3 से कटाने पर क्रमशः कटान मान 1 और 2 दर्शित करने पर।
इस प्रकार कटान को और भी विभिन्न स्वरूपों में दर्शित किया जा सकता है। जो निम्नानुसार है
।

$\frac{\overset{2}{34}}{\underset{3}{\cancel{15}}} * \frac{\overset{2}{10}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{51}}} * \frac{\overset{2}{6}}{5} = \frac{2*2*2}{3*1*5} = \frac{8}{15}$

$\frac{\overset{2}{34}}{15} * \frac{\overset{2}{10}}{\underset{\underset{1}{\cancel{3}}}{\cancel{51}}} * \frac{\overset{2}{6}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{2*2*2}{3*1*5} = \frac{8}{15}$

विवेचना उपरोक्त गुणन संक्रिया के अवलोकन से स्पष्ट है कि– सभी विधियाँ अपने आप में उपयोगी है। उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हटाने की विधि कुछ लम्बी अवश्य है लेकिन सरल और सुग्राह्य है। वर्तमान गणित में प्रचलित अंश और हर को उनके उभयनिष्ठ अपवर्तकों द्वारा सीधे कटान मान प्राप्त करने की विधि छोटी तो है लेकिन सीखने सिखाने में कठिनाई को इन्कार नहीं किया जा सकता। अतः पूर्वाध्ययन को जागृत करते हुए सभी विधियों का अभ्यास क्रम से उभयनिष्ठ अपवर्तकों द्वारा सीधे कटान मान प्राप्त करने की विधि को अपने आप सरलता से आत्मसात करने अग्रसर होते पायेंगे।

गुणन प्रतिलोम भिन्न ऐसी दो भिन्न जिनका गुणनफल एक हो एक–दूसरे के गुणन प्रतिलोम भिन्न होते है।
किसी भिन्न का गुणन प्रतिलोम भिन्न उस भिन्न के हर को अंश और अंश को हर दर्शित करने से प्राप्त भिन्न होगा।

$\frac{a}{b} \xleftrightarrow{\text{गुणन प्रतिलोम}} \frac{b}{a}$ $\frac{5}{11} \xleftrightarrow{\text{गुणन प्रतिलोम}} \frac{11}{5}$

संख्या x का भिन्न निरूपण $\frac{x}{1}$ है। अतः संख्या $x \xleftrightarrow{\text{गुणन प्रतिलोम}} \frac{1}{x}$

$5 \xleftrightarrow{\text{गुणन प्रतिलोम}} \frac{1}{5}$ $\quad 11 \xleftrightarrow{\text{गुणन प्रतिलोम}} \frac{1}{11}$ होगा।

भिन्न भाग संक्रिया भिन्न भाग संक्रिया को भिन्न गुणन संक्रिया में बदले जिसके लिए भाग का गुणा एवं भाजक का गुणन प्रतिलोम दर्शित कीजिए। यथा– $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c}$ गुणन संक्रिया विधि का अनु प्रयोग कर गुणनफल प्राप्त कीजिए। यह प्राप्त ग्रणनफल ही अभीष्ट भागफल होगा।

जैसे $\frac{5}{12} \div \frac{4}{3} = \frac{5}{\cancel{12}_{4}} * \frac{\cancel{3}^{1}}{4} = \frac{5*1}{4*4} = \frac{5}{16}$ अभीष्ट भागफल होगा।

$\frac{45}{56} \div \frac{12}{7} = \frac{\cancel{45}^{15}}{\cancel{56}_{8}} * \frac{\cancel{7}^{1}}{\cancel{12}_{4}} = \frac{15*1}{8*4} = \frac{15}{32}$ अभीष्ट भागफल होगा ।

गुणा भाग की सरल संयुक्त संक्रिया गुणा भाग की सरल संयुक्त संक्रिया में भाग को गुणा चिन्हांकित कर भाग चिन्ह के दाँयी ओर की भिन्न का गुणन प्रतिलोम दर्शित कर गुणा भाग की सरल संयुक्त संक्रिया को सरल गुणन संक्रिया मे प्राप्त कीजिए। यथा

1 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} * \frac{e}{f} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} * \frac{e}{f}$ 2 $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} \div \frac{e}{f} = \frac{a}{b} * \frac{c}{d} * \frac{f}{e}$ 3 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} \div \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} * \frac{f}{e} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} * \frac{f}{e}$

उदाहरण■ 1• $\frac{34}{15} \div \frac{17}{25} * \frac{6}{5} = \frac{34}{15} * \frac{25}{17} * \frac{6}{5} = \frac{2*17}{3*5} * \frac{5*5}{17} * \frac{2*3}{5} = \frac{2*2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

2• $\frac{34}{15} * \frac{17}{25} \div \frac{6}{5} = \frac{34}{15} * \frac{17}{25} * \frac{5}{6} = \frac{2*17}{3*5} * \frac{17}{25} * \frac{5}{2*3} = \frac{17*17}{3*25*3} = \frac{289}{225} = 1\frac{64}{225}$

3• $\frac{34}{15} \div \frac{17}{25} \div \frac{6}{5} = \frac{34}{15} * \frac{25}{17} * \frac{5}{6} = \frac{2*17}{3*5} * \frac{25}{17} * \frac{5}{2*3} = \frac{25}{3*3} = \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}$

19-10 दो भिन्नों के बीच मूलभूत संक्रियाओं का ग्राफ चित्र प्रदर्शन

योग एवं व्यवकलन संक्रिया $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$ के लिए 1• तुल्य–हर = हर b और d लधुत्तम समापवर्त्य L प्राप्त कीजिए।

2• तुल्य हर L के सापेक्ष $\frac{a}{b} = \frac{a*(L\div b)}{L} = \frac{p}{L}$ और $\frac{c}{d} = \frac{c*(L\div d)}{L} = \frac{q}{L}$ प्राप्त कीजिए।

3• एक इकाई मान को L खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $= \frac{1}{L}$ इकाई मान पर p खण्ड की रचना कर $\frac{a}{b} = \frac{p}{L}$ और q खण्ड की रचना कर $\frac{c}{d} = \frac{q}{L}$ के लिए: अलग– अलग ग्राफ चित्र रचना कीजिए।

4• इन रचना चित्र का योग मान चित्र $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{p}{L} + \frac{q}{L} = \frac{p+q}{L} = \frac{r}{L}$ के लिए एक खण्ड $= \frac{1}{L}$ इकाई मान पर ही r खण्ड की रचना कर अभीष्ट योग प्राप्त कीजिए। एवं $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{p}{L} - \frac{q}{L} = \frac{p-q}{L} = \frac{k}{L}$ के लिए एक खण्ड $= \frac{1}{L}$ इकाई मान पर ही k खण्ड की रचना कर अभीष्ट व्यवकलन चित्र रचना कीजिए।

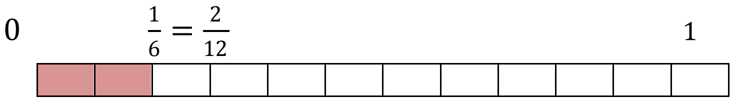
उदाहरण■ $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$ के लिए 1• तुल्य हर = हर 4 और 6 लधुत्तम समापवर्त्य 12 प्राप्त कीजिए।

2• तुल्य हर 12 के सापेक्ष $\frac{3}{4} = \frac{3*(12\div 4)}{12} = \frac{9}{12}$ और $\frac{1}{6} = \frac{1*(12\div 6)}{12} = \frac{2}{12}$ प्राप्त कीजिए।3

3• एक इकाई मान को 12 खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $= \frac{1}{12}$ इकाई मान पर 9 खण्ड की रचना कर $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ और 2 खण्ड की रचना कर $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ के लिए: अलग– अलग ग्राफ चित्र रचना कीजिए। **यथा**

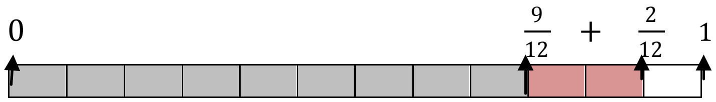
1• $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ का ग्राफ चित्र

2• $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ का ग्राफ चित्र

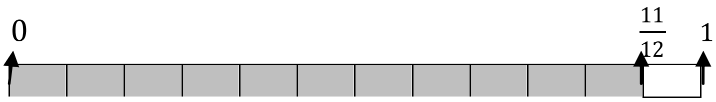


3• इन रचना चित्र का योग मान चित्र

$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{9+2}{12}=\frac{11}{12}$



=



अभीष्ट व्यकलन मान चि़त्रण होगा।

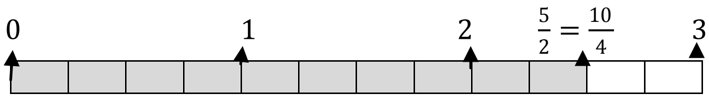
उदाहरण■ $\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$ के लिए

1• तुल्यहर = हर 2 और 4 लधुत्तम समापवर्त्य 4 प्राप्त कीजिए।

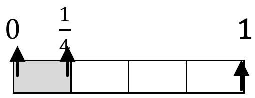
2• तुल्य हर 4 के सापेक्ष $\frac{5}{2}=\frac{5*(4\div2)}{4}=\frac{10}{4}$ और $\frac{1}{4}=\frac{1*(4\div4)}{4}=\frac{1}{4}$ प्राप्त कीजिए।

3• एक इकाई मान का 4 खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $=\frac{1}{4}$ इकाई मान पर 10 खण्ड की रचना कर $\frac{5}{2}=\frac{10}{4}$ और 1 खण्ड की रचना कर $\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ के लिए: अलग– अलग ग्राफ चित्र रचना कीजिए। **यथा**

1• $\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}=\frac{10}{4}=2\frac{2}{4}$ का ग्राफ चित्र

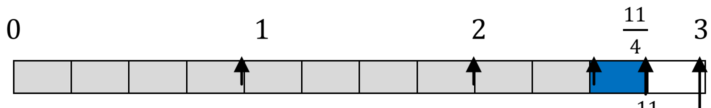


2• $\frac{1}{4}$ का ग्राफ चित्र

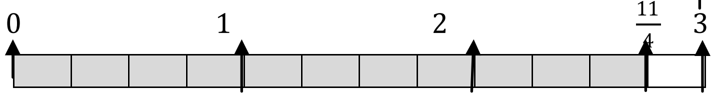


3 • इन रचना चित्र का योग मान चित्र

$\frac{5}{2}+\frac{1}{4}=\frac{10}{4}+\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$

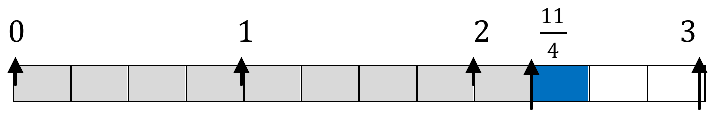


=

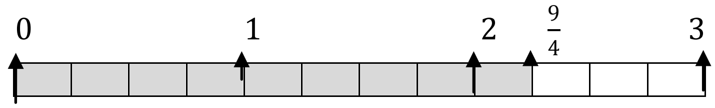


अभीष्ट योगमान चि़त्रण होगा। एवं इन रचना चित्र का व्यवकलन मान चित्र

$\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{10}{4}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$



=



अभीष्ट व्यकलन मान चि़त्रण होगा।

गुणा संक्रिया $\frac{a}{b}*\frac{c}{d}$ के लिए **1•** तुल्यहर = हर b और d लधुत्तम समापवर्त्य L प्राप्त कीजिए।

2• तुल्य हर L के सापेक्ष $\frac{a}{b}=\frac{a*(L\div b)}{L}=\frac{p}{L}$ और $\frac{c}{d}=\frac{c*(L\div d)}{L}=\frac{q}{L}$ प्राप्त कीजिए।

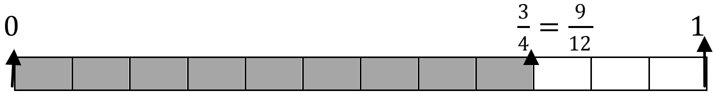
3• एक इकाई मान का L खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $=\frac{1}{L}$ इकाई मान पर p खण्ड की रचना कर $\frac{a}{b}=\frac{p}{L}$ और q खण्ड की रचना कर $\frac{c}{d}=\frac{q}{L}$ के लिए: अलग– अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए।

4• प्रक्रम 3 से प्राप्त ग्राफ चित्रों को क्रमशः L*L के वर्गाकार ग्राफ में क्रमशः c_1r_1 से c_pr_1 तक क्षैतिज और c_1r_1 से c_1r_p तक स्तम्भिक दर्शित कीजिए।

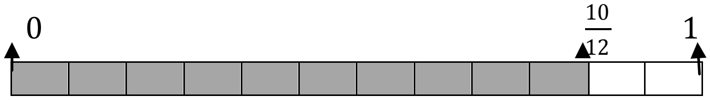
5• L*L के वर्गाकार ग्राफ में बनी आकृति वर्ग/आयत $c_pr_1, c_1r_1,\ c_1r_p, c_pr_p$ का आच्छादित अन्तः भाग ही एक वर्ग इकाईमान L*L केसापेक्ष $\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{p}{L}*\frac{q}{L}$ का दर्शित करता है।

जैसे 1■ $\frac{3}{4}*\frac{5}{6}$ के लिए **1•** तुल्यहर = हर 4 और 6 लधुत्तम समापवर्त्य 12 प्राप्त कीजिए।

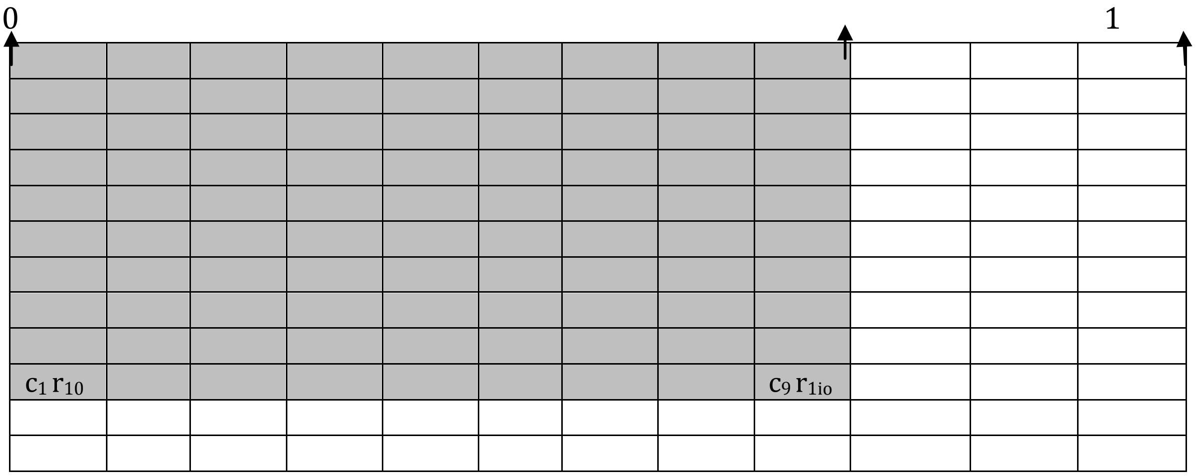
2• तुल्य हर 12 के सापेक्ष $\frac{3}{4}=\frac{3*(12\div4)}{12}=\frac{9}{12}$ और $\frac{5}{6}=\frac{5*(12\div6)}{12}=\frac{10}{12}$ प्राप्त कीजिए। **यथा**



$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ इकाई का ग्राफ चित्र–



$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ इकाई का ग्राफ चित्र–



अभीष्ट गुणनफल चि़त्रण होगा।

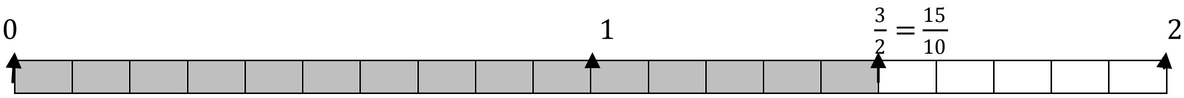
अतः $\frac{3}{4}*\frac{5}{6}$ का ग्राफ चित्र प्रदर्शन– एक इकाई वर्ग में भागों की कुल संख्या $=12*12=144$ के सापेक्ष $c_pr_1, c_1r_1,\ c_1r_p, c_pr_p$ के अन्तः आच्छदित भागों की संख्यात्र $9*10=90$

$\frac{90}{144}=\frac{90\div18}{144\div18}=\frac{5}{8}$ वर्ग इकाई है। जो कि $\frac{3}{4}*\frac{5}{6}=\frac{3}{4}*\frac{5}{2*3}=\frac{5}{4*2}=\frac{5}{8}$ (गुणनफल) के बराबर है।

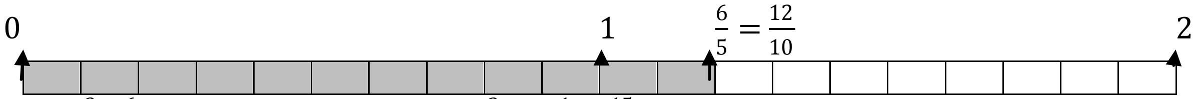
2■ $\frac{3}{2}*\frac{6}{5}$ के लिए **1•** तुल्यहर = हर 2 और 5 लधुत्तम समापवर्त्य 10 प्राप्त कीजिए।

2• तुल्य हर 10 के सापेक्ष $\frac{3}{2}=\frac{3*(10\div2)}{12}=\frac{15}{10}=1\frac{5}{10}$और $\frac{6}{5}=\frac{6*(10\div5)}{10}=\frac{12}{10}=1\frac{2}{10}$ प्राप्त कीजिए।

यथा $\frac{3}{2}=\frac{15}{10}=1\frac{5}{10}$ इकाई का ग्राफ चित्र––एक इकाई मान ग्राफ का 10 खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $=\frac{1}{10}$ इकाई मान ग्राफ पर 15 खण्ड को छायांकित कर $\frac{3}{2}=\frac{15}{10}$ के लिए: अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए। जो 1इकाई =10 बाद दूसरे इकाई के 1= 20 में $15-1*10=5$ खण्ड तक में निहित होगा।



इसी प्रकार $\frac{6}{5} = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10}$ के लिए: अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए। जो 1इकाई =10 बाद दूसरे इकाई के 1= 20 में $12 - 1 * 10 = 2$ खण्ड तक में निहित होगा।

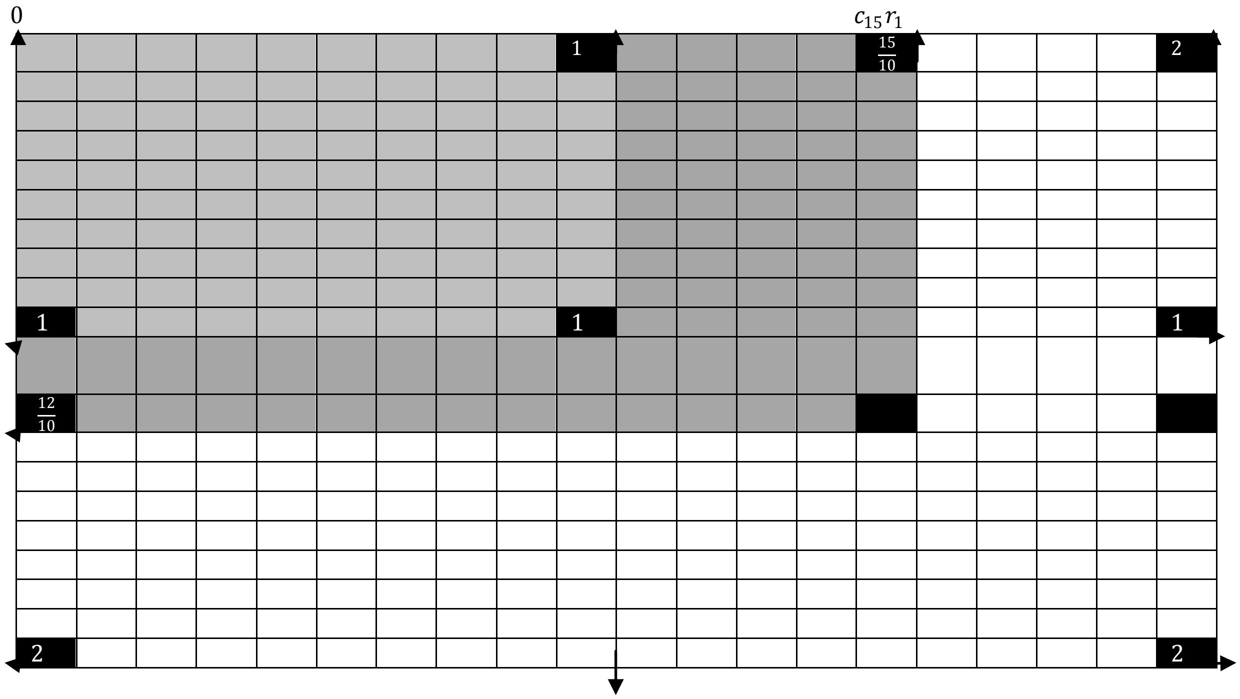


अतः $\frac{3}{2} * \frac{6}{5}$ का ग्राफ चित्र प्रदर्शन– चूँकि गुण्य $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} = \frac{15}{10}$ का अंश 15 1इकाई खण्ड =10 से अधिक और 2 इकाई खण्ड =20 से कम है । इसी प्रकार गुणक $\frac{6}{5} = 1\frac{2}{10} = \frac{12}{10}$ का अंश 12 1इकाई खण्ड =10 से अधिक और 2 इकाई खण्ड =20 से कम है । अतः प्रक्रम 3 से प्राप्त ग्राफ चित्र को 2इकाई * 2इकाई केलिए 20*20 के वर्गाकार ग्राफ में गुण्य एवं गुणक क्रमशः c_1r_1 से $c_{15}r_1$ तक क्षैतिज एवं c_1r_1 से c_1r_{12} तक स्तम्भिक दर्शित कीजिए।

एक इकाई वर्ग में भागों की कुल संख्या $= 10*10 = 100$ के सापेक्ष

$c_pr_1, c_1r_1, c_1r_p, c_pr_p$ के अन्तः आच्छदित भागों की संख्या $= 15*12 = 180$

$\frac{180}{100} = \frac{180 \div 20}{100 \div 20} = \frac{9}{5}$ वर्ग इकाई है। जो कि $\frac{3}{2} * \frac{6}{5} = \frac{3}{2} * \frac{3*2}{5} = \frac{3*3}{5} = \frac{9}{5}$ (गुणनफल) के बराबर है।



भाग संक्रिया $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ के लिए माना कि $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ द्वारा प्राप्त अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n}$ है। तब–

1• तुल्यहर = भाज्य भिन्न का हर b सहित भाजक भिन्न के अंश c एवं हर d तीनों का लघुत्तम समापवर्त्य L प्राप्त कीजिए।

2• तुल्य हर L के सापेक्ष भाजक $\frac{c}{d} = \frac{c*(L \div d)}{L} = \frac{p}{L}$ प्राप्त कीजिए।

3• एक इकाई मान को L खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $= \frac{1}{L}$ इकाई मान पर p खण्ड की रचना कर $\frac{c}{d} = \frac{p}{L}$ के लिए: अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए।

4 • प्रक्रम 3 से प्राप्त ग्राफ चित्र को L*L के वर्गाकार ग्राफ में क्रमशः c_1r_1 से c_pr_1 तक क्षैतिज दर्शित कीजिए।

5• L*L के लिए $\frac{1}{L^2}$ इकाई मान पर $(\frac{a*L^2}{b})$ ग्राफ खानों की संख्या मान आयत/वर्ग चित्र में दर्शित होगा। जिसका क्षैतिज मान प्रक्रम 4 के अनुसार c_1r_1 से c_pr_1 तक दर्शित होगा। और स्तम्भिक मान c_1r_1 से c_1r_q तक दर्शित होने पर $q = (\frac{a*L^2}{b}) \div p$ होगा।

6• L*L के वर्गाकार ग्राफ में $\frac{1}{L^2}$ इकाई मान के L^2 संख्या मान पर ग्राफ खाने प्राप्त होंगा । तब L*L के वर्गाकार ग्राफ में भाज्य $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ के प्रति

अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n} = \frac{q}{L}$ का चित्रांकन $c_1 r_1$ से $c_1 r_q$ तक दर्शित होगा। जिसें अलग से दर्शित किया जा सकता है।

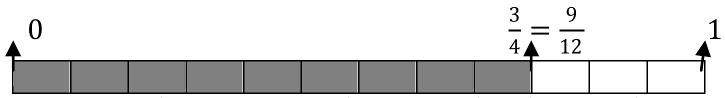
जैसे 1■ $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ के लिए

माना कि $\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$ द्वारा प्राप्त अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n}$ है। तब–

1• तुल्यहर = भाज्य भिन्न का हर 2 सहित भाजक भिन्न के अंश 3 एवं हर 4 तीनों का लधुत्तम समापवर्त्य 12 प्राप्त कीजिए।

2.• तुल्य हर 12 के सापेक्ष भाजक $\frac{3}{4} = \frac{3*(12\div4)}{12} = \frac{9}{12}$ प्राप्त कीजिए।

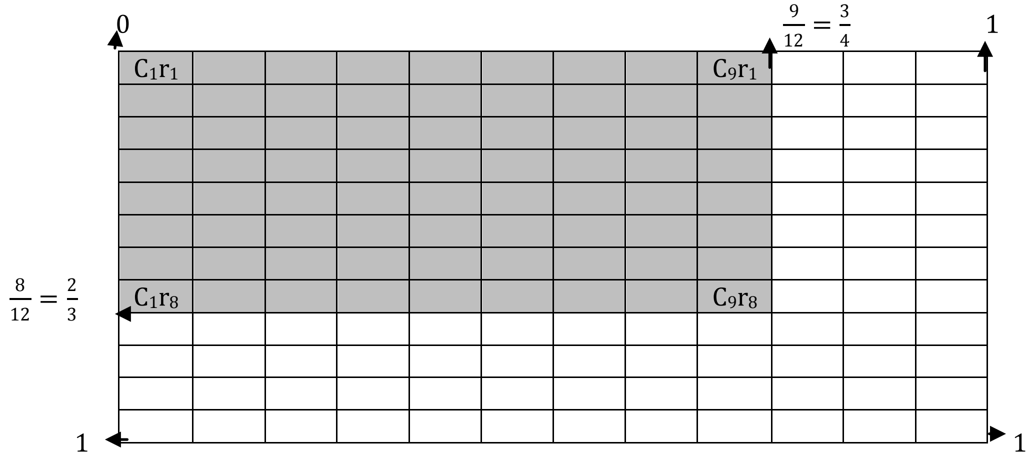
3• -एक इकाई मान का 12 खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $= \frac{1}{12}$ इकाई मान पर 9 खण्ड को छायांकित कर $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ के लिएः अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए।यथा–



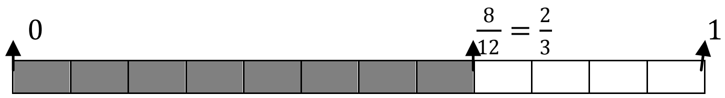
4• प्रक्रम 3 से प्राप्त ग्राफ चित्र को 12*12 के वर्गाकार ग्राफ में क्रमशः $c_1 r_1$ से $c_9 r_1$ तक क्षैतिज दर्शित कीजिए।

5• 12*12 के वर्गाकार ग्राफ में $\frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$ इकाई वर्ग मान के 144 संख्या मान पर ग्राफ खाने प्राप्त होंगा ।

तब 12*12 के वर्गाकार ग्राफ में भाज्य $\frac{1}{2}$ के लिए $\frac{1}{L^2} = \frac{1}{12^2}$ इकाईवर्ग मान पर $(\frac{1*12^2}{2} = 72)$ ग्राफ खानों की संख्या मान आयत/वर्ग चित्र में दर्शित होगा। जिसका क्षैतिज मान प्रक्रम 4 के अनुसार $c_1 r_1$ से $c_9 r_1$ तक दर्शित होगा। और स्तम्भिक मान $c_1 r_1$ से $c_1 r_q$ तक दर्शित होने पर $q = (\frac{a*L^2}{b}) \div p = \frac{1*12^2}{2} \div 9 = 72 \div 9 = 8$ होगा।



6• अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n} = \frac{q}{L} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ का चित्रांकन $c_1 r_1$ से $c_1 r_8$ तक दर्शित होगा। जिसें अलग से दर्शित किया जा सकता है। यथा–



अभीष्ट भागफल चि्रत्रण होगा।

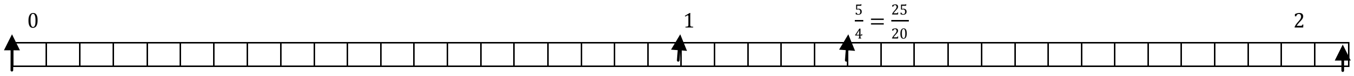
जैसे 2 ■ $\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}$ के लिए

माना कि $\frac{3}{2} \div \frac{5}{4}$ द्वारा प्राप्त अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n}$ है। तब–

1• तुल्यहर = भाज्य भिन्न का हर 2 सहित भाजक भिन्न के अंश 5 एवं हर 4 तीनों का लधुत्तम समापवर्त्य 20 प्राप्त कीजिए।

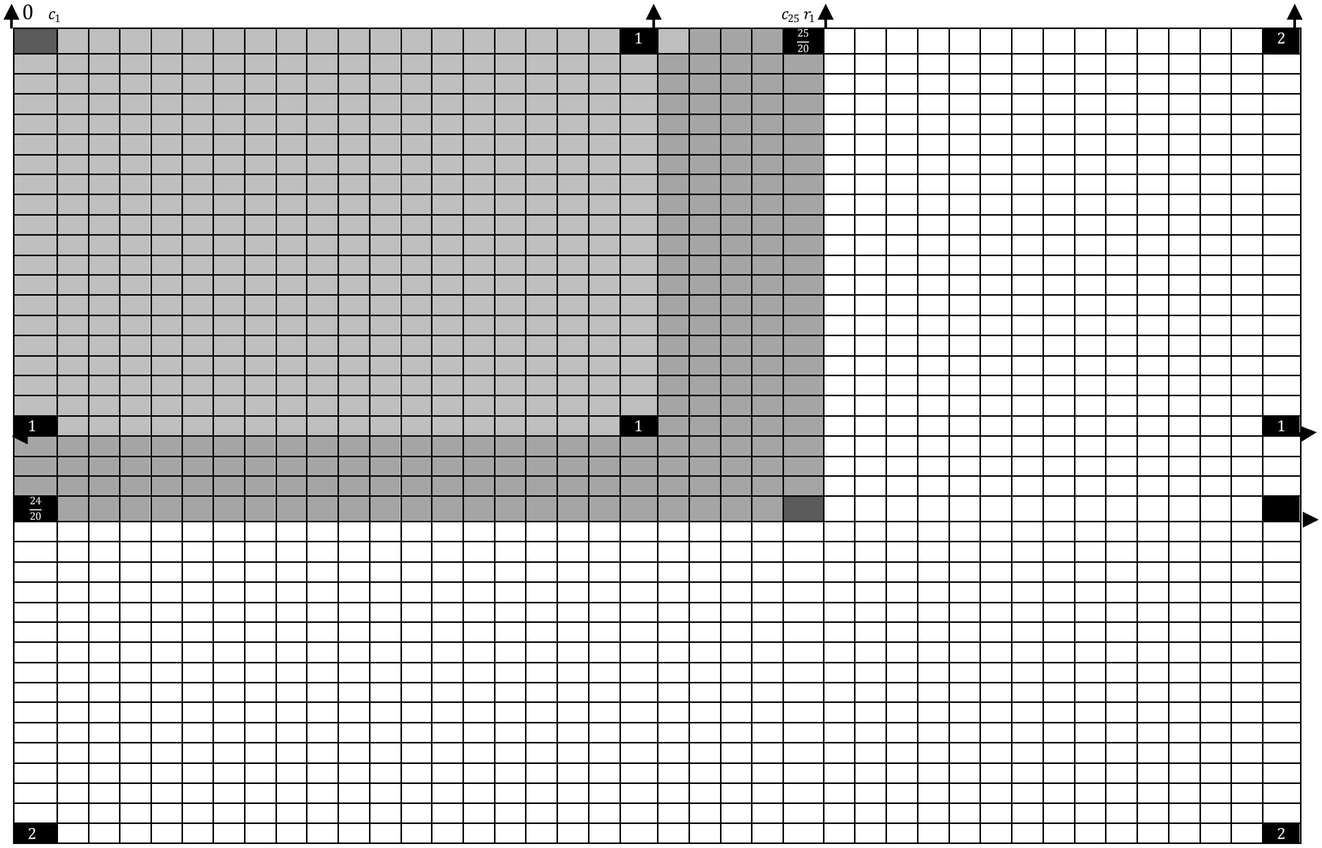
2•. तुल्य हर 20 के सापेक्ष भाजक $\frac{5}{4} = \frac{5*(20\div4)}{20} = \frac{25}{20}$ प्राप्त कीजिए।

3• एक इकाई मान का 20 खण्डों में विभाजन कीजिए। तब एक खण्ड $=\frac{1}{20}$ इकाई मान पर 25 खण्ड को छायांकित कर $\frac{5}{4}=\frac{25}{20}$ के लिए: अलग ग्राफ चित्र प्राप्त कीजिए।यथा–

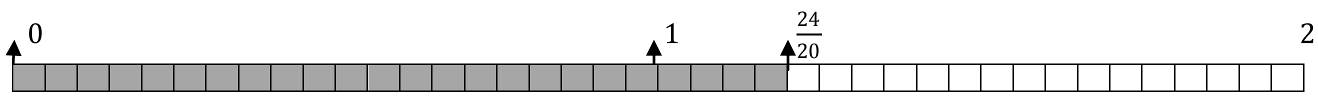


4• चूँकि भाजक $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}=\frac{3(20\div2)}{20}=\frac{30}{20}$ का अंश 30 1इकाई खण्ड =20 से अधिक और 2 इकाई खण्ड =40 से कम है अतः प्रक्रम 3 से प्राप्त ग्राफ चित्र को 2इकाई* 2इकाई केलिए 40*40 के वर्गाकार ग्राफ में क्रमशः c_1r_1 से $c_{25}r_1$ तक क्षैतिज दर्शित कीजिए।

5• 20*20 के वर्गाकार ग्राफ में $\frac{1}{20^2}=\frac{1}{400}$ इकाई वर्ग मान के 400 संख्या मान पर ग्राफ खाने प्राप्त होंगा । तब 40*40 के वर्गाकार r_1 ग्राफ में भाज्य$\frac{3}{2}$ के लिए $\frac{1}{20^2}$ इकाईवर्ग मान पर (;$\frac{3*20^2}{2}=600$) ग्राफ खानों की संख्या मान आयत/वर्ग चित्र में दर्शित होगा। जिसका क्षैतिज मान प्रक्रम 4 के अनुसार c_1r_1 से $c_{25}r_1$ तक दर्शित होगा। और स्तम्भिक मान c_1r_1 से c_1r_q तक दर्शित होने पर q= 600÷ 25 = 24 होगा।



6• अभीष्ट भागफल $\frac{m}{n}=\frac{q}{L}=\frac{24}{20}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$ का चित्रांकन c_1r_1 से c_1r_{24} के लिए $\frac{24}{20}$ मान दर्शित होगा। जिसें अलग से दर्शित किया जा सकता है। यथा–



ध्यानाकर्षण – 1• $\frac{0}{x}=0$ 2• $\frac{x}{0}=\infty$ (अनन्त) 3 • $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a*d}{b*c}$ **जैसे** $\frac{\frac{11}{15}}{\frac{55}{3}}=\frac{11*3}{15*55}$ **4•** $\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a*c}{b}$ **जैसे** $\frac{3}{\frac{5}{7}}=\frac{3*7}{5}$ 5• $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b*c}$ **जैसे** $\frac{\frac{3}{5}}{7}=\frac{3}{5*7}$ 6• दो पूर्णांकों के बीच स्थित पूर्णांको की संख्या सीमित होती है, जबकि दो भिन्नों के बीच स्थित भिन्नों की संख्या असीमित रूपा से विस्तारित किया जा सकता है।

19-11 दो भिन्नों के बीच स्थित भिन्नों की संख्या

(A) समान हर वाले दो भिन्नों के बीच स्थित भिन्नों की संख्या

1■ समान हर वाले दो भिन्न के बीच स्थापना की दृष्टि से

$\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n={ | a – b| – 1} होगा।

जो (a<b) के लिए क्रमशः $\frac{a+1}{r},\frac{a+2}{r},\frac{a+3}{r},-----\frac{a+(n-2)}{r},\frac{a+(n-1)}{r},\frac{a+n}{r}$

अथवा $\frac{b-n}{r},\frac{b-(n-1)}{r},\frac{b-(n-2)}{r},-----\frac{b-3}{r},\frac{b-2}{r},\frac{b-1}{r}$ तथा

(a>b) के लिए क्रमशः $\frac{a-1}{r},\frac{a-2}{r},\frac{a-3}{r},-----\frac{a-(n-2)}{r},\frac{a-(n-1)}{r},\frac{a-n}{r}$

अथवा $\frac{b+n}{r},\frac{b+(n-1)}{r},\frac{b+(n-2)}{r},-----\frac{b+3}{r},\frac{b+2}{r},\frac{b+1}{r}$ होगा।

2■ व्यापक विस्तार में स्थापना की दृष्टि से $\frac{a}{r}=\frac{a*y}{r*y}$ और $\frac{b}{r}=\frac{b*y}{r*y}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= {$y*$ | a – b| – 1} होगा। y के बढते मानों के लिए $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n का मान भी बढ़ता जायेगा।

जो (a<b) के लिए क्रमशः $\frac{a*y+1}{r},\frac{a*y+2}{r},\frac{a*y+3}{r},-----\frac{a*y+(n-2)}{r},\frac{a*y+(n-1)}{r},\frac{a*y+n}{r}$

अथवा $\frac{b*y-n}{r},\frac{b*y-(n-1)}{r},\frac{b*y-(n-2)}{r},-----\frac{b*y-3}{r},\frac{b*y-2}{r},\frac{b*y-1}{r}$ तथा

(a>b) के लिए क्रमशः $\frac{a*y-1}{r},\frac{a*y-2}{r},\frac{a*y-3}{r},-----\frac{a*y-(n-2)}{r},\frac{a*y-(n-1)}{r},\frac{a*y-n}{r}$

अथवा $\frac{b*y+n}{r},\frac{b*y+(n-1)}{r},\frac{b*y+(n-2)}{r},-----\frac{b*y+3}{r},\frac{b*y+2}{r},\frac{b*y+1}{r}$ होगा।

3■ n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से (a<b) के लिए $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच n समांतर भिन्नों की स्थापना–

किसी समांतर श्रेढ़ी अध्ययन के अनुसार यदि श्रेढ़ी का प्रथम पद =a, सर्वान्तर या पदान्तर=d हो तो –

समांतर श्रेढ़ी n वाँ पद = a+(n-1)*d होता है। के शब्दों में भिन्नात्मक समांतर श्रेढ़ी के लिए–

यदि श्रेढ़ी का प्रथम पद $=\frac{a}{r}$, सर्वान्तर या पदान्तर=d हो तो –

समांतर श्रेढ़ी (n+2) वाँ पद $=\frac{b}{r}=\frac{a}{r}+(n+1)*d$ होगा। सें $d=\frac{b-a}{(n+1)*r}$ होगा।

अतः $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच n समांतर की भिन्नों की स्थापना (a<b) के प्रति क्रमषः–

$$\left\{\frac{a(n+1)+(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+2(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+3(b-a)}{r(n+1)}\right\}----------$$

$$\left\{\frac{a(n+1)+(n-2)(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+(n-1)(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+n(b-a)}{r(n+1)}\right\}$$ तथा

(a>b) के प्रति क्रमशः–

$$\left\{\frac{a(n+1)-(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-2(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-3(a-b)}{r(n+1)}\right\}----------$$

$$\left\{\frac{a(n+1)-(n-2)(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-(n-1)(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-n(a-b)}{r(n+1)}\right\}$$ होगा।

उदाहरण 1■ $\frac{2}{11}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 2 − 9| − 1 = 7 − 1 = 6 होगा।

जो क्रमशः $\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11}$ होगा

1• व्यापक विस्तार की दृष्टि से $\frac{2}{11}=\frac{2*2}{11*2}=\frac{4}{22}$ और $\frac{9}{11}=\frac{9*2}{11*2}=\frac{18}{22}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 4 − 18| − 1 =14 −1 =13 होगा।

जो क्रमशः $\frac{5}{22},\frac{6}{22},\frac{7}{22},\frac{8}{22},\frac{9}{22},\frac{10}{22},\frac{11}{22},\frac{12}{22},\frac{13}{22},\frac{14}{22},\frac{15}{22},\frac{16}{22},\frac{17}{22}$ होगा।

2• समान हर वाले दो भिन्न $\frac{2}{11}=\frac{2*3}{11*3}=\frac{6}{33}$ और $\frac{9}{11}=\frac{9*3}{11*3}=\frac{27}{33}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 6 − 27| − 1 =21 −1 =20 होगा।

जो क्रमशः $\frac{7}{33},\frac{8}{33},\frac{9}{33},\frac{10}{33},\frac{11}{33},\frac{12}{33},\frac{13}{33},\frac{14}{33},\frac{15}{33},\frac{16}{33},\frac{17}{33},\frac{18}{33},\frac{19}{33},\frac{20}{33},\frac{21}{33},\frac{22}{33},\frac{23}{33},\frac{24}{33},\frac{25}{33},\frac{26}{33}$ होगा।

3• n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से $\frac{2}{11}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच 7 समांतर भिन्न की स्थापना–

$\frac{2}{11}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच 7 समांतर भिन्न की स्थापना के लिए $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच n समांतर की भिन्नों की स्थापना–क्रमशः

$$\left\{\frac{a(n+1)+(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+2(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+3(b-a)}{r(n+1)}\right\} - - - - - - - - - - --$$

$$\left\{\frac{a(n+1)+(n-2)(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+(n-1)(b-a)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)+n(b-a)}{r(n+1)}\right\}$$ में

a=2, b=9 n=7 और r=11 से a*(n+1) = 2*(7+1) =16, r*(n+1) =11*(7+1) =88 , (b-a) =(9–2) =7 रखने पर–

$\frac{2}{11}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच 7 समांतर भिन्न की स्थापना क्रमशः

$$\frac{16+7}{88},\frac{16+2*7}{88},\frac{16+3*7}{88},\frac{16+4*7}{88},\frac{16+5*7}{88},\frac{16+6*7}{88},\frac{16+7+7}{88} = \frac{23}{88},\frac{30}{88},\frac{37}{88},\frac{44}{88},\frac{51}{88},\frac{58}{88},\frac{65}{88}$$ होगा।

उदाहरण 2■ $\frac{7}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 7 − 3| − 1 = 4-1 =3 होगा।

जो क्रमशः $\frac{6}{10},\frac{5}{10},\frac{4}{10}$ होगा।

1• व्यापक विस्तार की दृष्टि से $\frac{7}{10}=\frac{7*5}{10*5}=\frac{35}{50}$ और $\frac{3}{10}=\frac{3*5}{10*5}=\frac{15}{50}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 35 − 15| − 1 =20-1 =19 होगा।

जो क्रमश $\frac{34}{50},\frac{33}{50},\frac{32}{50},\frac{31}{50},\frac{30}{50},\frac{29}{50},\frac{28}{50},\frac{27}{50},\frac{26}{50},\frac{25}{50},\frac{24}{50},\frac{23}{50},\frac{22}{50},\frac{21}{50},\frac{20}{50},\frac{19}{50},\frac{18}{50},\frac{17}{50},\frac{16}{50},$ होगा।

2• n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से $\frac{7}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच 15 समांतर भिन्न की स्थापना–

$\frac{7}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच 10 समांतर भिन्न की स्थापना के लिए $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच n समांतर की भिन्नों की स्थापना–क्रमशः $\left\{\frac{a(n+1)-(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-2(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-3(a-b)}{r(n+1)}\right\} - - - - - - - - - ..$

$$\left\{\frac{a(n+1)-(n-2)(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-(n-1)(a-b)}{r(n+1)}\right\},\left\{\frac{a(n+1)-n(a-b)}{r(n+1)}\right\}$$ होगा। में

a=7, b=3 n=15 और r=10 से a(n+1) = 7*(15+1) =112, r*(n+1) =10*(15+1) =160 , (b−a) =(7−3) =4 रखने पर–

$\frac{7}{10}$ और $\frac{3}{10}$ के बीच 15 समांतर भिन्न की स्थापना क्रमशः

$$\frac{112-4}{160},\frac{112-2*4}{160},\frac{112-3*4}{160},\frac{112-4*4}{160},\frac{112-5*4}{160},\frac{112-6*4}{160},\frac{112-7*4}{160},\frac{112-8*4}{160},\frac{112-9*4}{160},\frac{112*10*4}{160},\frac{112-11*4}{160},$$

$\frac{112-12*4}{160}, \frac{112-13*4}{160}, \frac{112-14*4}{160}, \frac{112-15*4}{160} =$

$\frac{108}{160}, \frac{104}{160}, \frac{100}{160}, \frac{96}{160}, \frac{92}{160}, \frac{88}{160}, \frac{84}{160}, \frac{80}{160}, \frac{76}{160}, \frac{72}{160}, \frac{68}{160}, \frac{64}{160}, \frac{60}{160}, \frac{56}{160}, \frac{52}{160}$ होगा।

(B) असमान हर वाले दो भिन्नों $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच स्थित भिन्नों की संख्या

1■ व्यापक विस्तार की दृष्टि से स्थापन जैसा कि समान हर वाले दो भिन्नों $\frac{a}{r}$ और $\frac{b}{r}$ के बीच स्थित भिन्नों की संख्या n = |a-b|-1 प्रतिपादित किया जा चुका है। वैसा सीधा प्रतिपादन असमान हर वाले दो भिन्नों $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच स्थित भिन्नों की संख्या के संबंध में सम्भव नहीं है। लेकिन हर b और d के लघुत्तम समापवर्त्य L के सापेक्ष $\frac{a}{b} = \frac{a*(L \div b)}{L} = \frac{P}{L}$ और $\frac{c}{d} = \frac{a*(L \div d)}{L} = \frac{Q}{L}$ प्राप्तकर समान हर वाले दो भिन्नों $\frac{P}{L}$ और $\frac{Q}{L}$ के बीच स्थित भिन्नों की संख्या $n = \{|P-Q|-1\}$ को $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच स्थित भिन्नों की न्यूनतम् संख्या के रूप में प्रतिपादित किया जा सकता है।

व्यापक विस्तार में $\frac{a}{b} = \frac{P}{L} = \frac{P*y}{L*y}$ और $\frac{c}{d} = \frac{Q}{L} = \frac{Q*y}{L*y}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या $n = \{y*|P-Q|-1\}$ होगा। y के बढते मानों के लिए $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n का मान भी बढ़ता जायेगा।

2■ n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से स्थापन : $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ के बीच n समांतर की भिन्नों की स्थापना के लिए $\frac{P}{L}$ और $\frac{Q}{L}$ के बीच n समांतर की भिन्नों की स्थापना (P<Q) के प्रति क्रमशः–

$$\left\{\frac{P(n+1)+(Q-P)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)+2(Q-P)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)+3(Q-P)}{L*(n+1)}\right\} --------- ..$$

$$\left\{\frac{P(n+1)+(n-2)(Q-P)}{L(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)+(n-1)(Q-P)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)+n(Q-P)}{L(n+1)}\right\} \text{ तथा}$$

(P>Q) के प्रति क्रमशः–

$$\left\{\frac{P(n+1)-(P-Q)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)-2(P-Q)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)-3(P-Q)}{r(n+1)}\right\} --------- ..$$

$$\left\{\frac{P(n+1)-(n-2)(P-Q)}{L(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P(n+1)-(n-1)(P-Q)}{L*(n+1)}\right\}, \left\{\frac{P*(n+1)-n(P-Q)}{L*(n+1)}\right\} \text{ होगा।}$$

उदाहरण 1■ $\frac{7}{3}$ और $\frac{5}{2}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या के गणना के लिए–

प्रथम तुल्य हर = हर 3 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य = 6 के सापेक्ष–

$\frac{7}{3} = \frac{7*(6 \div 3)}{6} = \frac{14}{6}$ और $\frac{5}{2} = \frac{5*(6 \div 2)}{6} = \frac{15}{6}$ होगा ।

जिसके बीच स्थापित भिन्नों की संख्या $n = |14-15|-1=0$ होगा।

1• व्यापक विस्तार की दृष्टि से स्थापन

प्रक्रम1 $\frac{7}{3} = \frac{14*2}{6*2} = \frac{28}{12}$ और $\frac{5}{2} = \frac{15*2}{6*2} = \frac{30}{12}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या $n = \{|28-30|-1\} = 2-1 = 1$ होगा। जो $\frac{29}{12}$ होगा।

प्रक्रम2 $\frac{7}{3} = \frac{14*3}{6*3} = \frac{42}{18}$ और $\frac{5}{2} = \frac{15*3}{6*3} = \frac{45}{18}$ जिनके बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या $n = |42-45| - 1 = 3-1 = 2$ होगा। जो क्रमशः $\frac{43}{18}, \frac{44}{18}$ होगा।

प्रक्रम 3 $\frac{7}{3} = \frac{14*4}{6*4} = \frac{56}{24}$ और $\frac{5}{2} = \frac{15*4}{6*4} = \frac{60}{24}$ जिनके बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या $n = |56-60| - 1 = 4-1 = 3$ होगा। जो क्रमशः $\frac{57}{24}, \frac{58}{24}, \frac{59}{60}$ होगा।

2• n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से स्थापन $\frac{7}{3}$ और $\frac{5}{2}$ के बीच 10 समांतर भिन्न की स्थापना–

प्रथम तुल्य हर = हर 3 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य= 6 के सापेक्ष–

$\frac{7}{3}=\frac{7*(6\div3)}{6}=\frac{14}{6}$ और $\frac{5}{2}=\frac{5*(6\div2)}{6}=\frac{15}{6}$ होगा । जिसके अंशों का अंतर का मापांक k =|14-15| =1

$\frac{14}{6}$ और $\frac{15}{6}$ के अंश एवं हर को चाही गई समांतर भिन्न की स्थापन संख्या 10 का आगर =11 द्वारा गुणा करने पर– $\frac{14}{6}=\frac{154}{66}$ और $\frac{15}{6}=\frac{165}{66}$ के बीच 10 समांतर भिन्न तुल्यहर 66 के प्रति अंश 154 और 165 के बीच की वे संख्या होंगे जिनका क्रमागत अंतर मान मापांक k =1 के बराबर हो।

जो क्रमशः– $\frac{155}{66},\frac{156}{66},\frac{157}{66},\frac{158}{66},\frac{159}{66},\frac{160}{66},\frac{161}{66},\frac{162}{66},\frac{163}{66},\frac{164}{66}$ होंगे।

उदाहरण 2■ $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{8}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या के गणना के लिए–

प्रथम तुल्य हर = हर 4 और 8 का लघुत्तम समापवर्त्य = 8 के सापेक्ष–

$\frac{3}{4}=\frac{3*(8\div4)}{8}=\frac{6}{8}$ और $\frac{1}{8}=\frac{1*(8\div8)}{8}=\frac{1}{8}$ होगा ।

जिसके बीच स्थापित भिन्नों की न्यूनतम संख्या n = |6-1|-1=4 होगा।

जो क्रमशः $\frac{5}{8},\frac{4}{8},\frac{3}{8},\frac{2}{8}$ होंगे।

1• ट व्यापक विस्तार की दृष्टि से स्थापन

प्रक्रम 1 $\frac{6}{8}=\frac{6*2}{8*2}=\frac{12}{16}$ और $\frac{1}{8}=\frac{1*2}{8*2}=\frac{2}{16}$ के बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 12 − 2| − 1 =10 − 1 =9 होगा।

जो क्रमशः $\frac{11}{16},\frac{10}{16},\frac{9}{16},\frac{8}{16},\frac{7}{16},\frac{6}{16},\frac{5}{16},\frac{4}{16},\frac{3}{16}$ होगा।

प्रक्रम 2 $\frac{6}{8}=\frac{6*3}{8*3}=\frac{18}{24}$ और $\frac{1}{8}=\frac{1*3}{8*3}=\frac{3}{24}$ जिनके बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 18 − 3| − 1 =15 − 1 =14 होगा।

जो क्रमशः $\frac{17}{24},\frac{16}{24},\frac{15}{24},\frac{14}{24},\frac{13}{24},\frac{12}{24},\frac{11}{24},\frac{10}{24},\frac{9}{24},\frac{8}{24},\frac{7}{24},\frac{6}{24},\frac{5}{24},\frac{4}{24}$ होगा।

प्रक्रम 3 $\frac{6}{8}=\frac{6*4}{8*4}=\frac{24}{32}$ और $\frac{1}{8}=\frac{1*4}{8*4}=\frac{4}{32}$ जिनके बीच स्थित भिन्नों की कुल संख्या n= | 24 − 4| − 1 =20 − 1 =19 होगा।

जो क्रमश $\frac{23}{32},\frac{22}{32},\frac{21}{32},\frac{20}{32},\frac{19}{32},\frac{18}{32},\frac{17}{32},\frac{16}{32},\frac{15}{32},\frac{14}{32},\frac{13}{32},\frac{12}{32},\frac{11}{32},\frac{10}{32},\frac{9}{32},\frac{8}{32},\frac{7}{32},\frac{6}{32},\frac{5}{32}$ होगा।

2• n समांतर भिन्नों की स्थापना की दृष्टि से $\frac{3}{4}$ और $\frac{1}{8}$ के बीच 10 समांतर भिन्न की स्थापना–

प्रथम तुल्य हर = हर 4 और 8 का लघुत्तम समापवर्त्य= 8 के सापेक्ष–

$\frac{3}{4}=\frac{3*(8\div4)}{8}=\frac{6}{8}$ और $\frac{1}{8}=\frac{1*(8\div8)}{8}=\frac{1}{8}$ होगा । जिसके अंशों का अंतर का मापांक k =|6-1| =5

$\frac{6}{8}$ और $\frac{1}{8}$ के अंश एवं हर को चाही गई समांतर भिन्न की स्थापन संख्या 10 का आगर =11 द्वारा गुणा करने पर– $\frac{6}{8}=\frac{66}{88}$ और $\frac{1}{8}=\frac{11}{88}$ के बीच 10 समांतर भिन्न तुल्यहर 88 के प्रति अंश 66 और 11 के बीच की वे संख्या होंगे जिनका क्रमागत अंतर मान मापांक k =5 के बराबर हो।

जो क्रमशः- $\frac{61}{66},\frac{56}{66},\frac{51}{66},\frac{46}{66},\frac{41}{66},\frac{36}{66},\frac{31}{66},\frac{26}{66},\frac{21}{66},\frac{16}{66}$ होंगे।

19-12 का एवं कोष्टक का अनुप्रयोग गणितीय अध्ययन में कई ऐसे व्यापक एवं प्रतिबंधित प्रश्नों का सामना करना होता है जिनके हल के लिए केवल मूलभूत संक्रिया (योग,व्यवकलन,गुणा एवं भाग) चिन्ह का अनुप्रयोग ही पर्याप्त नहीं होता है। पर्याप्तता के क्रम में प्रतिबंधानुसार प्रश्नों के लिए **का** एवं कोश्टक (जिसके अन्तः भाग में **का** और मूलभूत संक्रिया में से एक या अधिक संक्रिया सम्मिलित होता है) का अनुप्रयोग करना होता है।

पर्याप्तता के क्रम में अपनाये गये कोश्टक नाम और उनके संकेत निम्नानुसार है।

1• रेखा कोष्टक ——— **2•** छोटा कोष्टक ( )

3• धनु या मझला कोष्टक { } **4•** बड़ा कोष्टक [ ]

का का अनुप्रयोग– का का अनुप्रयोग गुणा संक्रिया के रूप में किया जाता है।

व्यापक एवं प्रतिबंधित प्रश्नों के हल के लिए का , मूलभूत संक्रिया (+ , −, ∗ ,÷) एव कोश्टकों का हल क्रम—

1• सर्वप्रथम कोष्टकों में निहित प्रतिबंधों का हल किया जाना चाहिए। जिसके लिए भी हल क्रम उपरोक्त क्रमानुसार ही है। अर्थात् सर्वप्रथम रेखा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। तत्पश्चात दूसरे क्रम में छोटा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। फिर तीसरे क्रम में धनु या मझला कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए। अंतिम चौथे क्रम में बड़ा कोष्टक में निहित प्रतिबंध हल कर कीजिए।

2• कोष्टक के बाहर हो या भीतर (अन्दर) प्रथम दो संख्याओं के बीच निहित का को हल कीजिए। तत्पश्चात दूसरे क्रम में दो संख्याओं के बीच निहित ÷ को हल कीजिए । फिर तीसरे क्रम ∗ से सम्बद्ध रखने वाले समस्त संख्या को एक साथ हल कीजिए। अंतिम चौथे क्रम में + एवं − का एक मुष्त सँयुक्त हल करे।

3• किसी कोष्टक के बाहर + चिन्हांकित होने पर कोष्टक का हल मान यथावत लिए जाते हैं। जबकि कोष्टक के बाहर − चिन्हांकित होने पर कोष्टक का हल मान + का − और − का + में बदल कर लिए जाते हैं।

4• दो या दो से अधिक कोश्टकों के बीच कोई संक्रिया संकेत दर्ज नहीं होने पर इन कोष्टकों में निहित प्रतिबंध के अनुसार प्राप्त हल मानों का गुणा किया जाना चाहिए। अर्थात दो या दो से अधिक कोष्टकों के बीच कोई संक्रिया संकेत दर्ज नहीं होने पर इनके बीच गुणा संक्रिया ही माना जावे।

उदाहरण 1■ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\text{ का }\frac{1}{2}*\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\div\frac{1}{2}-\frac{1}{4}*\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}*\frac{2}{1}-\frac{1}{4}*\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}+\frac{1}{1}-\frac{1}{8} = \frac{4}{8}+\frac{8}{8}-\frac{1}{8} = \frac{11}{8} = 1\frac{1}{3}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ $\frac{3}{5}\div\frac{7}{15}\text{ का }\frac{5}{4}+\frac{9}{14}*\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{3}{5}\div\frac{7}{12}+\frac{9}{14}*\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{7}{20}+\frac{9}{14}*\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

$= \frac{7}{20}+\frac{3}{7}-\frac{1}{2} = \frac{7*7}{140}+\frac{3*20}{140}-\frac{1*70}{140} = \frac{49}{140}+\frac{60}{140}-\frac{70}{140} = \frac{39}{140}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ $\frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div(\frac{4}{5}*\frac{2}{3}-\overline{\frac{7}{8}*\frac{4}{5}-}\frac{1}{2})\}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div(\frac{4}{5}*\frac{2}{3}-\overline{\frac{7}{10}-\frac{1}{2}})\}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div\frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}(\frac{4}{5}*\frac{2}{3}-\overline{\frac{7}{10}-\frac{5}{10}})\}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div(\frac{4}{5}*\frac{2}{3}-\frac{2}{10})\}] = \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div(\frac{8}{15}-\frac{1}{5})\}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div(\frac{8}{15}-\frac{3}{15})\}] = \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{15}{28}\text{ का }\frac{7}{9}\div\frac{5}{15}\}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{5}{12}\div\frac{1}{3}\}] = \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\{\frac{5}{12}*\frac{3}{1}\}] = \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}\div\frac{5}{4}]$

$= \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{5}{6}*\frac{4}{5}] = \frac{3}{4}[\frac{9}{11}-\frac{2}{3}] = \frac{3}{4}[\frac{9*3}{33}-\frac{2*11}{33}] = \frac{3}{4}[\frac{27}{33}-\frac{22}{33}] = \frac{3}{4}*\frac{5}{33} = \frac{5}{44}$

उत्तर होगा।

----------19----------

अध्याय -20
दशमलव भिन्न

दशमलव भिन्न के अध्ययन के पूर्व कुछ गणितीय शब्दों का विश्लेषण आवश्यक है। जो निम्नानुसार है।

20-1 दशमलव भिन्न के अध्ययन के संदर्भ गणितीय संक्रिया/ शब्द विश्लेषण

1• संख्या विशेष का घात (पावर)बढ़ाना गणित अध्ययन में किसी संख्या विशेष को उसी संख्या विशेष द्वारा कई बार गुणा करना पड़ता है। जिसका सरल एवं संक्षिप्त संकेतन के लिए उस संख्या विशेष P के दाँयी ओर ऊपर गुणा के लिए दर्शित बारंबारता मान n को चढाकर दर्ज किया जाना संख्या विशेष का घात (पावर) बढ़ाना कहलाता है।

जैसे $2*2 = 2^2$ जिसे पढ़ेंगे दो की घात दा

$2*2*2 = 2^3$ जिसे पढ़ेंगे दो की घात तीन

$2*2*2*2 = 2^4$ जिसे पढ़ेंगे दो की घात चार

2*2*2*2 ----------n बार गुणा करने पर $= 2^n$ जिसे पढ़ेंगे दो की घात एन

$5*5*5*5*5*5*5*5*5*5 = 5^{10}$ जिसे पढ़ेंगे पाँच की घात दस

$10*10*10*10*10*10*10*10*10*10 = 10^{10}$ जिसे पढ़ेंगे दस की घात दस

2• संख्या विशेष में प्रयुक्त अंकों का स्थानीय मान विदित हो कि हमारे दैनिक जीवन में जो संख्या पद्धति अनुप्रयोग किया जा रहा है उसे हिन्दू–अरेबिक दाशमिक पद्धति कहते हैं। स्पश्ट है हमारी प्रचलित संख्या हिन्दी अरबी सभ्यता की देन है। जिसका आधार दस ;10) है। आधारमिति विश्लेषण गणित के अनुसार संख्या लेखन या प्रदर्शन में प्रयुक्त अंक 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 होंगे। संख्या लेखन में दाँये से बाँये x वें स्थान में स्थित अंक का मान 10^{x-1} गुणा होगा।

जैसे 406543 में अंकों का स्थानीय मान –

स्थान क्रम 1 में स्थित– इकाई अंक 3 का स्थानीय मान $3 * 10^{1-1} = 3*10^0 = 3 * 1 = 3$

स्थान क्रम 2 में स्थित– दहाई अंक 4 का स्थानीय मान $4 * 10^{2-1} = 4*10^1 = 4 * 10 = 40$

स्थान क्रम 3 में स्थित– सैकड़ा अंक 5 का स्थानीय मान $5 * 10^{3-1} = 5*10^2 = 5 * 100 = 500$

स्थान क्रम 4 में स्थित– हजारवाँ अंक 6 का स्थानीय मान $6 * 10^{4-1} = 6*10^3 = 6 * 1000 = 6000$

स्थान क्रम 5 में स्थित– दस हजारवाँ अंक 0 का स्थानीय मान $0 * 10^{5-1} = 0*10^4 = 0 * 10000 = 00000$

स्थान क्रम 6 में स्थित– लाखवाँ अंक 4 का स्थानीय मान $4 * 10^{6-1} = 4*10^5 = 4 * 100000 = 400000$

संख्या प्रसार या प्रसारित संख्या किसी संख्या का प्रसार या प्रसारित संख्या उस संख्या के अंकों के स्थानीय मान का योग पद में विस्तारित रूप से दर्शित करना होता है।

जैसे 4,06,543 का प्रसार या प्रसारित संख्या = 400000+00000+6000+500+40+3

55,55,55,555 का प्रसार या प्रसारित संख्या =

500000000+50000000+5000000+500000+50000+5000+500 +50+5

20-2 दशमलव संख्या की ओर

संख्या विशेष में प्रयुक्त अंकों का स्थानीय मान और संख्या प्रसार या प्रसारित संख्या के अध्ययन में स्पष्ट विदित होता कि इकाई , दहाई , सैकड़ा , हजार , दसहजार, लाख . . . . में स्थित अंक जिनका स्थानीय मान संख्या आधार मान दस का क्रमशः एक गुना (यथावत) , दस गुना , सौ गुना, हजार गुना, दसहजारगुना, लाख गुना .... के रूप प्रसारित होता है। भिन्न के अध्ययन उपरांत स्वाभाविक प्रश्न बनता है कि वह संख्या विशेष जिसमें प्रयुक्त अंकों का स्थानीय मान और संख्या प्रसार या प्रसारित संख्या में अंक का स्थानीय मान उसके दसवें ,सौवें , हजारवें , दसहजारवें ,लाखवें ....भाग या खण्ड या अंश में दर्शित किया जा सकता है ? हमारे भारतीय मनीषी गणितज्ञों ने इस प्रश्न के साकारात्मक उत्तर के खोज की ओर शून्य की खोज के साथ लव (ज्योति) बिन्दु का खोज किये । जिसे हमारी दशाधारी‡ संख्यांकन पद्धति के तारतम्य दशमलव बिन्दु कहते हैं। का खोज किये । जिसके

‡ एन–आधारी संख्यांकन पद्धति के तारतम्य में एनमलव बिन्दु कह सकते हैं। जैसे दो–आधारी संख्यांकन पद्धति के तारतम्य में द्विमलव बिन्दु , तीन–आधारी संख्यांकन पद्धति के तारतम्य में त्रिमलव बिन्दु , पाँच–आधारी संख्यांकन पद्धति के तारतम्य में पंचमलव बिन्दु कह सकते हैं।

बाँयी ओर उनागर पूर्णांक संख्या के अंक दाँये से बाँये क्रमशः इकाई , दहाई , सैकड़ा , हजार , दसहजार, लाख . . . . स्थान में दर्शित होते हैं तथा दाँयी ओर उनागर अपूर्ण संख्या (अपूर्णांशः) के अंक बाँये से दाँये क्रमशः दसांश , सतांश , हजारांश ,दस–हजारांश , लाखांश, ... स्थान में दर्शित होते हैं।

बिन्दु की ज्यामिति संकल्पना– किसी तल पर नुकीली पेन्सिल से बनाया गया चिन्ह बिन्दु की ज्यामिति संकल्पना है।

पूर्णांक (दशमलव भिन्न अध्ययन में पूर्णांश कहते है) एवं अपूर्णांश के बीच दशमलव बिन्दु स्थापित करना

दशमलव बिन्दु को पूर्णांक एवं अपूर्णांश के बीच नीचे स्थापित करना चाहिए। यथा– पूर्णांक w और अपूर्णांश v के बीच दशमलव बिन्दु स्थापना‡ – w.v होगा। जैसे– 0.5, 4.75 4568.045

ध्यानाकर्षण 1• जैसा किसी पूर्णांक या पूर्णांश के बाँयी ओर चाहे जितना शून्य स्थापित करें उस पूर्णांक का मान यथावत ही बना रहता है।

जैसे 245 = 0245 = 00245 = 000245 = 0000245 = 00000245 = 000000245---- -----------

2• इसी प्रकार किसी अपूर्णांश के दाँयी ओर चाहे जितना शून्य स्थापित करें उस अपूर्णांश का मान यथावत ही बना रहता है।

जैसे 0.245 =0.2450 =0.24500 =0.245000 =0.2450000=0.24500000=0.245000000 ....

20 -3 दशमलव भिन्न में पूर्णांश एवं अपूर्णांश खण्ड के अंकों का स्थानीय मान

1• पूर्णांश खण्ड के अंकों का स्थानीय मान–दाँयी से बाँयी ओर x वें क्रम पर स्थित अंक का स्थानीय मान उस अंक का $10^{(x-1)}$ गुणा होगा।

2• अपूर्णांश खण्ड के अंकों का स्थानीय मान– बाँयी से दाँयी ओर x वें क्रम पर स्थित अंक का स्थानीय मान उस अंक का $10^{-x} = \frac{1}{10^x}$ भाग या अंश होगा।

जैसे 123.235 के अंकों का स्थानीय मान गणना के लिए पूर्णांश 123 और अपूर्णांश 2,3,5 है।

पूर्णांश 123 के अंकों का स्थानीय मान– दाँये से बाँये क्रमशः

इकाई अंक 3 का स्थानीय मान $= 3*10^{(1-1)} = 3*10^0 = 3*1 = 3$ तीन

दहाई अंक 2 का स्थानीय मान $= 2*10^{(2-1)} = 3*10^1 = 2*10 = 20$ बीस

सैकड़ा अंक 1 का स्थानीय मान $= 1*10^{(3-1)} = 3*10^2 = 1*100 = 100$ एक सौ

अपूर्णांश 2,3,5 के अंकों का स्थानीय मान– बाँये से दाँये क्रमशः

2 का स्थानीय मान $= 2*10^{-1} = 2*\frac{1}{10} = \frac{2}{10}$ = दो दशांश ($\frac{1}{10}$= एक दशांश या दशांश पढ़ते है।)

3 का स्थानीय मान $= 3*10^{-2} = 3*\frac{1}{10^2} = 3*\frac{1}{100} = \frac{3}{100}$ = तीन शतांश ($\frac{1}{100}$ =एक शतांश या शतांश पढ़ते है।)

5 का स्थानीय मान $= 5*10^{-3} = 5*\frac{1}{10^3} = 5*\frac{1}{1000} = \frac{5}{1000}$ = पाँच हजारांश ($\frac{1}{1000}$ = एक हजारांश या हजारांश पढ़ते है।)

20-4 दशमलव भिन्न का वाचन वाचन का अर्थ बोलना या पढ़ना से है । तब दशमलव भिन्न का वाचन करने के लिये पहले पूर्णांश के अंकों बनी संख्या को पूर्ण संख्या भाव से एक साथ पढ़ते हैं।बाद दशमलव उच्चारित कर अपूर्णांश के अंकों को अलग–अलग एक–एक अंक का अंकीय मान वाचन करते हैं।

जैसे 123.235 का वाचन – एक सौ तेइस , दशमलव ,दो, तीन, पाच

5,60,719.00754328 का वाचन – पाँच लाख, साठ हजार , सात सौ उन्नीस, दशमलव, शून्य,शून्य, सात,पाँच, चार,तीन, दो,आठ ।

20-5 विशुद्ध दशमलव भिन्न जिस दशमलव भिन्न का पूर्णांश मान शून्य (0) हो उस दशमलव भिन्न को विशुद्ध दशमलव भिन्न कहते हैं। **जैसे** 0.35 , 0.456 , 0.305

‡ गणित अध्ययन में बिन्दु के स्थापन में स्थान प्रसंग का विशेष महत्व है – **1** कर्ता के अर्थ में x· का अर्थ x+1 , 5˙= 5+1=6 । **2** गुणाा के अर्थ में M · N, 15 · 12 =180 । **3** आवर्त दशमलव भिन्न में आवर्ती अंक या आवर्ती अंक समूह को चिन्हांकित करने में $0.\dot{5}$ का अर्थ शून्य दशमलव आवर्त पाँच है।जिसका व्यापक विस्तार 0.5555555------∞ तक है। $16.03\dot{5}4201\dot{7}$ का अर्थ सोलह दशमलव शून्य ,तीन आवर्त पाँच,चार,दो,शून्य,एक,सात है।जिसका व्यापक विस्तार 16.03,542017,542017,542017------∞ तक है। **4** ज्यामिति अध्ययन में किसी तल पर स्थित बिन्दु। $\dot{A}$ दर्शित होगा।

विशुद्ध दशमलव भिन्न के प्रकार

1• शांत दशमलव भिन्न   2• अशांत दशमलव भिन्न

1• **शाांत दशमलव भिन्न** जिस विशुद्ध दशमलव भिन्न में अपूर्णांश के अंकों की स्थान संख्या निश्चित होता हैं , उस दशमलव भिन्न को शांत दशमलव भिन्न कहते है।

जैसे 2.5 , 0.1258 , 15.78951, 63509.23456

2• **अशांत दशमलव भिन्न** जिस विशुद्ध दशमलव भिन्न में अपूर्णांश के अंकों की स्थान संख्या अनन्त पद तक विस्तारित होता हो या विस्तारित किया जा सकता हैं , उस दशमलव भिन्न को अशांत दशमलव भिन्न कहते है।

जैसे – 0.55555555------------ , 0.59 432432432432 432---------, 0.01010101----------

0.101001000100001------------------- , 0.31 311 3111311113 111113---------------

अशांत दशमलव भिन्न के प्रकार यह दो प्रकार के होते है।

1• आवर्ती अशांत दशमलव भिन्न   2• अनावर्ती अशांत दशमलव भिन्न

1• **आवर्ती अशांत दशमलव भिन्न** ऐसे दशमलव भिन्न जिसमें दशमलव बाद या दशमलव के कुछ स्थान बाद कोई अंक या अंक समूह अनन्त क्रम तक दोहराते हुए अनन्त पद तक विस्तारित होता हो या विस्तारित किया जा सकता हैं, उस दशमलव भिन्न को आवर्ती अशांत दशमलव भिन्न या आवर्ती दशमलव भिन्न कहते है।

जैसे 0.55555555------------ , 0.59 432432432432 432---------, 0.01010101----------

2• **अनावर्ती अशांत दशमलव भिन्न** ऐसे दशमलव भिन्न जिसमें दशमलव बाद अंकों का क्रम का कोई निश्चित आधार नहीं होता है।

जैसे 0.101001000100001------------------- , 0.31 311 3111311113 111113---------------

सामान्य तौर पर अभाज्य संख्या का n वाँ मूल $(n \geq 2)$ का दशमलव निरूपण अनावर्ती अशांत दशमलव भिन्न में होता है।

आवर्ती दशमलव भिन्न का सरल गणितीय निरूपण आवर्ती दशमलव के जो अंक यां अंक समुह होते हैं उसके प्रथम और अंतिम अंक के ऊपर षिरों बिन्दु‡ दर्शित करते है।

जैसे 0.3333-------- का सरल गणितीय निरूपण $0.\dot{3}$ दर्शित होगा। जिसे पढ़ेंगे शून्य दशमलव तीन आवर्त

0.25252525------------ का सरल गणितीय निरूपण $0.\dot{2}\dot{5}$ दर्शित होगा। जिसे पढ़ेंगे शून्य दशमलव दो ,पाँच आवर्त।

0.143021430214302------------ का सरल गणितीय निरूपण $0.\dot{1}430\dot{2}$ दर्शित होगा जिसे पढ़ेंगे शून्य दशमलव एक ,चार, तीन, शून्य, दो आवर्त।

0.231149714971497 -------------- का सरल गणितीय निरूपण $0.231\dot{1}49\dot{7}$ दर्शित होगा जिसे पढ़ेंगे शून्य दशमलव दो, तीन, एक, बाद एक, चार, नव, सात का आवर्त ,

आवर्ती दशमलव भिन्न के प्रकार यह दो प्रकार के होते है।

1• सरल या पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न   2• मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न

1• **सरल आवर्ती दशमलव भिन्न** ऐसे दशमलव भिन्न जिसमें दशमलव बाद ही कोई अंक या अंक समूह अनन्त क्रम तक दोहराते हुए अनन्त पद तक विस्तारित होता हो या विस्तारित किया जा सकता हैं ,उस दशमलव भिन्न को सरल आवर्ती दशमलव भिन्न कहते है।

जैसे $0.\dot{3}$ $0.\dot{4}\dot{7}$ $0.\dot{4}0234\dot{1}$ $0.\dot{0}43478260869565717391\dot{3}$

2• **मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न** ऐसे दशमलव भिन्न जिसमें दशमलव बाद कुछ अंक शांत दशमलव भिन्न में दर्शित होते है फिर कोई अंक या अंकों का समूह दोहराते हुए अनन्त पद तक विस्तारित होता हो या विस्तारित किया जा सकता हैं , उस दशमलव भिन्न को मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न कहते है।

जैसे $0.42\dot{3}5\dot{7}$ $0.00000567\dot{1}4285\dot{7}$

20-6 दशमलव भिन्नों का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण

1• शांत या सरल दशमलव भिन्नों का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण

$\frac{a}{b}$ के लिए a = दशमलव भिन्न का दशमलव बिन्दु हटाने पर प्राप्त संख्या होगा और b = दशमलव बिन्दु बाद प्रयुक्त अंकों की स्थान संख्या

‡ **शिरों बिन्दु** किसी अंक या अक्षर के शीर्ष पर लगाया गया बिन्दु शिरों बिन्दु कहलाता है। जैसे $\dot{4}$ $\dot{7}$ $\dot{a}$, $\dot{b}$

से आगर (एक अधिक) संख्या मान की सबसे छोटी संख्या। या दशमलव के स्थान पर एक (1) और इस एक के दाँयी ओर दशमलव बिन्दु बाद प्रयुक्त अंकों की स्थान संख्या के बराबर शून्य दर्शित करने से बनी संख्या होगा। प्रथम सरलतम प्रतिनिरूपण होगा। जिसका मानक रूप नियमानुसार प्राप्त किया जा सकता है।

जैसे $1.7 = \frac{1\ 7}{10} = 1\frac{7}{10}$ $\quad 0.456 = \frac{456}{1000} = \frac{456 \div 8}{1000 \div 8} = \frac{57}{125}$

2• सरल या पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्नों का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण $\frac{a}{b}$ के लिए a = प्राप्त पूर्णांक होगा। और b = दशमलव बिन्दु बाद प्रयुक्त आवर्ती अंकों की स्थान संख्या मान की सबसे बड़ी संख्या। **या** दशमलव बिन्दु बाद प्रयुक्त आवर्ती अंकों की स्थान संख्या मान तक 9-9 दर्शित करने मात्र से बनी संख्या प्रथम सरलतम प्रतिनिरूपण होगा । जिसका मानक रूप नियमानुसार प्राप्त किया जा सकता है।

जैसे $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{3 \div 3}{9 \div 3} = \frac{1}{3}$ $\quad 0.\dot{4}\dot{5} = \frac{45}{99} = \frac{45 \div 9}{99 \div 9} = \frac{5}{11}$

$0.142857 = \frac{142857}{999999} = \frac{142657 \div 142857}{999999 \div 142857} = \frac{1}{7}$

3• मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्नों का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण

जिस मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्नों का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण करना उसे विलोकित (देख) कर निम्नानुसार कथनों पर चाही गई संख्या मान प्राप्त कीजिए।

1• पूरे मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न के अंकों से बनी संख्या =c

2• अनावर्ती अंकों से बनी संख्या =d

3• आवर्ती अंकों की स्थान संख्या =e

4• अनावर्ती अंकों की स्थान संख्या =f

तब $\frac{a}{b}$ के लिए – a = [c – d] सें प्राप्त संख्या होगा।

तथा b=[e अंको की सबसे बड़ी संख्या]*[(f+1) अंको की सबसे छोटी संख्या] सें प्राप्त गुणनफल संख्या होगा।

या $b=[10^e - 1]*[10^f]$ सें प्राप्त गुणनफल संख्या होगा।

या b=[e स्थान तक 9-9 दर्शित संख्या \ d स्थान तक 0 (शून्य) दर्शित संख्या, से प्राप्त संख्या होगा।

जैसे मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न $0.365\dot{4}4\dot{5}$ का बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण के लिए–

1• पूरे मिश्र आवर्ती दषमलव भिन्न के अंकों से बनी संख्या c=365445

2• अनावर्ती अंकों से बनी संख्या d=365

3• आवर्ती अंको $\dot{4}4\dot{5}$ की स्थान संख्या e=3

4• अनावर्ती अंकों 365 की स्थान संख्या f =3

तब $\frac{a}{b}$ के लिए – a = [c – d] = 365445 – 365 = 365080

तथा b=[e अंको की सबसे बड़ी संख्या]*[d+1] अंको की सबसे छोटी संख्या, सें प्राप्त गुणनफल संख्या होगा। से

b=[999]*[1000] =999000

या $b=[10^e - 1]*[10^d]$ सें प्राप्त गुणनफल संख्या होगा। से

$=[10^3 - 1]*[10^3]$ =[1000-1]*[1000] = 999*1000 =999000

या b=[e स्थान तक 9-9 दर्शित संख्या \ d स्थान तक 0 (शून्य) दर्शित संख्या, से प्राप्त संख्या होगा।

= [3 स्थान तक 9-9 दर्शित संख्या \ 3 स्थान तक 0 (शून्य) दर्शित संख्या]

= 999\000 =999000

इस प्रकार के हलो से $0.365\dot{4}4\dot{5} = \frac{365080}{999000} = \frac{36508}{99900} = \frac{9127}{24975}$ होगा।

इसी प्रकार $0.419\dot{5}\dot{7} = \frac{41957 - 419}{99000} = \frac{41538}{99000} = \frac{6923}{16500}$ होगा ।

20-7 सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ ⧗ का दशमलव निरूपण दशमलव भिन्नों का प्रथम सरलतम बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में प्रतिनिरूपण में – शांत दशमलव भिन्न के परिपेक्ष्य में हर b को 10^r =[(r+1) अंको की सबसे छोटी संख्या,के रूप में ,आवर्ती दशमलव भिन्न के परिपेक्ष्य में हर b को $(10^r - 1)$ = (r अंकों की सबसे बड़ी संख्या) के रूप में, तथा मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न के परिपेक्ष्य में हर b को $(10^r - 1) * 10^y$ = (r अंकों की सबसे बड़ी संख्या)* (y अंकों की सबसे बड़ी संख्या) के रूप में, प्राप्त करना होता है। तब किसी बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण में $\frac{a}{b}$ का तुल्य भिन्न $\frac{a_r}{b_r}$ इस प्रकार प्राप्त करते हैं कि तुल्य भिन्न का हर b_r 10^r **अथवा** $(10^r - 1)$ **अथवा** $(10^x - 1) * 10^y$ के रूप में प्राप्त हो सके। इसके लिए हर b की प्रकृति परखने उपरांत ही बटे $\frac{a}{b}$ भिन्न का दशमलव निरूपण नियम प्रतिपादित किया जा सकता है। जो निम्नानुसार आत्मसाती होंगे।

(1) यदि सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का हर b $2^r, 5^r, 2^r10^n$ तथा 5^r10^n में परिवर्तनीय हो तो भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण शांत दशमलव में होगा ।

1 A भिन्न $\frac{a}{2^r}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{a*5^r}{2^r*5^r} = \frac{a*5^r}{10^r}$ का दशमलव निरूपण $a*5^r$ का हल मान संख्या के दाँयी से बाँयी ओर r स्थान अंक बाद दशमलव बिन्दु दर्शित करने से होगा।

जैसे भिन्न $\frac{1}{2}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{1*5}{2*5} = \frac{5}{10} = 0.5$

भिन्न $\frac{7}{8} = \frac{7}{2^3}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{7*5^3}{2^3*5^3} = \frac{7*125}{10^3} = \frac{875}{10^3} = 0.875$

भिन्न $\frac{23}{16} = \frac{23}{2^4}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{23*5^4}{2^4*5^4} = \frac{23*625}{10^4} = \frac{14375}{10^4} = 1.4375$

1B भिन्न $\frac{a}{5^r}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{a*2^r}{5^r*2^r} = \frac{a*2^r}{10^r}$ का दशमलव निरूपण ´5^r का हल मान संख्या के दाँयी से बाँयी ओर r स्थान अंक बाद दशमलव बिन्दु दर्शित करने से होगा।

जैसे भिन्न $\frac{1}{5}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{1*2}{5*2} = \frac{2}{10} = 0.2$

भिन्न $\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{7*2^3}{5^3*2^3} = \frac{7*8}{10^3} = \frac{56}{10^3} = 0.056$

भिन्न $\frac{23}{625} = \frac{23}{5^4}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{23*2^4}{5^4*2^4} = \frac{23*16}{10^4} = \frac{368}{10^4} = 0.0368$

1C भिन्न $\frac{a}{2^r*10^n}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{a*5^r}{(2^r*5^r)*10^n} = \frac{a*5^r}{10^{r+n}}$ का दशमलव निरूपण $a*5^r$ का हल मान संख्या के दाँयी से बाँयी ओर (r+n) स्थान अंक बाद दशमलव बिन्दु दर्शित करने से होगा।

जैसे भिन्न $\frac{1}{20} = \frac{1}{2*10}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{1*5}{(2*5)*10} = \frac{5}{10^{1+1}} = \frac{5}{10^2} = \frac{5}{100} = 0.05$

भिन्न $\frac{7}{800} = \frac{7}{8*100} = \frac{7}{2^3*10^2}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{7*5^3}{(2^3*5^3)*10^2} = \frac{7*125}{10^{3+2}} = \frac{875}{10^5} = 0.00875$

1D भिन्न $\frac{a}{5^r*10^n}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{a*2^r}{(5^r*2^r)*10^n} = \frac{a*2^r}{10^{r+n}}$ का दशमलव निरूपण $a*2^r$ का हल मान संख्या के दाँयी से बाँयी ओर (r+n) स्थान अंक बाद दशमलव बिन्दु दर्शित करने से होगा।

जैसे भिन्न $\frac{1}{50} = \frac{1}{5*10}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{1*2}{(5*2)*10} = \frac{2}{10^{1+1}} = \frac{2}{10^2} = \frac{2}{100} = 0.02$

भिन्न $\frac{7}{12500} = \frac{7}{125*100} = \frac{7}{5^3*10^2}$ का तुल्य सदृश्य भिन्न $= \frac{7*2^3}{(5^3*2^3)*10^2} = \frac{7*8}{10^{3+2}} = \frac{56}{10^5} = 0.00056$**(1) यदि सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का हर b का इकाई अंक 1,3,7 ,9 हो तो** $\frac{a}{b} = \frac{a_r}{b_r}$ का हर b_r =(($10^r - 1$)= (r अंकों की सबसे बड़ी संख्या) में परिवर्तनीय होगा तथा भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण आवर्ती दशमलव में होगा।जिसका हल मान

⧗ (अंशमान a < हरमान b) के प्रति पूर्णांश प्रखण्ड का अंतिम शेषफल = अंशमान a तथा दशमलव निरूपण का पूर्णांश 0 होगा।

$a_r = a*[(10^r-1)\div b]$ के दाँयी से बाँयी ओर r स्थान बाद दशमलव बिन्दु लगााने से प्राप्त होगा जो r अंकीय समूह में आवर्ती होगा।

जैसे $\frac{1}{3}=\frac{1*3}{3*3}=\frac{3}{9}=\frac{3}{10^1-1}=0.\dot{3}$ $\quad \frac{4}{33}=\frac{4*3}{33*3}=\frac{12}{99}=\frac{3}{10^2-1}0.\dot{1}\dot{2}$

$\frac{1}{101}=\frac{1*99}{101*99}=\frac{99}{9999}=\frac{0099}{10^4-1}=0.\dot{0}09\dot{9}$ $\quad \frac{5}{7}=\frac{5*142857}{7*142857}=\frac{714285}{999999}=\frac{714285}{10^6-1}=0.\dot{7}1428\dot{5}$

(3) यदि सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का हर b का इकाई अंक 2,4,5,6,0 तथा कम से कम एक गुणनखण्ड 1,3,7,9 इकाई अंक की संख्या हो तो भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण मिश्र आवर्ती दशमलव मिन्न होगा। जिसके लिए हल प्रक्रम निम्नानुसार आत्मसात करें।

प्रक्रम 1 भिन्न $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}$ का हर $b_1=(10^y-1)*10^x$ = [{yअंको की सबसे बडी संख्या जो y स्थानिक 9-9 की संख्या होगी} के दाँये x स्थानिक 0-0 दर्ज करने से प्राप्त संख्या होगी।] जिसके सापेक्ष अंश $a_1=a*(b_1\div b)$ प्राप्त होगा। जिसे(x+y) अंकीय में दर्शित कीजिए। जिसके लिए आवश्यक स्थान पूर्ति हेतू इसके बाँयी ओर 0 की स्थान संख्या बढ़ावें।

प्रक्रम 2 भिन्न $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1}{10^x*q}$ में q= y स्थानिक 9-9 की संख्या होगी। दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 सापेक्ष अंश a_1 को दो अनुभाग– x अंकीय बाँया अनुभाग\ y अंकीय दाँया अनुभाग में दर्शित कीजिए।

और $\frac{a_1}{10^x*q}=\frac{1}{10^x}[w\frac{p}{q}]$ प्राप्त कीजिए जहाँ पूर्णोक w = x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या तथा

अंश p ={(x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या)+(y अंकीय दाँया अनुभाग की संख्या)} होगा।

तब सरल भिन्न $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1}{10^x*q}=\frac{1}{10^x}[w\frac{p}{q}]$ का मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण–

1• p<y होने पर अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णोक w = x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या के अंक बाद आवर्ती अंक समूह के अंक p ={(x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या)+(y अंकीय दाँया अनुभाग की संख्या)} के अंक होंगे।

2• P>y होने पर अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णोक w +1 = (x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या +1) के अंक बाद आवर्ती अंक समूह के अंक p+1 =[{(x अंकीय बाँया अनुभाग की संख्या)+(y अंकीय दाँया अनुभाग की संख्या)} – q] के अंक होंगे।

जैसे 1• $\frac{a}{b}=\frac{8}{15}$ का मिश्र आवर्ती दशमलव के लिए $\frac{8}{15}=\frac{8*6}{15*6}=\frac{48}{90}=\frac{1}{10^1}[\frac{4\backslash 8}{9}]=\frac{1}{10^1}[4\frac{4+8}{9}]=\frac{1}{10^1}[4\frac{12}{9}]$ में w=4 , p=12 , q = 9 से (p=12) >(q=9)

∴ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णोक w +1 =4+1 =5

बाद आवर्ती अंक समूह के अंक p – q = 12 – 9 =3 होगा।

अतः $\frac{8}{15}=\frac{8*6}{15*6}=\frac{48}{90}=0.5\dot{3}$ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

2• $\frac{a}{b}=\frac{7}{15}$ का मिश्र आवर्ती दशमलव के लिए – $\frac{7}{15}=\frac{7*6}{15*6}=\frac{42}{90}=\frac{1}{10^1}[\frac{4\backslash 2}{9}]=\frac{1}{10^1}[4\frac{4+2}{9}]=\frac{1}{10^1}[4\frac{6}{9}]$ में w=4 , p=6 , q = 9 से (p=6) <(q=9)

∴ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णोक w =4

बाद आवर्ती अंक समूह के अंक p =6 होगा।

अतः $\frac{7}{15}=\frac{7*6}{15*6}=\frac{42}{90}=0.4\dot{6}$ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

3• $\frac{a}{b}=\frac{215}{404}$ का मिश्र आवर्ती दशमलव के लिए –

$=\frac{215}{4*101}=\frac{215}{2^2*101}=\frac{215*2^5*99}{2^2*5^2*101*99}=\frac{532125}{10^2*9999}=\frac{1}{10^2}[\frac{53\backslash 2125}{9999}]=\frac{1}{10^2}[53\frac{53+2125}{9999}]$

$=\frac{1}{10^2}[53\frac{2178}{9999}]$] में w=53 , p=2178 , q = 9999 से p <q

∴ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णोक w =53

बाद आवर्ती अंक समूह के अंक $p = 53+2125 = 2178$ होगा।

अतः $\frac{215}{404} = \frac{532125}{10^2 * 9999} = 0.53\dot{2}17\dot{8}$ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

4• $\frac{a}{b} = \frac{13}{404}$ का मिश्र आवर्ती दशमलव के लिए –

$= \frac{13}{4*101} = \frac{13}{2^2*101} = \frac{13*2^5*99}{2^2*5^2*101*99} = \frac{032175}{10^2*9999} = \frac{1}{10^2}[\frac{03\backslash 2175}{9999}] = \frac{1}{10^2}[03\ \frac{03+2175}{9999}]$

$= \frac{1}{10^2}[03\ \frac{2178}{9999}]$ में $w=03$, $p=03+2175=2178$, $q = 9999$ से $p<q$

∴ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णांक $w = 03$

बाद आवर्ती अंक समूह के अंक $p = 2178$ होगा।

अतः $\frac{13}{404} = \frac{32175}{10^2*9999} = 0.03\dot{2}17\dot{8}$ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

5• $\frac{a}{b} = \frac{401}{404}$ का मिश्र आवर्ती दषमलव के लिए –

$= \frac{401}{4*101} = \frac{401}{2^2*101} = \frac{401*2^5*99}{2^2*5^2*101*99} = \frac{992475}{10^2*9999} = \frac{1}{10^2}[\frac{99\backslash 2475}{9999}] = \frac{1}{10^2}[99\ \frac{2574}{9999}]$

$= \frac{1}{10^2}[99\ \frac{2574}{9999}]$ में $w=99$, $p=2574$, $q = 9999$ से $p<q$

∴ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद प्रथम अनावर्ती अंक समूह के अंक पूर्णांक $w = 99$

बाद आवर्ती अंक समूह के अंक $p = 2574$ होगा।

अतः $\frac{401}{404} = \frac{992475}{10^2*9999} = 0.99\dot{2}57\dot{4}$ अभीष्ट मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

विवेचना शांत, आवर्ती एवं मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न को बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ में बदलने की प्रक्रिया आसान है, जबकि बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ को दशमलव भिन्न बदलने के संदर्भ में हर b के अभाज्य गुणनखण्ड में केवल 2 या 5 अथवा 2, और 5 दोनों ही सम्मिलित हों तो $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण शांत दशमलव भिन्न में होगा। इसकी गणना के लिए, $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ में $b_1 = 10^x$ को आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। और यदि हर b के अभाज्य गुणनखण्ड में 1,3,7 एवं 9 इकाई अंक की संख्या सम्मिलित हो तो $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण आवर्ती या मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न में होगा। इसकी गणना के लिए b के अधिकांश मानों के संदर्भ में $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ में $b_1 = b$ या b_1 का एक गुणनखण्ड $(10^x - 1)$ को आसानी से प्राप्त करना एक कठिन प्रक्रिया है।

20-8 आधुनिक गणित अध्ययन में किसी भी बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव भिन्न निरूपण आधुनिक गणित अध्ययन में किसी भी बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए अंश a को भाज्य एवं हर b को भाजक मानकर $a \div b$ की संक्रिया सम्पन्न करने का नियम प्रतिपादित है। जिसके अनुसार –

प्रक्रम 1 $a<b$ के लिए अभीष्ट भागफल $d = 0$ (शून्य) तथा शेषफल $c = a$ या $a>b$ के लिए अभीष्ट भागफल $d =$ शून्येतर पूर्णांक k तथा शेषफल $c = (a - d*b)$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 प्राप्त भागफल d के बाद दशमलव बिन्दु [.] दर्शित कीजिए।

प्रक्रम 3 शेषफल c के आगे दाँयी ओर 0 बढ़ाकर नवीन भाज्य d_1 प्राप्त कर $d_1 \div b$ से भागफल k_1 और रोषफल c_1 प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 शेषफल c_1 के आगे दाँयी ओर 0 बढ़ाकर नवीन भाज्य d_2 प्राप्त कर $d_2 \div b$ से भागफल k_2 और शेषफल c_2 प्राप्त कीजिए।

इसी प्रकार भागफल k_3, k_4, k_5 – – – – और शेषफल c_3, c_4, c_5 – – – – प्राप्त करने का क्रम जारी रखने जाने पर ऐसा विशेष n वाँ हल प्रक्रम अवश्य आयेगा जहाँ शेषफल r_{n-2} का मान निम्नानुसार 5 समिका में से किसी एक समिका को अवश्य संतुष्ट करेगा।जिसके संगत दशमलव भिन्न का प्रकार एवं उसे सुनिश्चित करने विशिष्ट व्याख्या दर्शित है।

[1] अपूर्णांश प्रखण्ड में n वाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल $c_n = 0$ (शून्य) हो तो दशमलव भिन्न का निरूपण शांत दशमलव भिन्न होगा ।जिसमें दशमलव बाद के अंक n स्थान तक क्रमशः$k_1, k_2, k_3, - - - - - k_n$ होंगे।

जैसे $\frac{91}{32}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए अंश मान 91 को भाज्य हर 32 को भाजक मानकर $91 \div 32$ की संक्रिया सम्पन्न करने का नियम प्रतिपादित है। जिसके अनुसार –

भाज्य **a = 91=91.0000000-----** और भाजक **b=32**

हल प्रक्रम	पूर्णांश	दशमलव बिन्दु	अपूर्णांश				
	1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
भाज्य s_n	91		270	140	120	240	160
(दश. निरू.)भागफल क्रम k_n	2	.	8	4	3	7	5
b*k_n	64		256	128	96	224	160
शेषफल $c_n = s_n$ −b*d_n	27		14	12	24	16	0

$\therefore \frac{91}{32} = 2.84375$ होगा।

[2] अपूर्णांश प्रखण्ड nवाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल c_n = पूर्णांश प्रखण्ड का अंतिम शेषफल हो तो दशमलव भिन्न का निरूपण आवर्ती दशमलव भिन्न होगा जिसमें दशमलव बाद ही n अंकीय समूह में भागफल अंक $k_1, k_2, k_3, - - - - - k_n$ आवर्ती अंक होंगे।

जैसे $\frac{5}{13}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए अंश मान 5 को भाज्य हर 13 को भाजक मानकर $5 \div 13$ की संक्रिया सम्पन्न करने का नियम प्रतिपादित है। जिसके अनुसार –

भाज्य **a = 5=5.0000000-----** और भाजक **b=13**

हल प्रक्रम	पूर्णांश	दशमलव बिन्दु	अपूर्णांश					
	1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
भाज्य s_n	5		50	110	60	80	20	70
(दश. निरू.)भागफल क्रम k_n	0	.	3	8	4	6	1	5
b*k_n	0		39	104	52	78	13	65
शेषफल $c_n = s_n$ −b*d_n	5		11	6	8	2	7	5

$\therefore \frac{5}{13} = 0.\dot{3}8461\dot{5}$ होगा।

[3] अपूर्णांश प्रखण्ड में n वाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल c_n =[हर मान b – पूर्णांश प्रखण्ड का अंतिम शेषफल c , हो तो दशमलव भिन्न का निरूपण आवर्ती दशमलव भिन्न होगा। जिसमें दशमलव बाद ही अंकीय समूह में भागफल अंक $k_1, k_2, k_3, - - - - - k_n$ पूर्ण आवर्ती समूह के प्रथम–आधे स्थान संख्या के क्रमशः अंक होगे। आगे के शेष द्वितीय–आधे स्थान के अंक क्रमशः$k_1, k_2, k_3, - - - - - k_n$ के नव (9) पुरनी अंक होंगे।]

जैसे – उपरोक्त उदाहरण $\frac{5}{13}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए प्राप्त हल प्रक्रम 3 में शेषफल c_3=8 प्राप्त है। जो [हर b – पूर्णांश प्रखण्ड का अंतिम शेषफल] = 13 − 5 = 8 के बराबर है।

अतः दशमलव बाद पूर्ण आवर्ती समूह के आधे स्थान संख्या के अंक क्रमशः k_1, k_2, k_3 = 3, 8, 4 होंगे। इसके आगे के शेष आधे स्थान के अंक क्रमशः 3, 8, 4 के 9 पुरनी 6, 1, 5 होंगे।

निष्कर्ष $\frac{a}{b}$ =पूर्णांश . $k_1k_2k_3$ \क्रमशः$k_1k_2k_3$का 9 पुरनी से $\frac{5}{13} = 0.\dot{3}84$\क्रमशः 3,8,4 का 9 पुरनी 6,1,5 $= 0.\dot{3}8461\dot{5}$

पुनः $\frac{109}{17}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए **भाज्य a =109.0000000----- और भाजक b=17**

हल प्रक्रम	**पूर्णांश**	**दशमलव बिन्दु**	**अपूर्णांश**							
	1		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
भाज्य s_n	109		70	20	30	130	110	80	120	10
(दश. निरू.)भागफल क्रम k_n	6	.	4	1	1	7	6	4	7	0
b*k_n	102		68	17	17	119	102	68	119	6
शेषफल $c_n = s_n$ −b*d_n	7		2	3	13	11	8	12	1	10

अपूर्णाश हल प्रक्रम 8 वें में प्राप्त शेषफल 10= [हर b – पूर्णांश प्रखण्ड से अंतिम शेषफल] = 17 – 7 है।

$\therefore \frac{109}{17} = 6.41176470\backslash 58823529 = 6.4117647058823529$ होगा।

[4] n वाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल c_n =

[n वाँ हल प्रक्रम के पूर्व कोई m वाँ में प्राप्त का शेषफल c_m ,हो तो दशमलव भिन्न का निरूपण मिश्र आवर्ती दशमलव भिन्न होगा। जिसमें दशमलव बिन्दु बाद ही भागफल अंक $k_1, k_2, k_3, ----, k_m$ अनावर्ती अंक समूह के अंक होंगे। इसके बाद से $k_{m+1}, ---- k_{n-2}, \ k_{n-1}, k_n$ आवर्ती अंक समूह में होंगे।

जैसे $\frac{209}{104}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए अंश मान 209 को भाज्य हर 104 को भाजक मानकर $209 \div 104$ की संक्रिया सम्पन्न करने का नियम प्रतिपादित है। जिसके अनुसार –

भाज्य a =209.0000000----- और भाजक b=104

हल प्रक्रम	पूर्णाश	दशमलव बिन्दु	अपूर्णाश								
	1		1	2	3	4	5	6	7	8	9
भाज्य s_n	209		10	100	1000	640	160	560	400	880	480
(दश. निरू.)भागफल क्रम k_n	2	.	0	0	9	6	1	5	3	8	4
b*k_n	208		0	0	936	624	104	520	312	832	416
शेषफल $c_n = s_n - $b*$d_n$	1		10	100	64	16	56	40	88	48	**64**

अपूर्णाश हल प्रक्रम 10 वें में प्राप्त शेषफल 64 =3 रे प्रक्रम में प्राप्त शेषफल है। $\therefore \frac{\mathbf{209}}{\mathbf{104}} = 2.009\dot{6}1538\dot{4}$

[5] अपूर्णांश प्रखण्ड के nवाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल c_n =

[हर b – (n वाँ हल प्रक्रम के पूर्व कोई mवाँ क्रम में प्राप्त का शेषफल c_m)] हो तो दशमलव भिन्न का निरूपण मिश्र आवर्ती दषमलव भिन्न होगा जिसमें दशमलव बिन्दु बाद ही भागफल अंक $k_1, k_2, k_3, ----, k_m$ अनावर्ती अंक समूह के अंक होंगे। इसके बाद भागफल अंक $k_{m+1}, ---- k_{n-2}, \ k_{n-1}, k_n$ आवर्ती अंक समूह की स्थान संख्या पूर्ण आवर्ती समूह के आधे स्थान संख्या के क्रमशः अंक होगे। आगे के शेष आधे स्थान के अंक क्रमशः $k_{m+1}, ---- k_{n-}, \ k_{n-1}, k_n$ के नव (9) पुरनी अंक होंगे।

जैसे उपरोक्त उदाहरण $\frac{209}{104}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए प्राप्त हल प्रक्रम 6 में शेषफल c_6=40 प्राप्त है। जो [हर 104 – 8 वाँ हल प्रक्रम के पूर्व 3रे क्रम में प्राप्त का शेषफल c_3] = 104 – 64 = 40 के बराबर है। अतः दशमलव बाद k_1, k_2, k_3 के रूप में प्राप्त भाजक क्रमशः 0,0,9 अनावर्ती अंक समूह में होंगे।दशमलव बाद पूर्ण आवर्ती समूह के आधे स्थान संख्या के अंक क्रमशः k_4, k_5, k_6 = ,6, 1, 5, होंगे। इसके आगे के शेष आधे स्थान के अंक क्रमशः 6, 1, 5 के 9 पुरनी 3, 8, 4 होंगे।

निष्कर्ष $\frac{\mathbf{209}}{\mathbf{104}} = 0.009\backslash\dot{6}15\backslash 38\dot{4}$

पुनः $\frac{301}{425}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए– अंश मान 301 को भाज्य और हर 425 को भाजक मानकर $301 \div 425$ की संक्रिया सम्पन्न करने का नियम प्रतिपादित है। जिसके अनुसार –

भाज्य a = 301=301.0000000----- और भाजक b=425

हल प्रक्रम	पूर्णाश	दशमलव बिन्दु	अपूर्णाश									
	1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
भाज्य s_n	301		3010	350	3500	1000	1500	2250	1250	4000	1750	500
(दश. निरू.)भागफल क्रम k_n	0	.	7	0	8	2	3	5	2	9	4	1
b*k_n	0		2975	0	3400	850	1275	2125	850	3825	1700	425
शेषफल $c_n = s_n - $b*$d_n$	301		35	350	100	150	225	125	400	175	50	**75**

अपूर्णांश हल प्रक्रम 10 वें में प्राप्त शेषफल 75 =425−350 = भाजक b− 2 रे प्रक्रम में प्राप्त शेषफल है।

$\therefore \frac{301}{425}$ =0.70\$\dot{8}$2352941\1764705$\dot{8}$ = 0.70$\dot{8}$23529411764705$\dot{8}$

20-8 आवर्ती दशमल व निरूपण विषयक विशिष्ट भिन्न –

(a< b) के प्रति सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण के प्रति हर b=

1■ 11 , 111, 1111, 1111----1111 की भाँति n स्थानिक संख्या होने के प्रति **आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण** – **अंशमान** a*9 के हल मान के बाँयी ओर आवश्यकतानुसार **शून्य** (0) **दर्ज कर दशमलव बाद** n स्थानिक में दर्शित कर प्राप्त कीजिये।

जैसे 1• $\frac{5}{11} = \frac{5*9}{11*9} = \frac{45}{99} = 0.\dot{4}\dot{5}$ 2• $\frac{5}{111} = \frac{5*9}{111*9} = \frac{045}{999} = 0.\dot{0}\,4\,\dot{5}$

3• $\frac{5}{1111} = \frac{5*9}{1111*9} = \frac{0945}{9999} = 0.\dot{0}\,04\,\dot{5}$ 4• $\frac{5}{11111} = \frac{5*9}{11111*9} = \frac{00945}{99999} = 0.\dot{0}\,004\,\dot{5}$

2■ 11 , 101, 1001, 1000----0001 की भाँति n स्थानिक संख्या होने के प्रति **आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण**– **क्रमशः** a*9, a*99, a*999, a*{(n-1) **स्थानिक** 9 **से बनी संख्या**] के हलमान के बाँयी ओर आवश्यकतानुसार **शून्य** (0) **दर्ज कर दशमलव बाद** 2*(n-1) स्थानिक में दर्शित कर प्राप्त कीजिये।

जैसे 1• $\frac{5}{11} = \frac{5*9}{11*9} = \frac{45}{99} = 0.\dot{4}\dot{5}$ 2• $\frac{5}{101} = \frac{5*99}{101*99} = \frac{0495}{9999} = 0.\ \dot{0}\,4\,9\,\dot{5}$

3• $\frac{5}{1001} = \frac{5*999}{1001*999} = \frac{004995}{999999} = 0.\ \dot{0}0\,4\,99\,\dot{5}$

4• $\frac{5}{10001} = \frac{5*9999}{1001*9999} = \frac{00049995}{99999999} = 0.\ \dot{0}00\,4\,9\,99\,\dot{5}$

3■ 37 , 37037, 37037037, 37037----037037 की भाँति n स्थानिक संख्या होने के प्रति **आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण**– a*27 के हलमान के बाँयी ओर आवश्यकतानुसार **शून्य** (0) **दर्ज कर दशमलव बाद** (n+1) स्थानिक में दर्शित कर प्राप्त कीजिये।

जैसे 1• $\frac{5}{37} = \frac{5*27}{37*27} = \frac{135}{999} = 0.\dot{1}\,3\,\dot{5}$ 2• $\frac{5}{37037} = \frac{5*27}{37037*27} = \frac{000135}{999999} = 0.\dot{0}\,0\,0\,1\,3\,\dot{5}$

3• $\frac{5}{37037037} = \frac{5*27}{37037037*27} = \frac{000000135}{999999999} = 0.\dot{0}\,0\,0\,0\,0\,0\,01\,3\,\dot{5}$

4• $\frac{5}{37037037037} = \frac{5*27}{37037037o37*27} = \frac{000000000135}{999999999999} = 0.\dot{0}\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,01\,3\,\dot{5}$

----------20----------

अध्याय -21

पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण की आश्लेषक विधि (एक जादुई विधि)

अध्याय 20 के अनुच्छेद 20-8 में भाग विधि द्वारा आवर्ती दशमलव भिन्न में परिवर्तनीय बटे भिन्न $\frac{a}{b}$ का हर b के बड़े मान एवं पूर्ण आवर्ती अंको की बढ़ते स्थान संख्या के प्रति पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण की गतिशीलता को कठिन एव उबाऊ बना देता है। अध्याय 17 अनुच्छेद 17-2 से 17-10 तक में दिये विभाज्यता जाँच की आश्लेषक विधि को प्रासांगिक आयाम देकर उक्त पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण को पूर्णता प्रदान करने की गतिशीलता को सरल एवं मनोरंजक आत्मसाती स्वरूप प्रदान करनें का प्रयास किया गया है। जो एक जादुई विधि के रूप में आत्मसाती होगा। इसके अनुप्रयोग के पूर्व संदर्भित शब्दावली को आगर आश्लेषक एवं उना आश्लेषक के परिपेक्ष्य में अलग–अलग परिभाषित अथवा विश्लेषित करना होगा। जो कि निम्नानुसार है।

21-1 संदर्भित शब्दावली

(A) आगर या धनात्मक आश्लेषक के संदर्भ में

1■ आगर या धनात्मक आश्लेषक भिन्न, आश्लेषक हर एवं आश्लेषक भिन्न दिये भिन्न के तुल्य भिन्न प्राप्त करने के क्रम में तुल्य भिन्न के हर को कम से कम इकाई अंक 9 प्राप्त कीजिए। आवश्यक होने पर इकाई, दहाई, सैकड़ा . . . . . . के स्थान पर 9-9 प्राप्त कीजिए । इस प्रकार प्राप्त तुल्य भिन्न को आगर या धनात्मक आश्लेषक भिन्न कहते है।तथा इस तुल्य आश्लेषक भिन्न के हर को आगर या धनात्मक आश्लेषक हर एवं उक्त आश्लेषक हर के सापेक्ष प्राप्त तुल्य भिन्न के अंश को ही आगर या धनात्मक आश्लेषक अंश कहते हैं।

2■ आगर या घनात्मक आश्लेषक आश्लेषक हर के दाँयी ओर इकाई से क्रमागत स्थान दहाई ,सैकड़ा - - - - - - - पर स्थित 9 - 9 के बाद शेष अंकों से बनी संख्या x का आगर संख्या (x+1) को आगर या घनात्मक आश्लेषक कहते है।

3■ आगर या घनात्मक आश्लेषक का स्तर आश्लेषक हर के दाँयी ओर इकाई से क्रमागत स्थान दहाई ,सैकड़ा - - - - - - - पर स्थित 9 की स्थान संख्या r पर आश्लेषक स्तर r होगा ।

सांकेतिक अध्ययन पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न में परिवर्तनीय सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का आगर या घनात्मक आश्लेषक भिन्न $P_r = \frac{a_r}{b_r}$ हो तो p = घनात्मक आश्लेषक, r= घनात्मक आश्लेषक का स्तर, a_r = घनात्मक आश्लेषक अंश एवं b_r =घनात्मक आश्लेषक हर सांकेतिक अध्ययन में चुना गया है।

(B) उना या ऋणात्मक आश्लेषक के संदर्भ में

1■ उना या ऋणात्मक आश्लेषक हर एवं अंश दिये भिन्न के तुल्य हर प्राप्त करने के क्रम में तुल्य भिन्न के हर को कम से कम इकाई अंक 1 प्राप्त कीजिए। आवश्यक होने पर दहाई, सैकड़ा - - - - - - के स्थान पर 0-0 प्राप्त कीजिए ।इस प्रकार प्राप्त तुल्य भिन्न के हर को उना या ऋणात्मक आश्लेषक हर कहते हैं। एवं उक्त आश्लेषक हर के सापेक्ष प्राप्त तुल्य भिन्न का अंश को ही उना या ऋणात्मक आश्लेषक अंश कहते हैं।

टीप उना या ऋणात्मक आश्लेषक हर एवं अंश को उना संख्यांकन पद्धत्ति में दर्शित किया जावें।

अर्थात भिन्न $\frac{a}{b}$ का उना या ऋणात्मक भिन्न $N_r = \frac{\overline{a_r}}{\overline{b_r}}$ दर्शित होगा। जैसे भिन्न $\frac{3}{7}$ का उना या ऋणात्मक भिन्न$_2$ $= \frac{\overline{a_2}}{\overline{b_2}} = \frac{\overline{129}}{\overline{301}}$ दर्शित होगा।

2■ उना या ऋणात्मक आश्लेषक उना या ऋणात्मक आश्लेषक हर को उना संख्यांकन पद्धत्ति में दर्शित करने पर दाँयी ओर इकाई अंक $\overline{1}$ और दहाई ,सैकड़ा - - - - - - - पर स्थित 0 - 0 शेष अंकों से बनी संख्या $\overline{N}$ को उना या ऋणात्मक आश्लेषक कहते है।

3■ उना या ऋणात्मक आश्लेषक स्तर आश्लेषक हर के दाँयी ओर इकाई से क्रमागत स्थान दहाई ,सैकड़ा . . . . पर स्थित 0 की स्थान संख्या r पर आश्लेषक स्तर (r+1) होगा ।

सांकेतिक अध्ययन पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न में परिवर्तनीय सरल भिन्न $\frac{a}{b}$ का उना या ऋणात्मक आश्लेषक भिन्न $N_r = \frac{\overline{a_r}}{\overline{b_r}}$ हो तो N = ऋणात्मक आश्लेषक, r= ऋणात्मक आश्लेषक का स्तर $\overline{a_r}$ = ऋणात्मक आश्लेषक अंश एवं $\overline{b_r}$ = ऋणत्मक आश्लेषक हर सांकेतिक अध्ययन में चुना गया है।

व्यापक विस्तारित अध्ययन के लिए अनुच्छेद 17-8 आश्लेषक स्तर r पर आगर आश्लेषक P_r और उना आश्लेषक N_r के लिए भाजक का गुणज विस्तार प्राप्त करना एवं आगर आश्लेषक P_r और उना आश्लेषक N_r सुनिश्चित कर भाजक के स्थान पर हर प्रयुक्त कीजिए।

21-2 आगर आश्लेषक द्वारा पूर्ण आवर्ती दशमलव में निरूपण के संदर्भ में सत्य कथन

(A) केवल एक समूह हल का आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण $\frac{a}{b} = \frac{a_r}{10^r - 1}$ हो तो आश्लेषक p=1 होगा। जिसका आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण के अंकों का केवल और केवल एक समूह आश्लेषक अंश a_r को r अंकीय में दर्शित संख्या के अंक होंगे।

A_1 (दाँयी से बाँयी ओर) गणना क्रम में (r>1) पर आवर्ती अंक का n वाँ अंक या अंक समूह प्राप्त करने के लिये गणना समिका –

(1) n वाँ क्रम के लिए $(n-1)$ वाँ आवर्ती अंक का r अंकीय समूह से दर्शित संख्या
[{k_{n-1}}*{आश्लेषक P} + {$(n-1)$ वाँ समूह क्रम का हासिल h_{n-1} }] =

1• आश्लेषक अंश a_r हो तो – आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे।

2• (**आश्लेषक हर b_r – आश्लेषक अंश a_r**) **हो तो**– आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल के आधे स्थान तक हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक होंगे।

(2) p_r के लिए r अंकीय उत्तरांक समूह k_n और k_{n-1} से बनी संख्या के बीच किसी r अंकीय संख्या (जिसमें दाँये से बाँये कम से कम उत्तरांक समूह k_n और k_{n-1} का क्रमशः अन्त्य और आदि अंक सम्मिलित हो) का मान =

1• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी सेबाँयी r अंकीय संख्या हो तो– इसके पूर्व के अंक ही $(n-1)$ वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको को साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों का अभीष्ट समूह प्राप्त होगा।

2• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या के अंको के 9 पुरनी y अंको से बनी संख्या हो तो– इसके पूर्व के अंक ही $(n-1)$ वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वा समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक होंगे।

A_2 (बाँयी से दाँयी ओर) गणना क्रम में (r>1) पर आवर्ती अंक का n वाँ अंक या अंक समूह प्राप्त करने के लिये गणना समिका –

(1) n वाँ क्रम के लिए [$(n-1)$वाँ क्रम का शेषफल $(n-1)$ वाँ आवर्ती अंक का r अंकीय समूह से दर्शित संख्या k_{x-1}] से विस्तारित संख्या = [$(n-1)$वाँ क्रम का शेषफल\$(n-1)$ वाँ आवर्ती अंक का r अंकीय समूह, से दर्शित संख्या नवीन भाज्य$_n$ =

1• आश्लेषक अंश a_r हो तो – आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे।

2• [**आश्लेषक हर b_r – आश्लेषक अंश a_r**] **हो तो**– आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल के आधे स्थान तका हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक होंगे।

(2) p_r के लिए r अंकीय उत्तरांक समूह k_{n-1} और k_n से बनी संख्या के बीच किसी r अंकीय संख्या (जिसमें दाँये सेबाँये कम से कम उत्तरांक समूह k_{n-1} और k_n का क्रमशः अन्त्य और आदि अंक सम्मिलित हो) का मान = n वाँ समूह और $(n-1)$ वाँ समूह से बनी संख्या के बीच किसी r अंकीय संख्या उत्तरांक समूह k_n और k_{n-1} का मान =

1•आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या हो तो– इसके बाद के अंकों को छोड़ने पर शेष अंक ही $(n-1)$ वाँ समूह का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वाँ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको को साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों का अभीष्ट समूह प्राप्त होगा।

2• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या के क्रमशः 9 पुरनी अंकों से बनी संख्या हो तो– इसके बाद के अंकों को छोड़ने पर शेष अंक ही $(n-1)$वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वाँ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक होंगे।

21-3 आगर या घनात्मक आश्लेषक के द्वारा पूर्ण आवर्ती दशमलव में निरूपण

आश्लेषक भिन्न $P_r = \frac{a_r}{b_r}$ से आश्लेषक P>1 और आश्लेषक स्तर $r \geq 1$ के लिए आवर्ती दशमलव निरूपण की विभिन्न गणना विधियाँ है जिन्हें (बाँये से दाँये) एवं (दाँये से बाँये) आयामों में प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरणों के माध्यम से विश्लेषित करना यथेष्ठ होगा।

उदाहरण■ $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण कीजिए।

(1) आश्लेषक P>1 के लिए आश्लेषक स्तर $= P_r$ में r= 1 द्वारा हल

A• दाँये से बाँये गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{21}{49}$ से आश्लेषक हर $b_1 = 49$ से आश्लेषक P =4+1 =5 और आश्लेषक स्तर $P_r = P_1$, (आश्लेषक हर b_1 − आश्लेषक अंश a_1) $= 49 - 21 = 28$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_1 = 21$ से पहले स्थान का आवर्ती अंक $k_1 = 21$ का इकाई अंक 1 और प्रथम हासिल सं,ख्या h_1 = [$a_1 = 21$ का इकाई अंक 1 के अतिरिक्त अंको से बनी संख्या=2] को $_{हासिल}$आवर्ती अंक का $_h$k के संकेतन में लिखा $_21$

प्रक्रम 2 $k_1 * p + h_1 = 1 * 5 + 2 = 7 = 07$ से प्रक्रम 1की भाँति दूसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_2 = 07$ का इकाई अंक 7 और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_2 = 0$ को $_h$k के संकेतन में लिखा $_07_21$

प्रक्रम 3 $k_2 * p + h_2 = 7 * 5 + 0 = 35$ से प्रक्रम 2 की भाँति तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_3 = 35$ का इकाई अंक 5 और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_3 = 3$ को $_h$k के संकेतन में लिखा $_35_07_21$

प्रक्रम 4 $k_3 * p + h_3 = 5 * 5 + 3 = 28 =$ आश्लेषक हर b_1 − आश्लेषक अंश a_1 है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का हल दाँये से बाँये तीन स्थानों मे –

$- - -\backslash k_3k_2k_1 = - - -\backslash 571$ होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक k_6, k_5, k_4 क्रमशः k_3, k_2, k_1 के 9 पुरनी अंक होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_6, k_5, k_4 \backslash k_3, k_2, k_1 = (9 - k_3), (9 - k_2), (9 - k_1) \backslash k_3, k_2, k_1 =$

$(9-5), (9-7), (9-1), \backslash 5,7,1 = 4,2,8 \backslash 5,7,1 = 4,2,8,5,7,1$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण= $0.\dot{4}2857\dot{1}$

B• बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{21}{49}$ से आश्लेषक हर $b_1 = 49$ से आश्लेषक P =4+1 =5 और आश्लेषक स्तर $P_r = P_1$, (आश्लेषक हर b_1 − आश्लेषक अंश a_1) $= 49 - 21 = 28$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_1 \div P = 21 \div 5$ से भागफल d_1= पहले स्थान का आवर्ती अंक k_1= 4 तथा शेषफल c_1= 1 को $_{शेषफल}$आवर्ती $_c$k संकेतन में लिखे $_14$

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_c$k के संकेतन में लिखे $_14$ =14 विस्तारित कीजिए। $14 \div P = 14 \div 5$ से भागफल d_2= दूसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_2 = 2$ तथा शेषफल c_2= 4 को $_c$k संकेतन में लिखे $_14\ _42$

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_c$k के संकेतन में लिखे $_42 = 42$ विस्तारित कीजिए। $42 \div P = 42 \div 5$ से भागफल d_3= तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_3 = 8$ तथा शेषफल c_3= 2 को $_c$k संकेतन में लिखे $_14\ _42\ _28$

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 में $_c$k के संकेतन में लिखे $_28 = 28$ विस्तारित कीजिए। जो कि आश्लेषक हर b_1 − आश्लेषक अंश a_1 है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का हल बाँये से दाँये तीन स्थानों मे –

$k_1k_2k_3\backslash - - - = 428\backslash - - -$ होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक k_4, k_5, k_6 क्रमशः k_1, k_2, k_3 के 9 पुरनी अंक होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_1, k_2, k_3 \backslash k_4, k_5, k_6 = k_1, k_2, k_3 \backslash (9-k_1), (9-k_2), (9-k_3) =$

$4,2,8\backslash(9-4),(9-2),(9-8) = 4,2,8\backslash 5,7,1 = 4,2,8,5,7,1$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण$= 0.\dot{4}2857\dot{1}$

(2) आश्लेषक P>1 के लिए आश्लेषक स्तर $= P_r$ में $r = 2$ द्वारा हल

A■ दाँये से बाँये और गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_2$ $\frac{a_2}{b_2} = \frac{171}{399}$ से आश्लेषक हर $b_2 = 399$ से आश्लेषक P =3+1 =4 और आश्लेषक स्तर $P_r = P_2$, (अश्लेषक हर $b_2 -$ आश्लेषक अंश $a_2) = 399 - 171 = 228$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम1 $a_2 = 171$ से प्रथम दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_2k_1} = 171$ का दहाई इकाई अंक 71 और प्रथम हासिल सं,ख्या $h_1 =$ [$a_2 = 171$ का दहाई, इकाई अंक 7,1 के अतिरिक्त अंको से बनी संख्या=1] को $_{\text{हासिल}}$आवर्ती अंक का $_h$kk संकेतन में लिखे $_171$

प्रक्रम 2 $(\underline{k_2k_1}) * p + h_1 = 71 * 4 + 1 = 285$ से दूसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_4k_3} =$ प्रक्रम 1की भाँति चैथे,,तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $= 285$ का दहाई इकाई अंक 8,5 और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_2 = 2$ को $_h$kk संकेतन में लिखे $_285\ _171$

प्रक्रम 3 $(\underline{k_4k_3}) * p + h_2 = 85 * 4 + 2 = 342$ से तीसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_6k_5} =$ प्रक्रम 2की भाँति चौथे,,तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $= 342$ का दहाई इकाई अंक 4,2 और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_3 = 3$ को $_h$kk संकेतन में $_342$ लिखे $_342\ _285\ _171$

प्रक्रम 4 $\underline{k_6k_5} * p + h_2 = 42 * 4 + 3 = 171 =$ आश्लेषक अंश a_2 है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= \underline{k_6k_5}, \underline{k_4k_3}, \underline{k_2k_1} = \underline{42}, \underline{28}, \underline{71} = 4,2,8,5,7,1$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= 0.\dot{4}2857\dot{1}$

B■ बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_2$ $\frac{a_2}{b_2} = \frac{171}{399}$ से आश्लेषक हर $b_2 = 399$ से आश्लेषक P =3+1 =4 और आश्लेषक स्तर $P_r = P_2$, (आश्लेषक हर $b_2 -$ आश्लेषक अंश $a_2) = 399 - 171 = 228$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_2 \div P = 171 \div 4$ से भागफल $d_1 = 42 =$ प्रथम दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_1k_2} = 42$ तथा शेषफल $c_1 = 3$ को $_{\text{षेशफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk संकेतन में लिखे $_342$

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_342$ को 342 में विस्तारित कीजिए। $342 \div P = 342 \div 4$ से भागफल $d_2 = 85 =$ दूसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_3k_4} = 85$ तथा शेषफल $c_2 = 2$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk के संकेतन में लिखे $_342\ _285$

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_285$ को 285 में विस्तारित कीजिए। $285 \div P = 285 \div 4$ से भागफल $d_3 = 71$ $=$ तीसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_5k_6} = 71$ तथा शेषफल $c_3 = 1$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk संकेतन में लिखे

$_342\ _282\ _171$

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_171$ को 171 में विस्तारित कीजिए। जो आश्लेषक अंश $a_2 = 171$ है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= \underline{k_1k_2}, \underline{k_3k_4}, \underline{k_5k_6} = \underline{42}, \underline{28}, \underline{71} = 4,2,8,5,7,1$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= 0.\dot{4}2857\dot{1}$

(1) आश्लेषक P>1 के लिए– आश्लेषक स्तर $= P_r$ में $r = 3$ द्वारा हल

A■ दाँये से बाँये गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न3 $\frac{a_3}{b_3}=\frac{2571}{5999}$ से आश्लेषक हर $b_3=5999$ से आश्लेषक P =5+1 =6 और आश्लेषक स्तर $P_r=P_3$, (आश्लेषक हर b_3 − आश्लेषक अंश a_3) $=5999-2571=3428$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_3=2571$ से प्रथम तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_3k_2k_1}=2571$ का सैकड़ा दहाई इकाई अंक 571 और प्रथम हासिल सं,ख्या h_1 = [a_3 = 2571 का सैकड़ा,दहाई,इकाई अंक 571 के अतिरिक्त अंको से बनी संख्या =2 ,को $_{\text{हासिल}}$आवर्ती अंक का $_h$kkk संकेतन में लिखे $_2$571

प्रक्रम 2 $(k_3k_2k_1)*p+h_1=571*6+2=3428$ से दूसरा तीसरा तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_6\,k_5k_4}$ = प्रक्रम 1की भाँति छटवें पाँचवें चैाथे,, स्थान का आवर्ती अंक = 3428 का सैकड़ा, दहाई इकाई अंक 4,2,8 और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_2=3$ को $_h$kkk संकेतन में लिखे $_3$428 $_2$571

प्रक्रम 3 $(k_6k_5k_4)*p+h_2=428*6+3=2571=$ आश्लेषक अंश a_3 है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=\underline{k_6k_5k_4}\,,\underline{k_3k_2k_1}=\underline{4\,2\,8}\,,\,\underline{5\,71}=4,2,8,5,7,1$

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=0.\dot{4}2857\dot{1}$

B■ बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न3 $\frac{a_3}{b_3}=\frac{2571}{5999}$ से आश्लेषक हर $b_3=5999$ से आश्लेषक P =5+1 =6 और आश्लेषक स्तर $P_r=P_3$, (आश्लेषक हर b_3 − आश्लेषक अंश a_3) $=5999-2571=3428$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_3\div P=2571\div 6$ से भागफल d_1= 428= प्रथम तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_1k_2k_3}=428$ तथा शेषफल $c_1=3$ को $_{\text{षेशफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kkk संकेतन में लिखे $_3$428

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_c$kkk के संकेतन में लिखे $_3$428 को 3428 में विस्तारित कीजिए।$3428\div P=3428\div 6$ से भागफल d_2=571 = दूसरा तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_4k_5k_6}=571$ तथा शेषशफल $c_2=2$ को $_{\text{शेश्षफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kkk के संकेतन में लिखे $_3$428 $_2$571

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_c$kkk के संकेतन में लिखे $_2$571 को 2571 में विस्तारित कीजिए। जो आश्लेषक अंश $a_2=2571$ है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=\underline{k_1k_2}k_3\;\underline{k_4\;\,k_5k_6}=\;\underline{428}\,,\underline{571}$ =4,2,8,5,7,1

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=0.\dot{4}2857\dot{1}$

21-4 उना या ऋणात्मक आश्लेषक द्वारा पूर्ण आवर्ती दशमलव में निरूपण के संदर्भ में सत्य कथन

(A) केवल एक समूह में हल का आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण

$\frac{a}{b}=\frac{\overline{a_r}}{10^x+1}$ हो तो आश्लेषक $\overline{N}$=1 होगा। जिसका आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण r अंकीय अंकों के दो समूह बाँया समूह के अंक \ दाँया समूह के अंक में दर्शित संख्या के अंक होंगे। जहाँ दाँया समूह के अंक आश्लेषक अंश को r अंकीय समूह में दर्शित संख्या के अंक होंगे तथा बाँया समूह के अंक दाँया समूह प्राप्त अंकों का योज्य प्रतिलोम अंक मान होंगे। जिसे नियमानुसार आधुनिक संख्यांकन पद्धत्ति में परिवर्तित कर 2r अंकीय आवर्ती दशमलव भिन्न में दर्शित कर सकते हैं।

A_1(दाँयी से बाँयी ओर) गणना क्रम में (r>1) पर आवर्ती अंक का n वाँ अंक या अंक समूह प्राप्त करने के लिये गणना समिका –

(1) n वाँ क्रम के लिए [{$(n-1)$ वाँ आवर्ती अंक समूह का r अंकीय समूह से दर्शित संख्या k_{n-1}}*{आश्लेषक P} + {$(n-1)$ वाँ समूह क्रम का हासिल h_{x-1} }] =

1• आश्लेषक अंश a_r का दाँयी से बाँयी प्रथम r अंकीय संख्या हो तो – आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे।

2• n वाँ क्रम का उत्तरांश मान आश्लेषक अंश $\overline{a_r}$ का योज्य प्रतिलोम a_r हो तो– आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल के आधे स्थान तक हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः योज्य प्रलिोम अंक होंगे।

(2) N_r के लिए r अंकीय उत्तरांक समूह k_n और k_{n-1} से बनी संख्या के बीच किसी r अंकीय संख्या (जिसमें दाँये सेबाँये कम सेकम उत्तरांक समूह k_n और k_{n-1}का क्रमशः अन्त्य और आदि अंक सम्मिलित हो) का मान =

1• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या हो तो – इसके पूर्व के अंक ही $(n-1)$वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वाँ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको को साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों का अभीष्ट समूह प्राप्त होगा।

2• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या का योज्य प्रतिलोम संख्या हो तो– इसके पूर्व के अंक ही $(n-1)$वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वाँ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः योज्य प्रतिलोम अंक होंगे।

A_2 (बाँयी से दाँयी ओर) गणना क्रम में (r>1) पर आवर्ती अंक का n वाँ अंक या अंक समूह प्राप्त करने के लिये गणना समिका –

(1) $[(n-1)_{\text{वाँ क्रम का शेषफल}}$ $(n-1)$ वाँ आवर्ती अंक का r अंकीय समूह से दर्शित संख्या $k_{n-1}]$ से विस्तारित संख्या = [(x-1) वाँ क्रम का शेषफल\\$(n-1)$ वाँ r अंकीय समूह में प्राप्त आवर्ती अंको से बनी संख्या, से दर्शित संख्या नवीन भाजय$_n$ =

1• आश्लेषक अंश a_r हो तो – आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ समूह में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे।

2• n वाँ क्रम के लिए प्राप्त क्रियाशील भज्य आश्लेषक अंश $\overline{a_r}$ का योज्यप्रतिलोम a_r हो ता– आवर्ती दशमलव निरूपण का पूरा–पूरा हल के आधे स्थान तक हल r अंकीय समूह में $(n-1)$ में प्राप्त हो चुके अंक ही होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः योज्यप्रतिलोम होंगे।

(2) N_r के लिए r अंकीय उत्तरांक समूह k_{n-1} और k_n से बनी संख्या के बीच किसी r अंकीय संख्या ;जिसमें दाँये सेबाँये कम सेकम उत्तरांक समूह k_{n-1} और k_nका क्रमशः अन्त्य और आदि अंक सम्मिलित हो) का मान =

1• आश्लेषक अंश a_r के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या हो तो – इसके बाद के अंकों को छोड़ने पर शेष अंक ही $(n-1)$वाँ समूह का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ वाँ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको को साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों का अभीष्ट समूह प्राप्त होगा।

2• आश्लेषक अंश $\overline{a_r}$ के दाँयी से बाँयी r अंकीय संख्या के अंकों से बनी संख्या का योज्य प्रतिलोम a_r से बनी संख्या हो ता– इसके बाद के अंकों को छोड़ने पर शेष अंक ही $(n-1)$ वाँ समूह क्रम का आवर्ती अंक होंगे, जिसे r अंकीय समूह में $(n-2)$ समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः योज्य प्रतिलोम अंक होंगे।

21-5 उना या ऋणात्मक आश्लेषक के संदर्भ में पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण आश्लेषक हर b_r से आश्लेषक = $r < \bar{1}$ [$\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ – – – – और आश्लेषक स्तर $= N_r$ में $r \geq 1$ के लिए–

आवर्ती दशमलव निरूपण की गणना विभिन्न विधियाँ है जिसे (बाँये से दाँये) एवं (दाँये से बाँये) आयामों में आगर या धनात्मक आश्लेषक के संदर्भ में पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण की भाँति प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरणों के माध्यम से विश्लेषित करना यथेष्ठ होगा।

उदाहरण– $\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण कीजिए।

(1) आश्लेषक $N<\bar{1}$ के लिए आश्लेषक स्तर $= N_r$ में $r = 1$ द्वारा हल

A■ दाँये से बाँये गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}=\frac{\bar{9}}{\overline{21}}$ से आश्लेषक हर $b_1=\overline{21}$ से आश्लेषक $N=\bar{2}$ और आश्लेषक स्तर $N_r=N_1$ आश्लेषक अंश $\bar{9}$ का योज्य प्रतिलोम $=9$, प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_1=\bar{9}=0\bar{9}$ से पहले स्थान का आवर्ती अंक $k_1=0\bar{9}$ का इकाई अंक $\bar{9}$ और प्रथम हासिल संख्या h_1 $=[\ a_1=0\bar{9}$ का इकाई अंक 9 के अतिरिक्त अंको से बनी संख्या $=0$] को $_{\text{हासिल}}$आवर्ती अंक का $_hk$ के संकेतन में लिखा $_0\bar{9}$

प्रक्रम 2 $k_1*N+h_1=\bar{9}*\bar{2}+0=18$ से प्रक्रम 1की भाँति दूसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_2=18$ का इकाई अंक 8 और दूसरा हासिल संख्या $h_2\ =1$ को $_hk$ के संकेतन में लिखा $_18\ _0\bar{9}$

प्रक्रम 3 $k_2*N+h_2=8*\bar{2}+1=\overline{15}$ से प्रक्रम 2 की भाँति तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_3=\overline{15}$ का इकाई अंक $\bar{5}$ और तीसरा हासिल संख्या $h_3=\bar{1}$को $_hk$ के संकेतन में लिखा $_{\bar{1}}\bar{5}\,_18\ _0\bar{9}$

प्रक्रम 4 $k_3*N+h_3=\ \bar{5}*\bar{2}+\bar{1}=9=$ आश्लेषक अंश a_1 का योज्य प्रतिलोम है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का हल दाँये से बाँये तीन स्थानों मे –

$---\backslash k_3k_2k_1\ \ =---\backslash\bar{5},8\ ,\bar{9}$ होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक k_6,k_5,k_4क्रमशः k_3,k_2,k_1 के योज्य प्रतिलोम $5,\bar{8},9/$------- होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_6,k_5,k_4\backslash\ k_3,k_2,k_1=5,\bar{8},9\backslash\bar{5},8\ ,\bar{9}=5,\bar{8},9\ \bar{5},8\ ,\bar{9}$

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=0.\dot{5}\bar{8}9\bar{5}8\dot{\bar{9}}=0.\dot{4}2857\dot{1}$ होगा।

B■ बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{\bar{a}_1}{\bar{b}_1}=\frac{\bar{9}}{\overline{21}}$ से आश्लेषक हर $b_1=\overline{21}$ से आश्लेषक $N=\bar{2}$ और आश्लेषक स्तर $N_r=N_1$, आश्लेषक अंश a_1का योज्य प्रतिलोम $=9$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_1\div N=\bar{9}\div\bar{2}$ से भागफल $d_1=$ पहले स्थान का आवर्ती अंक $k_1=4$ तथा शेषफल $c_1=\bar{1}$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती $_ck$ संकेतन में लिखे $_{\bar{1}}4$

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_ck$ के संकेतन में लिखे $\ _{\bar{1}}4\ =\bar{1}4=\bar{6}$ विस्तारित कीजिए। $\bar{6}\div N=\bar{6}\div\bar{2}$ से भागफल $d_2=$ दूसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_2=3$ तथा शेषफल $c_2=0$ को $_ck$ संकेतन में लिखे $_{\bar{1}}4\ _03$

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_ck$ के संकेतन में लिखे $_03=03=3$ विस्तारित कीजिए। $3\div N=3\div\bar{2}$ से भागफल $d_3=$ तीसरे स्थान का आवर्ती अंक $k_3=\bar{1}$ तथा शेषफल $c_3=1$ को $_ck$ संकेतन में लिखे $_{\bar{1}}4\ _03\ _1\bar{1}$

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 में $_ck$ के संकेतन में लिखे $_1\bar{1}=1\bar{1}=9$ आश्लेषक अंश $a_1=\bar{9}$ का योज्य प्रतिलोम है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का हल बाँये से दाँये तीन स्थानों मे –

$k_1k_2k_3\backslash---\ =43\bar{1}\backslash---$ होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक k_4,k_5,k_6क्रमशः k_1,k_2,k_3 के योज्य प्रतिलोम होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_1,k_2,k_3\backslash\ k_4,k_5,k_6=\ 4,3,\bar{1}\backslash\bar{4},\bar{3},1=4,3,\bar{1},\bar{4},\bar{3},1$

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $=0.\dot{4}3\bar{1}\bar{4}\bar{3}\dot{1}=0.\dot{4}2857\dot{1}$

आश्लेषक N >1 के लिए आश्लेषक स्तर $=N_r$ में r= 2 द्वारा हल

A■ दाँये से बाँये गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_2$ $\frac{\bar{a}_2}{\bar{b}_2}=\frac{\overline{129}}{\overline{301}}$ से आश्लेषक हर $b_2=\overline{30}1$ से आश्लेषक $N=\bar{3}$ और आश्लेषक स्तर $N_r=N_2$, , आश्लेषक अंश a_2 का योज्य प्रतिलोम $=129$, प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_2=\overline{129}$ से प्रथम दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_2k_1}=\overline{29}$ और प्रथम हासिल संख्या $h_1\ =\bar{1}$ को $_{\text{हासिल}}$आवर्ती अंक का $_hkk$ संकेतन में लिखे $_{\bar{1}}\overline{29}$

प्रक्रम 2 $(\underline{k_2k_1})*N+h_1=\overline{29}*\bar{3}+\bar{1}=86=086$ से दूसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_4k_3}=86$ और दूसरा हासिल संख्या $h_2\ =0$ को $_hkk$ संकेतन में लिखे $_086\ _{\bar{1}}\overline{29}$

प्रक्रम 3 $(\underline{k_4k_3}) * N + h_2 = 86 * \bar{3} + 0 = \bar{2}\bar{5}\bar{8}$ से तीसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_6k_5} = \underline{\bar{5}\,\bar{8}}$ और दूसरा हासिल सं,ख्या $h_3 = 3$ को $_h$kk संकेतन में लिखे $_{\bar{2}}\,\bar{5}\bar{8}\;_0 86\;_{\bar{1}}\,\bar{2}\bar{9}$

प्रक्रम 4 $\underline{k_6k_5} * N + h_3 = \bar{5}\bar{8} * \bar{3} + \bar{2} = 172 = |b_2| - |a_2|$ है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण अंकन $= \underline{k_6k_5}\,, \underline{k_4k_3},\ \underline{k_2k_1} = \underline{100 + \bar{5}\bar{8}}, \underline{86}, \underline{\bar{2}\bar{9}}$

$= \underline{42}, \underline{86}, \underline{\bar{2}\bar{9}} = 4,2,8,6,\bar{2},\bar{9},$ [अनुच्छेद 21-4 (दाँये से बाँये) उना आश्लेषक सत्यकथन 2]

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= 0.\dot{4}386\bar{2}\dot{\bar{9}} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$ होगा।

B■ बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

प्रक्रम 1 $a_2 \div N = \bar{1}\bar{2}\bar{9} \div \bar{3}$ से प्रथम दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_1k_2}$ =भागफल $d_1 = 43$ तथा शेषफल $c_1 = 0$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk संकेतन में लिखे $_0 43$

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_0 43$ को 043 =43 में विस्तारित कीजिए। $43 \div N = 43 \div \bar{3}$ से दूसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_3k_4}$ = भागफल $d_2 = \bar{1}\bar{4}$ तथा शेषफल $c_2 = 1$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_0$kk के संकेतन में लिखे $_0 43\;_1\bar{1}\bar{4}$

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_1\bar{1}\bar{4}$ को $1\bar{1}\bar{4}$ में विस्तारित कीजिए। $1\bar{1}\bar{4} \div \bar{3}$ से तीसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_5k_6}$ = भागफल $d_3 = \bar{3}1$ तथा शेषफल $c_3 = \bar{1}$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk संकेतन में लिखे $_0 43\;_1\bar{1}\bar{4}\;_{\bar{1}}\bar{3}1$

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_{\bar{1}}\bar{3}1$ को $\bar{1}\bar{3}1 = \bar{1}\bar{2}\bar{9}$ में विस्तारित कीजिए। जो आश्लेषक अंश a_2 है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $= \underline{k_1k_2}\,, \underline{k_3k_4},\ \underline{k_5k_6} = \underline{43}, \underline{\bar{1}\bar{4}}, \underline{\bar{3}1}$ =4,2,8,5,7,1

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण= $0.\dot{4}2857\dot{1}$

अथवा

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_1\bar{1}\bar{4}$ को $1\bar{1}\bar{4} = 86$ में विस्तारित कीजिए। $86 \div \bar{3}$ से तीसरा दो अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_5k_6}$ = भागफल $d_3 = \bar{2}\bar{8}$ तथा शेषफल $c_3 = 2$ को $_{\text{शेषफल}}$आवर्ती अंकसमूह $_c$kk संकेतन में लिखे $_0 43\;_1\bar{1}\bar{4}\;_2\bar{2}\bar{8}$

प्रक्रम 4 प्रक्रम 3 में $_c$kk के संकेतन में लिखे $_2\bar{2}\bar{8}$ को $2\bar{2}\bar{8}$= 172= में विस्तारित कीजिए। जो $|b_2| - |a_2|$ के बराबर है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण अंकन $= \underline{k_1k_2}\,, \underline{k_3k_4},\ \underline{k_5k_6} = \underline{43}, \underline{\bar{1}\bar{4}}, \underline{\bar{2}\bar{8}}$ का संशोधित मान

$\underline{43}, \underline{\bar{1}\bar{4} + \bar{1}}, \underline{99 + \bar{2}\bar{8}} = \underline{43}, \underline{\bar{1}\bar{5}}, \underline{71} = 4,3,\bar{1},\bar{5},7,1$ [अनुच्छेद 21-4(बाँये से दाँये) उना आश्लेषक सत्य कथन 2]

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ का पूर्ण आवर्ती दषमलव निरूपण= $0.\dot{4}3\bar{1}\bar{5}7\dot{1} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$ होगा।

(4) आश्लेषक N>1 के लिए आश्लेषक स्तर = N_r में r = 3 द्वारा हल

A■ दाँये से बाँये गुणन संक्रिया विधि द्वारा हल

$\frac{a}{b} = \frac{3}{7}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_3$ $\frac{\bar{a}_3}{\bar{b}_3} = \frac{\bar{4}\bar{2}\bar{9}}{\bar{1}00\bar{1}}$ से आश्लेषक हर $b_3 = \bar{1}00\bar{1}$ से आश्लेषक $N = \bar{1}$ और आश्लेषक स्तर $N_r = N_3$ आश्लेषक अंश a_3 का योज्य प्रतिलोम =429, प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार प्रक्रमों में कीजिए।

प्रक्रम 1 $a_3 = \bar{4}\bar{2}\bar{9} = 0\bar{4}\bar{2}\bar{9}$ से प्रथम तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_3k_2k_1} = \bar{4}\bar{2}\bar{9}$ का सैकड़ा दहाई इकाई अंक $\bar{4}\bar{2}\bar{9}$ और प्रथम हासिल सं,ख्या h_1 = [$a_3 = 0\bar{4}\bar{2}\bar{9}$ के सैकड़ा,दहाई,इकाई अंक $\bar{4}\bar{2}\bar{9}$ के अतिरिक्त अंको से बनी संख्या=0 , को $_{\text{हासिल}}$आवर्ती अंक का $_h$kkk संकेतन में लिखे $_0\bar{4}\bar{2}\bar{9}$

प्रक्रम 2 $(\underline{k_3k_2k_1}) * N + h_1 = \bar{4}\bar{2}\bar{9} * \bar{1} + 0 = 429$ आश्लेषक अंश a_3 का योज्य प्रतिलोम है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का का तीन अंकीय समूह हल दाँये से बाँये तीन स्थानों मे $---\backslash k_3k_2k_1 = ---\backslash\bar{4}\bar{2}\bar{9}$ होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक k_6, k_5, k_4 क्रमशः k_3, k_2, k_1 के योज्य प्रतिलोम होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_6, k_5, k_4 \backslash k_3, k_2, k_1$

$= 429 \backslash \bar{4}\bar{2}\bar{9} = 0.\dot{4}29\bar{4}\bar{2}\dot{\bar{9}} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$

B■ बाँये से दाँये भाग संक्रिया विधि द्वारा हल

प्रक्रम 1 $a_3 \div N = \bar{4}\bar{2}\bar{9} \div \bar{1}$ से प्रथम तीन अंकीय आवर्ती अंक समूह $\underline{k_1 k_2 k_3}$ भागफल $d_1 = 429$ तथा शेषफल $c_1 = 0$ को शेषफलआवर्ती अंकसमूह $_{s}kk$ संकेतन में लिखे $_{0}$**429**

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 में $_{c}kkk$ के संकेतन में लिखे $_{0}429$ को 0429 =429 आश्लेषक अंश a_3 का योज्य प्रतिलोम है।

अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण का आधे स्थान तक का का तीन अंकीय समूह हल दाँये से बाँये तीन स्थानों मे – $k_1 k_2 k_3 =$ 429 होगा। तथा शेष आधे स्थान के अंक $k_4, k_5 k_6$क्रमशः k_1, k_2, k_3 के योज्य प्रतिलोम होंगे। अर्थात पूर्ण आवर्ती अंक $k_6, k_5, k_4 \backslash k_3, k_2, k_1 = 429\backslash\bar{4}\bar{2}\bar{9} = 0.\dot{4}29\,\bar{4}\bar{2}\dot{\bar{9}} = 0.\dot{4}2857\dot{1}$

हलित उदाहरण 1■ - $\frac{1}{23}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण आगर आश्लेषक स्तर P_2 द्वारा कीजिए।

हल $\frac{1}{23}$ के लिए आगर आश्लेषक भिन्न$_2$ $\frac{a_2}{b_2} = \frac{13}{299}$ से आश्लेषक हर $b_2 = 299$ से आश्लेषक P =3 और आश्लेषक स्तर $p_r = p_2$ आश्लेषक अंश a_2 =13, आश्लेषक अंश 13 कें अंकों का 9 पुरनी अंको से बनी संख्या =86 , $b_2 - a_2 = 299 - 13 = 286$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) $\{\mathbf{13}\}\backslash{}_{1}04\ {}_{2}34\ {}_{0}78\ {}_{0}26\ {}_{2}08\ {}_{1}69\ {}_{1}56\ {}_{0}52\ {}_{1}17\ {}_{0}39\ {}_{0}13$ में $\{\mathbf{13}\}=$ आश्लेषक अंश a_2 है।

$\therefore \frac{1}{23} = 0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का बाइस अंकीय एक समूह होगा ।

पूरे आवर्ती अंको के स्थान मान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

सातवें समूह के आवर्ती अंक 08 और छटवें समूह के आवर्ती अंक 69 से बनी संख्या 0869 के बीच के 2 अंकीय समूह संख्या 86 = आलेशक अंश 13 कें अंकों का 9 पुरनी अंको से बनी संख्या है। अतः छटवें समूह में 0869 में से 86 के पूर्व (बाँयी ओर) के शेष अंक 86 के बाद (दाँयी ओर प्राप्त हो चुके) अंकों के 9 पुरनी ही होगा। जिसे 2 अंकीय समूह में पाँचवे समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर –

– – – – –\95652173913 पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक 04347826086 \– – – – होंगे। सयुक्त करने पर 04347826086\95652173913 से अभीष्ट आवर्त दशमलव हल होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{1}04\ {}_{2}34\ {}_{0}78\ {}_{0}26\ {}_{2}08\ {}_{1}69\ {}_{1}56\ {}_{0}52\ {}_{1}17\ {}_{0}39\ {}_{0}13\backslash\{\mathbf{13}\}$ में $\{\mathbf{13}\}=$ आश्लेषक अंश a_2 है।

$\therefore \frac{1}{23} = 0.\dot{0}43478260869565217391\dot{3}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का बाइस अंकीय एक समूह होगा।

पूरे आवर्ती अंको के स्थान मान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

पाचवें समूह के आवर्ती अंक 08 और छटवें समूह केआवर्ती अंक 69 से बनी संख्या 0869 के बीच के 2 अंकीय समूह संख्या 86 = आश्लेषक अंश 13 कें अंकों का 9 पुरनी अंको से बनी संख्या है। अतः छटवें समूह में 0869 में से 86 के बाद के शेष अंक 9 को छोड़ने पर 6 ही होगा। जिसे 2 अंकीय समूह में पाँच समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर –

04347826086 \– – – – पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक – – – – –\95652173913 होंगे। सयुक्त करने पर 04347826086\95652173913 से बाइस अंकीय समूह का अभीष्ट आवर्त दशमलव हल होगा।

हल $\frac{1}{23}$ के लिए आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{69}$ से आश्लेषक हर $b_1 = 69$ से आश्लेषक P =7 और आश्लेषक स्तर $p_r = p_1$ आश्लेषक अंश $a_1 = 3$, आश्लेषक हर $b_1 -$ आश्लेषक अंश $a_1 = (69 - 3) = 66$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) – ${}_{3}\mathbf{9}\ {}_{4}5\ {}_{3}6\ {}_{1}5\ {}_{1}2\ {}_{5}1\ {}_{2}7\ {}_{6}3\ {}_{0}9\ {}_{2}1\ {}_{0}3$

${}_{3}\mathbf{9}$ से $(\underline{k_{11}}) * N + h_1 = 9 * 7 + 3 = 66 = b_1 - a_1$ है ।

∴ पूर्ण आवर्ती अंकों के समूह के आधे स्थान भाग के अंको का प्रथम समूह ---------------\95652173913

तथा शेष द्वितीय समूह के अंक प्रथम समूह में प्राप्त अंकों का क्रमशः (दाँये से बाँये) 9 पुरनी अंक 04347826086\– – – –

होंगे। इस प्रकार पूर्ण आवर्ती अंकों का बाइस स्थान के अंक– द्वितीय समूह के अंक\ प्रथम समूह के अंक

04347826086\95652173913 होंगे।

∴ $\frac{1}{23} = 0.\dot{0}434782608695652173913\dot{}$ पूर्ण आवर्ती बाइस अंकों का एक समूह हल होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{3}0\ {}_{2}4\ {}_{3}3\ {}_{5}4\ {}_{5}7\ {}_{1}8\ {}_{4}2\ {}_{0}6\ {}_{6}0\ {}_{4}8\ {}_{6}6$

11वें क्रम से ${}_{6}6$ के विस्तार से प्राप्त भाज्य $66 = b_1 - a_1$ है ।

∴ पूर्ण आवर्ती अंकों के समूह के आधे स्थान भाग के अंको का प्रथम समूह 04347826086\-----------

तथा शेष द्वितीय समूह के अंक प्रथम समूह में प्राप्त अंकों का क्रमशः (बाँये से दाँये) 9 पुरनी अंक ---------------\95652173913

होंगे। इस प्रकार पूर्ण आवर्ती अंकों का बाइस स्थान के अंक – प्रथम समूह के अंक\ द्वितीय समूह के अंक

04347826086\95652173913 होंगे।

∴ $\frac{1}{23} = 0.\dot{0}434782608695652173913\dot{}$ पूर्ण आवर्ती बाइस अंकों का एक समूह होगा।

हलित उदाहरण 2■ $\frac{13}{31}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण आगर आश्लेषक स्तर P_3 पर कीजिए।और उत्तर की जाँच उना आश्लेषक स्तर n_1 द्वारा कीजिए।

हल $\frac{13}{31}$ के लिए आगर आश्लेषक भिन्न$_3$ $\frac{a_3}{b_3} = \frac{1677}{3999}$ से आश्लेषक हर $b_3 = 3999$ से आश्लेषक $P = 4$ और आष्लेशक स्तर $p_r = p_3$, आश्लेषक अंश $a_3 = 1667$, $(b_4 - a_{4)} = 3999 - 1677 = 2322$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) ${}_{1}419\ {}_{3}354\ {}_{2}838\ {}_{2}709\ {}_{1}677$

छटवें समूह के लिए पाँचवें समूह के ${}_{1}419$ से $(\underline{k_8}) * N + h_1 = 419 * 4 + 1 = 1677 =$ आश्लेषक अंश a_3 है। अतः $\frac{13}{31}$ के पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह पाँचवें समूह तक के पूरे अंक पंद्रह स्थानिक $0.\dot{4}1935483870967\dot{7}$ होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{1}419\ {}_{3}354\ {}_{3}838\ {}_{2}709\ {}_{1}677$

छटवें समूह के लिए पाँचवें समूह के ${}_{1}677$ के विस्तार से प्राप्त भाज्य $1677 =$ आश्लेषक अंश a_3 है।अतः$\frac{13}{31}$ के पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह पाँचवें समूह तक के पूरे अंक पंद्रह स्थानिक $0.\dot{4}1935483870967\dot{7}$ होगा।

उत्तर जाँच

हल $\frac{13}{31}$ के लिए उना आश्लेषक भिन्न$_1$ $\frac{\overline{a_1}}{\overline{b_1}} = \frac{\overline{13}}{\overline{31}}$ से आश्लेषक हर $\overline{b_1} = \overline{31}$ से आश्लेषक $N = \bar{3}$ और आश्लेषक स्तर $N_r = N_1$ आश्लेषक अंश $\overline{a_1} = \overline{13}$, $[|b_1| - |a_1|] = 31 - 13 = 18 = 2\bar{2}$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे। ${}_{1}9\ \bar{2}\ \bar{7}\ {}_{0}9\ {}_{0}\bar{3}\ {}_{0}1\ {}_{1}0\ \bar{2}\ \bar{4}\ {}_{0}8\ {}_{\bar{1}}\ \bar{3}$

(दाँये से बाँये) ${}_{0}\bar{6}\ {}_{0}2\ {}_{2}0\ {}_{\bar{1}}\bar{7}\ {}_{1}6\ {}_{\bar{2}}\bar{6}\ {}_{1}9\ {}_{\bar{2}}\bar{7}\ {}_{0}9\ {}_{0}\bar{3}\ {}_{0}1\ {}_{1}0\ {}_{\bar{2}}\bar{4}\ {}_{0}8\ {}_{\bar{1}}\bar{3}$

सोलहवें क्रम के लिए पंद्रहवें क्रम के ${}_{0}\bar{6}$ से $(\underline{k_8}) * N + h_1 = \bar{6} * \bar{3} + 0 = 18 = [|b_1| - |a_1|]$ है।

∴ पंद्रहवें क्रम के $\bar{6}$ के लिए $10 + \bar{6} = 4$ लेना होगा। तब

$\frac{13}{31} = 0.\dot{4}20\bar{7}6\bar{6}9\bar{7}9\bar{3}10\bar{4}8\dot{\bar{3}} = 0.\dot{4}1935487870967\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह पंद्रह स्थानिक होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{\bar{1}}4\ {}_{0}2\ {}_{2}0\ {}_{2}\bar{6}\ {}_{2}\bar{4}\ {}_{1}\bar{5}\ {}_{2}\bar{1}\ {}_{1}\bar{6}\ {}_{1}\bar{1}\ {}_{0}\bar{3}\ {}_{0}1\ {}_{1}0\ {}_{1}0\ {}_{1}\bar{3}\ {}_{1}\bar{2}\ {}_{2}\bar{2}$

सोलहवें क्रम के लिए पंद्रहवें क्रम के ${}_{2}\bar{2}$ के विस्तार से प्राप्त भाज्य $2\bar{2} = 18$, $|b_1| - |a_1|$ है।

∴ पंद्रहवें क्रम का आवर्ती अंक $\bar{2}$ के लिए $(9 + \bar{2}) = 7$ तथा चोदहवें क्रम का आवर्ती अंक $\bar{2}$ का उना मान $(\bar{2} - 1) = \bar{3}$ को अभीष्ट आवर्ती दशमलव निरूपण मे दर्शित करने उपरांत आगर संख्याकन पद्धत्ति में दर्शित करना यथेष्ठ होगा। तब–

$\frac{13}{31} = 0.\ \dot{4}20\bar{6}\ \bar{4}\bar{5}\bar{1}\bar{6}\bar{1}\bar{3}10\bar{3}\bar{2}\dot{\bar{2}} = 0.\dot{4}20\bar{6}\ \bar{4}\bar{5}\bar{1}\bar{6}\bar{1}\bar{3}10\bar{3}\bar{3}7 = 0.\dot{4}1935487870967\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह पंद्रह स्थानिक होगा।

हलित उदाहरण 3■ . $\frac{1}{67}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण आगर आश्लेषक स्तर P_4 पर कीजिए।और उत्तर की जाँच उना आश्लेषक स्तर n_2 पर कीजिए।

हल $\frac{1}{67}$ के लिए आगर आश्लेषक भिन्न$_4$ $\frac{a_4}{b_4} = \frac{597}{39999}$ से आश्लेषक हर $b_4 = 39999$ से आश्लेषक $P = 4$ और आश्लेषक स्तर $p_r = p_4$ आश्लेषक अंश $a_4 = 597 = 0597$, $(b_4 - a_4) = 39999 - 0597 = 39402$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) **{0597}** 0 ${}_{2}1492$ ${}_{0}5373$ ${}_{1}1343$ ${}_{3}2835$ ${}_{3}8208$ ${}_{0}9552$ ${}_{0}2388$ ${}_{0}0597$

नवें समूह के लिए आठवें समूह के ${}_{2}1492$ से $(\underline{k_8}) * N + h_1 = 1492 \ * 4 + 2 = 5970 = 05970$ में $0579 =$ आश्लेषक अंश a_4 है को छोड़ने पर $\frac{1}{67} = 0.\dot{0}1492537313432835820 8\ 955223880597\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह तैतीस स्थानिक होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{1}0149$ ${}_{1}2537$ ${}_{1}3134$ ${}_{2}3283$ ${}_{3}5820$ ${}_{0}8955$ ${}_{3}2238$ ${}_{2}8059$ ${}_{3}7$**{014}**

आठवें समूह के आवर्ती अंक 8059 और नववें समूह के आवर्ती अंक से बनी संख्या 8**0597**014 के बीच के 4 अंकीय समूह संख्या 0597 आश्लेषक अंश a_4 है अतः 0597 के बाद के अंक 014 को छोड़ने पर

$\frac{1}{67} = 0.\dot{0}14925373134328358208\ 955223880597\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह तैतीस स्थानिक होगा।

उत्तर जाँच –

हल $\frac{1}{67}$ के लिए उना आश्लेषक भिन्न$_2$ $\frac{\overline{a_2}}{\overline{b_2}} = \frac{\bar{3}}{\overline{201}}$ से आश्लेषक हर $\overline{b_2} = \overline{201}$ से आश्लेषक $N = \bar{2}$ और आश्लेषक स्तर $N_r = N_2$ आश्लेषक अंश $\overline{a_2} = \bar{3} = 0\bar{3}$, $|b_2| - |a_2| = 201 - 3 = 198$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) – **{$0\bar{3}$}0** ${}_{0}15$ ${}_{\bar{1}}\overline{08}$ ${}_{0}54$ ${}_{0}\overline{27}$ ${}_{1}14$ ${}_{0}\overline{57}$ ${}_{1}29$ ${}_{1}\overline{65}$ ${}_{1}83$ $\bar{1}\,\overline{92}$ ${}_{0}96$ ${}_{0}\overline{48}$ ${}_{0}24$ ${}_{0}\overline{12}$ ${}_{0}06$ ${}_{0}\overline{03}$

17 वें समूह के लिए 16वें समूह के ${}_{0}15$ से $(k_{15}) * N + h_1 = 15 \ * \bar{2} + 0 = 0\bar{3}0$ से $0\bar{3} =$ आश्लेषक अंश $\overline{a_2}$ है को छोड़ने पर $\frac{1}{67} = 0.\dot{0}150\bar{8}54\ \bar{2}\ \bar{7}145\bar{7}\ 29\bar{6}\bar{5}83\bar{9}\bar{2}96\bar{4}\bar{8}24\bar{1}\bar{2}060\dot{\bar{3}}$

$= 0.\dot{0}14925373134328358208\ 955223880597\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह तैतीस स्थानिक होगा।

(बाँये से दाँये) ${}_{\bar{1}}01$ ${}_{\bar{1}}49$ ${}_{\bar{1}}25$ ${}_{\bar{1}}37$ ${}_{\bar{1}}31$ ${}_{\bar{1}}34$ ${}_{0}33$ ${}_{1}\overline{16}$ ${}_{0}\overline{42}$ ${}_{0}21$ ${}_{1}\overline{10}$ ${}_{0}\overline{45}$ ${}_{\bar{1}}22$ ${}_{0}39$ ${}_{\bar{1}}\overline{19}$ ${}_{1}\overline{40}$ ${}_{0}\bar{3}$ **{0}**

सोलहवें समूह के आवर्ती अंक $\bar{4}0$ और नववें समूह केआवर्ती अंक $\bar{3}0$ से बनी संख्या $\bar{4}0\bar{3}0$ के बीच के 2 अंकीय समूह संख्या $0\bar{3}$ आश्लेषक अंश $\overline{a_2}$ है अतः $0\bar{3}$ के बाद के अंक 0 को छोड़ने पर

$$\frac{1}{67} = 0.\dot{0}149253731343\bar{3}\bar{1}\bar{6}\bar{4}\bar{2}21\bar{1}\bar{0}\bar{4}\bar{5}2239\bar{1}\bar{9}40\bar{3}$$

$= 0.\dot{0}14925373134328358208\ 955223880597\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह तैतीस स्थानिक होगा।

निष्कर्ष प्राप्त उत्तर सही है।

उदाहरण 4■ $\frac{17}{23}$ का N_3द्वारा पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण कीजिए।

हल $\frac{17}{23}$ के लिए उना आश्लेशक भिन्न$_3$ $\frac{\overline{a_3}}{\overline{b_3}} = \frac{\overline{1479}}{\overline{2001}}$ से आश्लेषक हर $\overline{b_3} = \overline{2001}$ से आश्लेषक $N = \bar{2}$ और आश्लेषक स्तर $N_r = N_3$ आश्लेषक अंश $\overline{a_3} = \overline{1479} = \bar{2}521$ $\{|b_2| - |a_2|\} = 2001 - 1479 = 522 = 6\bar{7}\bar{8} = 1\bar{4}\bar{7}\bar{8}$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(दाँये से बाँये) $-\frac{17}{23}$ के हल का प्रारंभिक गणना {${}_{0}$**435** ${}_{1}$**21}8** ${}_{0}\overline{609}$ ${}_{1}305$ $\bar{1}\,\overline{653}$ ${}_{1}827$ $\bar{1}\,\overline{914}$ ${}_{0}957$ $\bar{1}\,\overline{479}$ से नववें समूह के आवर्ती अंक 435 और आठवें समूह केआवर्ती अंक 218 से बनी संख्या 435218 =43**522**$\bar{2}$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या $522 = |b_2| - |a_2|$ है अतः 522 के पूर्व अंक $\bar{2}$ ही आठवें समूह के आवर्ती अंक होंगा जिसका नियमानुसार संशोधित हल $(10+\bar{2}) = 8$ को सातवें समूह तक प्राप्त आवर्ती अंकों के साथ लेने पर $-\frac{17}{23} = 0.\dot{8}\bar{6}0\bar{9}305\bar{6}\bar{5}\bar{3}827\bar{9}\bar{1}\bar{4}957\bar{4}7\dot{\bar{9}}$

$= 0.\dot{7}3913043478260869565 2\ \dot{1}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह बाइस स्थानिक होगा।

पूरे आवर्ती अंको के स्थानमान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

पाँचवें समूह के आवर्ती अंक $\bar{6}5\bar{3}$ और चौथे समूह केआवर्ती अंक 827 से बनी संख्या $\bar{6}5\bar{3}\,827$ $=\bar{7}479\bar{7}3$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या 479 = आश्लेषक अंश $\overline{1479}$ के इकाई से दहाई........ की ओर के प्रथम तीन संख्या $\overline{479}$ का योज्य प्रतिलोम है। अतः चौथे समूह में $\bar{7}479\bar{7}3$ में से 479 के पूर्व के शेष अंक $\bar{7}\bar{3}$ ही होगा। जिसे r अंकीय समूह में तीन समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर –

$- - - - - \backslash\overline{73},\overline{914},957,\overline{47\dot{9}}$ पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का योज्य प्रतिलोम अंक $73{,}914{,}\overline{957},479\,\backslash - - - -$ होंगे। सयुक्त करने पर

$73{,}914{,}\overline{957},479\,\backslash\overline{73},\overline{914},957,\overline{47\dot{9}}$ से $\frac{17}{23} = 0.\dot{7}39130434782608695652\ \dot{1}$ अभीष्ट आवर्त दशमलव हल होगा।

अथवा

हल $\frac{17}{23}$ के लिए उना आश्लेषक भिन्न3 $\frac{\overline{a_3}}{\overline{b_3}} = \frac{\overline{1479}}{200\bar{1}} = \frac{\bar{2}\,521}{200\bar{1}}$ से आश्लेषक हर $\overline{b_3} = \overline{2001}$ से आश्लेषक $N = \bar{2}$ और आश्लेषक स्तर $N_r = N_3$ आश्लेषक अंश $\overline{a_3}$ $=\overline{1479}$ $=\bar{2}521$, $|b_2| - |a_2| = 2001 - 1479 = 522 = 6\bar{7}\bar{8} = 1\bar{4}7\bar{8}$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

$\frac{17}{23}$ के हल का प्रारंभिक गणना $\{_1\mathbf{566}\ _0\overline{\mathbf{78}}\}\mathbf{\bar{3}}$ $_1392$ $_0\overline{696}$ $_0348$ $_0\overline{174}$ $_0087$ $_{\bar{1}}\,0\overline{44}$ $_{\bar{2}}\,521$ से

नवें समूह के आवर्ती अंक 566 और आठवें समूह के आवर्ती अंक $\overline{783}$ से बनी संख्या $566\overline{783} = 56\mathbf{522}\bar{3}$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या 522= $|b_2| - |a_2|$ है अतः अतः 522 के पूर्व अंक $\bar{3}$ ही आठवें समूह के आवर्ती अंक होंगा जिसका नियमानुसार संशोधित हल $(10+\bar{3})=7$ को सातवें समूह तक प्राप्त आवर्ती अंकों के साथ लेने पर– $\frac{17}{23}$ $=0.\dot{7}392\overline{6}9\overline{6}348\ \overline{174}087 0\overline{44}\ 52\dot{1}$

$=0.\dot{7}392\overline{6}9\overline{6}348\ \overline{174}087 0\overline{44}\ 52\dot{1}$

$= 0.\dot{7}39130434782608695652\ \dot{1}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह बाइस स्थानिक होगा।

पूरे आवर्ती अंको के स्थानमान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

पाँचवें समूह के आवर्ती अंक 348 और चौथे समूह केआवर्ती अंक $\overline{174}$ से बनी संख्या $348\overline{174}$ $=4\bar{5}\bar{2}\bar{1}74$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या $\overline{521}$ = आश्लेषक अंश $\bar{2}521$ के इकाई से दहाई........ की ओर के प्रथम तीन संख्या 521 का योज्य प्रतिलोम है। अतः चौथे समूह में $4\bar{5}\bar{2}\bar{1}74$ में से $\overline{521}$ के पूर्व के शेष अंक 74 ही होगा। जिसे r अंकीय समूह में तीन समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर –

$- - - - - \backslash\overline{74},087,0\overline{44},521$ पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का योज्य प्रतिलोम अंक $74{,}0\overline{87},044,\overline{521}\,\backslash - - - -$ होंगे। सयुक्त करन पर

$74{,}0\overline{87},044,\overline{521}\,\backslash\overline{74},087,0\overline{44},521$ से $\frac{17}{23} = 0.\dot{7}39130434782608695652\ \dot{1}$ अभीष्ट आवर्त दशमलव हल होगा।

(बाँये से दाँये) $\bar{1}739$ $\bar{1}130$ $_0\,435$ $_1\overline{217}$ $_1\overline{391}$ $_1\overline{304}$ $_0\overline{348}$ $_0174$

सातवें समूह के आवर्ती अंक $\overline{348}$ और आठवें समूह केआवर्ती अंक 174 से बनी संख्या $\overline{348}174 = \bar{4}52174$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या 521= आश्लेषक अंश $\bar{2}521$ के इकाई से दहाई........ की ओर के प्रथम तीन संख्या 521 है। अतः 521 के बाद के अंक 74 को छोड़ने पर

$\frac{17}{23}$ $=0.73913043\overline{5}2\bar{1}\bar{7}\bar{3}9\bar{1}3\bar{0}\bar{4}3\bar{4}81$

$=0.7391304347826086956521$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह बाइस स्थानिक होगा।

पूरे आवर्ती अंको के स्थानमान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

तीसरे समूह 435 और चौथे समूह के आवर्ती अंक $\overline{217}$ से बनी संख्या 435 $\overline{217}$ = $_{44}\bar{5}\overline{217}$ के बीच के 3 अंकीय समूह संख्या $\overline{521}$ = आश्लेषक अंश $\bar{2}521$ के इकाई से दहाई........ की ओर के प्रथम तीन संख्या 521 का योज्य प्रतिलोम है। अतः तीसरे और चौथे समूह में $44\bar{5}\overline{217}$ में से अंतिम $\bar{7}$ को छोड़ $44\overline{521}$ ही होगा। जिसे r अंकीय समूह में दो समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ

लेंने पर – $73913044\bar{5}\bar{2}\bar{1}$ \– – – – – पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का समूह प्राप्त होंगे। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का योज्य प्रतिलोम अंक – – – –\$\bar{7}\bar{3}\bar{9}\bar{1}\bar{3}\bar{0}\bar{4}\bar{4}\,521$होंगे। सयुक्त करन पर–

$73913044\bar{5}\bar{2}\bar{1}$ \$\bar{7}\bar{3}\bar{9}\bar{1}\bar{3}\bar{0}\bar{4}\bar{4}\,521$ होंगे।

अतः $\frac{17}{23} = 0.\dot{7}391304347826086956521\dot{1}$ अभीष्ट बाइस अंकीय आवर्त दशमलव हल होगा।

21-5 दशमलव निरूपण में न्यूनता का नियम

(1) आगर आश्लेषक के प्रति भिन्न $\frac{a}{b}$ का x अंकीय हर b जिसका कम से कम इकाई अंक 0 और 9 नहीं है। (आश्लेषक स्तर $P_r > P_1$ के लिए r>1) पर आगर आश्लेषक हर b_r के अतिनिकटतर हो तो भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण दशमलव बाद इच्छित स्थान तक प्राप्त करने में न्यूनता का नियम प्रतिपादित है। आश्चर्य होगा कि इस न्यूनता नियम में आगर आश्लेषक द्वारा प्रतिपादित (बाँयी से दाँयी) आवर्ती दशमलव निरूपण में पूर्ण आवर्ती अंक एवं पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक के अंक सुनिश्चित करनें का नियम यथा शब्दो में स्वीकार्य है।

जिसके अनुसार– आश्लेषक हर b_r से हर b का न्यूनता मान $d = (b_r - b)$, आश्लेषक स्तर P_r = हर b के इकाई अंक के बाद क्रमशः अंक 9 की स्थान संख्यामान g का आगर (g+1) के लिए P_{g+1} और आश्लेषक हर b_r से आश्लेषक p= हर b के इकाई अंक के बाद क्रमशः अंक 9 की स्थान संख्यामान g के बाद के अंकों से बनी संख्यामान z का आगर (z+1) प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् निम्नानुसार गणना प्रक्रम में दशमलव निरूपण कीजिए।

प्रक्रम 1 भिन्न $\frac{a}{b}$ के अंशमान a को प्रथम सकल भाज्य S_1= प्रथम क्रियाशील भाज्य R_1 मानकर आश्लेषक p द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_1 को r अंकीय में आवश्यकतानुसार बाँयी ओर 0 बढ़ाकर kkk---के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का प्रथम r अंकीय समूह अंक होगा। तथा शेषफल c_1 को kkk-..के रूप में दर्शित भागफल k_1 के बाँयी ओर नीचे $c_1$kkk---- के रूप दर्शित कीजिए ।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से दर्शित $c_1$kkk---- --- को विस्तारित कर सकल भाज्य $S_2 = c_1kkk - -$ प्राप्त कीजिए।

द्वितीय क्रियाशील भाज्य R_2 = [{सकल भाज्य S_2} +{(भागफल k_1) ∗ (;न्यूनता मान d)}] को आश्लेषक p द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_2 को r अंकीय में आवश्यकतानुसार के बाँयी ओर 0 बढ़ाकर kkk-..के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का द्वितीय r अंकीय समूह अंक होगा। तथा शेषफल c_2 को kkk---के रूप में दर्शित भागफल k_2 के बाँयी ओर नीचे $c_2$kkk---- के रूप दर्शित कीजिए ।

इसी प्रकार प्रक्रम n के लिए प्रक्रम $(n-1)$ से दर्शित c_{n-1}kkk---- --- को विस्तारित कर सकल भाज्य $S_n = c_{n-1}kkk - -$ प्राप्त कीजिए।

n वाँ क्रियाशील भाज्य R_n = [{सकल भाज्य S_n} +{; भागफल k_{n-1}) ∗ (;न्यूनता मान d)}] को आश्लेषक p द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_n को r अंकीय में आवश्यकतानुसार बाँयी ओर 0 बढ़ाकर kkk---के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का n वाँ r अंकीय समूह अंक होगा।

ऐसा हल क्रम अपने इच्छित स्थान मान प्राप्त करने तक जारी रखकर भिन्न $\frac{a}{b}$ का अभीष्ट दशमलव निरूपण प्राप्त कर सकते है।

टीप.. 1• यह नियम आश्लेषक p और आश्लेषक स्तर P_r के बढ़ते मानों पर अतिनिकटतर दशमलव मान देने अथवा पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण करने पर सक्षम है।

2 • आश्लेषक p=1 और आश्लेषक स्तर P_r पर शेषफल 0 ही प्राप्त होगा। जिससे क्रियाशील भाज्य = सकल भाज्य का (d+1) गुना होगा। तथा n वें प्रक्रम का मागफल मान ¨$(d+1)^{n-1}$ जिसे r अंकीय संयोजन नियम से हल कर वांछित स्थान तक निकटतर दशमलव मान प्राप्त किया सकता है।

उदाहरण 1■ $\frac{1}{127}$ का दशमलव भिन्न निरूपण में न्यूनता नियम के अन्तर्गत आश्लेषक P_1 प्राप्त कर प्राप्त उत्तर की जाँच सरल आश्लेषक स्तर P_5 पर कीजिए।

हल भिन्न $\frac{a}{b} = \frac{1}{127}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए– हर $b = 127$ के निकटतर आश्लेषक हर $b_r = 129$, अंशमान $\dot{} = 1$, न्यूनता $d = b_r - b = 129 - 127 = 2$, $(b - a) = 127 - 1 = 126$,
आश्लेषक स्तर $P_r = P_1$, और आश्लेषक $P_1 = 12+1 = 13$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् गणना प्रक्रमों की संक्षिप्त तालिका निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

$\frac{1}{127}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
उत्तरांक k सह शेषफल $c = {}_c k_n$	${}_1 0$	${}_{10} 0$	${}_9 7$	${}_7 8$	${}_3 7$	${}_{\bar{1}} 4$	${}_2 0$	${}_7 1$	${}_8 5$	${}_4 7$	${}_9 4$
सकल भाज्य $S_n = {}_c k_{n-1}$ का विस्तार	1	10	100	97	78	37	$0\bar{6}$	20	71	85	47
उत्तरांक k_{n-1} *न्यूनता d		0	0	14	16	14	8	0	2	10	14
क्रियाशील भाज्य $R_n = S_n + (k_{n-1} * d)$	1	10	100	111	94	51	2	20	73	95	61

हल प्रक्रम n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
उत्तरांक k सह शेषफल $c = {}_c k_n$	${}_{\bar{2}} 8$	${}_4 0$	${}_1 3$	${}_6 1$	${}_{\bar{2}} 5$	${}_{\bar{5}} 0$	${}_2 \bar{4}$	${}_8 0$	${}_2 6$	${}_{\bar{1}} 3$	
सकल भाज्य $S_n = {}_c k_{n-1}$ का विस्तार	94	$\bar{1}\bar{2}$	40	13	61	$\bar{1}\bar{5}$	$\bar{5}0$	16	80	26	$\bar{7}$
उत्तरांक k_{n-1} * न्यूनता d	8	16	0	6	2	10	0	$\bar{8}$	0	12	6
क्रियाशील भाज्य $R_n = S_n + (k_{n-1} * d)$	102	4	40	19	63	$\bar{5}$	$\bar{5}0$	8	80	38	$\bar{1}$

22 वें हल प्रक्रम में क्रिया भाज्य $R_n = \bar{1}$ अंशमान $\dot{} = 1$ का योज्य प्रतिलोम है।

$\therefore \frac{1}{127}$ का पूर्ण दशमलव भिन्न निरूपण 2*(22-1) =42 अंकीय समूह होगा । जिसका आधे स्थान तक का 21 अंकीय हल उपरोक्त हल तालिका से $00787401574803150\bar{4}063 \backslash$ होगा। तथा शेष आघे स्थान तक का 21 अंकीय हल उपरोक्त हल तालिका से प्राप्त अंकों का क्रमशः योज्य प्रतिलोम अंक $\backslash 00\bar{7}\bar{8}\bar{7}\bar{4}0\bar{3}1\bar{5}\bar{7}\bar{4}\bar{8}0\bar{3}1\bar{5}040\bar{6}\bar{3}$ होगा।

इस प्रकार $\frac{1}{127} = \mathbf{0}.\dot{0}0787401574803150\bar{4}063\backslash 00\bar{7}\bar{8}\bar{7}\bar{4}0\bar{1}\bar{5}\bar{7}\bar{4}\bar{8}0\bar{3}\bar{1}\bar{5}040\bar{6}\,\dot{\bar{3}}$

$= \mathbf{0}.\dot{0}0787401574803150\bar{4}06300\bar{7}\bar{8}\bar{7}\bar{4}0\bar{1}\bar{5}\bar{7}\bar{4}\bar{8}0\bar{3}\bar{1}\bar{5}040\bar{6}\,\dot{\bar{3}}$

$= \mathbf{0}.\dot{0}0787401574803149606299212598425196850393\dot{7}$ ब्यालिस स्थान तक होगा।

जाँच हल $\frac{1}{127}$ के लिए आगर आश्लेषक भिन्न$_5$ $\frac{a_5}{b_5} = \frac{3937}{499999}$ से आश्लेषक हर $b_5 = 499999$ से आश्लेषक P =5 और आध्लेषक स्तर $p_r = p_5$ आश्लेषक अंश a_5 =3937=03937 , $b_5 - a_5 = 499999 - 03937 = 496062$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् आवर्ती दशमलव निरूपण निम्नानुसार (दाँये से बाँये) और (बाँये से दाँये) अलग–अलग गणना प्रस्तुत होंगे।

(बाँये से दाँये) ${}_2 00787$ ${}_2 40157$ ${}_2 48031$ ${}_1 49606$ ${}_1 29921$ ${}_1 25984$ ${}_4 25196$ ${}_1 85039$ ${}_4 37007$

पूर्ण आवर्ती अंको के स्थानमान निश्चित करना

आठवें समूह के आवर्ती अंक 85039 और नववें समूह के आवर्ती अंक 37007 से बनी संख्या 8503937007 आठवें समूह के बीच के 5 अंकीय समूह संख्या 03937 = आश्लेषक अंश है। अतः इसके बाद के अंक 007 को छोड़ने पर

$\frac{1}{127} = \mathbf{0}.\dot{0}0787401574803149606299212598425196850393\,\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह बयालिस स्थानिक होगा।

पूरे आवर्ती अंको के स्थानमान के आधे स्थान तक के आवर्ती अंक निश्चित करना

चौथे समूह के आवर्ती अंक 49606 और पाँचवें समूह के आवर्ती अंक 29921 से बनी संख्या 4960629921 के बीच के 6 अंकीय समूह संख्या 496062=$b_5 - a_5$ है। अतः इसके बाद के अंक 9921 को छोड़ने पर पाँचवें समूह के आवर्ती अंक 29921 में से 2 ही लेना होगा। जिसे 5 अंकीय समूह में चार समूह में प्राप्त हो चुके आवर्ती अंको के साथ लेंने पर.– 007874015748031496062\

पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक का 21 अंकीय समूह प्राप्त होगा। तथा शेष आधे स्थान का हल प्राप्त हो चुके अंकों का क्रमशः 9 पुरनी अंक \992125984251968503937 होंगे। सयुक्त करने पर–

$\frac{1}{127} = \mathbf{0}.\dot{0}07874015748031496062992125984251968503937\dot{7}$ पूर्ण आवर्ती अंकों का समूह बयालिस स्थानिक होगा।

उदाहरण 2■ $\frac{17125}{59998}$ का दशमलव भिन्न निरूपण में न्यूनता नियम के अन्तर्गत दशमलव बाद 60 स्थान तक कीजिए।

हल भिन्न $\frac{a}{b} = \frac{17125}{59998}$ का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए – हर b= 59998 के निकटतर आश्लेषक हर $b_r = 59999$, अंशमान $= 17125$, न्यूनता $d = b_r - b = 59999 - 59998 = 1$, $(b - a) = 59998 - 17125 = 42873$, आश्लेषक स्तर $P_r = p_4$, और आश्लेषक p= 5+1 =6 प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् गणना प्रक्रमों की संक्षिप्त तालिका निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

$\frac{17125}{59998}$ **के लिए दशमलव निरूपण गणन तालिका न्यूनता d=1 आश्लेषक** $P_r = 6$

	हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8
A	उत्तरांक $_c k_n$	$_1$2854	$_0$2618	$_4$0872	$_2$6957	$_0$5654	$_4$1884	$_4$7294	$_0$9098
B	सकल भाज्य $S_n = {}_c k_{n-1}$	17125	12854	02618	40872	26957	05654	41884	47294
C	k_{n-1} * d		2854	2618	0872	6957	5654	1884	7294
D	क्रियाशील भाज्य R_n=B+C	17125	15708	05236	41744	33924	11308	43768	54588

	हल प्रक्रम n	9	10	11	12	13	14	15
A	उत्तरांक $_c k_n$	$_4$3032	$_2$7677	$_2$5892	$_2$5297	$_0$5099	$_4$1699	$_0$7233
B	सकल भाज्य $S_n = {}_c k_{n-1}$	09098	43032	27677	25892	25297	05099	41699
C	k_{n-1} * d	9098	3032	7677	5892	5297	5099	1699
D	क्रियाशील भाज्य R_n=B+C	1819 6	46064	35354	31784	30594	10198	43398

$\frac{17125}{59998}$ =2854,2618,0872,6957,5654,1884,7294,9098,3032,7677,5892, 5297, 5099, 1699, 7233

दशमलव बाद 60 स्थान तक अभीष्ट हल होगा।

आश्लेषक P=1 एवं आश्लेषक स्तर P_r वाले भिन्न का दशमलव निरूपण ऐसे सरल भिन्न जिनके हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 के प्रति आश्लेषक स्तर मान P_r के बढ़ते मानों की ओर निकटतर की सुनिश्चता में पाते हैं। उक्त नियम का अनुप्रयोग उदाहरण निम्नानुसार अवलोकित कीजिए।

1• आश्लेषक स्तर $P_r = p_1$ के लिए उदाहरण■

भिन्न $\frac{1}{7}$ का दशमलव निरूपण– हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 ,एवं आश्लेषक स्तर मान $P_r = 1$ के निकटतर की सुनिश्चता में 9 के निकटतर पाते है। ∴ न्यूनता d = 9-7 =2 से एक अंकीय संयोजन में

$\frac{1}{7} = 0.\,{}_01\,{}_03\;\;{}_09\,{}_0\,27\,{}_081\,{}_0243\,{}_0\,729\;\;{}_02187\,{}_065\,61\;\;{}_019683$

$=0.\ 1\backslash 3\backslash 9\backslash {}_27\backslash {}_81\backslash {}_{24}3\backslash {}_{72}9\backslash {}_{218}7\ \backslash {}_{656}1\backslash {}_{1968}3$

= 0. 14 2 8 5 5 2 9 9 3 दशमलव बाद 10 स्थान तक है।

जो कि $\frac{1}{7}$ के वास्तविक आवर्ती दशमलव निरूपण $0.\bar{1}\,4\,2\,8\,5\,\bar{7}$ के निकटतर है।

2• आश्लेषक स्तर $P_r = p_2$ के लिए उदाहरण■

भिन्न $\frac{1}{97}$ का दशमलव निरूपण– हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 ,एवं आश्लेषक स्तर मान P_r=2 के निकटतर की सुनिश्चता में 99 के निकटतर पाते है।∴ न्यूनता d = 99-97 =02 से दो अंकीय संयोजन में

$\frac{1}{97} = 0.\,{}_001\,{}_003\;\;{}_009\,{}_0\,27\,{}_081\;\;{}_0243\,{}_0\,729\;\;{}_02187\;\;{}_065\,61\;\;{}_019683$

$=0.\ 01\backslash\ 03\backslash 09\backslash\ 27\ \backslash 81\backslash\ {}_243\backslash {}_729\backslash {}_{21}87\backslash {}_{65}61\backslash\ {}_{196}83$

=0. 01\03\09\27 \83\50 \51 \54 \57\83 =

= 0.01030927835051545783 दशमलव बाद 20 स्थान तक

जिसका आगर आश्लेषक विधि पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण के प्रति–

$\frac{1}{97}$ के पूर्ण आवर्ती दशमलव कें प्रथम आश्लेषक भिन्न $\frac{a_1}{b_1} = \frac{7}{679}$ से आगर आश्लेषक P=67+1 =68, $b_1 - a_1 = 672$ एवं कार्यकारी अंश $a_1 = 7$ द्वारा दाँये से बाँये हल तालिका–**हल प्रक्रम**

68 की तालिका	एकम	दूनी	तिया	चौक	पंचे	छक्के	सत्ते	अटठे	निया
	68	136	204	272	340	408	476	544	612

	हल प्रक्रम n	**11**	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
A	हासिल उत्तरांक c k_n	$_{1}4$	$_{14}0$	$_{4}2$	$_{42}0$	$_{12}6$	$_{58}1$	$_{37}8$	$_{38}5$	$_{45}5$	$_{47}6$	$_{0}7$
B	सकल गुणनमान $M_n = k_{n-1}$ *P +c	14	140	42	420	126	581	378	385	455	476	7

11← 1 उत्तरांक 40206185567 **का 9 पुरनी अंक क्रमशः** 59793814432

	हल प्रक्रम n	**24**	**23**	**22**	**21**	**20**	**19**	**18**	**17**	**16**	**15**	**14**	**13**	**12**
A	k_n	$_{18}2$	$_{46}2$	$_{54}6$	$_{2}8$	$_{28}0$	$_{8}4$	$_{16}1$	$_{25}2$	$_{48}3$	$_{7}7$	$_{9}1$	$_{23}1$	$_{27}3$
B	M_n	182	462	546	28	280	84	161	252	483	77	91	231	273

24← 12 उत्तरांक 2268041237113 **का 9 पुरनी अंक क्रमशः** 7731958762886

	हल प्रक्रम n	**37**	**36**	**35**	**34**	**33**	**32**	**31**	**30**	**29**	**28**	**27**	**26**	**25**
A	k_n	$_{32}9$	$_{57}4$	$_{30}8$	$_{36}4$	$_{24}5$	$_{41}3$	$_{5}6$	$_{56}0$	$_{16}8$	$_{32}2$	$_{50}4$	$_{28}7$	$_{15}4$
B	M_n	329	574	308	364	245	413	56	560	168	322	504	287	154

37 ← 25 उत्तरांक 9484536082474 **का 9 पुरनी अंक क्रमशः** 0515463917525

	हल प्रक्रम n	**50**	**49**	**48**	**47**	**46**	**45**	**44**	**43**	**42**	**41**	**40**	**39**	**38**
A	k_n			$_{60}9$	$_{65}8$	$_{45}9$	$_{61}6$	$_{4}9$	$_{40}0$	$_{14}7$	$_{11}2$	$_{44}1$	$_{33}6$	$_{64}4$
B	M_n		**672**	609	658	469	616	49	490	147	112	441	336	644

48 ← 38 उत्तरांक 98969072164 **का 9 पुरनी अंक क्रमश** 01030927835

उपरौक्त तालिका में सकल गुणनमान $M_n = k_{n-1}$ *P +c =672 = $b_1 - a_1 = 672$ है। अतः पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण के प्रति दाँये से आँये आधे स्थान तक 48 अंकीय हलमान–

989690721649484536082474226804123711340206185567

तथा शेष आधे स्थान तक 48 अंकीय हलमान क्रमशः उक्त हलमान अंकों का 9 **पुरनी अंक**–

010309278350515463917525773195876288659793814432 होंगे।

ठस प्रकार गणन प्रक्रमों से $\frac{1}{97}$ =

$0.\dot{0}10309278350515463917525773195876288659793814432989690721649$
$48453608247422680412371134020618556\dot{7}$ (97-1) =96 स्थान तक पूर्ण आवर्ती अभीष्ट उत्तर होगा।

3• आश्लेषक स्तर $P_r = p_3$ के लिए उदाहरण■

भिन्न $\frac{1}{997}$ का दशमलव निरूपण– हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 ,एवं आश्लेषक स्तर मान **P_r=3** के निकटतर की सुनिश्चता में 999 के निकटतर पाते है।∴ न्यूनता d = 999 – 997 = 002 से दो अंकीय संयोजन में

$\frac{1}{997}$ =0. $_0$001 $_0$003 $_0$009 $_0$ 027 $_0$081 $_0$243 $_0$ 729 $_0$2187 $_0$6561 $_0$19683

= 0. 001\ 003\009\ 027 \081\ 243\729\$_2$187\$_6$561\ $_{19}$ 683

=0. 001\003\009\027 \081\243\731 \193 \580\683

$= 0.001003009027081243731193580683$ दशमलव बाद 30 स्थान तक

4• आश्लेषक स्तर $P_r = p_4$ के लिए उदाहरण■

भिन्न $\frac{1}{9997}$ का दशमलव निरूपण– हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 ,एवं आश्लेषक स्तर मान **P_r=4** के निकटतर की सुनिश्चता में 9999 के निकटतर पाते है।∴ न्यूनता d = 9999 – 9997 = 0002 से दो अंकीय संयोजन में

$\frac{1}{9997} = 0._0 0001\ {}_0 0003\ {}_0 0009\ {}_0 0027\ {}_0 0081\ {}_0 0243\ {}_0 0729\ {}_0 2187\ {}_0 6561\ {}_0 19683$

$= 0.0001\backslash 0003\backslash 0009\backslash 0027\backslash 0081\backslash 0243\backslash 0729\backslash 2187\backslash 6561\backslash {}_1 9683$

$= 0.0001\backslash 0003\backslash 0009\backslash 0027\backslash 0081\backslash 0243\backslash 0729\backslash 2187\backslash 6562\backslash 9683$

$= 0.0001000300270081024307292187656296 83$ दशमलव बाद 40 स्थान तक

5• आश्लेषक स्तर $P_r = 5$ के लिए उदाहरण ■

भिन्न $\frac{1}{99997}$ का दशमलव निरूपण– हर को न्यूवता नियम के अनुसार आश्लेषक मान P= 1 एवं आश्लेषक स्तर मान **P_r=5** के निकटतर की सुनिश्चता में 99999 के निकटतर पाते है।∴ न्यूनता d = 99999 – 99997 = 00002 से पाँच अंकीय संयोजन में

$\frac{1}{99997} = 0._0 00001\ {}_0 00003\ {}_0 00009\ {}_0 00027\ {}_0 00081\ {}_0 00243\ {}_0 00729\ {}_0 02187\ {}_0 06561\ {}_0 19683$

$= .00001000030000900027000810024300729021870656119683$ सीधा हल दशमलव बाद 50 स्थान तक।

21-6 दशमलव निरूपण में न्यूनता का नियम और उना आश्लेषक भिन्न $\frac{a}{b}$ का x अंकीय हर b जिसका कम से कम इकाई अंक 0 और 1 नहीं है। (आश्लेषक स्तर $N_r > N_1$ के लिए $N<\bar{1}$) पर उना आश्लेषक हर b_r के अतिनिकटतर हो तो भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण दशमलव बाद इच्छित स्थान तक प्राप्त करने में न्यूनता का नियम प्रतिपादित है। आश्चर्य होगा कि इस न्यूनता नियम में भी उना आश्लेषक द्वारा प्रतिपादित (बाँयी से दाँयी) आवर्ती दशमलव निरूपण में पूर्ण आवर्ती अंक एवं पूर्ण आवर्ती अंकों के आधे स्थान तक के अंक सुनिश्चित करनें का नियम यथा शब्दो में स्वीकार्य है।

जिसके अनुसार– आश्लेषक हर b_r से हर b का न्यूनता मान $d = (b_r - b)$, आश्लेषक स्तर N_r = हर b के इकाई अंक के बाद क्रमशः अंक 0 की स्थान संख्यामान g का आगर (g+1) के लिए N_{g+1} और आश्लेषक हर b_r से आश्लेषक N= हर b के इकाई अंक के बाद क्रमशः अंक 0 की स्थान संख्यामान g के बाद के अंकों से बनी संख्यामान z का योज्य प्रतिलोम $\bar{z}$ लीजिए। तत्पश्चात् निम्नानुसार गणना प्रक्रम में दशमलव निरूपण कीजिए।

प्रक्रम 1 भिन्न $\frac{a}{b}$ के अंशमान को प्रथम सकल भाज्य S_1= प्रथम क्रियाशील भाज्य R_1 मानकर आश्लेषक द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_1 को r अंकीय में आवश्यकतानुसार बाँयी ओर 0 बढ़ाकर kkk...के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का प्रथम r अंकीय समूह अंक होगा। तथा शेषफल c_1 को kkk--- के रूप में दर्शित भागफल k_1 के बाँयी ओर नीचे $c_1$kkk---- के रूप दर्शित कीजिए ।

प्रक्रम 2 - प्रक्रम 1 से दर्शित $c_1$kkk---- ... को विस्तारित कर सकल भाज्य $S_2 = c_1kkk - -$ प्राप्त कीजिए।

द्वितीय क्रियाशील भाज्य R_2 = [{सकल भाज्य S_2} –{(भागफल k_1) * ;(न्यूनता मान d)}] को आश्लेषक N द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_2 को r अंकीय में आवश्यकतानुसार बाँयी ओर 0 बढ़ाकर kkk---के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का द्वितीय r अंकीय समूह अंक होगा। तथा शेषफल c_2 को kkk...के रूप में दर्शित भागफल k_2 के बाँयी ओर नीचे $c_2$kkk---- के रूप दर्शित कीजिए ।

-

इसी प्रकार **प्रक्रम n** के लिए **प्रक्रम (n – 1)** से दर्शित c_{n-1}kkk---- --- को विस्तारित कर सकल भाज्य $S_2 = c_{n-1}kkk - -$ प्राप्त कीजिए।

n वाँ क्रियाशील भाज्य R_n = [{सकल भाज्य S_n} −{; भागफल k_{n-1}) ∗ (;न्यूनता मान d)}] को आश्लेषक p द्वारा विभाजित कीजिए। प्राप्त भागफल k_n को r अंकीय में आवश्यकतानुसार बाँयी ओर 0 बढ़ाकर ॥...के रूप में दर्शित कीजिए । जो कि दशमलव निरूपण का n वाँ r अंकीय समूह अंक होगा।

ऐसा हल क्रम अपने इच्छित स्थान मान प्राप्त करने तक जारी रखकर भिन्न $\frac{a}{b}$ का अभीष्ट दशमलव निरूपण प्राप्त कर सकते है।

टीप 1• यह नियम आश्लेषक N और आश्लेषक स्तर N_r के बढ़ते मानों पर अतिनिकटतर दशमलव मान देने अथवा पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण करने पर सक्षम है।

2 • आश्लेषक N=$\bar{1}$ और आश्लेषक स्तर N_r पर शेषफल 0 ही प्राप्त होगा। जिससे क्रियाशील भाज्य = सकल भाज्य का (d+1) गुना होगा। तथा n वें प्रक्रम का भागफल मान $\bar{a}*\overline{(d+1)}^{n-1}$ जिसे r अंकीय संयोजन नियम से हल कर वांछित स्थान तक निकटतर दशमलव मान प्राप्त किया सकता है।

उदाहरण 1■ $\frac{1}{123}$ का दशमलव भिन्न निरूपण में न्यूनता नियम के अन्तर्गत आश्लेषक स्तर N_1 प्राप्त कीजिए।

हल $\frac{a}{b} = \frac{1}{123}$ के लिए उना संख्यांकन भिन्न$_1$ $\frac{\overline{a_1}}{\overline{b_1}} = \frac{\bar{1}}{\overline{123}}$ से हर $\bar{b} = \overline{123}$ के निकटतर उना आश्लेषक हर $b_1=\overline{121}$,

आश्लेषक स्तर $N_r = N_1$ आश्लेषक अंश $\overline{a_1}$ $=\bar{1}$, $b - a = 123 - 1 = 122$, न्यूवता $d = b_r - b = \overline{121} - \overline{123} = 2$, और आश्लेषक N= $\overline{12}$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् गणना प्रक्रमों की संक्षिप्त तालिका निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

$\frac{1}{123}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6
उत्तरांक k सह शेषफल c = $_c k_n$	$_{\bar{1}}0$	$_2 1$	$_{\bar{1}}\tilde{2}$	$_{\bar{4}}\tilde{1}$	$_{\bar{1}}3$	
सकल भाज्य $S_n = {}_c k_{n-1}$ का विस्तार	$\bar{1}$	$\overline{10}$	21	$\overline{12}$	$\overline{39}$	$\bar{7}$
उत्तरांक k_{n-1} * न्यूनता d		0	2	$\bar{4}$	2	6
क्रियाशील भाज्य $R_n = S_n + (k * d)$	$\bar{1}$	$\overline{10}$	23	$\overline{16}$	$\overline{37}$	$\bar{1}$

6 वें हल प्रक्रम में क्रियाशील भाज्य $R_6 = \bar{1}$ आश्लेषक अंशमान है।

$\therefore \frac{1}{123} = 0.\dot{0}1\bar{2}1\dot{3} = 0.\dot{0}081\dot{3}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण 5 अंकीय समूह होगा ।

उदाहरण 2■ $\frac{1}{100003}$ का दशमलव भिन्न निरूपण में न्यूनता नियम के अन्तर्गत आश्लेषक स्तर N_5 प्राप्त कीजिए।

हल. $\frac{a}{b} = \frac{1}{100003}$ के लिए उना संख्यांकन भिन्न$_5$ $\frac{a_5}{b_5} = \frac{\overline{00001}}{\overline{100003}}$ से हर $\bar{b} = \overline{100003}$ के निकटतर उना आश्लेषक हर $b_5=\overline{100001}$, आश्लेषक स्तर $N_r = N_5$ आश्लेषक अंश $\overline{a_5}$ $=\overline{00001}$, $b - a = 100003 - 1 = 10002$, न्यूवता $d = b_5 - b = \overline{100001} - \overline{100003} = 2$ और आश्लेषक $N_5 = \bar{1}$ प्राप्त कीजिए। तत्पश्चात् उपरोक्त टीप 2 के अनुसार गणना प्रक्रमों की संक्षिप्त तालिका निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

$\frac{1}{100003}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6
$_c k_n$	$_0 00001$	$_0 0000\bar{3}$	$_0 00009$	$_0 000\overline{27}$	$_0 00081$	$_0 00\overline{243}$

हल प्रक्रम n	7	8	9	10	11	12
$_c k_n$	$_0 00729$	$_0 0\overline{2187}$	$_0 06561$	$_0 \overline{19683}$	$_0 59049$	$_0 \overline{1\,77147}$

$\frac{1}{100003} =$

0. $00001\ 0000\bar{3}\ 00009\ 000\overline{27}\ 00081\ 00\overline{243}\ 00729\ 0\overline{2187}\ 06561\ \overline{19683}\ 59049\ \ {}_{\bar{1}}\overline{77147}$

= **0.** $00001\ 0000\bar{3}\ 00009\ 000\overline{27}\ 00081\ 00\overline{243}\ 00729\ 0\overline{2187}\ 06561\ \overline{19683}\ 59048\ \ \overline{77147}$

= **0.** 000009999700008999730008099757 00728 9781306560 80317 59047 22853

दशमलव बाद साठ स्थान तक हल होगा। ($k_{12} = \bar{1}\,\overline{77147}$ छह अंकीय जिसे नियमानुसार पाँच अंकीय $\overline{77147}$ लिया जाकर बाँयें प्रथम अंक $\bar{1}$ को k_{11} में बतौर हासिल समायोजित कर $k_{11} = 59049+\breve{1} = 59048$ प्राप्त किया गया है।)

21.7 भिन्न $\frac{a}{b}$ का दशमलव निरूपण के लिए भिन्न $\frac{a}{b}$ का सहायक भिन्न

(A) आगर आश्लेषक हर के संदर्भ में –यदि भिन्न $\frac{a}{b}$ के लिए उचित आगर आश्लेषक भिन्न$_r = \frac{a_r}{b_r}$ से आगर आश्लेषक P और आश्लेषक स्तर P_r हो तो भिन्न $\frac{a}{b} = \frac{a_r}{b_r}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v}$ में $v = P$ तथा $u = a_r$ के दाँयी से बाँयी ओर r वें अंक स्थान हटकर दशमलव चिन्हांकन करनें से बनी दशमलव भिन्न की संख्या होगी।

जैसे $\frac{2}{13}$ के लिए उचित आगर आश्लेषक भिन्न$_1 = \frac{6}{39}$ से आगर आश्लेषक $P = 3+1 = 4$ और आश्लेषक स्तर $P_r = 1$ से भिन्न $\frac{2}{13} = \frac{6}{39}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v} = \frac{0.6}{4}$ होगा।

$\frac{15}{23}$ के लिए उचित आगर आश्लेषक भिन्न$_1 = \frac{45}{69}$ से आगर आश्लेषक $P = 6+1 = 7$ और आश्लेषक स्तर $P_r = 1$ से $\frac{15}{23} = \frac{45}{69}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v} = \frac{4.5}{7}$ होगा।

इसी प्रकार– $\frac{1}{19}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.1}{2}$, $\frac{1}{29}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.1}{3}$, $\frac{37}{59}$ का सहायक भिन्न $= \frac{3.7}{6}$,
$\frac{172}{1299}$ का सहायक भिन्न $= \frac{1.72}{13}$, $\frac{371}{7999}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.371}{8}$, $\frac{537}{89999}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.0537}{9}$,
$\frac{56}{15999}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.056}{16}$, $\frac{0,0050}{69999}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.00000050}{7}$, $\frac{371}{79999}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.0371}{8}$

अनुप्रयोग विधि चूँकि किसी पूर्ण आवर्ती दशमलव में निरूपित होने वाले भिन्न $\frac{a}{b}$ का आगर आश्लेषक स्तर P_r पर आगर आश्लेषक भिन्न$_r = \frac{a_r}{b_r}$ के हर मान b_r से प्राप्त आश्लेषक P ही सहायक भिन्न का हर मान होता है और अंशमान a_r को ही सहायक भिन्न का अंशमान में दशमलव निरूपण होता है। अतः सहायक भिन्न द्वारा दशमलव निरूपण मे आगर आश्लेषक विधि यथा शब्द में अनुप्रयोग होंगें ।

जैसे . $\frac{1}{19}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.1}{2}$ से $\frac{1}{19} = 0.{}_{1}0\ {}_{0}5\ {}_{1}2\ {}_{0}6\ \ {}_{0}3\ {}_{1}1\ {}_{1}5\ {}_{1}7\ \{{}_{1}8\}$

उपरोक्त गणना प्रक्रम में 8 वें प्रक्रम द्वारा 9वें प्रक्रम के लिये प्राप्त भाज्य 18 = हर – अंश = 19-1 है। $\therefore \frac{1}{19} =$
$0.\dot{0}52631578\backslash 94736842\dot{1} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$ 18 अंकीय आवर्ती अंक समूह में होगा ।

$\frac{1}{199}$ का सहायक भिन्न $= \frac{0.01}{2}$ से $\frac{1}{199} = 0.\ {}_{1}00\ {}_{0}50\ {}_{0}25\ {}_{1}12\ {}_{0}56\ {}_{0}28\ {}_{0}14\ \ {}_{0}07\ {}_{1}03\ {}_{1}51\ {}_{1}75\ {}_{1}87\ {}_{1}93\ \ {}_{1}96\ \ {}_{0}98\ {}_{0}49$
${}_{1}24\ {}_{0}62\ {}_{0}31\ {}_{1}15\ {}_{1}57\ {}_{1}78\ \ {}_{0}89\ {}_{1}44\ \ {}_{0}72\ {}_{0}36\ {}_{0}18\ {}_{0}09\ {}_{1}04\ {}_{0}52\ \ {}_{0}26\ {}_{0}13\ \ {}_{1}06\ \ {}_{0}53\ \ {}_{1}26\ \ {}_{0}63\ {}_{1}31\ \ {}_{1}65\ {}_{1}82\ {}_{0}91\ {}_{1}45$
${}_{1}72\ {}_{0}86\ {}_{0}43\ {}_{1}21\ {}_{1}60\ {}_{0}80\ {}_{0}40\ {}_{0}20\ {}_{0}10\ {}_{0}05\ {}_{1}02\ {}_{0}51\ {}_{1}25\ {}_{1}62\ {}_{0}81\ {}_{1}40\ {}_{0}70\ {}_{0}35\ {}_{1}17\ {}_{1}58\ {}_{0}79\ {}_{1}39\ \ {}_{1}69\ {}_{1}84\ \ {}_{0}92\ {}_{0}46$
${}_{0}23\ {}_{1}11\ {}_{1}55\ {}_{1}77\ {}_{1}88\ {}_{0}94\ {}_{0}47\ {}_{1}23\ {}_{1}61\ {}_{1}80\ {}_{0}90\ {}_{0}45\ {}_{1}22\ {}_{0}61\ {}_{1}30\ {}_{0}65\ {}_{1}32\ {}_{0}66\ {}_{0}33\ {}_{1}16\ {}_{0}58\ {}_{0}29\ {}_{1}14\ {}_{0}57\ {}_{1}28\ {}_{0}64\ {}_{0}32$
${}_{0}16\ {}_{0}08\ {}_{0}04\ {}_{0}02\ {}_{0}01$

उपरोक्त गणना प्रक्रम में 98 वें प्रक्रम द्वारा 99 वें प्रक्रम के लिये प्राप्त भाज्य 001 =1 अंशमान है।

$\therefore \frac{1}{199} =$
$0.\dot{0}05025125628140703517587939698492462311557788944723618090452261306532663316582$
$91457286432160804020100502512562814070351758793969849246231155778894472361809045$
$226130653266331658291457286432160804020\dot{1}$ 198 अंकीय आवर्ती अंक समूह में होगा ।

$\frac{371}{7999}$ का सहायक भिन्न $\frac{0.371}{8}$ द्वारा दशमलव निरूपण– $0.\,{}_{3}046\ {}_{6}380\ {}_{4}797\ {}_{5}599\ {}_{7}699\ {}_{3}962\ {}_{2}495\ {}_{7}311\ \ {}_{7}913\ {}_{1}989\ {}_{5}248$
${}_{0}656\ \ {}_{0}082\ \ {}_{2}010\ \ {}_{2}251\ \ \ {}_{3}281\ \ {}_{1}410\ \ {}_{2}176\ \ {}_{0}272\ \ {}_{0}034\ \ {}_{2}004\ \ \ {}_{4}250\ \ \ {}_{2}521\ \ {}_{1}315\ \ {}_{7}161\ {}_{1}895$
$= 0.046380797599699962495311913989248656082010251281410176272034004250521315161 85$
दशमलव बाद 78 स्थान तक का मान होगा।

$\frac{371}{79999}$ का सहायक भिन्न $\frac{0.0371}{8}$ द्वारा दशमलव निरूपण– $0.\ {}_{3}0046\ {}_{6}3755\ {}_{3}7969\ {}_{1}4746\ {}_{2}1843\ {}_{3}2730\ {}_{2}4091\ {}_{3}3011$
${}_{3}4126\ {}_{6}4265$ दशमलव बाद 40 स्थान तक का मान होगा।

(B) उना आश्लेषक हर के संदर्भ में यदि भिन्न $\frac{a}{b}$ के लिए उचित उना आश्लेषक भिन्न$_r$ $=\frac{a_r}{b_r}$ से उना आश्लेषक N और आश्लेषक स्तर N_r हो तो भिन्न $\frac{a}{b}=\frac{a_r}{b_r}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v}$ में $v=N$ तथा $u=(a_r-1)$ के दाँयी से बाँयी ओर r वें अंक स्थान हटकर दशमलव चिन्हांकन करनें से बनी दशमलव भिन्न की संख्या होगी।

जैसे $\frac{2}{7}$ के लिए उचित उना आश्लेषक भिन्न$_1$ $=\frac{6}{21}$ से उना आश्लेषक $N=2$ और आश्लेषक स्तर $N_r=1$ से भिन्न $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v}=\frac{0.5}{2}$ होगा।

$\frac{5}{23}$ के लिए उचित उना आश्लेषक भिन्न$_2$ $=\frac{435}{2001}$ से उना आश्लेषक $N=2$ और आश्लेषक स्तर $N_r=3$ से $\frac{5}{23}=\frac{435}{2001}$ का सहायक भिन्न $\frac{u}{v}=\frac{0.434}{2}$ होगा।

इसी प्रकार– $\frac{1}{21}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.0}{2}$, $\frac{1}{31}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.0}{3}$, $\frac{1}{301}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.00}{3}$

$\frac{172}{1301}$ का सहायक भिन्न $=\frac{1.71}{13}$, $\frac{3743}{7001}$ का सहायक भिन्न $=\frac{3.742}{7}$, $\frac{6163}{90001}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.6163}{9}$,

$\frac{51}{700001}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.00050}{7}$, $\frac{3123}{80000001}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.0003122}{8}$, $\frac{1}{900000001}$ का सहायक भिन्न $=\frac{0.0000000}{9}$

टीप सहायक भिन्न का अंशमान 0.0 , 0.00, 0.000, ------------. को दृष्टिगत करते हुए सहायक भिन्न को शून्य न माने। यह एक सांकेतिक हल मात्र ही है। अनु प्रयोग विधि से स्वमेव स्पष्ट होगा।

अनुप्रयोग विधि • 1• (बाँये सेदाँये ओर)

प्रक्रम 1 उना आश्लेषक सहायक भिन्न$_r$ के अंश मान u को प्रथम सकल भाज्य S_1 = प्रथम क्रियाशील भाज्य R_1 को हर मान v द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त भागफल को नियमानुसार r अंकीय समूह मान में दशमलव बाद प्रथम उत्तर पद k_1 प्राप्त कीजिए। और शेषफल c_1 को उक्त उत्तर पद k_1के बाँयी ओर नीचे यथा c_1k_1उपसर्गित कीजिए। संकेत में– $u\div v$ से प्राप्त r अंकीय भागफल k_1 और शेषफल c_1 को लिखिए या दर्शित कीजिए c_1k_1 ।

प्रक्रम 2 द्वितीय उत्तर पद k_2प्राप्त करनें द्वितीय क्रियाशील भाज्य $R_2=(c_1$बादk_1 के अंको का क्रमशः9 पुरनी अंक) से बनी संख्या प्राप्त कीजिए। इस प्राप्त द्वितीय क्रियाशील भाज्य R_2 को हर मान v द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त भागफल को नियमानुसार r अंकीय समूह मान में दशमलव बाद द्वितीय उत्तर पद k_2 प्राप्त कीजिए। और शेषफल c_2 को उक्त उत्तर पद के बाँयी ओर नीचे यथा c_2k_2उपसर्गित कीजिए।

संकेत में– $R_2\div v$ से प्राप्त r अंकीय भागफल k_1 और शेषफल c को लिखिए या दर्शित कीजिए c_2k_2

इसी प्रकार (n>1) के लिए **प्रक्रम n में**

n वाँ उत्तर पद k_n प्राप्त करनें $(n-1)$ वाँ क्रियाशील भाज्य $R_n=($ c_{n-1}बाद k_{n-1} के अंको का क्रमशः9 पुरनी अंक) से बनी संख्या प्राप्त कीजिए। इस प्रकार प्राप्त n वाँ क्रियाशील भाज्य R_n को हर मान v द्वारा विभाजित करने पर प्राप्त भागफल को नियमानुसार r अंकीय समूह मान में दशमलव बाद उत्तर पद k_n प्राप्त कीजिए। और शेषफल c_n को उक्त उत्तर पद के बाँयी ओर नीचे यथा c_nk_n उपसर्गित कीजिए।

संकेत में– $R_n\div v$ से r अंकीय भागफल k_n और शेषफल c_n को लिखिए या दर्शित कीजिए c_nk_n

आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद अंक समूह प्राप्त होना यदि किसी m वाँ उत्तर पद k_m प्राप्त करनें के क्रम में **m वाँ क्रियाशील भाज्य R_m = (भिन्न का अंश मान a – 1) हो तो $(m-1)$ वाँ पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव** निरूपण का पूर्ण पद अंक समूह होगा।

अथवा

r अंकीय उत्तर पद k_{m-1} और k_m से बनी संख्या के बीच क्रमागत (r+1) अंकीय (जिसमें दाँये से बाँये कम से कम k_{m-1} का इकाई अंक और k_m का अन्त्य अंक अवश्य सम्मिलित हो) संख्या मान =

[(भिन्न का हर मान b) – (भिन्न का अंश मान a+1)] हो तो इस बनी संख्या तक उत्तरांको का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान अंक समूह होगा।

आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान का प्रात होना यदि किसी m वाँ उत्तर पद k_m प्राप्त करनें m वाँ क्रियाशील भाज्य R_m [(भिन्न का हर मान b) – (भिन्न का अंश मान a+1)] हो तो $(m-1)$ वाँ पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान अंक समूह होगा।

अथवा

उत्तर पद k_{m-1} और k_m से बनी संख्या के बीच क्रमागत r अंकीय (जिसमें दाँये से बाँये कम से कम k_{m-1} का इकाई अंक और k_m का अन्त्य अंक अवश्य हीसम्मिलित हो) संख्या मान =(भिन्न का अंश मान –1) हो तो इस बनी संख्या तक उत्तरांको का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान अंक समूह होगा।

उदाहरण 1■ $\frac{13}{31}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न द्वारा कीजिए।

हल– $\frac{13}{31}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण हेतू सहायक भिन्न $\frac{1.2}{3}$ होगा जिसका स्तर $N_r = N_1$ होगा।

अत एकअंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{13}{31}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$_c k_n$	$_0 4$	$_2 1$	$_1 9$	$_1 3$	$_1 5$	$_2 4$	$_1 8$	$_2 3$	$_2 8$	$_0 7$	$_2 0$	$_2 9$	$_2 6$	$_2 7$	$_1 7$	
R_n	12	05	28	10	16	14	25	11	26	21	02	29	20	23	22	12

$R_{16} = 12$ = (भिन्न का अंश मान a – 1) है ।

अतः $\frac{13}{31}$ का पूर्ण आवर्ती हल मान 15 पद तक 15 अंकीय में $0.\dot{4}1935483870967\dot{7}$ होगा।

उदाहरण 2■ $\frac{1}{201}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न द्वारा कीजिए।

हल $\frac{1}{201}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण हेतू सहायक भिन्न $\frac{0.00}{2}$ होगा जिसका स्तर $N_r = N_2$ होगा।

अत द्वि अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{1}{201}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$_c k_n$	$0._0 00$	$_1 49$	$_0 75$	$_0 12$	$_1 43$	$_0 78$	$_1 10$	$_1 94$	$_1 52$	$_1 73$	$_0 63$	$_0 18$	$_1 40$
R_n	000	099	150	024	087	156	021	189	105	147	126	036	081

हल प्रक्रम n	14	15	16	17	18
$_c k_n$	$_1 79$	$_0 60$	$_1 19$	$_0 90$	
R_n	159	120	039	180	001

2 अंकीय उत्तर पद k_{16} और k_{17} से बनी संख्या 1990 के बीच क्रमागत 3 अंकीय (जिसमें दाँये सेबाँये k_{16} का दहाई अंक 1 एवं इकाई अंक 9 और k_{17} का अन्त्य अंक 9 सम्मिलित है) संख्या मान 199= [(भिन्न का हर मान 201) – (भिन्न का अंश मान 1+1)]=199 है। अतः इस बनी संख्या 199 तक उत्तरांको का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान अंक समूह होगा।तब–

$\frac{1}{201} = 0.\dot{0}04975124378109452736318407960199\dot{9}$ तैतीस अंकीय होगा।

उदाहरण 3■ $\frac{1}{1667} = \frac{3}{5001}$ का दशमलव निरूपण के लिए सहायक भिन्न $\frac{0.002}{5}$ द्वारा दशमलव बाद 90 स्थान तक दर्शित कीजिए।

हल $\frac{1}{1667} = \frac{3}{5001}$ का दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न $\frac{0.002}{5}$ का स्तर $N_r = N_3$ होगा।

अत 3_3 अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{1}{1667} = \frac{3}{5001}$ का सहायक भिन्न $\frac{0.002}{5}$ दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$_c k_n$	$0._2 000$	$_4 599$	$_0 880$	$_4 023$	$_1 995$	$_4 200$	$_4 959$	$_0 808$	$_1 038$	$_1 392$

R_n	0002	2999	4400	0119	4976	1004	4799	4040	0191	1961

हल प्रक्रम n	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$_c k_n$	$_2$321	$_3$525	$_4$694	$_0$861	$_3$027	$_2$794	$_0$451	$_4$109	$_0$978	$_1$004
R_n	1607	2678	3474	4305	0138	3972	2205	0549	4890	0021

हल प्रक्रम n	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
$_c k_n$	$_0$399	$_0$120	$_4$175	$_4$964	$_0$807	$_2$039	$_0$592	$_2$081	$_3$583	$_1$683
R_n	1995	0600	0879	4824	4035	0197	2960	0407	2918	3416

उपरोक्त गणन तालिका से

$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1667}}$ =0.000599880023995200959808038392321525694861027794451109978004399120175964807039592081583683 दशमलव बाद 90 स्थान तक का हल होगा।

उदाहरण 4 ■ $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{17}} = \frac{\mathbf{583}}{\mathbf{901}}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न स्तर N_2 द्वारा दर्शित कीजिए।

हल $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{17}} = \frac{\mathbf{583}}{\mathbf{901}}$ का दशमलव निरूपण केलिए सहायक भिन्न $\frac{5.82}{9}$ का स्तर $N_r = N_2$ होगा।

[(भिन्न का हर मान 901) – (भिन्न का अंश मान 583+1)]=317, (भिन्न का अंश मान a – 1) =583-1=582

अत द्वि अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{17}} = \frac{\mathbf{583}}{\mathbf{901}}$ **का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका**

हल प्रक्रम n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$_c k_n$	0.$_6$64	$_5$70	$_7$58	$_3$82	$_2$35	$_3$29	$_1$41	$_5$17	
R_n	582	635	529	741	317	264	370	158	582

तलिका से स्पष्ट है कि उत्तर पद k_9 प्राप्त करनें के क्रम में क्रियाशील भाज्य R_9 = 582= (भिन्न का अंश मान a – 1) है । अतः k_8 पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद अंक समूह 16 स्थानिक होगा।

अतः $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{17}} = \frac{\mathbf{583}}{\mathbf{901}}$ =$0.\dot{6}47058823529411\dot{7}$

आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान का प्रात होना उत्तर पद k_5 प्राप्त करनें के क्रम में क्रियाशील भाज्य R_5 = 317= [(भिन्न का हर मान 901) – (भिन्न का अंश मान 583+1)] है । अतः k_4 पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद के आधे स्थान अंक समूह 8 स्थानिक 64705882\ होगा। तथा शेष आधे स्थान अंक समूह का 8 स्थानिक अंक क्रमशः प्राप्त हो चुके आधे स्थान के अंकों 9पुरनी \35294117 होगा।

अतः $\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{17}} = \frac{\mathbf{583}}{\mathbf{901}}$ =$0.\dot{6}47058823529411\dot{7}$

2• (दाँये सेबाँये ओर)

प्रक्रम 1 उना आश्लेषक सहायक भिन्न$_r$ के अंश मान u के दशमलव बाद के अंको का 9 पुरनी अंक से बनी संख्या को दाँये से बाँये प्रथम उत्तर पद k_1 प्राप्त कीजिए। और हासिल मान h_1 = पूर्णांश मान को उक्त उत्तर पद के बाँयी ओर नीचे उपसर्गित कर यथा h_1k_1 लिखिए या दर्शित कीजिए ।

प्रक्रम 2 द्वितीय उत्तर पद k_2 प्राप्त करनें द्वितीय क्रियाशील गुणनफल $R_2 = (k_1*v + h_1)$ से बनी संख्या प्राप्त कीजिए। इस प्राप्त द्वितीय क्रियाशील गुणनफल R_2 के दाँयी से बाँयी r स्थान तक के अंकों का 9 पुरनी अंक से बनी संख्या को प्रक्रम1 की भाँति उत्तर पद k_2 प्राप्त कीजिए। और r स्थान तक के अंकों के बाद के अंकों से बनी संख्या को हासिल मान h_2 मानकर (यदि r स्थान तक के अंकों के बाद कोई सख्यां न बनें तो हासिल मान $h_2 = 0$) यथा h_2k_2 दर्शित कीजिए।

इसी प्रकार (n>1) के लिए **प्रक्रम n में –**

n वाँ उत्तर पद k_n प्राप्त करनें n वाँ क्रियाशील गुणनफल $R_n = (k_{n-1}*v + h_{n-1})$ से बनी संख्या प्राप्त कीजिए। इस प्राप्त द्वितीय क्रियाशील गुणनफल R_n के दाँयी से बाँयी r स्थान तक के अंकों का 9 पुरनी अंक से बनी संख्या को पूर्व हल प्रक्रमों की भाँति उत्तर पद

k_n प्राप्त कीजिए और r स्थान तक के अंकों के बाद के अंकों से बनी संख्या को हासिल मान h_n मानकर (यदि r स्थान तक के अंकों के बाद कोई सख्यां u बनें तो हासिल मान $h_n = 0$) यथा $h_n k_n$ दर्शित कीजिए।

आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद अंक समूह प्राप्त होना– यदि किसी m वाँ उत्तर पद k_m प्राप्त करनें के क्रम में m वाँ क्रियाशील गुणनफल R_m = (भिन्न का अंश मान a-1) हो तो $(m-1)$ वाँ पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद अंक समूह होगा।

अथवा

r अंकीय उत्तर पद k_m और k_{m-1} से बनी संख्या के बीच क्रमागत (r+1) अंकीय (जिसमें दाँये सेबाँये कम सेकम k_m का इकाई अंक और k_{m-1} का अन्त्य अंक अवश्य हीसम्मिलित हो) संख्या मान =(भिन्न का अंश मान a – 1) हो तो इस बनी संख्या तक उत्तरांको का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान अंक समूह होगा।

आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान का प्राप्त होना यदि किसी m वाँ उत्तर पद k_m प्राप्त करनें m वाँ क्रियाशील गुणनफल R_m = [(भिन्न का हर मान b) – (भिन्न का अंश मान a+1)] हो तो $(m-1)$ वाँ पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान अंक समूह होगा।

अथवा

उत्तर पद k_m और k_{m-1} से बनी संख्या के बीच क्रमागत (r+1) अंकीय (जिसमें दाँये सेबाँये कम सेकम k_m का इकाई अंक और k_{m-1} का अन्त्य अंक अवश्य ही सम्मिलित हो) संख्या मान = [(भिन्न का हर मान b) – (भिन्न का अंश मान a+1)] हो तो इस बनी संख्या तक उत्तरांको का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद स्थान का अंक का आधा पद स्थान अंक समूह होगा।

हलित उदाहरण 1■ $\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{3}{21}$ के सहायक भिन्न द्वारा कीजिए।

हल $\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण हेतू सहायक भिन्न $\frac{0.2}{2}$ होगा जिसका स्तर $N_r = N_1$ होगा।

अत एकअंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{1}{7}=\frac{3}{21}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	4	3	2	1
$_c k_n$		$_1 8$	$_1 5$	$_0 7$
R_n	17	11	14	

R_4 ==[(भिन्न का हर मान 21) – (भिन्न का अंश मान 3+1) = 17 है।

अत: $\frac{1}{7}$ का पूर्ण आवर्ती हल मान 6 पद तक 6 अंकीय में 142\857 से 142857 होगा।

हलित उदाहरण 2■ $\frac{1}{21}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न द्वारा कीजिए।

हल $\frac{1}{21}=$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण हेतू सहायक भिन्न $\frac{0.0}{2}$ होगा जिसका स्तर $N_r = N_1$ होगा।

अत एकअंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{1}{21}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	7	6	5	4	3	2	1
$_c k_n$		$_0 0$	$_1 4$	$_1 7$	$_0 6$	$_1 1$	$_0 9$
R_n	00	09	15	12	03	18	

$G_7 = 00$ = (भिन्न का अंश मान 1−1)] = 00 है ।

अत: $\frac{1}{21}$ का पूर्ण आवर्ती हल मान 6 पद तक 6 अंकीय में $0.\dot{0}4761\dot{9}$ होगा।

उदाहरण 3■ $\frac{16}{17}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न स्तर N_2 द्वारा दर्शित कीजिए।

हल $\frac{16}{17}=\frac{848}{901}$ का दशमलव निरूपण के लिए उनके सहायक भिन्न $\frac{8.47}{9}$ का स्तर $N_r = N_2$ होगा।

[(भिन्न का हर मान 901) – (भिन्न का अंश मान 848+1)]=052, (भिन्न का अंश मान a – 1) =848−1=847

अत द्वि अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{16}{17} = \frac{848}{901}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	5	4	3	2	1
$_c k_n$		$_7 05$	$_2 88$	$_4 23$	$_8 52$
R_n	052	794	211	476	

तलिका से स्पष्ट है कि उत्तर पद k_5 प्राप्त करनें के क्रम में क्रियाशील भाज्य $R_5 = 52$=[(भिन्न का हर मान 901) – (भिन्न का अंश मान 848+1) है । अतः k_4पद तक प्राप्त हलों का अंक समूह आवर्ती दशमलव निरूपण का पूर्ण पद का आधे स्थान तक का अंक समूह 8 स्थानिक \05882352 होगा। शेष आधे 8स्थान के अंक 05882352 के अंको का क्रमशः 9 पुरनी 94117647होगा।

अतः $\frac{16}{17} = \frac{848}{901} = 0.\dot{9}41176470588235\dot{2}$, 16 अंकीय होगा। 1

हलित उदाहरण 4■ $\frac{21}{31}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण उनके सहायक भिन्न द्वारा कीजिए।

हल $\frac{21}{31}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण हेतू सहायक भिन्न $\frac{2.0}{3}$ होगा जिसका स्तर $N_r = N_1$ होगा।

अत एकअंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{21}{31}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$_c k_n$		$_2 6$	$_2 7$	$_1 7$	$_0 4$	$_2 1$	$_1 9$	$_1 3$	$_1 5$	$_2 4$	$_1 8$	$_2 3$	$_2 8$	$_0 7$	$_2 0$	$_2 9$
R_n	20	23	22	12	05	28	10	16	14	25	11	26	21	02	29	

$R_{16} = 20 =$ (भिन्न का अंश मान $\dot{}-1)] = 21-1 = 20$ है ।

अतः $\frac{21}{31}$ का पूर्ण आवर्ती हल मान 15 पद तक 15 अंकीय में $0.\dot{6}7741935483870\dot{9}$ होगा।

21-8 भिन्न $\frac{a}{b}$ का हरमान b केवल और केवल अभाज्य संख्या होने के प्रति पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण के समस्त अंकों के स्थान संख्या

A■ सरल मानक भिन्न $\frac{a}{b}$ में हरमान b = 100 से छोटी अभाज्य संख्या होने के प्रति पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण के समस्त अंकों के स्थान संख्या–

1■ प्रथम आश्लेषक स्तर पर आश्लेषक के सम और विषम संख्या होने के प्रति–

1• हरमान b का इकाई अंक 9 हाने के प्रति

आगर आश्लेषक – सम एवं विषम संख्या होने के प्रति(b-1) होगा।

जहाँ अपवादिक हर **79, 89 है।**

|उना आश्लेषक| – सम एवं विषम संख्या होने के प्रति(b-1) होगा।

जहाँ अपवादिक हर **79, 89 है।**

2• हरमान b का इकाई अंक 7 होने के प्रति

आगर आश्लेषक – 4 द्वारा विभाजित सम संख्या एवं विषम संख्या होने के प्रति (b-1) होगा। **तथा** 4 द्वारा अविभाजित सम संख्या होने के प्रति $\frac{b-1}{2}$ होगा।

जहाँ अपवादिक हर **37 है।**

|उना आश्लेषक| – विषम संख्या होने के प्रति (b-1) **तथा** सम संख्या होने के प्रति $\frac{b-1}{2}$ **होगा।**

जहाँ अपवादिक हर **7, 37, 47 है।**

3• हरमान b का इकाई अंक 3 होने के प्रति

आगर आश्लेषक – सम संख्या होने के प्रति $\frac{b-1}{2}$ **तथा** विषम संख्या होने के प्रति $(b-1)$ **होगा।**

जहाँ अपवादिक हर **53 73, है।**

|उना आश्लेषक| – सम संख्या होने के प्रति (b-1) **तथा** विषम संख्या होने के प्रति के $\frac{b-1}{2}$ **होगा।**

जहाँ अपवादिक हर **53, 73 है।**

4• **हरमान b का इकाई अंक 1 होने के प्रति**

आगर आश्लेषक – सम संख्या होने के प्रति $\frac{b-1}{2}$ **तथा** विषम संख्या होने के प्रति $(b-1)$ **होगा।**

जहाँ अपवादिक हर **41, है।**

|उना आश्लेषक| – सम संख्या होने के प्रति (b-1) **तथा** विषम संख्या होने के प्रति के $\frac{b-1}{2}$ **होगा।**

जहाँ अपवादिक हर **41 है।**

अपवादिक हर के प्रति पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण में अंकों की स्थान संख्या–

हरमान **89** के प्रति $\frac{89-1}{2} = 44$ हरमान **79** के प्रति $\frac{79-1}{6} = 13$

हरमान **7** के प्रति $(7-1) = 6$ हरमान **37** के प्रति $\frac{37-1}{12} = 3$ हरमान **47** के प्रति $(47-1) = 46$

हरमान **13** के प्रति $\frac{13-1}{2} = 6$ हरमान **53** के प्रति $\frac{53-1}{4} = 13$ हरमान **73** के प्रति $\frac{73-1}{8} = 9$

हरमान 41 के प्रति $\frac{41-1}{8} = 5$ हरमान 401 के प्रति $\frac{401-1}{4} = 100$ को दृष्टिगत करते हुये प्रतिपादन–

अनुमान की ओर सरल मानक भिन्न $\frac{a}{b}$ में हरमान b= [41, 401, 4001 ----] के स्वरूपण में अभाज्य होने के प्रति $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव गशना के लिये उना आश्लेषक स्तर N_r पर आश्लेषक मान होगा। तब $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{r(b-1)}{8}$ स्थानिक होगा , लेकिन अधिकतम (b-1) स्थानिक होगा।

इसी तारतत्म्य में – 1• हरमान b= [53, 533, 5333, ----] के स्वरूपण में अभाज्य होने के प्रति $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव गशना के लिये आगर आश्लेषक स्तर P_r पर आश्लेषक मान होगा। तब $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{r(b-1)}{4}$ स्थानिक होगा। लेकिन अधिकतम (b-1) स्थानिक होगा।

2• हरमान b= [73, 733, 7333, ----] के स्वरूपण में अभाज्य होने के प्रति $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव गशना के लिये आगर आश्लेषक स्तर P_r पर आश्लेषक मान होगा। तब $\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{r(b-1)}{9}$ स्थानिक होगा। लेकिन अधिकतम (b-1) स्थानिक होगा। ।

3• हरमान b= [79, 799, 7999, ----] के स्वरूपण में अभाज्य होने के प्रति–

$\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{(b-1)}{6}$ स्थानिक होगा।

4• हरमान b= [89, 899, 8999, ----] के स्वरूपण में अभाज्य होने के प्रति–

$\frac{a}{b}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण $\frac{(b-1)}{2}$ स्थानिक होगा।

B■ प्रतिबंध **A■** वै अनुसार ही अभाज्य हरों b> 100 के प्रति कुछ अपवादिक अभाज्य हरों को छोडकर शेष हरों के प्रति उक्त पूर्ण आवर्ती दशमलव के प्रति आवर्ती अंकों की स्थान संख्या की सुनिश्चता स्वीकार होने को इन्कार किया जाना यथेष्ठ नहीं होगा। जहाँ अपवादिक हरों b_u के प्रति प्राप्त पूर्ण आवर्ती दशमलव निरूपण में अंकों की स्थान संख्या मान x $(b_u - 1)$ का यथार्थ भाजक$^{\psi}$ [1

और$(b_u - 1)$ को छोड़ कर के] होगा। पूर्णआवर्ती दशमलव निरूपण में न्यूनतम् 3 , b=37 के प्रति होगा। जबकि अधिकतम संख्या (b-1) [59, 599, 5999, 59999 ------ सदृश्य संख्या विस्तार अन्तर्गत प्राप्त बढ़ते अभाज्य संख्या b के प्रति स्वीकार होगा।

21-9 छत्तीसगढ़ गणित दर्शन में आवर्ती अंकीय संख्या विषयक प्रश्न पंक्ति प्रस्तुति–

प्रस्तुति 1• नौ गुणित पाटे पाट • उतारों भाई आठे आठ ••

विश्लेषण वह कौन सी संख्या है जिसको 9 से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल के सभी अंक 8 ही हो और यह विस्तार तब तक जारी रहता है जब तक चिस्तारित संख्या 9 द्वारा पूर्ण विभाजित न हो जाय। अर्थात् 888-----88÷ 9 के लिये 888888888÷ 9 = 98765432 पाटे–पाट (बाँये से दाँये घटते क्रम में क्रमिक अंकों की संख्या है, जिसको 9से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल के सभी अंक 8 ही बनी संख्या 9 स्थानिक होगा। उपरोक्त पंक्ति के भावार्थ को दर्शाता है।

आवर्ती दशमलव प्रतिरूपण के प्रति $0.0\dot{9}876543\dot{2} \times 9 = 0.\dot{8}$ **या** $0.0\dot{0}000000\dot{9} \times 9875432 = 0.\dot{8}$

प्रस्तुति 2• पन्द्रहम् बाइसम् शून्यम् सात • उतारों भाई आठे आठ ••

विश्लेषण पन्द्रह, बाइस, शून्य एवं सात से बनी संख्या 1,52,207 को कौन सी संख्या से गूणा करें कि प्राप्त गुणनफल का 8 ही 8 आवे। उत्तर प्राप्त करने 1,52,207 को भाजक तथा 8 ही 8 बनी संख्या को भाज्य चुनते है। भाग की क्रिया सम्पन्न करने पर अभीष्ट भाग फल 8,88,88,888÷1,52,207 = 584 को प्राप्त करना है। जिससे 1,52,207 × 584 =8,88,88,888 दर्शित होगा।

विस्तार 73 की तालिका– (73 एकम73), (73 दूनी 146), (73 तिया 219), (73 चौक 292), (73 पंचे 365), (73 छक्के 438), (73 सत्ते 511), (73 अट्ठे 584), (73 निया 657), से क्रमशः–

1,52,207 × 73 = 1,11,11,111 • 1,52,207 × 146 =2,22,22.222 • 1,52,207 × 219 =3,33,33,333 • 1,52,207 × 292 = 4,44,44,444 • 1,52,207 × 365 =5,55,55,555 • 1,52,207 × 438 =6,66,66,666 • 1,52,207 × 511 = 7,77,77.777 • 1,52,207 × 584 =8,88,88,888 • 1,52,207 × 657 =9,99,99,999 • को भाज्य चुनने पर तार्किक संगता रोमांचित करता है।

आवर्ती दशमलव प्रतिरूपण के प्रति –

$0.\dot{0}000007\dot{3} \times 1,52,207 = 0.\dot{1}$ • $0.\dot{0}000014\dot{6} \times 1,52,207 = 0.\dot{2}$ • $0.\dot{0}000021\dot{9} \times 1,52,207 = 0.\dot{3}$ •
$0.\dot{0}000029\dot{2} \times 1,52,207 = 0.\dot{4}$ • $0.\dot{0}000036\dot{5} \times 1,52,207 = 0.\dot{5}$ • $0.\dot{0}000043\dot{8} \times 1,52,207 = 0.\dot{6}$ •
$0.\dot{0}000051\dot{1} \times 1,52,207 = 0.\dot{7}$ • $0.\dot{0}000058\dot{4} \times 1,52,207 = 0.\dot{8}$ • $0.\dot{0}000065\dot{7} \times 1,52,207 = 0.\dot{9}$ •

इसी प्रकार

$0.\dot{0}015220\dot{7} \times 73 = 0.\dot{1}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 146 = 0.\dot{2}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 219 = 0.\dot{3}$ •$0.\dot{0}015220\dot{7} \times 292 = 0.\dot{4}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 365 = 0.\dot{5}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 438 = 0.\dot{6}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 511 = 0.\dot{7}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 584 = 0.\dot{8}$ • $0.\dot{0}015220\dot{7} \times 657 = 0.\dot{9}$ •

ψ यथार्थ भाजक– किसी प्राकृत संख्सा X का यथार्थ भाजक 1 और संख्या x के साथ वे सभी प्राकृत संख्या होंगे जिनसे संख्या x पूर्णतः अशेष विभाजित होता है। जैसे संख्या 20 का यथार्थ भाजक 1.2,4,5,10 और 20 होंगे।

----------21----------

अध्याय -22
वैदिक कूट भाषा और दशमलव भिन्न

22-1 प्रस्तावना महान विचारक श्री चिन्मय मिश्र के शब्दों में "कहते हैं भारत में मानवीय गतिविधियाँ 4,00,000 से 2,00,000 ईसा पूर्व के बीच प्रारंभ हो चुकी थी। अनेक गुफाओं में मिले भित्त चित्र इसकी सत्यता को प्रमाणित भी करते हैं। पुरातत्व शास्त्रियों ने भारत में कुल छः प्रजातीय तत्वों की पहचान की है। वे हैं नेपीटो, प्रोटो,आस्ट्रलाइड, मंगोलाइड भूमध्यसागरीय(मेडोटेरियन) पश्चिमीलघुशिरस्क(वेस्टर्न ब्रेसिसिफल) तथा नोर्डिक। कुछ लोग इसे नकार देंगें कि यह एक अवघारणा है। परन्तु सत्यता यहीं है कि भारतीय संस्कृति हमेशा से बहुलतावादी रही है।" उनके ये शब्द मानवीय संस्कृति विकास यात्रा में भारत में बोली जाने वाली बोलियों एवं भाषाओं के प्रकारों की विशालता एवं समृद्धता के आधार पर प्रमाणित है। जिसके प्रमाणिक होने का आधार 2001की जनगणना उपरांत केन्द्र सरकार के मानव संसाधन विकास मंत्रालय की ओर से बोलियों को लेकर एक सर्वेक्षण कराया गया जिसके अनुसार 1961 के जनगणना के अनुसार भारत में 1652 बोली–भाषाओं का जिक्र है वहीं 2001की जनगणना में मात्र 122 है। विचारनीय है कि युगों–युगों पूर्व और कितनी बोली–भाषाएँ उन्नत रहीं होगी? पुरातत्व खोजों में पाये गये शिलालेखों में से कई लेख आज पर्यंत आधुनिक विश्व के भाषाओ एवं संख्यांकन पद्धत्ति में अपठित व अविश्लेषित होने की जानकारी पुरातत्वशास्त्रियों ने अपने खोज संग्रह लेख में दी है। जिसका स्पष्ट कारण उस पुरातत्व खोज विशेष की सामायिक क्षेत्रीय भाषाओ एवं संख्यांकन पद्धत्ति के लिपि या संकेत का नष्ट हो जाना ही है। भारतीय पुरा विज्ञान में पाली एवं पाली भाषा से विकसित वैदिक‡ कालीन संस्कृत भाषा लिपि को माना गया है। जिसे देवासुर संग्राम के बाद देव भाषा कहा गया। देव भाषा कहे जाने पर संस्कृत भाषा की मूल लिपि को देवनागरी लिपि कहा गया । इस देव नागरी लिपि के आधार पर राष्ट्र भाषा हिन्दी का विकास हुआ है। प्राचीन पाली एवं देव भाषा कालीन मनीषी ऋषि मुनि अपनी युक्तियों व्युत्पत्तियों निष्कर्षों आदि के सामान्य ज्ञान को सामान्य भाषा एवं संख्या विज्ञान में मुखान्तरित अथवा लिपि बद्ध करते रहे। लेकिन गोपनीयता के लिए अंकन और अक्षर के बीच एक गुप्त ताल–मेल बनाकर रखते रहे। जिसके द्वारा गोपनीय अंकन ज्ञान को अक्षर ज्ञान में रचित ऋचावो (गद्यो) एवं श्लाकों (पद्यों) में तथा गुप्त संदेश कथनों को संख्यांकन की विभिन्न विधाओं में कंठस्थ अथवा लिपि बद्ध करते रहे। विडम्बना है प्राचीन देव भाषा कालीन मनीषी ऋषि मुनियों और पूर्वजों पर ज्ञान–विज्ञान को गुप्त रखने का आरोप लगाकर युगों–य्रुगों तक मात्र धरोहर ही मान रखा। जो की ऐसा कदापि नहीं हैं। यह तो मात्र तात्कालीन सामाजिक राजनैतिक एवं शैक्षणिक व्यवस्था का परिणाम ही है।

वर्तमान परिदृश्य में सामाजिक राजनैतिक एवं शैक्षणिक व्यवस्था सुधारों का जो भी विकास पथ अवलोकित कर रहे है उन सब के मूल में हमारे इन मनीषी ऋषि मुनियों और पूर्वजों पर ज्ञान– विज्ञान का अध्ययन ही है। इसी ज्ञान विकास पथ पर जगतगुरू शंकराचार्य श्री श्री 1008 श्री स्वामी तीर्थराज जी महराज को कोटि सह नमन है। जिन्होंने इस प्राचीन वेद विद्या में छुपे गूढ़तम् गणितीय ज्ञान का अध्ययन कर पाया कि इनके गोपनीय ज्ञान को समझने अपनी अमर कृति **वैदिक गणित अथवा वेदों से प्राप्त सोलह सरल गणितीय सूत्र** में विशेष गोपनीय कुंजी भी दिये है, जिसका उपयोग भी स्वयं में रहस्यमय है।

गुप्त कुंजी• कटादि नव प पंचक य अष्टक क्ष शूद्रम्

भावार्थ व्यंजन अक्षर क सहित क्रमशः नव अक्षर 1से 9, अक्षर ट सहित क्रमशः नव अक्षर 1से 9 ।
अक्षर प सहित क्रमशः 5 अक्षर 1से 5, । अक्षर य सहित क्रमशः 8 अक्षर 1से 8, अक्षर क्ष को 0 माने ।

टीप 1• स्वर अक्षरो सहित स्वर के लिए प्रयुक्त मात्राओं, एवं समस्त अर्ध व्यंजक को कोई अंक मान नहीं दिया गया है।

2• संयुक्त अक्षरों के लिये उनके मूल व्यंजक जैसे **ड़** के लिये **ड, ढ़** के लिये **ढ, श्र** के लिये **ष, ज्ञ** के लिये य, त्र के लिये **त** का मान लिया गया है।

3 • व्यंजक **न** के लिये **ण** मान लिया गया है।

किसी संख्यांकन की गोपनीयता का सार्थक शब्द या वाक्य दर्शन कराने में अपना तर्क शक्ति का परिचय देना होता है। सच कहे तो यही तर्कें की विफलता ही गोपनीयता का मूल है।

‡ वेद शास्त्र के चार भाग 1 अर्थवेद 2 ऋगुवेद 3 अजुर्वेद 4 सामवेद है। जिसके उपयोगिता पर कथन है– वेदात् सर्वत्र प्रसिद्धयति। अर्थात वेद समस्त ज्ञान का अनादि अनन्त श्रोत है। वेद ही ज्ञान है और ज्ञान ही वेद है।

गुप्त कुंजी – कटादि नव प पंचक य अष्टक क्ष शूद्रम् से कूट भाषा संकेत सारिणी

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
क	ख	ग	घ	ड.	च	छ	ज	झ	क्ष
ट	ठ	ड	ढ	ण	त	थ	द	ध	
य	र	ल	व	ष	श	स	ह		
प	फ	ब	भ	म					
ज्ञ		ड़	ढ़	न	त्र				
				श्र					

निज विचार• सरल अध्ययन क्रम में ज्ञ=1, ड़=3, ढ़ =4, न =5 , त्र =6 तथा श्र=5 , सम्मिलित किया जाना चाहिए ।

22-2 शब्दों का कूट संख्यांकन

दादा–दादी	मॉ–बाप	मामी–मामा	काकी–काका	चाची–चाचा	फूफी – फूफा	बहन	भाई
द द–द द	म–ब प	म म–म म	क क– क क	च च– च च	फ फ– फ फ	ब ह न	भ
88–88	5-31	55-55	11-11	66–66	22–22	385	4

जीजी–जीजा	नाना –नानी	मौसी–मोसा	सास–ससुर	समधिन –समधी	देवरानी–देवर
ज ज–ज ज	न न –न न	म स –म स	स स–स स र	स म ध न– स म ध	द व र न–द व र
88 -88	55-55	57-57	77-772	7595- 759	8425–842

रमेश	माया	सुनील	रवि	आदित्य	जयदेव	योगेन्द्र	दिलीप
र म ष	म य	स न ल	र व	द य	ज य द व	य ग द	द ल प
256	51	753	24	81	8184	138	831

कपिल	राम	सीता	जगत	राघा	श्यामा	पंचराम	वंजे	अनिल	छोटेलाल
कपल	रम	सत	जगत	र ध	यम	पचरम	वज	नल	छटलल
118	25	76	836	29	15	5225	48	53	7133

भारत	पाकिस्तान	अमेरिका	भूटान	बॉग्लादेश	सिंगापुर	श्री लंका	चीन	नेपाल
भरत	पकतन	मरक	भटन	बलदश	सगपर	श लक	चन	नपल
426	1165	521	415	3386	7312	631	65	513

गंगा	यमुना	नर्मदा	सिन्धु	सतलज	गोदावरी	झेलम	सरसस्वती	शिवनाथ	महानदी	कावेरी
गग	यम	नमद	सध	सतलज	गदवर	झलम	सरसवत	शवथ	महद	कवर
33	15	558	74	7638	3842	935	72746	647	588	142

हिमालय	अरावली	सतपुड़ा	विन्ध्याचल	आल्पस	मल्कागिरि	रेगिस्तान	वाराणासी	अर्जुन्दा	गढ़सिवनी
हमलय	रवल	सतपड	वयचल	पस	मकगर	रगतन	वरणस	जद	गढसवन
8531	243	76513	4163	17	5132	2365	4257	88	34745

22-3 संख्याओं का शब्द निरूपण करना एवं सार्थक वाक्य की रचना करना

उदाहरण 1■ 82 के 16 और 56 81 से जा रहे है।

हल 82 के लिए अक्षर संकेत – जख, जठ, जर, जफ, दख, दठ, दर, दफ, हख, हठ, हर, हफ,

56 के लिए अक्षर संकेत – ङ.च, ङ.त, ङ.श, णच, णत, णश, नच, नत, नश, शच, शत, षश, मच, मत, मश,
16 के लिए अक्षर संकेत – कच, कत, कश, टच, टत, टश, यच, यत, यश, पच, पत, पश,
81 के लिए अक्षर संकेत – जक, जट, जय जप, दक, दट, दय, दप , हक, हट, हय, हप, ,
सार्थक वाक्य रचना की दृष्टि से–
82 के लिए अक्षर संकेत – हर से हरि 56 के लिए अक्षर संकेत –मत से माता
16 के लिए अक्षर संकेत –पत से पिता 81 के लिए अक्षर संकेत – हय से हय = घोड़ागाड़ी लिये जाने पर
82 के 16 और 56 81 से जा रहे है। के लिए सार्थक वाक्य रचना –

हरि के माता और पिता हय (घोड़ागाड़ी) से जा रहे है। उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ मुझे मेरे 55 और 22 दोनों ही 386 686 हैं।

हल सार्थक वाक्य रचना की दृष्टि से–
55 के लिए अक्षर संकेत – मम से मामा 22 के लिए अक्षर संकेत –फफ से फूफा
386 के लिए अक्षर संकेत –बहत से बहुत 686 के लिए अक्षर संकेत – चहत से चाहते लिये जाने पर
मुझे मेरे 55 और 22 दोनों ही 386 686 है। के लिए सार्थक काक्य रचना –

मुझे मेरे मामा और फूफा दोनों ही बहुत चाहते हैं। उत्तर होगा।

22-4 आवर्ती दशमलव और कूटभाषा

उदाहरण 1■ गधाक्षरणः शढाय के लिए ग ध अ क्ष र ण श ढ य से संख्यांकन 39 025641 है। जिससे स्पष्ट होता है कि मानक भिन्न $\frac{1}{39}$ का आवर्ती दशमलव निरूपण $0.\dot{0}2564\dot{1}$ होगा ।

उदाहरण 2■ केवलैं सप्तकं गुण्यात् के लिए यहाँ सप्तकं का भाषायी अर्थ 7 (सात) से है। जिसका मानक भिन्न अर्थमान $\frac{1}{7}$ होगा। तथा गुणयात का भाषायी अर्थ गुण्य को से है जहाँ केवलैं के लिए क व ल से संख्यांकन 143 गुण्य होगा। तथा गुण्य का गुणक जो गोपनीय है उतने अंकों की सबसे बड़ी संख्या होगी जितने प्राप्त गुण्य में अंकों की स्थान संख्या है।

तब **विश्लेषित व्याख्या** – $\frac{1}{7}$ का आवर्ती दशमलव निरूपण की दशमलव बाद आवर्ती अंक समूह से संख्या =

$143*999 = 142857$ होगी। $\therefore \frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ पाणि ठारो अक्ष सौ । अक्ष अक्ष अक्ष अक्ष अक्ष तमसौ के लिए–

प ण ठ र क्ष स । क्ष क्ष क्ष क्ष क्ष त मस से संख्यांकन 152207 00000657 है। जिससे स्पष्ट होता है कि मानक भिन्न $\frac{1}{152207}$ का आवर्ती दशमलव निरूपण $0.\dot{0}000065\dot{7}$ होगा ।

उदाहरण 4■ सबो अक्ष काम खफा अक्षसो गुण्यात् धाई के लिए –
स ब क्ष क म क्ष फ क्ष स ध से संख्यांकन 73 0152207 **गुण्यात** 9
$\frac{1}{73}$ का आवर्ती दशमलव निरूपण की दशमलव बाद आवर्ती अंक समूह से संख्या =

$0152207*9 = 01369863$ होगी। $\therefore \frac{1}{73} = 0.\dot{0}13\dot{6}986\dot{3}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 5■ थल अक्षकलस के लिए – थ ल क्ष क ल स से 73 0 1 3 7 है।
$\frac{1}{73}$ का आवर्ती दशमलव निरूपण में दशमलव बाद आवर्ती अंक समूह से संख्या =

$0137*9999 = 01369863$ होगी। $\therefore \frac{1}{73} = 0.\dot{0}13\dot{6}986\dot{3}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 6■ कंसे क्षामदाह खलै मलै के लिए–

क स क्ष म द ह ख ल म ल से संख्यांकन 17 05882353 है। इससे स्पष्ट होता है कि मानक भिन्न $\frac{1}{17}$ का आवर्ती दशमलव में दशमलव बाद आवर्ती अंक समूह से संख्या =

$05882353*99999999 = 0588235294117647$

$\therefore \frac{1}{17} = 0.\dot{0}58825294176 4\dot{7}$ उत्तर होगा।

उदाहरण 7■ **युधः** **क्षमारत बकम सधौ** के लिए–

य घ क्ष म र त ब क स ध से संख्यांकन 19 052631579 है। इससे स्पष्ट होता है कि

मानक भिन्न $\frac{1}{19}$ का आवर्ती दशमलव में दशमलव बाद आवर्ती अंक समूह से संख्या =

052631579*999999999 = 052631578947368421 होगी।

$\therefore \frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$ उत्तर होगा।

एक महत्वपूर्ण श्लोक **गोपी भाग्यम ध्रुवात–श्रृंगिशोदधिसंधिग। खलजीवितखाताव गलहालारसंधर ।। के लिए**

ग प भ य म ध व त श्र ग श द ध स घ ग ख ल ज व त ख त व ग ल ह ल र स ध र सें प्राप्तसंख्यांकन

3 1 4 1 5 9 4 6 5 3 6 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 2 को दशमलव बाद दर्शित करने पर 32 स्थानिक दशमलव भिन्न मान– 31415946536 8 979323846264338 3279 2

किसी वृत्त के [(परिधि मान) ÷(ब्यास मान), अथवा [(क्षेत्रफलमान) ÷(त्रिज्या का वर्ग मान)] का हल जिसे एक स्थिरांक π (पाई) माना गया है। जिसका दशमलव निरूपण शांत एवं आवर्ती भिन्न के रूप दर्शित किया जाना आज पर्यन्त प्रश्न है । के लिए उसके दसवें भाग मान $\frac{\pi}{10}$ है।

अर्थात् $\frac{\pi}{10}$ = 0.31415946536897932384626433832792 ------ प्रथम 32 स्थानिक दशमलव भिन्न मान होगा।

जो कि स्वामी जी की अमर कृति **वैदिक गणित अथवा वेदों से प्राप्त सोलह सरल गणितीय सूत्र** के पृष्ठ 320 में

$\frac{\pi}{10}$ = 0.31415926535897932384626433832792 ------ प्रथम 32 स्थानिक दशमलव भिन्न मान दर्शित है।

घ्यानाकर्षण आघ्यात्मिक दृष्टि से श्लोक का प्रथम भाग **गोपी भाग्यम ध्रुवात–श्रृंगिशोदधिसंधिग** ।भगवान श्री कृष्ण के प्रति और दूसरा भाग **खलजीवितखाताव गलहालारसंधर** ।। भगवान श्रीशंकर के प्रति है।

इसे समझने के बाद हाइडेलबर्ग विश्व विद्यालय जर्मनी के गणितज्ञ तथा भौतिक विद् एवं संस्कृत विद्वान डा. वी.पी. दलाल का उत्साहवर्धक यह टिप्पणी की "इससे यह तो स्पष्ट दिखता है कि जब यूनानी गणितज्ञों के पास 1000 से बड़ी संख्याओं के लिए पद नहीं तथा उनके गणन की क्रिया इतनी जटिल थी – जिसे वे गिनतारा (अबेकस) से गणक के बराबर जोड़ कर करते थे, 7*5 के लिए वे 7 को उस गिनतारे से 5 बार जोड़ते थे– उस प्राचीन समय भारतीय गणितज्ञ संगणना की इतनी बारीकियों के भी बहुत भीतर पैठ कर चुके थे "।

उक्त टिप्पणी दर्शित करने का यह अर्थ कदापि नहीं कि संस्कृत के अतिरिक्त स्वदेशी एवं विदेशी भाषाओं में कूटभाषा का अनुप्रयेग है ही नही। उनकी अपनी एक अलग विधा होगी जो एक विश्व पुरा भाषा विज्ञान के खोज का विषय हो सकता है। इसी संदर्भ में – उर्दू भाष ा विज्ञान में मुस्लिम धर्म में परवरदिगार अल्लाह के प्रति मानक शुभ संख्या **786** उनके महिमा में कुरान शरीफ में प्रस्तुत अयात –

• **बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम** • **(अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है)** का उर्दू भाषा लिपि में उक्त अयात को लिखे अक्षरों के कूट संख्या मानों का योगमान है। ऐसा एक जानकर परवर दिगार अल्लाह के बंदे ने बताया है।

ऐसा ही कूटभाषा का अनुप्रयोग ऑग्ल भाषा लिपि में होने का संकेत मात्र एक गणित कार्यशाला में सम्मिलित होने पर प्राप्त हुआ है। जिसे विश्लेशित करने का सुझाव आप सब विद् जनों की ओर से आमंत्रित है। निज विचार में–

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
B	C	D	F	G	H	J	K	L	Z
M	N	P	Q	R	S	T	V	W	
A	E	1	O	U					
X	Y								

लिया जाना जा सकता है

जैसे SHYAMA PANCHRAM KESHRIA= 662111 31226511 8266531 के अंको का योग 17+20+31 =68 और एकअंकीय योग 5 होगा।

ARJUNDA = 157521 के अंको का योग 21 और एकअंकीय योग 3 होगा।

BALOD = 1193 के अंको का योग 13 और एकअंकीय योग 4 होगा।

RAIPUR = 51355 के अंको का योग 19 और एकअंकीय योग 1 होगा।

CHHATTISGHAR =2661773615 के अंको का योग 44 और एकअंकीय योग 8 होगा।

DEHLEE =326922 के अंको का योग 24 और एकअंकीय योग 6 होगा।

INDIA = 3 2331 के अंको का योग 12 और एकअंकीय योग 3 होगा।

JAISEVA = 713281 के अंको का योग 22 ओर एकअंकीय योग 4 होगा।

सर्वधर्म समभाव प्रेरित पंक्ति

ऊँ श्री हरि अल्लाह बिठ्ठल–बिड्ठल साहेब कृष्ण साई राम।

5 82 38 323 323 783 15 7 25

1 2 8 8 9 6 7 7

श्री बूढ़ादेव प्रभु यीशु बुद्धम् महावीराय झूलेलाल वाहे गुरू सतनाम।।

53484 54 16 3 8 5 58421 9333 4832 7655

6 7 7 2 9 8 5

पूरे पंक्ति का एक अंकीययोग 5 +82+ 38 + 323+ 323+ 783+ 15 + 7 + 25+

53484+ 54 16+ 3 8 5+ 58421+ 9333+ 4832+ 7655 = 141127से

1+4+1+1+2+7 = 16 से 1+6 = 7 से 1+0 = 1

शब्दवार एक अंकीय योग का एकअंकीय योग =5+1+2+8+8+9+6+7+6+7+7+7+2+9+8+5 = 97 से 9+7=16 से 1+6 = 7

----------22----------

अध्याय -23
शांत दशमलव भिन्न में मूल भूत संक्रिया

23-1 दशमलव भिन्न में मूल भूत संक्रिया योग (जोड़ना), व्यकलन (घटाना) , गुणा एवं भाग की संक्रिया के लिए सामान्यतः पूर्णांकों के संदर्भ में उल्लेखित विधियाँ ही है। मात्र निम्नानुसार ध्यानाकर्षण बिन्दुओं को ही दृष्टिगत करना ही पर्याप्त है।

ध्यानाकर्षण बिन्दु

(1) योग एवं व्यकलन के संदर्भ में सरल अभ्यास की दृष्टि से यदि योग एवं व्यकलन के लिए ली गई दशमलव भिन्न संख्याएँ दशमलव बाद समान स्थानिक नहीं है तो– **1•** उन दशमलव भिन्न संख्या या संख्याओ को दृष्टिगत कीजिए जो दशमलव बाद सबसे अधिक स्थान की है। बस इसी दशमलव भिन्न संख्या या संख्याओ के स्थानमान पर समस्त दशमलव भिन्न संख्या को समान स्थानिक कीजिए।– इसके लिए कम स्थानिक दशमलव भिन्न संख्या के बाँयी से दाँयी ओर आवश्यकतानुसार 0 (शून्य) दर्ज कीजिए। **2•** तत्पश्चात इन्हे पूर्णांक मानते हुए पूर्णांकों के संदर्भ में उल्लेखित विधियों के अन्तर्गत दाँये से बाँये स्तमानुसार योग एवं व्यकलन संक्रिया सम्पन्न कीजिए। **3•** प्राप्त संक्रिया मान में दाँयी से बाँयी यथा स्थान बाद दशमलव बिन्दु दर्ज कीजिए और अभीष्ट संक्रिया मान प्राप्त कीजिए।

जैसे 1• दशमलव भिन्न संख्याएँ 45.7345 , 6.51 और 4721.032 के योगफल के लिए– दशमलव बाद सबसे अधिक 4 स्थानिक संख्या 45.7345 है । अतः शेष संख्याओं 6.51 और 4721.032 को दशमलव बाद 4 स्थानिक संख्या में लिए जाने पर क्रमशः 6.5100 और 4721.0320 होंगे।

तब स्तम्भिक योग नियम से योग संक्रिया–

```
          3 4 5 . 7 3 4 5
            0 6 . 5 1 0 0
      + 4 7 2 1 . 0 3 2 0
योगफल   5 0 7 3 . 2 7 6 5
```

2• दशमलव भिन्न सं.ख्या 798.67 में से 599.78945 घटाने के लिए– दशमलव बाद सबसे अधिक 5 स्थानिक संख्या 599.78945 है । अतः संख्या 798.67 को दशमलव बाद 5 स्थानिक संख्या में लिए जाने पर 798.67000 होंगाा।

तब स्तम्भिक योग नियम से घटाना संक्रिया–

```
              7 8 9 . 6 7 0 0 0
          –   5 9 9 . 7 8 9 4 5
घटाना मान     1 8 9 . 8 4 0 5 5
```

गुणा के संदर्भ में 1• दशमलव भिन्न संख्या में गुण्य एवं गुणक के दशमलव बिन्दु के बाद अंकों के स्थान संख्या का योग मान s प्राप्त कीजिए। **2•** दशमलव बिन्दु को दृष्टिपात कर पूर्णांक मानते हुए पूर्णांकों के संदर्भ में उल्लेखित विधियों के अन्तर्गत गुणनफल g प्राप्त कीजिए। **3•** उक्त प्राप्त गुणनफल g के दाँयी (इकाई अंक) से बाँयी ओर s स्थान बाद दशमलव बिन्द चिन्हित कर अभीष्ट गुणनफल प्राप्त कीजिए।

जैसे 999.995 * 99999.6 के लिये –**1•** दशमलव भिन्न संख्या में गुण्य एवं गुणक के दशमलव बिन्दु के बाद अंकों के स्थान संख्या का योग मान s=3+1 =4 प्राप्त कीजिए।

2• दशमलव बिन्दु को दृष्टिपात कर पूर्णांक मानते हुए पूर्णांकों के संदर्भ में उल्लेखित विधियों के अन्तर्गत गुणनफल g =999995 * 999996 =999991\000020 =999991000020 होगा ।

3• गुणनफल g के दाँयी(इकाई अंक) से बाँयी ओर s =4 स्थान बाद दशमलव बिन्द चिन्हित कर अभीष्ट गुणनफल 99999100.0020 प्राप्त कीजिए।

भाग के संदर्भ में 1• दशमलव भिन्न संख्या में प्रश्न भाजक के दशमलव बिन्दु को दृष्टिपात कर उसे पूर्णांक भाजक माने। **2•** उक्त पूर्णांक भाजक के सापेक्ष भाज्य प्राप्त करने दशमलव भिन्न संख्या में प्रश्नभाज्य के दशमलव बिन्दु को उस स्थान से दाँयी ओर उतने स्थान बाद स्थानान्तरित कीजिए जितने की भाजक में दशमलव बिन्दु बाद अंकों की स्थान संख्या है। इसके लिए आवश्यकतानुसार में भाज्य के दाँयी ओर शून्य विस्तारित कीजिए। **3•** अब यदि भाग संक्रिया प्रश्न में भागफल दशमलव बाद r स्थान तक प्राप्त करने का निर्देश हो तो पूर्णांक

भाजक के सापेक्ष प्राप्त भाज्य को दशमलव बाद r स्थान तक नियमानुसार विस्तारित कीजिए। **4•** इस प्रकार विस्तारित भाज्य को पूर्णांक भाज्य मानकर पूर्णांक भाजक मान द्वारा भाग देने की संक्रिया सम्पन्न कीजिए। **5•** उक्त प्राप्त भागफल के दाँयी(इकाई अंक) से बाँयी ओर r स्थान बाद दशमलव बिन्द चिन्हित कर अभीष्ट भागफल प्राप्त कीजिए। **6•** यदि दशमलव बाद r स्थान तक भागफल प्राप्त होने उपरांत अभीष्ट शेषफल की गणना चाहते हैं तो वह शेषफल, दशमलव बाद [भागफल एवं भाजक के दशमलव बिन्दु के बाद अंकों के स्थान संख्या का योग s]= s स्थानिक होगा। जिसमें बिन्दु 4 के अन्तर्गत की गई भाग संक्रिया से प्राप्त शेषफल के ....सैकड़ा, दहाई, इकाई .अंको को क्रमशः दशमलव भिन्न में दर्शित करने क्रमशः ----------- (s-2) वाँ, (s-1)वाँ] ̀वाँ स्थान देना होगा।

जैसे 1■ $1456.72 \div 9.9$ द्वारा प्राप्त भागफल को दशमलव बाद तीन स्थान तक प्राप्त करने – प्रश्न भाजक 9.9 को पूर्णांक भाजक 99 माने और प्रष्न भाज्य 1456.72 के दशमलव बिन्दु को दाँयी ओर प्रश्न भाजक 9.9 में दशमलव बाद अंक स्थान मान 1 के तुल्य स्थान बाद तक स्थानान्तरित कर पूर्णांक भाजक के सापेक्ष भाज्य 14567.2 प्राप्त कीजिए। पुनः भागफल को दशमलव तीन स्थान प्राप्त करने सापेक्ष भाज्य $14567.2 = 14567.200$ को पूर्णांक भाज्य 14567200 मान कर $1456200 \div 99$ का हल संक्रिया सम्पन्न कीजिए।

विधि 1• अनुभाग विभाजन विधि $14567200 \div 99$ के लिए–

भाज्य का अनुभाग विभाजन = 14\56\72\00 से जाँच

$\Sigma m = 14+56+72+00= 142 >$ (भाजक) $\S_1 =(145672+1456+14)= 147142$

निश्कर्श– प्रारंभिक भागफल$_1 = \S_1 + 1 =147142+1 =147143$ एवं शेषफल$_1 = \Sigma m$ – भाजक $=142-99 =43<$ भाजक

∴अभीष्ट भागफल = भागफल$_1$ = 147143 ही होगा एवं अभीष्ट शेषफल = शेषफल$_1$ =43

अतः $1456.72 \div 9.9$ का दशमलव बाद तीन स्थान तक भागफल =147.143 तथा शेषफल =0.0043

विधि 2• सुभाजक विधि

```
 99 |  1 4  5  6 7   2 \  0   0
 01 |     0  1           \
             0  4         \
              0  6        \
                  0  10     \
                        0   \ 13
                               \ 0  12
    ------------------------------------
          1  4   6 ₁0 ₁3 ₁2  \ ₁3 ₁2
                      147142\ 142
```

यहाँ शेषफल 142 > भाजक 99 ∴ $142 \div 99$ का पुनः गणना

```
              \1\4 2
                  \01
         ----------------
     147142  \1\43
```

अभीष्ट भागफल = 147142 + 1 = 147143 और शेषफल = 43

उत्तर की जाँच– भागफल * भाजक + षेशफल = 147.143* 9.9 + 0.043 = 1456.7157 + 0.0043

=1456.7200 = 1456.72 = भाज्य है।

जाँच निष्कर्ष प्राप्त भागफल एवं शेषफल उत्तर सही है।

जैसे 2• $1245 \div 182$ का हल दशमलव बाद 4 स्थान तक प्राप्त करने के लिए –

$12450000 \div 182$ की गणना –

सुभाजक विधि $182 = 2\bar{2}2 = 2*1\bar{1}1$ | 1 2 4 5 0 0 \ 0 0

$1\,\bar{1}$ $1\ \bar{1}$

$3\ \bar{3}$

$6\ \bar{6}$

$$\begin{array}{r} 8\ \ \bar{8} \\ 2\ \backslash\ \bar{2} \\ \backslash\ \bar{6}\ \ 6 \\ \hline \end{array}$$

$\frac{1}{2}[\ 1\ \ 3\ \ 6\ \ 8\ \ 2\ \ \bar{6}\ ]\ \backslash\ \bar{8}\ 6$

$=\frac{1}{2}[\ 1\ \ 3\ \ 6\ \ 8\ \ 1\ \ \ 4\ ]\ \backslash\ \bar{8}\ 6$

$=\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 0\ \ 7\ \backslash\ \bar{8}\ 6$

$=\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 0\ \ 6\ \backslash 182+\bar{8}\ 6$

$=\ \ 6\ \ 8\ \ 4\ \ 0\ \ 6\ \backslash 108$

$\therefore 1245 \div 182$ का दशमलव बाद 4 स्थान तक भागफल = 6. 8 4 0 6 तथा शेषफल = 0. 0 1 0 8

$108 > \frac{1}{2}[182]$

$\therefore 1245 \div 182$ का दशमलव बाद 4 स्थान तक का मान्य भागफल = 6. 8 4 0 7 होगा ।

जैसे 3• $0.20014 \div 1.37608$ का हल दशमलव बाद 5 स्थान तक प्राप्त करने के लिए –

$2001400000 \div 137808$ की गणना –

भाग गणन संक्रिया की सार्वभौमिक राजमणि विधि• ध्वजांक सह खड़ी–तिरछा विधि का अनुप्रयोग

हल विश्लेषण

प्रक्रमानुसार गणना प्रस्तुति– बाँयी से दाँयी ओर

7608/ध्वजांक	2	$_2$0	$_7$0	$_{11}$1	$_{12}$4	$_0$0	$_5$00 0 0	सकलभाज्य/शेषफल पंक्ति
13प्रकूचांक	2	20	63	77	65	$\overline{73}$		क्रिया शील भाज्य पंक्ति
	0	1	4	5	5	$\bar{6}$		भागफल : शेषफल पंक्ति
		0	7	34	59	73		खड़ा तिरछा गुणा मान पंक्ति

अभीष्ट भागफल = $01455\bar{6}$ = 14544 शेषफल =

सकल शेषफल – $[cp\begin{Bmatrix}8\\6\end{Bmatrix} + 10\begin{Bmatrix}0 & 8\\5 & 6\end{Bmatrix} + 100 * cp\begin{Bmatrix}6 & 0 & 8\\5 & 5 & 6\end{Bmatrix} + 1000*cp\begin{Bmatrix}7 & 6 & 0 & 8\\4 & 5 & 5 & 6\end{Bmatrix}]$

$= 50000 - [\overline{48} + 10 * 40 + 100 * 4 + 1000 * 20\ ]$

$= 50000 - [\overline{48} + 400 + 400 + 20000] = 50000 - [208\overline{48}] = 29248$

$\therefore\ 0.20014 \div 1.37608$ का दशमलव बाद 5 स्थान तक भागफल = 0.14544 तथा

शेषफल = 0.0000029248

$29248 < \frac{1}{2}[137608]$

$\therefore 0.20014 \div 1.37608$ का दशमलव बाद 5 स्थान तक का मान्य भागफल =0.14544 ही होगा ।

उत्तर की जाँच– भागफल * भाजक + शेषफल = 0.14544 * 1.37608 +0.0000029248

= 0.2001370752+0.0000029248

= 0.2001400000 =0.20014 = भाज्य है।

जाँच निष्कर्ष प्राप्त भागफल एवं शेषफल उत्तर सही है।

भागफल अनुभाग का सांकेतिक हल व्याख्या तालिका

प्रकूचांक = भाजक 137608 के बाँयी ओर प्रथम दो अंक से बनी संख्या = 13

तथा ध्वजांक के अंक = शेष अंतिम चार अंक 7 6 0 8

प्रक्रम	सकल भाज्य	खड़ा तिरछा गुना योग C. P.	क्रियाशील भाज्य A–B	C ÷ प्रकूचांक 12 से		शेषफल को भाज्य के आगे क्रमकेअंक के बाँयी ओर नीचेदर्शित करनेपर अगले प्रक्रम का सकल भाज्य
				भागफल	शेषफल	
	A	B	C	D	E	F
1	2	----	2	0	2	$_{2}0 = 20$
2	20	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$	20	1	7	$_{7}0=70$
3	70	$\begin{Bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = 7$	63	4	11	$_{11}1=111$
4	111	$\begin{Bmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{Bmatrix}=34$	77	5	12	$_{12}4=124$
5	124	$\begin{Bmatrix} 7 & 6 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{Bmatrix}=59$	65	5	0	$_{0}0=00$
6	00	$\begin{Bmatrix} 7 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{Bmatrix}=73$	$\overline{73}$	$\overline{6}$	5	

प्रक्रम 6 से प्राप्त शेष 5 को शेषफल अनुभाग में दर्शित अंक से बनी संख्या के बाँयी ओर नीचे दर्शित कर सकल शेषफल $_{5}0000 = 50000$ प्राप्त कीजिए।

अभीष्ट भागफल तथा शेषफल प्राप्त करने की गणना ऊपर दिया जा चुका है।

----------23----------

अध्याय -24
आवर्ती दशमलव भिन्न में मूल भूत संक्रिया

दोनों प्रकार के आवर्ती दशमलव भिन्न, पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न एवं मिश्र आवर्तीदशमलव भिन्न में मूल भूत संक्रिया के लिए शांत दशमलव भिन्न में मूल भूत संक्रिया नियम एवं प्रतिबंध के अन्तर्गत किया जाना कदापि उचित नहीं होगा। इस विषय के ताारतम्य में सटीक अथवा दशमलव बाद rवें स्थान तक निकटतर मान्य हल प्राप्त करने–निम्नानुसार दर्शित प्रक्रमों का अनुशरण कीजिए।

प्रक्रम 1 प्रश्न में निहित षांत दशमलव भिन्न सहित सरल आवर्ती दशमलव भिन्न एवं मिश्र आवर्तीदशमलव भिन्नो को बटे भिन्न $[\frac{a}{b}]$ में निरूपण कीजिए।

प्रक्रम 2 प्रक्रम 1 से प्राप्त बटे भिन्न $[\frac{a}{b}]$ मानों पर चाही गई संक्रिया सरल भिन्न में मूल भूत संक्रिया नियम एवं प्रतिबंध के अन्तर्गत कीजिए।

प्रक्रम 3 प्रक्रम 2 से प्राप्त हल का दशमलव निरूपण कर अभीष्ट सटीक हल प्राप्त कीजिए। और संक्रिया संदर्भ में अलग–अलग सुझाये गये ध्यानाकर्शण बिन्दुओं का अनुषरण करते हुए अभीष्ट संक्रिया हल प्राप्त कीजिए।

ध्यानाकर्षण

योग एवं व्यकलन संक्रिया संदर्भ में 1• अध्याय 20 के अनुच्छेद 20.5 के अनुसार प्रक्रम 1 में प्रश्न में निहित शांत दशमलव भिन्न सहित सरल आवर्ती दशमलव भिन्न एवं मिश्र आवर्तीदशमलव भिन्नो का प्राप्त बटे भिन्न $[\frac{a}{b}]$ मान में – शांत दशमलव भिन्न के प्रति प्राप्त सरल भिन्न का हर 10^p को संख्या मान देने पर (p+1) अंको की सबसे छोटी संख्या [1 के बाद p स्थान तक शून्य दर्शित करने से प्राप्त संख्या], सरल आवर्ती दषमलव के प्रति प्राप्त बटे भिन्न का हर $(10^q - 1)$ को संख्या मान देने पर q अंको की सबसे बड़ी संख्या [q स्थान तक 9 दर्शित करने से प्राप्त संख्या,एवं मिश्र आवर्ती दशमलव के प्रति प्राप्त बटे भिन्न का हर $[(10^r - 1) * 10^s]$ को संख्या मान देने पर [r स्थान तक 9 दर्शित करने बाद s स्थान तक शून्य दर्शित करने से प्राप्त संख्या] होगा।

2• प्रक्रम 2 में प्रक्रम 1 से प्राप्त बटे भिन्नों का योगमान / व्यकलनमान का हर संख्यांक 9 और 0 ही होगा । क्रमशः 9 की स्थान प्रक्रम 1 से प्राप्त सरल भिन्नों के हरो मे निहित 9 की स्थान संख्या मानों का लघुत्तम समापवर्त्य मान एवं 9-9 दर्शित होने के बाद आगे 0 की स्थान संख्या अधिकतम 0 के स्थान वाले भिन्न के 0 की स्थान संख्या होगा ।

3• प्रक्रम 2 मे प्राप्त योगमान / व्यकलनमान के बटे भिन्न को सरलता से आवर्ती दशमलव में निरूपण किया जा सकता है।इसके लिए प्रक्रम 2 में प्राप्त दिये योगमान / व्यकलनमान के बटे भिन्न का अवलोकन कीजिए।

3a• यदि यह बटा भिन्न सम भिन्न हो तो इसके अंश मान को नियमाानुसार हर मान के अंकों की स्थान संख्या मान के तुल्य स्थानिक कीजिए।तत्पश्चात् अध्याय 20 के अनुच्छेद 20.6 के बिन्दु 2 और 3 के अनुसार क्रमशः बटे भिन्न का पूर्णआवर्ती और मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण कीजिए। जिसका पूर्णांश 0 होगा।

3b• यदि यह बटा भिन्न विषम भिन्न हो तो – इस बटे भिन्न को प्रथम मिश्र भिन्न में रूपान्तरित कीजिए। जिसका पूर्णांक मान कारूपांन्तरित आवर्ती दशमलव भिन्न का पूर्णांश सुनिश्चित कीजिए। पूर्णाश बाद अपूर्णांश का आवर्ती निरूपण प्राप्त मिश्र के सम बटे भिन्न के सापेक्ष बिन्दु के अनुसार कीजिए।

गुणन संक्रिया के संदर्भ में 1• योग एवं व्यकलन संक्रिया संदर्भ में –1 के यथा शब्दों मे।

2• प्रक्रम 2 में प्रक्रम 1 से प्राप्त बटे भिन्नों का गुणनफल का हर में संख्यांक योगमान / व्यकलनमान का हर संख्यांक की भाँति प्राप्त नहीं होगा। अतः इस प्राप्त गुणनफल का दशमलव प्रतिनिरूपण योगमान / व्यकलनमान के शब्दों में नहीं किया जा सकता ।

भाग संक्रिया के संदर्भ में 1• योग एवं व्यकलन संक्रिया संदर्भ में के यथा शब्दों मे।

2a• यदि प्रक्रम 1 में भाज्य एवं भाजक हर अलग–अलग हो तो बटे भिन्न में प्राप्त भागफल दशमलव प्रतिनिरूपणयोगमान / व्यकलनमान के शब्दों में होगा।

2b• यदि प्रक्रम 1 में भाज्य एवं भाजक हर समान हो तो बटे भिन्न में प्राप्त भागफल का –अंश भाज्य का अंश और हर भाजक का अंश होगा। जिसका दशमलव प्रतिनिरूपण योगमान / व्यकलनमान के अनुसार नहीं किया जा सकता।

योग संक्रिया संदर्भ में हलित उदाहरण

उदाहरण 1■ $0.\dot{5}+0.\dot{8}=\frac{5}{9}+\frac{8}{9}=\frac{13}{9}=1\frac{4}{9}=1.\acute{4}$ अभीष्ट सटीक योगफल होगा।

उदाहरण 2■ $0.2\dot{5}+0.2\dot{7}=\frac{25-2}{90}+\frac{27-2}{90}=\frac{23}{90}+\frac{25}{90}=\frac{48}{90}$

$=\frac{1}{10}\left\{\frac{48}{9}\right\}=\frac{1}{10}\left\{5\frac{3}{9}\right\}=\frac{1}{10}\{5.\dot{3}\}=0.5\dot{3}$ का मिश्र आवर्ती दशमलव निरूपण होगा।

उदाहरण 3■ $0.\dot{0}375\dot{6}+0.\dot{4}892\dot{1}=\frac{03756}{99999}+\frac{48921}{99999}=\frac{52677}{99999}=0.\dot{5}267\dot{7}$ अभीष्ट सटीक योगफल होगा।

उदाहरण 4■ $2.\dot{3}75\dot{6}+4.3\dot{7}5\dot{6}=2\frac{3756}{9999}+4\frac{3756-3}{9990}$

$=\frac{19998+3756}{9999}+\frac{39960+3753}{9990}$

$=\frac{23754}{9999}+\frac{43713}{9990}$

$=\frac{23754*1000100010+43713*1001001001}{9999999999990}$

$=\frac{23756375637540+43756756756713}{9999999999990}$

$=\frac{67513122394253}{9999999999990}=\frac{1}{10}\left\{\frac{67\backslash513122394253}{999999999999}\right\}=\frac{1}{10}\left\{67\frac{67+513122394253}{999999999999}\right\}$

$=\mathbf{\frac{1}{10}}\left\{67\frac{513122394320}{999999999999}\right\}=\mathbf{\frac{1}{10}}\{67.\dot{5}1312239432\dot{0}\}=6.7\dot{5}1312239432\dot{0}$ अभीष्ट योगफल होगा

उदाहरण 5■ $3.547\dot{1}+3.54\dot{7}\dot{1}+3.5\dot{4}7\dot{1}+3.\dot{5}47\dot{1}+3.5471$

$=3\frac{5471-547}{9000}+3\frac{5471-54}{9900}+3\frac{5471-5}{9990}+3\frac{5471}{9999}++3\frac{5471}{10000}$

$=\frac{27000+4924}{9000}+\frac{29700+5417}{9900}+\frac{29970+5466}{9990}+\frac{29997+5471}{9999}+\frac{30000+5471}{10000}$

$=\left[\frac{31924}{9000}+\frac{35117}{9900}\right]+\left[\frac{35436}{9990}+\frac{35468}{9999}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\left[\frac{31924*11+35117*10}{99000}\right]+\left[\frac{35436*1001001001+35468*1000100010}{9999999999990}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\left[\frac{351164+351170}{99000}\right]+\left[\frac{35471471471436+35471547154680}{9999999999990}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\left[\frac{702334}{99000}+\frac{71943018626116}{9999999999990}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\left[\frac{702334*10101010101+71943018626116*100}{999999999999000}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\left[\frac{7094282828275734+7194301862611600}{999999999999000}\right]+\frac{35471}{10000}$

$=\frac{14288584790887334}{999999999999000}+\frac{35471}{10000}$

$=\frac{14288584790887334*10+35471*999999999999}{9999999999990000}$

$=\frac{142885847908873340+35470999999964529}{9999999999990000}$

$=\frac{178356847908787869}{9999999999990000}=\frac{1}{10000}\left\{\frac{178356\backslash847908787869}{999999999999}\right\}=\frac{1}{10000}\left\{178356\frac{178356+847908787869}{999999999999}\right\}$

$=\frac{1}{10000}\left\{178356\frac{847908966225}{999999999999}\right\}=\frac{1}{10000}\{178356.\dot{8}4790896622\dot{5}\}$

$=17.8356\dot{8}4790896622\dot{5}$

व्यकलन संक्रिया संदर्भ में हलित उदाहरण

उदाहरण 1■ $0.\dot{8}-0.\dot{5}=\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=\frac{3}{9}=0.\acute{3}$ अभीष्ट सटीक व्यकलन मान होगा।

उदाहरण 2■ $0.\dot{4}892\dot{1}-0.\dot{0}375\dot{6}=\frac{48921}{99999}-\frac{03756}{99999}=\frac{45165}{99999}=0.\dot{4}516\dot{5}$ अभीष्ट सटीक व्यकलन मान होगा।

उदाहरण 3■ $4.3\dot{7}5\dot{6}-2..\dot{3}75\dot{6}=4\frac{3756-3}{9990}-2\frac{3756}{9999}$

$=\frac{39960+3753}{9990}-\frac{19998+3756}{9999}$

$$= \frac{43713}{9990} - \frac{23754}{9999}$$

$$\frac{43713 * 1001001001 - 23754 * 1000100010}{9999999999990}$$

$$= \frac{43756756756713 - 23756375637540}{9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,0}$$

$$= \frac{20000381119173}{9999999999990} = \frac{1}{10}\left\{\frac{20\backslash000381119193}{999999999999}\right\} = \frac{1}{10}\left\{20\,\frac{20+000381119193}{999999999999}\right\} \text{ से}$$

$$= \frac{1}{10}\left\{20\,\frac{20+000381119193}{999999999999}\right\} = \frac{1}{10}\left\{20\,\frac{000381119213}{999999999999}\right\}$$

$$= \frac{1}{10}\{20.\dot{0}003811192\ 1\dot{3}\} = \{2.0\dot{0}003811192\ 1\dot{3}\}$$

$= 2.0\dot{0}003811191921\ \dot{3}$ अभीष्ट व्यवंकलन मान– होगा।

गुणन संक्रिया संदर्भ में हलित उदाहरण■

उदाहरण 1■ $0.\dot{8} * 0.\dot{5} = \frac{8}{9} * \frac{5}{9} = \frac{40}{81}$ का आवर्ती दशमलव प्रतिनिरूपण –

उना आश्लेषक विधि में बाँयें से दाँये हल नियम $\frac{40}{81} = \frac{\overline{40}}{81} = 0.\,{}_{0}5\,{}_{5}0\,{}_{2}\bar{6}\,{}_{6}\bar{1}\,{}_{3}\bar{7}\,{}_{\bar{1}}\bar{3}\,{}_{\bar{5}}1\,{}_{\bar{1}}6\,{}_{\bar{4}}0$

${}_{\bar{4}}0$ से विस्तारित क्रियाशील भाज्य संख्या $\overline{40}$, $\frac{\overline{40}}{81}$ का अंश है।

अतः $\frac{40}{81} = \frac{\overline{40}}{81} = 0.\dot{5}\,0\bar{6}\bar{1}\bar{7}\bar{3}\,16\dot{0} = 0.\dot{4}\,9382716\dot{0}$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

उना सहायक भिन्न विधि में बाँयें से दाँये हल नियम $-\frac{40}{81}$ का सहायक भिन्न $= \frac{3.9}{8}$

सहायक भिन्न $= \frac{3.9}{8}$ द्वारा $\frac{40}{81}$ का दशमलव भिन्न निरूपण गणना तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
${}_{c}k_n$	${}_{7}4$	${}_{3}9$	${}_{6}3$	${}_{2}8$	${}_{5}2$	${}_{1}7$	${}_{4}1$	${}_{0}6$	${}_{3}0$	
R_n	39	75	30	66	21	57	12	48	03	39

$R_{10} = 39 = R_1$ है।

$\therefore \frac{40}{81} = 0.\dot{4}\,9382716\dot{0}$ अभीष्ट गुणनफल होगा।

उदाहरण 2■ $0.\dot{4}892\dot{1} * 0.\dot{0}375\dot{6} = \frac{48921}{99999} * \frac{03756}{99999} = \frac{183747276}{9999800001}$ का दशमलव निरूपण केलिए उनके उना सहायक भिन्न $\frac{18374.7275}{99998}$ का स्तर $N_r = N_5$ होगा।

अत पाँच अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलोकित कीजिए।

$\frac{183747276}{9999800001}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5
${}_{c}k_n$	${}_{50759}01837$	${}_{99682}50860$	${}_{48517}99689$	${}_{97944}48517$	${}_{47372}97945$
R_n	183747275	5075998162	9968249139	4841700310	9794451482

तलिका से स्पष्ट है कि उत्तर पद k_5 तक दशमलव बाद 25 अंकीय हल लेने पर–

अभीष्ट गुणनफल $= 0.0183750860996894851797945$ होगा ।

उदाहरण 3■ $4.\dot{3}75\dot{6} * 2.\dot{3}75\dot{6} = 4\,\frac{3756-3}{9990} * 2\,\frac{3756}{9999}$

$$= \frac{39960+3753}{9990} * \frac{19998+3756}{9999}$$

$$= \frac{43713}{9990} * \frac{23754}{9999} = \frac{1038358602}{99890010} = \frac{1}{10}\left[\frac{1038358602}{9989001}\right] = \frac{1}{10}\left[103\frac{9491499}{9989001}\right]$$

$\frac{9491499}{9989001}$ का दशमलव निरूपण के लिए उना सहायक भिन्न $\frac{949.1498}{9989}$ का स्तर $N_r = N_3$ होगा।

अत तीन अंकीय उत्तर पद क्रम प्राप्त होंगे। हल तालिका यथा अवलाकित कीजिए।

$\frac{949.1498}{9989}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना प्रक्रम तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7
$_c k_n$	$_{1838}940$	$_{83}184$	$_{3903}008$	$_{8281}390$	$_{738}829$	$_{8973}073$	$_{2812}808$
R_n		1838059	83815	3903991	8281619	738170	8973926

तलिका से स्पष्ट है कि उत्तर पद k_7 तक दशमलव बाद 21 अंकीय हल लेने पर–

अभीष्ट गुणनफल $=\frac{1}{10}[103\frac{9491499}{9989001}]=\frac{1}{10}[103.940184008390829073808] =$

$10.394018400839082907380 8$ दशमलव बाद 22 अंकीय हल होगा।

भाग संक्रिया संदर्भ में हलित उदाहरण

उदाहरण 1■ $0.\dot{8} \div 0.\dot{5} = \frac{8}{9} \div \frac{5}{9} = \frac{8}{9} * \frac{9}{5} = \frac{8}{5} = \frac{16}{10} = 1.6$ अभीष्ट भागफल होगा।

उदाहरण 2■ $0.\dot{4}892\dot{1} \div 0.\dot{0}375\dot{6} = \frac{48921}{99999} \div \frac{03756}{99999} = \frac{48921}{3756} = 13\frac{93}{3756}$ में $\frac{93}{3756}$ का दशमलव निरूपण के लिए $\frac{93}{3756}$ $= \frac{93*25}{3756*25} = \frac{1}{100}[\frac{2325}{939}] = \frac{1}{100}[2\frac{447}{939}]$ में $\frac{447}{939}$ का दशमलव निरूपण के लिए आगर सहायक भिन्न $= \frac{44.7}{94}$ गणना तालिका।

$\frac{44.7}{94}$ द्वारा $\frac{447}{939}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$_c k_n$	$_{71}4$	$_{56}7$	$_{3}6$	$_{36}0$	$_{78}3$	$_{31}8$	$_{36}3$	$_{81}3$	$_{61}8$	$_{52}6$	$_{56}5$	$_{1}6$	$_{16}0$
R_n	447	714	567	36	360	783	318	363	813	618	526	565	16

तालिका से स्पष्ट है कि उत्तर पद k_{13} तक दशमलव बाद 13 अंकीय हल लेने पर–

$\therefore \frac{447}{939} = 0.4760383386560$ होगा ।

$\therefore \frac{93}{3756} = \frac{93}{4*939} = \frac{2325}{100*939} = \frac{1}{100}[\frac{2325}{939}] = \frac{1}{100}[2\frac{447}{939}]$

$= \frac{1}{100}[2.4760383386560] = 0.024760383386560$

$\therefore \quad 0.\dot{4}892\dot{1} \div 0.\dot{0}375\dot{6} = \frac{48921}{99999} \div \frac{03756}{99999} = \frac{48921}{3756} = 13\frac{93}{3756} = 13.04760383386560$ दशमलव बाद 14 स्थान तक का अभीश्ट भागफल होगा

उदाहरण 3■ $4.3\dot{7} \div 2.\dot{3}\dot{7} = 4\frac{37-3}{90} \div 2\frac{37}{99} = \frac{360+34}{90} \div \frac{198+37}{99}$

$= \frac{404}{90} \div \frac{235}{99} = \frac{404}{90} * \frac{99}{235} = \frac{202}{5} * \frac{11}{235} = \frac{2222}{1175} = 1\frac{1047}{1175}$ में $\frac{1047}{1175}$ का दशमलव निरूपण के लिए $\frac{1047}{1175}$ $= \frac{1047}{25*47} = \frac{4188}{100*47} = \frac{1}{100}\left[\frac{4188}{47}\right] = \frac{1}{100}\left[89\frac{5}{47}\right]$ में $\frac{5}{47}$ का दशमलव निरूपण केलिए $\frac{5}{47} = \frac{35}{329}$ सहायक भिन्न $= \frac{3.5}{33}$

गणना तालिका

$\frac{3.5}{33}$ द्वारा $\frac{5}{47} = \frac{35}{329}$ का दशमलव भिन्न निरूपण की गणना तालिका

हल प्रक्रम n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$_c k_n$	$_{2}\mathbf{1}$	$_{21}\mathbf{0}$	$_{12}\mathbf{6}$	$_{27}\mathbf{3}$	$_{9}\mathbf{8}$	$\bar{1}\ \mathbf{3}$	$\bar{7}\ \mathbf{0}$	$\bar{4}\ \bar{\mathbf{2}}$	$\bar{9}\ \bar{\mathbf{1}}$	$_{8}\bar{\mathbf{3}}$	$_{11}\mathbf{2}$	$_{13}\mathbf{3}$
R_n	35	21	210	126	273	98	$\bar{7}$	$\overline{70}$	$\overline{42}$	$\overline{91}$	77	112
हल प्रक्रम n	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
$_c k_n$	$_{1}\mathbf{4}$	$_{14}\mathbf{0}$	$_{8}\mathbf{4}$	$_{18}\mathbf{2}$	$_{17}\mathbf{5}$	$_{10}\mathbf{5}$	$_{6}\mathbf{3}$	$\bar{3}\ \mathbf{2}$	$_{5}\bar{1}$	$_{16}\mathbf{1}$	$\bar{4}\ \mathbf{5}$	
R_n	133	14	140	84	182	175	105	63	$\overline{28}$	49	161	$\overline{35}$

तलिका से स्पष्ट है कि क्रियाशील भाज्य पद $R_{24} = \overline{35}$ $\frac{35}{329}$ के अंश का योज्य प्रतिलोम है।

$\therefore \frac{35}{329} = \frac{5}{47}$ का पूर्ण आवर्ती दशमलव भिन्न निरूपण 2*(24-1) =46 अंकीय समूह होगा । जिसका आधे स्थान तक का 23 अंकीय हल उपरोक्त हल तालिका से $10\,6\,3\,8\,3\,0\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{3}\,2\,3\,4\,0\,4\,2\,5\,532\bar{1}1\,5\backslash$ होगा। तथा शेष आधे स्थान तक का 23 अंकीय हल उपरोक्त हल तालिका से प्राप्त अंकों का क्रमशः–

योज्य प्रतिलोम अंक $\backslash\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{6}\,\bar{3}\,\bar{8}\,\bar{3}\,\bar{0}\,2\,1\,3\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{4}\,\bar{0}\,\bar{4}\,\bar{2}\,\bar{5}\,\bar{5}\,\bar{3}\,\bar{2}\,1\bar{1}\,\bar{5}$ होगा।

इस प्रकार $\frac{35}{329} = \frac{5}{47}$ =46 अंकीय आवर्ती हल

$$\mathbf{0}.\dot{1}0\,6\,3\,8\,3\,0\,\bar{2}\,\bar{1}\,\bar{3}\,2\,3\,4\,0\,4\,2\,5\,532\bar{1}1\,5\backslash\bar{1}\,\bar{0}\,\bar{6}\,\bar{3}\,\bar{8}\,\bar{3}\,\bar{0}\,2\,1\,3\,\bar{2}\,\bar{3}\,\bar{4}\,\bar{0}\,\bar{4}\,\bar{2}\,\bar{5}\,\bar{5}\,\bar{3}\,\bar{2}\,1\bar{1}\,\dot{\bar{5}}$$

$$= \dot{1}0\,6\,3\,\,8\,2\,9\,7\,8\,7\,2\,3\,4\,0\,42\,5\,5\,3\,1\,9\,1\,4\,8\,9\,3\,6\,1\,7\,02\,1\,2\,\,7\,6\,5\,9\,\,5\,74\,4\,6\,8\,0\,8\,\,\dot{5}$$

$\therefore \frac{1047}{1175} = \frac{1}{100}\left[\frac{4188}{47}\right] = \frac{1}{100}\left[89\frac{5}{47}\right] =$

$\frac{1}{100}[89.\dot{1}0\,6\,3\,8\,2\,9\,7\,8\,7\,2\,3\,4\,0\,4\,2\,5\,5\,3\,1\,9\,1\,4\,8\,9\,3\,6\,1\,7\,021\,2\,7\,6\,5\,9\,\,5\,74\,4\,6\,8\,0\,8\,\,\dot{5}]$

$= 0.89\,\dot{1}0\,6\,3\,8\,2\,9\,7\,8\,7\,2\,3\,4\,0\,4\,2\,5\,5\,3\,1\,9\,1\,4\,8\,9\,3\,6\,1\,7\,\,0\,1\,2\,7\,6\,5\,9\,\,5\,74\,4\,6\,8\,0\,8\,\,\dot{5}$

$\therefore\ 4.3\dot{7} \div 2.\dot{3}\dot{7} = 1\frac{1047}{1175} =$

$1.8\,9\,\dot{1}\,0\,\,6\,3\,8\,2\,9\,7\,8\,7\,2\,3\,4\,0\,4\,2\,5\,5\,3\,1\,9\,1\,4\,8\,9\,3\,6\,1\,7\,021\,2\,7\,6\,5\,9\,\,5\,74\,4\,6\,8\,0\,8\,\,\dot{5}$

अभीष्ट भागफल होगा।

वर्गमान की ओर– $(0.\dot{1})^2 = (\frac{1}{9})^2 = \frac{1}{81} = 0.\dot{0}\,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,\dot{9}$

$(0.\dot{2})^2 = (\frac{2}{9})^2 = \frac{4}{81} = 0.\dot{0}\,4\,9\,3\,8\,2\,7\,1\,\dot{6}$

$(0.\dot{3})^2 = (\frac{3}{9})^2 = \frac{1}{9} = 0.\dot{1}$

$(0.\dot{4})^2 = (\frac{4}{9})^2 = \frac{16}{81} = 0.\dot{1}\,9\,7\,5\,3\,0\,8\,6\,\dot{4}$

$(0.\dot{5})^2 = (\frac{5}{9})^2 = \frac{25}{81} = 0.\dot{3}\,0\,8\,6\,4\,1\,9\,7\,\dot{5}$

$(0.\dot{6})^2 = (\frac{6}{9})^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} = 0.\dot{4}$

$(0.\dot{7})^2 = (\frac{7}{9})^2 = \frac{49}{81} = 0.\dot{6}\,0\,4\,9\,3\,82\,7\,\dot{1}$

$(0.\dot{8})^2 = (\frac{8}{9})^2 = \frac{64}{81} = 0.\dot{7}\,9\,0\,1\,2\,3\,4\,5\,\,\dot{6}$

---------24---------

अति महत्वपूर्ण ध्यानाकर्षण

$n \geq 3$ के प्रति n आधारी संख्याओं में गणितीय रांक्रिया में आश्चर्यजनक व्यापकता –

उपरोक्त अध्याय 2 से 24 तक के शीर्षक में प्रस्तुत दशाधारी सख्यांकन में गणितीय रांक्रिया के नियमों को **n** आधारी संख्याओं के परिपालन में लिये जाने में संशय नहीं किया जाना चादिए है । हासिल/शेषफल /मूलाधार /उपाधार /(उनागर प्रचालको एवं आश्लेषकों) की गणना n आधारी संख्यांकन नियम के प्रति केवल और केवल दशाधारी नियम के अधीन प्रयुक्त 9 एवं 10 का नियम क्रमशः(n−1) एवं n का नियम हो जाता है। तदानुसार एक अलग कृति **n आधारी संख्याकन** के नाम पर प्रस्तुत किया जा सकता है।

अध्याय -25
क्रमगुणित समुच्चय और क्रमचय एवं संचय

25-1 क्रमगुणित n का अर्थ प्रथम n प्राकृत संख्याओं सतत् गुणन संक्रिया क्रमगुणित n कहलाता है।

अध्ययन संकेत क्रमगुणित n का अध्ययन संकेत $\underline{|n}$ के प्रचलन के विकल्प में $n!$ को मान्यता प्राप्त है।

तब $n! = 1 * 2 * 3 * 4 - - - n$

या $\boxed{n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) - - - - - - 3 * 2 * 1}$

परिभाषा के अनुसार

$n! = n * (n-1)! = n * (n-1) * (n-2)! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3)!$ इत्यादि।

अतः $1! = 1$, $2! = 1 * 2 = 2$, $3! = 1 * 2 * 3 = 6$, $4! = 1 * 2 * 3 * 4 = 24$

$5! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 120$, $6! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 = 720$

, $7! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 = 5040$ $8! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 40320$

$9! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 362880$

$10! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 3628800$

टीप– ऋणात्मक संख्याएँ प्राकृत संख्याा समुच्चय छका अवयव नहीं है, अतः क्रमगुणित $\overline{n}!$ मान्य नहीं है।

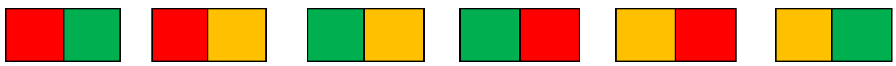
25-2 क्रमचय दी हुई वस्तुओं के एक समूह में से एक बार में कुछ अथवा सभी वस्तुओं को लेकर जितने भिन्न–भिन्न विन्यास (ठीक से रखने का कार्य या प्रबंध या स्थापन या रचना) बनाये जा सकते हैं, उनमें से प्रत्येक विन्यास को क्रमचय कहते है।

प्रत्येक विन्यास में में वस्तुओं का सापेक्ष क्रम भिन्न अर्थ प्रदर्शित करता है। विशेष रूप से अंको और अक्षरों का सापेक्ष क्रम बदल जाये तो अर्थ बदल जाता है।

जैसे अंक 1 और 6 को लेकर बने स्थापन से संख्या सोलह 16 और संख्या इकसठ 61 प्राप्त होता है।

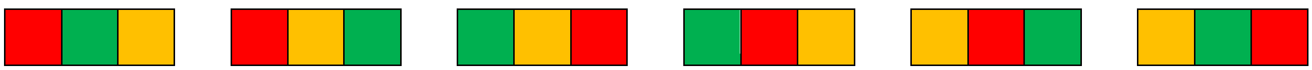
अक्षर **ज** और **र** को लेकर बने स्थापन से शब्द **जर** और **रज** बनता है। जर = जड़ या मूल तथा रज= चमक से है।

माना कि लाल ,हरा और पीला रंग से संलग्न दो वर्ग आकृति रंगना है तो रंगने का विन्यास निम्नानुसार होगा।



इनकी संख्या 6 है। इनमें से प्रत्येक क्रमचय है।

पुनः लाल ,हरा और पीला रंग से संलग्न तीन वर्ग आकृति रंगना है तो रंगने का विन्यास निम्नानुसार होगा।



इन क्रमचयों की संख्या 6 है।

इसी प्रकार चार अंक 3,5,7 और 9 के समूह से–

1• दो अंकों के विन्यास से बनी संख्या– 35, 37,39 , 57,59,53,79,73,75,93,95,97 इन क्रमचयों की संख्या 12 है।

2• तीन अंकों के विन्यास से बनी संख्या– 357, 359,379 , 375 ,395, 397, 579 , 573, 537, 539 ,597, 593, 793, 795, 735,739, 759,753, 935, 937, 957 ,953, 973 ,975 इन क्रमचयों की संख्या 24 है।

3• चार अंकों के विन्यास से बनी संख्या– 3579, 3597,3795 , 3759 ,3957, 3975, 5793 , 5739, 5937, 5973 ,5397, 5379, 7935, 7953, 7359,7359, 7593,7539, 9357, 9375, 9573 ,9537, 9735 ,9753 इन क्रमचयों की संख्या 24 है।

क्रमचय विषयक

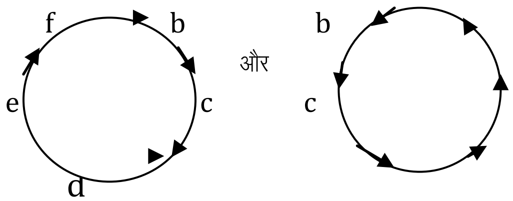
1■ क्रमचय का मूल सिद्धांत यदि किसी कार्य को करने की m भिन्न –भिन्न विधियाँ हों और जब वह कार्य उनमें से किसी एक विधि के द्वारा किया जा चुका हो, तब यदि किसी दूसरे कार्य को करने की n भिन्न –भिन्न विधियाँ हों तो दोनों कार्यों को साथ–साथ करने की कुल $m * n$ विधियाँ होंगी।

2■ व्यापकता यदि किन्हीं $w_1, w_2, w_3 - - - w_n$ प्रकार के कार्यों को करने की क्रमशः भिन्न –भिन्न विधियाँ $v_1, v_2, v_3 - - - v_n$ हों तो पूरे कार्यों को साथ–साथ करने की कुल $v_1 * v_2 * v_3 * - * - * - * v_n$ विधियाँ होंगी।

3■ रेखीय एवं वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय यहाँ रेखा का तात्पर्य रेखाखण्ड से है। अतः किसी रेखा खण्ड में वस्तुओं के क्रमचयों को रेखीय क्रमचय कहते हैं, जबकि वृत्त के चारों ओर वस्तुओं के क्रमचयों को वृत्तीय क्रमचय कहते हैं। रेखीय एवं वृत्तीय क्रमचय में यह अन्तर है कि रेखीय क्रमचय में प्रत्येक विन्यास के दो सिरे होते हैं जबकि वृत्तीय या चक्रीय क्रमचय में कोई सिरा नही होता। चक्रीय क्रमचय में वस्तुओं के सापेक्ष स्थिति का ध्यान दिया जाता है। पाँच अक्षर a,b,c,d,e के क्रमों कें विचार की दृष्टि से –

1• क्रम विन्यास a,b,c,d,e \ b,a,c,d,e \ c,a,b,d,e \ d,a,c,d,e \ e,a,b,c,d रेखीय विन्यास जो एक–दूसरे से भिन्न है।

2•



वृत्तीय क्रमचय विन्यास है।

इनका विस्तारित अध्ययन करनें के पूर्व क्रमगुणित n जिसका अनुप्रयोग क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनें में होगा, का अर्थ को जानना यथेष्ट होगा।

4■ क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनें में क्रमगुणित n का अनुप्रयोग

A रेखीय क्रमचय के संदर्भ में

A_1 दी हुई n असमान वस्तुओं में से एक बार में कोई r असमान वस्तुओं को लेकर बने क्रमचययो की संख्या ज्ञात करना

n असमान वस्तुओं में से एक बार में कोई r असमान वस्तुओं को लेकर बने क्रमचययो की संख्या वही होगी जो r रिक्त स्थानों को n वस्तुओं से भरने की होगी। पहला स्थान n वस्तुओं में से किसी एक से भरा जा सकता है अर्थात् इस पहले स्थान को भरने की n विधियाँ है। पहले स्थान को एक वस्तु से भर देने के बाद $(n-1)$ अब दूसरा स्थान $(n-1)$ वस्तुओं में से किसी एक से भरा जा सकता है। अतएव पहले स्थान को भरने की प्रत्येक विधि के संगत दूसरे स्थान को भरने की $(n-1)$ विधियाँ है। अतः पहले दो स्थान को भरने की $n * (n-1)$ विधियाँ हुई।

जब पहले दो स्थान $n * (n-1)$ विधियाँ में से किसी एक विधि भरे जा चुके तो तीसरे स्थान के लिए केवल $(n-2)$ वस्तुएँ शेष रहती है।तब , तीसरा स्थान इन $(n-2)$ वस्तुओं में से किसी एक से भरा जा सकता है। अतएव पहले दो स्थान को भरने की n*(n-1) विधियाँ में से प्रत्येक विधि के संगत तीसरे स्थान को भरने की $(n-2)$ विधियाँ है। अतः पहले तीन स्थान को भरने की $n * (n-1) * (n-2)$ विधियाँ हुई।

अतः r स्थान को भरने की विधियाँ की संख्या - n*(n-1)*(n-2)*(n-3)----------r गुणनखण्ड तक है अर्थात् n*(n-1)*(n-2)*(n-3)----------(n−r+1) है। इसका अध्ययन संकेत ^nP_r अथवा $P(n,r)$ है। यहाँ P क्रमचय व्यक्त करता है। इस प्रकार –

^nP_r अथवा $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n*(n-1)*(n-2)*(n-3))----------(n-r+1)*(n-r)!}{(n-r)!}$

$$= n * (n-1) * (n-2) * (n-3)) - - - - - - - - - - -(n-r+1)$$

ध्यानाकर्षण – ^nP_r अथवा $P(n,r)$ में n और r धन पूर्णांक संख्याएँ है तथा $r \leq n$

उपप्रमेय 1 प्राकृत संख्या $n = {}^nP_1$ अथवा $P(n,1)$

प्रमाण $n! = n * (n-1) * (n-2) * (n-3) - - - - - 3 * 2 * 1 = n * (n-1)!$

$\Rightarrow n! = n*(n-1)! \Rightarrow n = n! \div (n-1)! = \frac{n!}{(n-1)!} = {}^nP_1$ अथवा $P(n,1)$

अर्थात किसी प्राकृत संख्या $n = {}^nP_1$ अथवा $P(n,1)$ को उसके क्रमगुणित $n!$ को उसके पूर्ववर्ती संख्या $(n-1)$ के क्रमगुणित $(n-1)!$ द्वारा विभाजित करने की संक्रिया से दर्शित किया जा सकता है।

उपप्रमेय 2 दी हुई n वस्तुओं में से सभी को एक साथ लेकर बनें क्रमचयों की संख्या ${}^nP_n$ अथवा $P(n,n)$ है।

प्रमाण– परिभाषा से ${}^nP_n = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)----------(n-n+1)$

$= n*(n-1)*(n-2)*(n-3)----------3*2*1$

या ${}^nP_n = n!$

उपप्रमेय 3 ${}^nP_r$ अथवा $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

प्रमाण– ${}^nP_r = n*(n-1)*(n-2)*(n-3)----------(n-r+1)$

$= \frac{[n*(n-1)(n-2)----(n-r+1)(n-r)(n-r-1)*------3*2*1]}{[(n-r)*(n-r-1------3*2*1}} = \frac{n!}{(n-r)!}$

उपप्रमेय 4 $0! = 1$

प्रमाण– ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ के दोनों पक्ष में r=n रखने पर–

${}^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!} = {}^nP_n = \frac{n!}{0!}$ या $n! = \frac{n!}{0!}$ या $0! = \frac{n!}{n!} = 1$

उपप्रमेय 5 $\frac{1}{(-r)!} = 0$

प्रमाण– ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ के दोनों पक्ष में n=0 रखने पर– ${}^0P_r = \frac{0!}{(0-r)!}\ \frac{1}{(-r)!} = \frac{1}{!\infty} = 0$

A_2 प्रतिबंधित क्रमचय कभी–कभी क्रमचयों की संख्या किसी विशेष प्रतिबंध को संतुष्ट करते हुए ज्ञात करनी होती है।उदाहरणतः कुछ विशेष वस्तुओं को किन्हीं विशेष स्थानों पर रखकर क्रमचय ज्ञात करने होते हैं।ऐसी स्थिति में दिये हुए प्रति को ध्यान में रखकर शेष रिक्त स्थानों को शेष वस्तुओं से भरने के क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी पड़ती है। इस प्रकार से प्राप्त क्रमचयों को प्रतिबंधित क्रमचय कहते है।

जैसे चार अंक 3,5,7 और 9 के समूह से बनी संख्या जिसका दहाई अंक 3 हो–

दो अंकों के विन्यास से बनी संख्या–35, 37,39

1• इन क्रमचयों की संख्या $= {}^{(4-1)}P_{(2-1)} = {}^3P_1 = \frac{3!}{(3-1)!} = \frac{3!}{2!} = \frac{3*2*1}{2*1} = 3$ है।

2• तीन अंकों के विन्यास से बनी संख्या– 537, 539, 735,739, 935, 937

इन क्रमचयों की संख्या $= {}^{(4-1)}P_{(3-1)} = {}^3P_2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3*2*1}{1} = 6$ है।

3• चार अंकों के विन्यास से बनी संख्या– 5739, 5937, 7935, 7539, ,9537, 9735

इन क्रमचयों की संख्या $= {}^{(4-1)}P_{(4-1)} = {}^3P_3 = 3! = 3*2*1 = 6$ है।

A_3 n असमान वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेने पर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना

जबकि – 1• कोई विशेष वस्तु प्रत्येक बार ली जाये। 2• कोई विशेष वस्तु प्रत्येक कभी न ली जाये।

1• माना कि n असमान वस्तुएँ $a_1, a_2, a_3 ----, a_n$ है। हमें उन क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है जिन्में वस्तु a_1 प्रत्येक बार लिया जाये। माना कि वस्तु a_1 प्रथम स्थान पर ली जाती है। अब शेष वस्तुएँ (n-1) है तथा इनमें से (r-1) वस्तुएँ चुनी जानी है जो ${}^{(n-1)}P_{(r-1)}$ प्रकार से चुनी जा सकती हैं। किन्तु वस्तु a_1 को r स्थानों पर लिया जा सकता है।

अतः **उन क्रमचयों की संख्या जिनमें वस्तु a_1 सदैव आती है $= r * {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$** होगा।

2• माना कि वस्तु a_1 कभी किसी भी क्रमचय नहीं ली जाती अतः शेष वस्तुएँ (n-1) रही । इन (n-1) वस्तुओं में r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या$= {}^{(n-1)}P_r$

अतः **उन क्रमचयों की संख्या जिनमें वस्तु a_1 कभी किसी भी क्रमचय नहीं ली जाती है $= {}^{(n-1)}P_r$** होगा

3• **दोनों अवस्थाओं 1 और 2 से बनें क्रमचयों का योग प्रमेय** दोनों अवस्थाओं 1 और 2 से बनें क्रमचयों का योग

$= n$ वस्तुओं में से r वस्तुओं को लेकर बने क्रमचयों की संख्या ^nP_r होगा। अतः

$$r * {}^{(n-1)}P_{(r-1)} + {}^{(n-1)}P_r = {}^nP_r$$

प्रमाण बाँया पक्ष = $r * {}^{(n-1)}P_{(r-1)} + {}^{(n-1)}P_r = \frac{r*(n-1)!}{\{(n-1)-(r-1)\}!} + \frac{(n-1)!}{\{(n-1)-r\}}$

$$=(n-1)!\left[\frac{r}{(n-r)!} + \frac{1}{\{n-r-1\}!}\right]$$

$$=(n-1)!\left[\frac{r+(n-r)}{(n-r)!}\right]$$

$=(n-1)!\left[\frac{n}{(n-r)!}\right] = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r =$ दाँया पक्ष प्रमाणित हुआ।

A_4 उन वस्तुओं का क्रमचय जो सभी भिन्न न हो माना कि n वस्तुएँ n अक्षरों से प्रदर्शित की जाती है। इनमें से p वस्तुएँ एक ही प्रकार की a,a,a,---a है। q वस्तुएँ b,b,b,---b दूसरे प्रकार की है। r वस्तुएँ c,c,c,---c तीसरे प्रकार की है तथा शेष वस्तुएँ d,e,f, ------ इत्यादि है जो भिन्न है।

माना कि क्रमचयों कही अभीष्ट संख्या x है। प्रत्येक क्रमचय में दिये हुए सभी n अक्षर है। इन x क्रमचयों में से कोई एक क्रमचय लीजिए। इसमें p समान अक्षरों a,a,a,a,----------; के स्थान पर असमान अक्षर $a_1, a_2, a_3 - --, a_p$ रखिए जो कि शेष सभी अक्षरों से भिन्न हो।अब इस क्रमचय में शेष अक्षरों में से किसी का स्थान न बदलकर इस नये p अक्षर $a_1, a_2, a_3 - --, a_p$ का परस्पर परिवर्तन कर दो। इस प्रकार $p!$ नये क्रमचय प्राप्त होंगे और यही क्रिया सभी x क्रमचयों पर की जाय तो हमें कुल $x * p!$ क्रमचय प्राप्त होंगे।

इसी प्रकार यदि $x * p!$ क्रमचयों में से हम कोई एक क्रमचय लें और और उसके q समान अक्षरों b,b,b,----------,b के स्थान पर असमान अक्षर $b_1, b_2, b_3 - --, b_q$ रखिए जो कि शेष सभी अक्षरों से भिन्न हो। अब इन q असमान अक्षरों $b_1, b_2, b_3 - --, b_q$ का परस्पर परिवर्तन कर दो।तो पूर्व की भाँति $q!$ नये क्रमचय प्राप्त होंगे और यही क्रिया सभी $x * p!$ क्रमचयों पर की जाय तो हमें कुल $x * p! * q!$ क्रमचय प्राप्त होंगे।

इसी प्रकार यदि $x * p! * q!$ क्रमचयों में से हम कोई एक क्रमचय लें और और उसके r समान अक्षरों c,c,c,----------,c के स्थान पर असमान अक्षर $c_1, c_2 c_3 - --, c_r$ रखिए जो कि शेष सभी अक्षरों से भिन्न हो। अब इन r असमान अक्षरों $c_1, c_2, c_3 - --, c_r$ का परस्पर परिवर्तन करने पर ` पूर्व की भाँति $r!$ नये क्रमचय प्राप्त होंगे और यही क्रिया सभी $x * p! * q!$ क्रमचयों पर की जाय तो हमें कुल $x * p! * q! * r!$ क्रमचय प्राप्त होंगे।

परंतु कुल अक्षरों की संख्या n है जो सभी असमाान है। अतः कुल क्रमचयों की संख्या $n!$ है।

अतः $x * p! * q! * r! = n! \quad \Rightarrow \quad x = \frac{n!}{p! * q! * r!}$

उपप्रमेय n वस्तुओं जिनमें से m वस्तुएँ एक प्रकार की है तथा $(n-m)$ वस्तुएँ दूसरे प्रकार की है, के क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{m! * (n-m)!}$ होगी।

A_5 वस्तुओं की पुनरावृत्ति n असमान वस्तुओं में एक बार में r वस्तुएँ लेंने पर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना जबकि प्रत्येक वस्तु किसी भी विन्यास में लिया जाता है चाहे कितनी बार ली जा सके।

स्पष्ट है कि अभीष्ट क्रमचयों की संख्या उतनी ही हीगी जितनी n असमाान वस्तुओं में से r रिक्त स्थानों को भरने की , जबकि प्रत्येक वस्तु चाहे कितनी बार प्रयुक्त न हो जाये। पहले स्थान को n प्रकार से भरा जा सकता है , क्योंकि दी हुई n वस्तुओं में से प्रत्येक वस्तु उस स्थान को भर सकती है। पहला स्थान भर जाने पर दूसरा स्थान भी n प्रकार से भरा जा सकता है , क्योंकि जो वस्तु पहले स्थान पर रख दी गई है,दसका प्रयोगपुनः किया जा सकता है। इस प्रकार पहले दो वस्तु दो स्थान $n * n = n^2$ प्रकार से भरे जाा सकते हैं।जब पहले दो स्थान n^2 प्रकारों से भरे जा चुके हो तो तीसरा स्थान भी n प्रकार से भरा जा सकता है। अतएव पहले तीन स्थान $n^2 * n = n^3$ प्रकार से भरे जा सकते है, ...इत्यादि।

उपर्युक्त व्याख्या से यह स्पष्ट है कि जितने स्थान भरे जाने है, n का घातांक भी उतना ही होगा। इस प्रकार r स्थान n^r प्रकार से भरे जायेंगे। अतः क्रमचययों की अभीष्ट संख्या n^r है।

विभिन्न स्थितियों में रेखीय क्रमचय एक दृष्टि में

क्रमांक	कुल वस्तु संख्या	कुल वस्तु में से एक बार में ली गई वस्तु की संख्या	क्रमचयों की कुल संख्या
1	N	R	${}^{n}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
2	N	N	${}^{n}P_n = n!$
3	N	p वस्तुएँ एक ही प्रकार की ,a,a,---a है। q वस्तुएँ b,b,b,---b दूसरे प्रकार की है। r वस्तुएँ c,c,c,---c तीसरे प्रकार की है तथा शेष वस्तुएँ d,e,f, ------ इत्यादि है जो भिन्न ळें	$\frac{n!}{p! * q! * r!}$
4	N	एक बार में r वस्तुएँ लेंने पर बने क्रमचयों की संख्या ज्ञात करना जबकि प्रत्येक वस्तु किसी भी विन्यास में लिया जाता है चाहे कितनी बार ली जा सके।	n^r
5	N	**r** वस्तुओं को एक साथ लेने पर बने क्रमचयों की संख्या **1•** कोई विशेष वस्तु प्रत्येक बार ली जाये। **2•** कोई विशेष वस्तु प्रत्येक बार कभी न ली जाये।	$r * {}^{(n-1)}P_{(r-1)}$ ${}^{(n-1)}P_r$

सधित अभ्यास उदाहरण 1■ सिद्ध कीजिए ${}^{12}P_5 = 95040$

हल ${}^{n}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ में n =12 और r = 5 रखने पर ${}^{12}P_5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = \frac{12*11*10*9*8*7!}{7!}$

$= 12 * 11 * 10 * 9 * 8 = 95040$ सिद्ध।

2■ यदि ${}^{n}P_3 = 9 * {}^{n}P_2$ हो तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल ${}^{n}P_3 = 9 * {}^{n}P_2 \Rightarrow \frac{n!}{(n-r!} = 9 * \frac{n!}{!(n-2)} \Rightarrow \frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 9 \Rightarrow n-2 = 9 \Rightarrow n = 11$ उत्तर

3■ INSURANCE शब्द के अक्षरों को कितने तरीके से रखा जा सकता है? जब–

1- कोई प्रतिबंध न हो। **2-** सभी स्वर (I,U,A,E) कभी अलग न हो।

हल 1• कोई प्रतिबंध न हो–

दिये हुए शब्द में कुल 9 अक्षर है जिसमें अक्षर N की बारम्बारता 2 है तथा शेष 7अक्षरों I,S,U,R,A,C,E की बारम्बारता 1-1 है। ∴ अभीष्ट शब्दों की संख्या $= \frac{9!}{2!*1!*1!*1!*1!*1!*1!*1!}$

$= \frac{9!}{2!} = 9*8*7*6*5*4*3 = 181440$

हल 2• सभी स्वर (I,U,A,E) कभी अलग न हो–

दिये हुए शब्द में कुल 4 स्वर और 5 अन्य अक्षर है। यदि सभी स्वरों को एक अक्षर मान ले तो (5+1) =6 अक्षर रह जाते है। जिसे ${}^{6}P_6 = 6! = 6*5*4*3*2*1 = 720$ प्रकार से रखा जा सकता है। और 4 स्वरों को 4 स्थान पर ${}^{4}P_4 = 4! = 4*3*2*1 = 24$ प्रकार से रखा जा सकता है। अतः शब्दों की अभीष्ट संख्या 720*24=17280 उत्तर

■4 NUMBERS शब्द के अक्षरों से कितने भिन्न–भिन्न प्रकार के शब्द बन सकते है? और कितने शब्दों के प्रथम और अंन्त्य अक्षर क्रमशः N और S होगा।

हल दिये हुए शब्द में कुल 7 अक्षर है। अतः शब्दों की कुल संख्या $= {}^{7}P_7 = 7! = 7*6*5*4*3*2*1 = 5040$

प्रथम और अंन्त्य अक्षर क्रमशः N और S निश्चित किये जाने पर 5 अक्षर रह जाते हैं। जिनको क्रम बदल कर ${}^{5}P_5 = 5! = 5*4*3*2*1 = 120$ प्रकार से रखा जा सकता है।

■5 विभिन्न प्रकार की 6 अंगूठियों को दाये हाथ की 4 अंगुलियों में कितने प्रकार से पहना जा सकता है?

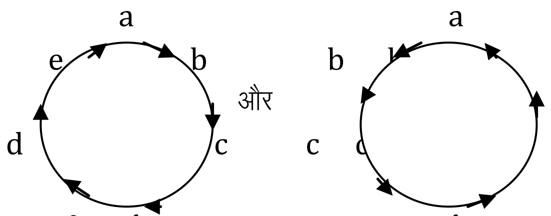
हल चूँकि पहली अँगूठी 4 अंगुलियों में से किसी में पहना जा सकता है।

∴ पहली अँगूठी 4 प्रकार से पहना जा सकता है।

इसी प्रकार दूसरे, तीसरे, चौथे ,पाँचवें और छटवी अँगूठी को भी पहली अँगूठी की भाँति 4-4 प्रकार से पहना जा सकता है।

∴ अँगूठी पहने जाने की अभीष्ट प्रकारों की संख्या $= 4^6 = 4*4*4*4*4*4 = 4096$ होगा।

B वृतीय क्रमचय के संदर्भ में–



वृत्तीय क्रमचय विन्यास है।

1 दक्षिणावर्त (क्रम) 2 वामावर्त (क्रम)

वृतीय क्रमचय के प्रकार

1• ऐसे वृत्ताकार क्रमचय जिनमें दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में कोई भेद नहीं होता है, जैसे किसी माला में मोतियों का क्रमचय । यदि माला के क्रम उलट दिये जाय तों भी माला पहले जैसे ही रहती है।

2• ऐसे वृत्ताकार क्रमचय जिनमें दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में कोई भेद होता है, एक गोलमेज के चारों ओर के पुरूषों के समुच्चय का क्रमचय।

दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में क्रमों में अन्तर यह होता है कि एक जो अक्षर दाँयी ओर होता है , वह दूसरें में बाँयी हो जाता है।और एक जो अक्षर बाँयी ओर होता है , वह दूसरें में दाँयी हो जाता है।

सत्यकथन

n विभिन्न में से एक समय में r वस्तु लेने पर बने प्रत्येक वृत्ताकार क्रमचयय के संगत r रेखीय क्रमचय होंगे। अतः जब दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद होने पर–

प्रमेय n विभिन्न में से एक समय में r वस्तु लेने पर बने वृत्ताकार क्रमचयों की संख्या–

1• यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद होता है तो क्रमचयों की संख्या ${}^nP_r \backslash r$ होगा।

2• यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद नहीं होता है तो क्रमचयों की संख्या ${}^nP_r \backslash 2r$ होगा।

प्रमाण 1 जब दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद हो माना वृत्ताकार क्रमचयों की संख्या x है।यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद होता है। तो प्रत्येक वृत्ताकार क्रमचय के संगत r होंगे।अतः x वृत्ताकार क्रमचय के संगत x*r रेखीय क्रमचय होंगे।

$\therefore x*r = {}^nP_r$ [n वस्तुओं में से r वस्तुओं को को एक साथ लेने पर बने क्रमचयों का संख्या]

$\Rightarrow x = {}^nP_r \backslash r$ सिद्ध हुआ।

2 जबदक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद नहीं हो माना वृत्ताकार क्रमचयों की संख्या x है।यदि दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद नहीं होता है। तो प्रत्येक वृत्ताकार क्रमचय के संगत 2r होंगे। होंगे।अतः x वृत्ताकार क्रमचय के संगत 2x*r हो रेखीय क्रमचय होंगे।

$\therefore 2x*r = {}^nP_r$ [n वस्तुओं में से r वस्तुओं को को एक साथ लेने पर बने क्रमचयों का संख्या]

$\Rightarrow x = {}^nP_r \backslash 2r$ सिद्ध हुआ।

उप प्रमेय r=n हो, अर्थात् सब वस्तुएँ एक साथ ली जाए तब

1• पहली वृतीय अवस्था (दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद हो)तो वृतीय क्रमचयों की संख्या $= {}^nP_n \backslash n = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ होगा।

2• दूसरी वृतीय अवस्था (दक्षिणावर्त एवं वामावर्त में भेद नहीं हो)तो वृतीय क्रमचयों की संख्या $= {}^nP_n \backslash 2n = \frac{n!}{2n} = \frac{(n-1)!}{2}$ होगा।

कार्य विधि यदि कुछ व्यक्ति किसी गोल (वृत्ताकार) घेरे के चारो ओर बैठे/खड़े हो तो बैठने/खड़े होने की क्रमचयों की संख्या ज्ञात करने के लिए किसी एक व्यक्ति से स्थान नियत मानकर शेष व्यक्ति का क्रमचय उस नियत व्यक्ति के सापेक्ष ज्ञात कर सकते है।

साधित अभ्यास उदाहरण 1■ 20 आदमी एक वृत्ताकार मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते है? जब **1** बैठने के 20 स्थान है। **2** बैठने के 8 स्थान है।

हल 1• 20 आदमी में से एक स्थान नियत कर देने पर 19 आदमी और 19 खाली स्थान शेष बचते है। इस 19 खाली स्थानों पर शेष 19 आदमी 19! प्रकार से बैठ सकते है।

अतः अभीट उत्तर !19= 1,21,64,51,00,40,88,32,000 होगा।

2• माना 8 खाली स्थानों पर शेष 20 आदमी x प्रकार से बैठ सकते है।तब एक वृत्तीय क्रमचय में 8 आदमी समा सकते है। और चूँकि 8 रेखीय क्रमचयों में एक रेखीय वृत्तीय क्रमचय प्राप्त होगा।

$\therefore\ 8x = {}^{20}P_8 \Rightarrow X = {}^{20}P_8\backslash 8 = \frac{20!}{8*(20-8)!} = \frac{20!}{8*12!}$ =634888800 अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ 5 बालक और 5 बालिका कितने प्रकार से एक वृत्त बनाकर खड़े हो सकते हैं जबकि बालक बालिका एक बाद एक खड़े हो।

हल किसी 1 बालक का स्थान नियत कर देने पर इसके सापेक्ष शेष 4 बालक के खड़े होने का क्रमचय 4! होगा। तब पूरे 5 बाालक के खड़े हो जाने पर 2 – 2 बालक के बीच कुल 5 स्थान मिलेंगे।जिन पर 5 बालिकाओं के खड़े होने का क्रमचय 5! होगा।

∴ प्रश्नानुसार बालक –बालिकाओं केखड़े होने का क्रमचय $= 4! * 5! = 24*120 = 2880$ होगा।

उदाहरण 3■ n आदमी एक गोलमेज मेज के चारों ओर बैठते है। दो विशेष आदमी के एक साथ बैठनें के प्रतिकूल संवेगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ हमें n आदमियों को गोलमेज के चारों ओर बैठने के ढंग ज्ञात करने हैं जब दाे विशेष आदमी कभी पास–पास न बैठे हो।

किसी एक आदमी के मेज पर बैठने पर शेष $(n-1)$ आदमी को उसके सापेक्ष $(n-1)!$ ढंग से बिठाया जा सकता हैं। इनमें दोनों विशेष आदमी के एक साथ बैठने का ढंग भी सम्मिलित है । ---------------(1)

पुनः उन दोनों विशेष आदमी को एक साथ बिठाकर शेष $(n-2)$ आदमी को उसके सापेक्ष $(n-2)!$ ढंग से बिठाया जा सकता हैं। जबकि वे दोनों विशेष आदमी को 2! ढंग से बिठाया जा सकता हैं।

∴ उन दोनों विशेष आदमी को एक साथ बिठाने पर बैठने का कुल ढंग $= 2! * (n-2)!$ होगा ---------------(2)

(1) और (2) से उन दोनों विशेष आदमी को एक साथ नहीं बिठाने का कुल ढंग = (1) – (2)

$$\mathbf{(n-1)}! - 2! * (n-2)! = (n-1)(n-2)! - 2 * (n-2)! = (n-3)*(n-2)! \text{ -----------}\mathbf{(3)}$$

∴ दो विशेष आदमी के एक साथ बैठनें के प्रतिकूल संवेगानुपात = [दोनों विशेष आदमी को एक साथ नहीं बिठाने का कुल ढंग]: [दोनों विषेश आदमी को एक साथ बिठाने का कुल ढंग]= (3): (2) = $[(n-3)*(n-2)!]: [2! * (n-2)!] = (n-3): 2$ होगा।

उदहरण 3 की व्यापकता $[n>(a+2)]$ और $a \geq 2$ के लिए – n आदमी एक गोलमेज मेज के चारों ओर बैठते है। जिनमें से विशेष a आदमी के एक साथ बैठनें के प्रतिकूल संवेगानुपात = [दोनों विशेष आदमी को एक साथ नहीं बिठाने का कुल ढंग]: [दोनों विशेष आदमी को एक साथ बिठाने का कुल ढंग,=

$$[(n-1)! - a! * (n-a)!]: [a! * (n-a)!]$$

$$= [\frac{(n-1)!}{a!*(n-a)!} - 1]: 1$$ सिद्ध किया जा सकता है।

उदहरण 4■ सात नचनिया को गोलाई में नाचना है। वे गोलाई में कितने विभिन्न प्रकार से अपना–अपना स्थान बना सकते है?

हल माना कि विभिन्न प्रकार से स्थान बनाने के क्रमचयों की अभीष्ट संख्या x है। चूँकि कोई भी नचनिया किसी भी स्थान पर अपने लिए स्थान बना सकते हैं। अतः यहाँ दक्षिणावर्त और वामावर्त में कोई भेद नहीं होगा।

∴ विभिन्न प्रकार से स्थान बनाने के अभीष्ट क्रमचयों की संख्या x

$$= \frac{(7-1)!}{2} = \frac{6!}{2} = \frac{6*5*4*3*2*1}{2} = 360$$ उत्तर ।

उदहरण 5■ भिन्न–भिन्न प्रकार के 20 मोतियों में से 10-10 मोतियों के कितने प्रकार से माला बनाये जा सकते है।

हल यदि दक्षिणावर्त और वामावर्त दिशाओं में कोई भेद नहीं होता है, तो n वस्तुओं में से r वस्तुएँ लेने के क्रमचयों की संख्या = ${}^{n}P_r \backslash 2r$ सिद्ध किया जा चुका है।

∴ 20 मोतियों में से 10-10 मोतियों लेने के क्रमचयों की संख्या $= {}^{20}P_{10}\backslash 2*10 = \frac{20!}{(20-10)!}\backslash 20$

$= \frac{19!}{10!} = 19*18*17*16*15*14*13*12*11 = 33,52,21,28,640$ उत्तर।

उदहरण 6■ किसी मंत्री परिषद के 11 मंत्री गोल मेज के चारों ओर कितने प्रकार से बैठ सकते हैं, यदि प्रधानमंत्री का गृहमंत्री और रक्षामंत्री के बीच बैठना सुनिश्चित है?

हल मंत्री परिषद के 11 सदस्यों में से प्रधानमंत्री का गृहमंत्री और रक्षामंत्री के बीच बैठना सुनिश्चित है। अतः इन तीनों का स्थान नियत करने पर 8 सदस्य शेष बचते हैं। जो उक्त तीनों मंत्रियों के सापेक्ष अपना स्थान 8! से ग्रहण कर सकते है। तथा प्रधानमंत्री को नियत मानकर गृहमंत्री और रक्षामंत्री 2! प्रकार से अपना स्थान ग्रहण कर सकते है।

∴ प्रधानमंत्री का गृहमंत्री और रक्षामंत्री के बीच बैठना सुनिश्चित होने पर मंत्री परिषद के सभी मंत्री $8! * 2! =$ $(8*7*6*5*4*3*2*1)*(2*1) = 40320*2 = 80640$ प्रकार से बैठ सकते हैं। उत्तर

25-3 संचय किसी दिये वस्तु समूह में से के क्रम का ध्याान न रखते हुए एक बार कुछ अथवा सभी वस्तु लेकर जितने भी भिन्न–भिन्न समूह बनते हैं। उनमें से प्रत्येक संचय कहलाता है।

विशेष संचय में वस्तुओं के क्रम पर ध्यान नहीं दिया जाता है। संचय में केवल समूह की आवश्यकता होती है, किसी भी समूह में वस्तुएँ किसी भी क्रम में लिखी जा सकती है। उदाहरणार्थ हमारे पास 3 वस्तुएँ A, B और C तो इनमें से दो वस्तु एक साथ लेने के केवल तीन संचय AB, BC और CA बनेंगे।

इसी प्रकार तीन वस्तुओं को एक साथ लेने पर कुवल एक ही संचय ABC प्राप्त होगा।

पुनः यदि 4 वस्तुएँ A, B, C और D है तो इनमें से – (1) दो वस्तु एक साथ लेने पर बनें संचयों AB, AC, AD, BC, BD, और CD की कुल संख्या 6 होगी। (2) तीन वस्तु एक साथ लेने पर बनें संचयों ABC, ABD,ACD,, और BCD की कुल संख्या 4 होगी। (3) चारों वस्तु एक साथ लेने पर बना संचय ABCD केवल एक ही होगा।

क्रमचय और संचय में भेद वस्तुओं के चुनने अथवा रखने के ढंगो में यदि वस्तु क्रम पर भी विचार किया जाता है तो उन्हें क्रमचय कहते है। इसके विपरीत वस्तुओं के चुनने अथवा रखने के ढंगो में यदि वस्तु क्रम पर विचार नहीं किया जाता है तो उन्हें संचय कहते है। संक्षेप में–

क्रमचय में – वस्तु क्रम पर विचार किया जाता है। जबकि संचय में – वस्तु क्रम पर विचार नहीं किया जाता है।

संचय का अध्ययन संकेत n वस्तुओं में से r वस्तुओं को एक साथ लेन से बने संचयों की कुल संख्या काअध्ययन संकेत ${}^nC_r$ है।

संचयों की संख्या ज्ञात करना माना कि दी हुई n वस्तुओं में से एक बार में कोई r वस्तुएँ चुने पर बने संचयों की संख्या x है।

प्रत्येक समूह में r वस्तुएँ हैं। इनमें से एक समूह लीजिए। इस समूह में r! क्रमचय प्राप्त होंगे क्योंकि r वस्तुओं को भिन्न–भिन्न प्रकार से r! से चुन या रख सकते हैं। इसी प्रकार x समूह में से प्रत्येक से r! क्रमचय बनेंगे।

अतः कुल क्रमचयों की संख्या $= x* r!$ होगा। परन्तु n वस्तुओं में से rवस्तुओं को एक साथ लेन से बने क्रमचयों की कुल संख्या $= {}^nP_r$ है। $\therefore {}^nP_r = x* r! \;\Rightarrow X = {}^nP_r \backslash r! \;\Rightarrow X = \frac{n!}{r!*(n-r)!}$ ----------(1)

$$\Rightarrow X = \frac{[1*2*3*-------*(n-r)][n-r+1)*-----*(n-1)*n]}{r!*(n-r)!} \Rightarrow X = \frac{(n-r)![n-r+1)*-----*(n-1)*n]}{r!*(n-r)!}$$

$$\Rightarrow X = \frac{[n-r+1)*-----*(n-1)*n]}{r!}$$

पुनः संचय का अध्ययन संकेत में – n वस्तुओं में से rवस्तुओं को एक साथ लेने से बने संचयों की कुल संख्या काअध्ययन संकेत ${}^nC_r$ है।

अतः $\mathbf{x = {}^nC_r}$ **--------(2)**

समिका (1)और (2) से – $${}^nC_r = \frac{n!}{r!*(n-r)!} - - - - - (3)$$

$$\Rightarrow {}^nC_r = \frac{n*(n-1)*(n-2)*(n-3)*------*\{(n-r)+1\}}{r!}$$

विशेष 1• समिका 3 में r= 0 रखने पर – $${}^nC_0 = \frac{n!}{0!*(n-0)!} = \frac{n!}{1*n!} = \frac{n!}{n!} = 1 - - - - - (4)$$

विशेष 2• समिका 3 में r= 1 रखने पर – $${}^nC_1 = \frac{n!}{1!*(n-1)!} = n - - - - - (5)$$

विशेष 3• समिका 3 में r= n रखने पर – $${}^nC_n = \frac{n!}{n!*(n-n)!} = \frac{n!}{n!*0!} = 1 - - - - - (6)$$

क्रमचय और संचय में सम्बंध उपरोक्त अध्ययन से विदित हो चुका है–

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{तथा} \quad {}^nC_r = \frac{n!}{r!*(n-r)!}$$

$\therefore {}^nP_r = r * {}^nC_r$ यहीं क्रमचय और संचय मे अभीष्ट सम्बंध है।

पूरक संचय प्रमेय n के प्रति r और (n-r) एक ↔दूसरे का n पूरक कहलाता है। तब दी हुई n वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को एक साथ लेने पर प्राप्त संचयों की संख्या और उन n वस्तुओं में से एक बार में (n- r) वस्तुओं को एक साथ लेने पर प्राप्त संचयों की संख्या बराबर होती है। अर्थात् ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

सत्यापन 1• सूत्रविधि चूँकि ${}^nC_r = \frac{n!}{r!*(n-r)!}$ इसमें r के स्थान (n-r) रखने पर

$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!*\{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)!*n!} = \frac{n!}{r!*(n-r)!} = {}^nC_r$$ सिद्ध।

2• बिना सूत्र विधि या व्याख्या विधि दी हुई n वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को चुन लेने के बाद (n-r) वस्तुओं का समूह शेष रह जाता है। यह प्रत्येक r वस्तुओं के चुने समूह के लिए सत्य है।

अतः r वस्तुओं के भिन्न संचयों की संख्या = (n-r) वस्तुओं के भिन्न संचयों की संख्या अर्थात्~ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

उपप्रमेय यदि ${}^nC_x = {}^nC_y$ हो तो x=y या $x = (n-y)$ होगा।

प्रमेय– सिद्ध कीजिए ${}^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$

सत्यापन 1• बिना सूत्र विधि या व्याख्या विधि (n+1) वस्तुओं को लेकर संचय बनाने की विधि को दो भागों में विभाजित कर सकते हैं। (1) जिसमें विशेष वस्तु सदैव आती है। (2) जिसमें विशेष वस्तु कभी नहीं आती है।

(n+1) वस्तुओं में से एक विशेष वस्तु को छोडने पर , शेष n वस्तुओं में से (r – 1) वस्तुएँ लेने पर संचयों की संख्या $= {}^nC_{r-1}$ तथा (n+1) वस्तुओं में से उस एक विशेष वस्तु को छोडने पर , शेष n वस्तुओं में से r वस्तुएँ लेने पर संचयों की संख्या $= {}^nC_r$

स्पष्टतः इन संवयों का योग (n+1) वस्तुओं में से r वस्तुएँ लेने पर प्राप्त संचयों के बराबर होगा।

$\therefore {}^{n+1}C_r = {}^nC_r + {}^nC_{r-1}$

सत्यापन 2• सूत्र विधि दाँया पक्ष $= {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!*(n-r)!} + \frac{n!}{(n-1)!*(n-r+1)!}$

$$= \frac{n!*(n-r+1)}{r!*(n-r)!*(n-r+1)} + \frac{n!*r}{(n-1)!*(n-r+1)!*r}$$
$$= \frac{n!*(n-r+1)}{r!*(n-r*1)!} + \frac{n!*r}{r!*(n-r+1)!}$$
$$= \frac{n!*(n-r+1+r)}{r!*(n-r*1)!}$$
$$= \frac{n!*(n+1)}{r!*(n-r*1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{r!*(n-r*1)!}$$
$$= {}^{n+1}C_r = \text{बाँयापक्ष सिद्ध}$$

साधित अभ्यास उदाहरण■

उदाहरण 1■ अंग्रेजी वर्णमाला के 10 भिन्न–भिन्न अक्षर दिये है। इन अक्षरों में से 5 अक्षर वाले शब्द बनाये जाते हैं , तो उन शब्दो की संख्या बताइये जिनमें कम से कम 1 अक्षर की पुनरावृत्ति होती है।

हल– 10 भिन्न–भिन्न अक्षर से 5 अक्षर वाले ऐसे शब्दों की संख्या जिनमें किसी भी अक्षर की पुनरावृत्ति हो सकती है $=10^5 =$ 100000 होगा। -------------------------(1)

परन्तु 10 भिन्न–भिन्न अक्षर में से 5 भिन्न को लेने पर प्राप्त शब्दों की संख्या =

$${}^{10}C_5 = \frac{10!}{5!*(10-5)!} = \frac{10!}{5!*5!} = \frac{10*9*8*7*6}{1*2*3*4*5} = 252 \text{ ---------------------(2)}$$

∴ प्रश्नानुसार अभीश्ट संख्या = .(1) – (2) = 100000 – 252 = 99748 होगा।

उदाहरण 2■ 12 रिक्त स्थान को भरने के लिए 25 अभ्यार्थी है जिनमें 5 अनुसूचित जाति के हैं। यदि 3 रिक्त स्थान अनुसूचित जातियों के लिए आरक्षित है ओर शेष रिक्त स्थान सबके लिए खुले हैं। तो कितने प्रकार से चुनाव किया जा सकता है।

हल अन्य अभ्यर्थियों की संख्या = 25-5 =20 5 अनुसूचित जाति के अभ्यर्थियों में से किन्हीं 3 को चुनने के कुल तरीके $= {}^5C_3$ तथा 20 अन्य अभ्यर्थियों में से किन्हीं 9 को चुनने के कुल तरीके $= {}^{20}C_9$

∴ 12 अभ्यर्थियों को चुनने कुल अभीष्ट तरीकों की संख्या $= {}^5C_3 * {}^{20}C_9$ उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ एक डिब्बे में 2 सफेद 3 काली और 4 लाल गेंद है। कितने प्रकार से 3 गेंद निकाली जा सकती है कि कम से कम 1 काली गेंद सर्वदा सम्मिलित हों।

हल प्रतिबंधानुसार गेंदों के चयन करने के निम्न उपाय है–

(1) 1 काली , 1 सफेद और 1 लाल (2) 1 काली और 2 सफेद (3) 1 काली और 2 लाल

(4) 2 काली और 1 सफेद (5) 2 काली और 1 लाल (6) 3 काली

∴ संचय गुणन एवं संकलन सिद्धांत से– गेंदों के चयन करने का कुल अभीष्ट तरीकों की संख्या

$= ({}^3C_1 * {}^2C_1 * {}^4C_1) + ({}^3C_1 * {}^2C_2) + ({}^3C_1 * {}^4C_2) + ({}^3C_2 * {}^2C_1) + ({}^3C_2 * {}^4C_1) + {}^3C_3$

$= (3 * 2 * 4) + (3 * 1) + (3 * 6) + (3 * 2) + (3 * 4) + 1 = 24+3+18+6+12+1 = 64$ उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ अंको 1,2,3,4,3,2,1 में से विषम अंकों को विषम स्थान (इकाई, सैकड़ा........) पर दर्शित करते हुए कितनी संख्या बनायी जा सकती है?

हल 4 0िषम अंक 1,3,3,1 को जिनमें दो–दो अंक एक समान है के लिए–

विषम स्थानों में रखने कुल प्रकारों की संख्या $= {}^4C_2 = \frac{4!}{2! * (4-2)!} = \frac{4!}{2! * 2!} = 6$

इसी प्रकार 3 सम अंक 2,4,2 को जिनमें दो अंक एक समान है के लिए–

विषम स्थानों में रखने कुल प्रकारों की संख्या $= {}^3C_2 = \frac{3!}{2! * (3-2)!} = \frac{3!}{2! * 1!} = 3$

∵ अभीष्ट संख्याएँ दिये हुए अंकों में से विषम अंक को विषम स्थान ओर सम अंक को सम स्थान में दर्शित करने से प्राप्त होता है।

∴ अभीष्ट संख्याओं के प्रकारों की संख्या $= {}^4C_2 * {}^3C_2 = 6*3 = 18$ उत्तर होगा!

निम्नानुसार अवलोकित कीजिए–

■12,34,321 ■12,32,341 ■14,32,321 ■12,34,321 ■12,12,343 ■14,12,323

■12,32,14 ■12,34,123 ■14,32,123 ■32,14,123 ■32,12,143 ■34,12,123

■32,14,123 ■32,12,143 ■34,32,121 ■32,12,341 ■32,14,321 ■34,12,321

उदाहरण 5■ ऑग्ल भाशा लिपि के 7 बड़े अक्षर 3 स्वर 5व्यजनों से भिन्न–भिन्न 4 अक्षरों वाले कितने शब्द बन सकते है। यदि प्रत्येक शब्द बड़े अक्षर से प्रारंभ होता है और इन शब्दों में कम से कम 1 स्वर अवश्य सम्मिलित है।

हल प्रत्येक शब्द का पहला अक्षर 7 बड़े अक्षरो में से ${}^7P_1 = 7$ प्रकार से चुना जा सकता है। अब शेष 3 अक्षर को निम्न 3 प्रकार से चुन सकते है।–

1• स्वर और 2 ब्यंजन वाले शब्द जिनके चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^3C_1 * {}^5C_2 = 3*10 = 30$

2• स्वर और 1 ब्यंजन वाले शब्द जिनके चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^3C_2 * {}^5C_1 = 3*5 = 15$

3• स्वर वाले शब्द जिनके चुनने के प्रकारों की संख्या $= {}^3C_3 = 1$

परन्तु उपरोक्त (1 स्वर और 2 ब्यंजन) या (2 स्वर और 1 ब्यंजन)या (3 स्वर) से बने शब्द के 3 अक्षरो को आपस में क्रम बदलकर ${}^3P_3 = 3! = 6$ प्रकारों से रखा जा सकता है।

क्रमचय एवं संचय गुणन एवं संकलन सिद्धांत से

अभीष्ट शब्दों की संख्या $= {}^7P_1 * {}^3P_3 * ({}^3C_1 * {}^5C_2 + {}^3C_2 * {}^5C_1 + {}^3C_3) = 7*6*(30+15+1)$

$= 42*46 = 1932$ उत्तर होगा।

उदाहरण 6■ एक आदमी के अपने घर परिवार पक्ष के 7 सम्बंधी है जिनमें 4 स्त्रियाँ तथा 3 पुरूष,है, इस आदमी के ससुराल पक्ष के भी 7 सम्बंधी है जिनमें 3 स्त्रियाँ तथा 4 पुरूष, है। वह आदमी कितने प्रकार से 3 स्त्रियाँ तथा 3 पुरूष, को रात्रिभोज में आमंत्रित कर सकता है कि 3 सम्बंधी अपने घर परिवार पक्ष और 3 सम्बंधी उसके ससुराल पक्ष से हो।

हल प्रश्नानुसार वह आदमी निम्नानुसार 4 उपायों से अपने घर परिवार एवं ससुराल पक्ष से सम्बंधियों को रात्रि भोज में आमंत्रित कर सकता है।

1• अपने घर परिवार के पक्ष से 3 पुरूष एवं ससुराल पक्ष से 3 स्त्री

2• अपने घर परिवार के पक्ष से 2 पुरूष 1 स्त्री एवं ससुराल पक्ष से 1 पुरूष 2 स्त्री

3• अपने घर परिवार के पक्ष से 1 पुरूष 2 स्त्री एवं ससुराल पक्ष से 2 पुरूष 1 स्त्री

4• अपने घर परिवार के पक्ष से 3 स्त्री एवं ससुराल पक्ष से 3 पुरूष

∴ संचय गुणन एवं संकलन सिद्धांत से – घर परिवार एवं ससुराल पक्ष से सम्बंधियों को रात्रि भोज में आमंत्रित करने के प्रकारों की अभीष्ट संख्या

$=({}^3C_3*{}^3C_3)+[({}^3C_2*{}^4C_1)*({}^4C_1*{}^3C_2)]+[({}^3C_1*{}^4C_2)*({}^4C_2*{}^3C_1)]+({}^4C_3*{}^4C_3)$

$= (1*1)+ [(3*4)*(4*3)] +[(3*6)*(6*3)]+(4*4)$

$= 1 + 144 +324 +16 = 485$ उत्तर होगा।

अध्ययन अनुप्रयोग विस्तार क्रमगुणित समुच्चय अन्तर्गत क्रमचय और संचय का अनुप्रयोग व्यापक स्तर पर किया जाता है। जिनमें अंकपाश, बीजगणित में द्विपद व्यंजक का n घांतांकी विस्तार बीजीय फलनों का अवकलन, संख्या श्रेढ़ी, प्रायिकता, बीजीय फलनों का अवकलन अध्ययन उपरांत n घातांकी समीकरणों का हल, पूर्ण n घातांकी राशि अथवा किसी संख्या राशि का n वाँ मूल ज्ञात करने में एव नवीन विधि के रूप में किया जा सकता है। इन सबके अध्ययन के पूर्व उक्त क्रमगुणित समुच्चय अन्तर्गत क्रमचय और संचय का अध्ययन , बीजीयफलन आधुनिक गणित अध्ययन से लेकर इस ग्रंथ के आवश्यक विषय वस्तु का तारतम्य बनाया गया है। इस प्रकार के तारतम्यता दर्शित करने में उनागर संख्यांकन पद्धत्ति का महत्व भी प्रतिपादित है। जिसे इन्कार नहीं किया जा सकता है। अध्ययन विस्तार क्रम में सर्व प्रथम अंकपाश का अध्ययन आगामी अध्याय में कीजिए।

----------25----------

अध्याय 26
अंकपाश

26-1 अंकपाश

अंक अथवा संख्या के बंधन युक्त खेल को अंकपाश कहते है। जैसे डब्बा या खाली स्थान भरना, इसका विकसित स्वरूप गणित समिका हल करना , क्रमचय , संचय ,क्रमचय–संचय आधारित अंकपाश, जादुई–वर्ग‡, जादुई n भुजिक चौघड़िया इत्यादि।

अध्ययन क्षेत्र इस अध्याय में अध्ययन का क्षेत्र क्रमचय–संचय आधारित अंकपाश है। इसे **संख्या के भेदों एवं समस्त भेद मान संख्याओं का योगमान का अंक पाश** नाम दिया जाना यथेष्ठ होगा।

26-2 संख्या क भेदों एवं समस्त भेद मान संख्याओं का योगमान का अंक पाश

[A] संख्या रचना के लिए चुने गये अंकों (1,2,3,4,5,6,7,8,9) के किसी समूह के अवयव A,B,C,-------- की बारंबारता क्रमशः a, b, c, ---------- हो । तब यदि –

(1) a+b+c+------------=X (2) a*A +b*B+c*C+-------=Y

(3) अंक 1 (एक) को X बार लेने से संख्या (111---------111) = Z हो तो –

1• X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या $K = \frac{X!}{a!*b!*c!*----}$

2• प्राप्त X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K का योगमान $S = \frac{K*Y}{X} * Z = \frac{K*Y*Z}{X}$ होगा।

टीप यदि a=b=c=------------=1 (एक) हो तो X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K = X! तथा प्राप्त X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या X! का योगमान $S = (X-1)! * Y * Z$ होगा।

साधित उदाहरण 1■ 2 और 8 को 1-1 बार लेने से बनी संख्या के भेदों संख्या 2 होगा जो 28 और 82 होंगे, जिनका योग 28+82 = 110 होगा।

समिका द्वारा जाँच A=2 और B =8 तथा a=b= 1 से X = a+b=1+1= 2, Y = a*A+b*B = 1*2+1*8 =10 अंक 1 (एक) को X =2 बार लेने से संख्या Z =11 से

X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K = X! =2! =2*1 =2

प्राप्त X=2 अंकीय संख्या के समस्त भेद संख्याओं का योगमान S = (X−1)!*Y*Z

= (2−1)! * 10 * 11= 1*10*11 =110 होगा।

उदाहरण 2■ 3, 9 और 8 को 1-1 बार लेने से बनी संख्या के भेदों संख्या 6 होगा जो 398, 389, 839. 893,983,938 होंगे जिनका योगमान 398+389+839+893+983+938 =4440 होगा।

समिका द्वारा जाँच A=3 , B=9 और C=8 तथा a=b=c = 1 से X = a+b+c=1+1+1=3,
Y = a*A+b*B+c*C = 1*3+1*9+1*8 =20 अंक 1 (एक) को X =3 बार लेने से संख्या Z =111 से

X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K = X! =3! =3*2*1 =6

प्राप्त X=3 अंकीय संख्या के समस्त भेद संख्याओं का योगमान S =(X-1)!*Y*Z

= (3-1)! * 20 * 11= 2!*20*111 = 4440 ।

उदाहरण 3■ अंक 2 से लेकर 9 पर्यंत 1-1 बार लेने से बनी संख्या के भेदों की संख्या तथा उक्त भेद संख्याओं को बिना विश्लेषित कर समस्त संख्याओं का योगमान प्राप्त कीजिए।

हल प्रश्नानुसार A=2 , B=3, C=4, D=5, E=6, F=7, G=8, H=9 तथा a=b=C=d=e=f=g=h = 1 से
X = a+b+c+d+e+f+g+h=1+1+1+1+1+1+1+1=8,
Y = a*A+b*B+c*C+d*D+e*E+f*F+g*G+h*H = 1*2+1*3+1*4+1*5+1*6+1*7+1*8+1*9 =44

‡ जादुई–वर्ग एवं n भुजिक चौघड़िया विषयक सम्पूर्ण अध्ययन के लिये **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन एक गूढ़ार्थ प्रस्तुति** के क्रमशअध्याय (9,10,11,12,13) एवं 14 का एवं अध्ययन कीजिए।

अंक 1 (एक) को X =8 बार लेने से संख्या Z =11111111 से

X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K = X! =8!= 8*7*6*5*43*2*1 =40320

प्राप्त X=8 अंकीय संख्या के समस्त भेद संख्याओं का योगमान S =(X-1)!*Y*Z

= (8-1)! ∗ 44 ∗ 11111111 = 7! ∗44*11111111 =5040*44*11111111= 2463999975360 होगा।

उदाहरण 4■ अंक 2 और 1को 2-2 बार लेने से बनी संख्या के भेदों संख्या तथा उक्त भेद संख्याओं को बिना विश्लेषित किये समस्त संख्याओं का योगमान प्राप्त कीजिए।

हल प्रश्नानुसार A=2 , B=1 तथा a=2 , b=2 से

X = a+b =2+2= 4

Y = a*A+b*B = 2*2+2*1 =6 अंक 1 (एक) को X =4 बार लेने से संख्या Z =1111 से

4 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या $K = \frac{X!}{a!*b!*c!*----} = \frac{4!}{2!*2!} = 6$

प्राप्त 4 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K का योगमान $S = \frac{K*Y*Z}{X} = \frac{6*6*1111}{4}$ =9*1111= 9999 होगा।

उदाहरण 5■ अंक 4 और 8 को 1-1 बार अंक 5 को 3 बार लेने से बनी संख्या के भेदों संख्या तथा उक्त भेद संख्याओं को बिना विश्लेषित किये समस्त संख्याओं का योगमान प्राप्त कीजिए।

हल– प्रश्नानुसार A=4 , B=8 ,C=5 तथा a=1 , b=1 ,C=3 से

X = a+b+c =1+1+3= 5

Y = a*A+b*B +c*C = 1*4+1*8+3*5 =27 अंक 1 (एक) को X =5 बार लेने से संख्या Z =11111 से

5 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या $K == \frac{X!}{a!*b!*c!*----} = \frac{5!}{1!*1!*3!} = 20$

प्राप्त 5 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K का योगमान $S = \frac{K*Y*Z}{X} = \frac{20*27*11111}{5}$

=4*27*11111= 1199988 होगा।

[B] X≥ 2 के लिए X अंकीय संख्या रचना के लिए कोई अंक एक या एक से अधिक बार लिया जा सकता है। तब लिए गये जिन–जिन अंकों योग उनके बारंबारता के साथ Y होने तथा अंक 1 (एक) को X बार लेने से संख्या (111---------111) = Z होने पर–

X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K= $^{y-1}C_{Y-1} = \frac{(y-1)!}{(x-1)!*\{(X-1)-(Y-1)\}!}$

$= \frac{(y-1)!}{(x-1)!*(X-Y)!}$ होगा । तथा

प्राप्त X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K का योगमान $S=\frac{K*Y}{X} * Z = \frac{K*Y*Z}{X}$ होगा।

साधित उदाहरण■ 5 अंकीय संख्या रचना के लिये कोई अंक एक या एक से अधिक बार लिया जा सकता है। तब लिए गये जिन–जिन अंकों योग उनके बारंबारता के साथ जिनके अंको योग 13 हो तो उन सभी संख्याओं की भेदों की संख्या तथा उक्त भेद संख्याओं को बिना विश्लेषित किये समस्त संख्याओं का योगमान प्राप्त कीजिए।
उत्तर जाँच विश्लेषण भी प्रस्तुत कीजिए।

हल प्रश्नानुसार संख्याओं में अंकों की स्थान संख्या X= 5

संख्याओं में लिए गये अंकों का योगमान Y= 13

तथा अंक 1 (एक) को X=5 बार लेने से संख्या (111---------111) = Z=11111 से

X अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K= $^{Y-1}C_{X-1} = \frac{(Y-1)!}{(X-1)!*(Y-X)!}$ में प्रश्नानुसार प्राप्त मान रखने पर – 5 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K= $^{13-1}C_{5-1} = \frac{(13-1)!}{(5-1)!*(13-5)!} = \frac{(12)!}{(4)!*(8)!}$

$= \frac{12*11*10*9}{4*3*2*1}$ =11*5*9 =495 होगा । तथा

प्राप्त x अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या K का योगमान $S= \frac{K*Y*Z}{X}$ में प्राप्त मान रखने पर होगा।

प्राप्त 5 अंकीय संख्या के समस्त भेदों की संख्या 495 का योगमान $S= \frac{495*13*11111}{5}$

= 99*13*11111 =14299857 होगा

उत्तर जाँच विश्लेषण –

5 अंकीय संख्या रचना जिनके अंको योग 13 के लिए –

क्रमांक	लिए गये अंक एवं क्रमशः उनकी प्रयुक्त बारंबारता	प्राप्त संख्या भेदों की संख्या	प्राप्त समस्त संख्या भेदों का योगमान
1	अंक 1 और 9 की क्रमशः बारंबरता 4 और 1	05	144443
2	अंक 2 और 5 की क्रमशः बारंबरता 4 और 1	05	144443
3	अंक 3 और 1 की क्रमशः बारंबरता 4 और 1	05	144443
4	अंक 1, 2 और 8 की क्रमशः बारंबरता 3,1 और 1	20	577772
5	अंक 1, 3 और 7 की क्रमशः बारंबरता 3,1 और 1	20	577772
6	अंक 1, 4 और 6 की क्रमशः बारंबरता 3,1 और 1	20	577772
7	अंक 1 और 5 की क्रमशः बारंबरता 3 और 2	10	288886
8	अंक 2, 3 और 4 की क्रमशः बारंबरता 3,1 और 1	20	577772
9	अंक 2, 1 और 6 की क्रमशः बारंबरता 3,1 और 1	20	577772
10	अंक 3 और 2 की क्रमशः बारंबरता 3 और 2	10	288886
11	अंक 1,2 3 और 6 की क्रमशः बारंबरता 2,1,1 और 1	60	1733316
12	अंक 1,2 4 और 5 की क्रमशः बारंबरता 2,1,1 और 1	60	1733316
13	अंक 1, 3 और 5 की क्रमशः बारंबरता 2,2 और 1	30	866658
14	अंक 1, 3 और 4 की क्रमशः बारंबरता 2,1 और 2	30	866658
15	अंक 1, 2 और 7 की क्रमशः बारंबरता 2,2 और 1	30	866658
16	अंक 2, 4 और 1 की क्रमशः बारंबरता 2,2 और 1	30	866658
17	अंक 2,5, 3 और 1 की क्रमशः बारंबरता 2,1,1 और 1	60	1733316
18	अंक 3,1 2 और 4की क्रमशः बारंबरता 2,1,1 और 1	60	1733316
	योग ⟶	495	14299857

निष्कर्ष समिका द्वारा हल सही है।

26-3 गुणनफल तुल्यता संख्यापाश

गुणन संक्रिया के ली गयी 2n अंकीय गुण्य और गुणक दोनों के n-n स्थान पर दो–दो अनुभाग (गुण्य अनुभाग$_1$/गुण्य अनुभाग$_2$) तथा (गुणक अनुभाग$_1$/गुणक अनुभाग$_2$) करने पर यदि –

गुण्य अनुभाग$_1$और गुण्य अनुभाग$_2$ का मानक अनुपात मान a:b के विपरीत गुणक अनुभाग$_1$ और गुणक अनुभाग$_2$ का मानक अनुपातमान b:a हो तो इनके अनुभाग मान का अनुभाग स्थानान्तरण से प्राप्त नवीन गुण्य और गुणक का गुणनफल गुणन संक्रिया के ली गयी गुण्य और गुणक का गुणनफल के तुल्य होगा। अध्ययन क्रम में गुणनफल तुल्यता का संख्यापाश कहलाता है।

साधित उदाहरण 1■ 36*42 = (3\6)* (4\2)

नियमानुसार गुण्य और गुणक के दो–दो अनुभाग अनुभाग करने पर ।

गुण्य अनुभाग$_1$और गुण्य अनुभाग$_2$ का मानक अनुपात मान a:b =3:6 =1:2 के विपरीत गुणक अनुभाग$_1$ और गुणक अनुभाग$_2$ का मानक अनुपातमान b:a = 4:2 = 2:1 है। अतः इनके अनुभाग मान का अनुभाग स्थानान्तरण से प्राप्त नवीन गुण्य और गुणक 6\3)* (2\4)= 63*24 होगा।

तब गुणनफल तुल्यता संख्यापाश के अनुसार 36*42 =63*24 होगा ।

जाँच 36*42 = 1512 तथा 63*24 = 1512

उदाहरण 2■ 5213 *1248 = (52\13)* (12\48)

नियमानुसार गुण्य और गुणक के दो–दो अनुभाग अनुभाग करने पर ।

गुण्य अनुभाग$_1$और गुण्य अनुभाग$_2$ का मानक अनुपात मान a:b =52:13 =4:1 के विपरीत गुणक अनुभाग$_1$ और गुणक अनुभाग$_2$ का मानक अनुपातमान b:a = 12:48 = 1:4 है। अतः इनके अनुभाग मान का अनुभाग स्थानान्तरण से प्राप्त नवीन गुण्य और गुणक 13\52)* (48\12)= 1352*4812 होगा।

तब गुणनफल तुल्यता संख्यापाश के अनुसार 5213*1248 =1352*4812 होगा ।

जाँच 5213*1248 = 6505824 तथा 1352*4812 = 6505828

उदाहरण 3■ 321 963 * 624208 = (321\963)* (624\208)

नियमानुसार गुण्य और गुणक के दो–दो अनुभाग अनुभाग करने पर ।

गुण्य अनुभाग$_1$और गुण्य अनुभाग$_2$ का मानक अनुपात मान a:b =321:963 =1:3 के विपरीत गुणक अनुभाग$_2$ और गुणक अनुभाग$_1$ का अनुपातमान b:a = 624:208 = 3:1 है। अतः इनके अनुभाग मान का अनुभाग स्थानान्तरण से प्राप्त नवीन गुण्य और गुणक 963\321)* (208\624)= 963321*208624 होगा।

तब गुणनफल तुल्यता संख्यापाश के अनुसार 321 963 * 624208 =963321*208624 होगा ।

जाँच 321 963 * 624208 = 200971880304 तथा 963321*208624 = 200971880304

उदाहरण 4■ 242363 *666444 = (242\363)* (666\444)

नियमानुसार गुण्य और गुणक के दो–दो अनुभाग अनुभाग करने पर ।

गुण्य अनुभाग$_1$और गुण्य अनुभाग$_2$ का मानक अनुपात मान a:b =242:363 =2:3 के विपरीत गुणक अनुभाग$_1$ और गुणक अनुभाग$_2$ का मानक अनुपातमान b:a = 666:444 = 3:2 है। अतः इनके अनुभाग मान का अनुभाग स्थानान्तरण से प्राप्त नवीन गुण्य और गुणक 363\242)* (444\666)= 363242*444666 होगा।

तब गुणनफल तुल्यता संख्यापाश के अनुसार 242363 *666444 = 363242*444666 होगा ।

जाँच 242363 *666444 = 161521367172 तथा 363242*444666=161521367172

----------26-------

आध्यत्मिक गणित समिका

वो = तुम = मैं

पृथ्वी में जीवन की असीम सम्भावना को दृष्टिगत करते हुए परमपिता परमेश्वर (सृष्टि के रचनाकार) ने अनन्त स्वरूपों में जीव–जन्तु की रचना कर पृथ्वी को भूलोक (उत्पत्ति लोक) की संज्ञा प्रदान कर अलंकृत किया है। जहाँ स्वयं देवाधिदेव सृष्टि के रचनाकार अवतरण के लिए गणित करते रहते है। जिनके अनेकानेक अवतरण कथाएँ प्रमाणन में पढ़ी एवं पढायी जाती है। इन अनन्त स्वरूपों एक स्वरूप मानव है। यह मानव सभी समस्त अनन्त जीवों में बुद्धि ज्ञान बल मे स्पष्ट वाक शक्तिमय सामाजिक प्राणी के रूप में अपना स्थान स्थापित कर चराचर जगत में थल, जल एवं नभ में पाए जाने वाले सभी प्रत्यक्ष –अप्रत्यक्ष, भाशी–अभाशी, दृश्य–अदृश्य, सुक्ष्म–असुक्ष्म स्वरूपों में पाये जाने वाले जीव,–जन्तु, तत्वों वनस्पति, आकार – प्रकार के प्रतीकात्मक रचनाओं संरचनों को संज्ञा (नाम) प्रदान करने अग्रसर होने के तारतम्य में अपने रचनाकार का भी नामकरण करने की ओर अग्रसर होने लगा। विकास क्रम में भौगालिक, सामाजिक एवं राजनैतिक संदर्भ में विभिन्नताओं एवं जटिलताओं का जाल सा हो गया है। हर एक नाम देने वालों ने अपना– अपना रचनाकार अलग–अलग सिद्ध करने साथ एक–दुसरे के इस कदर विरोधी होने में लगा हुआ है कि स्वयं मानव मानव जाति को नष्ट करने आमदा हो रहा है। जबकि सभी नाम एक ही परमपिता के पर्यायवाची ही है। जिसका गणित प्रमाण समिका यथा अवलोकित करें।

हम जानते है– $-(A * B) = -(B * A)$ ------ गुणा का क्रमविनिमय का नियम से•

$\Rightarrow A^2 - A^2 - AB = B^2 - B^2 - BA$ ------ योज्य प्रतिलोम का नियम से•

$\Rightarrow A^2 - A(A+B) = B^2 - B(B+A)$

$\Rightarrow A^2 - A(A+B) = B^2 - B(A+B)$ ...... योग का क्रमविनिमय का नियम से•

$\Rightarrow A^2 - A(A+B) + (\frac{A+B}{2})^2 = B^2 - B(A+B) + (\frac{A+B}{2})^2$

------ दोनों पक्ष में तुल्य राशि $(\frac{A+B}{2})^2$ का योग करने का नियम•

$\Rightarrow (A - \frac{A+B}{2})^2 = (B - \frac{A+B}{2})^2$ ------ द्विपद का वर्ग प्रमेय से•

$\Rightarrow A - \frac{A+B}{2} = B - \frac{A+B}{2}$ ------ तुल्य घात का विलोपन से•

$\Rightarrow$ $A = B$ ------ तुल्य राशिमान $\left(-\frac{A+B}{2}\right)$ का दोनों पक्ष में विलोपन से• **सिद्ध**

A और B के अलग–अलग संखात्मक मानों के लिए उक्त समीकरण को प्रतिरूपित या सिद्ध किया जा सकता है।

यथा $13 = 17$ को प्रतिरूपित या सिद्ध करना–

$-(13 * 17) = -(17 * 13)$ ------ गुणा का क्रमविनिमय का नियम से•

$\Rightarrow 13^2 - 13^2 - 13 * 17 = 17^2 - 17^2 - 17 * 13$ ------ योज्य प्रतिलोम का नियम से•

$\Rightarrow 13^2 - 13(13+17) = 17^2 - 17(17+13)$

$\Rightarrow 13^2 - 13(13+17) = 17^2 - 17(13+17)$------ योग का क्रमविनिमय का नियम से•

$\Rightarrow 13^2 - 13(13+17) + (\frac{13+17}{2})^2 = 17^2 - 17(13+17) + (\frac{13+17}{2})^2$

------ दोनों पक्ष में तुल्य राशि $(\frac{13+17}{2})^2$ का योग करने का नियम•

$\Rightarrow (13 - \frac{13+17}{2})^2 = (17 - \frac{13+17}{2})^2$ ------ द्विपद का वर्ग प्रमेय से•

$\Rightarrow 13 - \frac{13+17}{2} = 17 - \frac{13+17}{2}$ ------ तुल्य घात का विलोपन से•

$\Rightarrow$ $13 = 17$ ------ तुल्य राशिमान $\left(-\frac{13+17}{2}\right)$ का दोनों पक्ष में विलोपन से• **सिद्ध**

ऐसा प्रतिरूपण या सिद्ध करने का भाव मात्र महाभारत रणभूमि कुरूक्षेत्र में अर्जुन के युद्ध के प्रति निराशा का भाव जागृत होने पर भगवान श्रीकृष्ण द्वारा अर्जुन को दिये महान आध्यात्मिक ज्ञान ग्रंथ गीता के –

"अध्याय 5 श्लोक 18 **विद्याविनय सम्पन्ने ब्राह्मणे गवि हस्तिनि। शुनि चैव श्वपाके च पण्डिताः समदर्शिनः।।**

भावार्थ – वे ज्ञानीजन विद्या और विनययुक्त ब्राह्मण में तथा गौ, हाथी कुत्ते और चाण्डाल में समदर्शी ही होते है।

श्लोक 19 **इहैव तैर्जितः सर्गो येषां साम्येस्थितं मनः। निर्दोषं हि समं ब्रह्म तस्माद् ब्रह्मणि ते स्थिताः।।**

भावार्थ – जिसका मन सम भाव में स्थित है, उनके द्वारा इस जीवित अवस्था में ही सम्पूर्ण संसार जीत लिया गया है, क्योंकि सच्चिदानन्द धन परमात्मा निर्दोष ओ सम है, इससे वे सच्चिदानन्द धन परमात्मा में ही स्थित है।

अध्याय 6 श्लोक 32 **आत्मापम्येन सर्वत्र समं पश्यति योऽर्जुन। सुखं वा दुखं स योगी परमो मतः।।**

भावार्थ – हे अर्जुन ! जो योगी अपनी भाँति‡ सम्पूर्ण भूतों में सम देखता है और सुख अथवा दुःख को भी सब में सम देखता है, वह योगी परम श्रेष्ठ माना गया है।" उदृत है।

उक्त आध्यात्मिक गणित समीकरण के प्रतिभाव उदृत गीता ज्ञान का भावार्थ – हमें विभेद नीति से हटकर वैसद्धव कुटुम्बकम् के मूल भावना को आत्मसात करते हुए इस भूलोक में विकसित सभी धर्म, पंथ जाति में समदर्शी होकर सर्व–धर्म समभाव के प्रतीक हमारा एक ही धर्ग मानव–धर्म एवं एक ही जाति मानव–जाति को आत्मसात करें। और विश्व कल्याण हेतू

ऊँ श्री हरि अल्लाह विठठल–विठ्ठल साहेब कृष्ण साईराम।

श्री बूढ़ादेव प्रभु यीशु बुद्धम महावीराय झूलेलाल वाहेगुरू सतनाम्।। " को अभिमंत्र स्वरूप चिंतन मनन करें।

हो एक ही आगाज हमारा– पूरी वसुन्धरा, परिवार हमारा•

विश्वशांति• विश्वशांति• विश्वशांति•

एक ही धर्म– मानव धर्म• एव ही सेवा – मानव सेवा•

जय सेवा• जय सेवा• जय.सेवा•

‡ जैसे मनुष्य अपने मस्तक,हाथ पैर, और गुदादि के साथ ब्राह्मण, क्षत्रिय शूद्र और म्लेच्छादिकों का–सा बर्ताव करता हुआ भी उनमें आत्म भाव अर्थात् अपनापन समान होने से सुख और दुख को समान ही देखता है, वैसे ही सब भूतों में देखना "अपनी भाँति" सम देखना है।

..........आध्यात्मिक गणित....