## अध्याय -1
# पहाड़ा

**ग**णित में निपुणता प्राप्त करने के लिये कंठस्थ पहाड़ा या तालिका की प्रारभिक आश्यकता होती है। पहाड़ा या तालिका कितना कंठस्थ है, इसकी जाँच यदि लोक–लुभावन शैली में किया जाय तो गणित जैसे सुनिश्चित परिणाम देनेवाले कठिन विषय भी एकदम सरल और मनभावन बन जाता है। छत्तीसगढ़ी में पहाड़ा जाँचने के लिये ऐसे ही मनोरंजक तरीके प्रचलित है, जिसे बच्चों से बूढ़ों तक सभी वर्ग के लोग कहीं भी किसी भी समय खेल के रूप में प्रयोग करते हैं। **जैसे–**

**प्रस्तुति 1.1▪ के नियाँ तोर चुल्हा म लकड़ी •**

**विश्लेषण** देव नागरी अँक माला के विचार से अँक ८ (आठ) को चुल्हा तथा अँक १ (एक) को लकड़ी उनकी सादृश्यता के आधार पर माना गया है। ८ और १ आमने सामने रखने पर ८१ (इक्यासी) दर्शित होता है, जो ९ के पहाड़ा (तालिका) में सम्मिलित है। इस संख्या को प्राप्त करने के लिये सरल गणित में पहाड़ा प्रश्न– के नियाँ इक्यासी? पूछा जाता है। जिसका उत्तर है– नौ नियाँ इक्यासी, किन्तु यहाँ चुल्हे में लकड़ी का प्रश्न है जिसका प्रश्नानुसार सहज और सरल उत्तर– नौ नियाँ मोर चुल्हा में लकड़ी होगा। इसे गणित प्रश्न पद्धत्ति रिक्त स्थान पूर्ति करो में निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है–

**पहाड़ा प्रश्न** रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये–

| प्रचलित अध्ययन में | प्रस्तुति– पंक्ति में |
|---|---|
| ...-----× ९ = ८१ | ...-----× ९ = तोर चुल्हा में लकड़ी |
| उत्तर होगा– ९ × ९ = ८१ | . . ९ × ९ = मोर चुल्हा में लकडी |

**शब्दार्थ** तोर = तेरा , तेरे , तेरी । मोर = मेरा , मेरे , मेरी।

**प्रस्तुति 1.2▪ के निया मुँह जोरिक जोरा • अथवा के सत्ते मुँह जोरिक जोरा •**

**विश्लेषण** जब दो व्यक्ति एक–दूसरे के ठीक आमने– सामने और पास–पास खड़े हो तो यह स्थिति परस्पर प्रेम करने या मुँह जोड़ने अर्थात् आलिंगन करने बनती है। इस भावाभिव्यक्ति के लिये मुँह जोरिक–जोरा प्यारा सा युग्मीय शब्द का प्रयोग किया जाता है। इसे गणित के परिपेक्ष में अवलोकन करने पर अँक ६ (छः) के दाँयी ओर अँक ३ (तीन) लिखा हो तो दोनों का मुँह एक दूसरे के आमने–सामने और पास–पास ही होता है, अर्थात् मुँह जोड़ने की स्थिति होगी। ऐसी स्थिति पर संख्या ६३ (तिरसठ) है, जो ७ और ९ के पहाड़ा (तालिका) में सम्मिलित है। इस संख्या को प्राप्त करने के लिये सरल गणित में पहाड़ा प्रश्न– के नियाँ तिरसठ ? अथवा के सत्ते तिरसठ ? पूछा जाता है। जिसका उत्तर है– सात नियाँ तिरसठ, नौ सत्ते तिरसठ होगा किन्तु यहाँ मुँह जोरिक–जोरा होने का प्रश्न है, जिसका प्रश्नानुसार सहज और सरल उत्तर– सात नियाँ मुँह जोरिक–जोरा होगा। **अथवा** नौ सत्ते मुँह जोरिक–जोरा होगा।

**पहाड़ा प्रश्न** रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये–

| प्रचलित अध्ययन में | प्रस्तुति– पंक्ति में |
|---|---|
| ...-----× ९ =६३ | ...-----× ९ = मुँह जोरिक–जोरा |
| ...-----× ७ =६३ | ...-----× ७ = मुँह जोरिक–जोरा |
| उत्तर होगा– ७ × ९ = ६३ | . . ७ × ९ = मुँह जोरिक–जोरा |
| .. ९ × ७ =६३ | ...९× ७ = मुँह जोरिक–जोरा |

**शब्दार्थ** मुँह जोरिक जोरा = आलिंगन करना, चुम्मन करना , चुमना ।

**प्रस्तुति 1.3▪ के निया कुल्हा जोरिक जोरा • अथवा के चौक कुल्हा जोरिक जोरा •**
**या के निया कुल्हा मटकई • अथवा के चौक कुल्हा मटकई •**
**या के निया पीठा –पीठ • अथवा के चौक पीठापीठ •**

**विश्लेषण** जब दो व्यक्ति एक–दूसरे के ठीक विपरीत दिशा में मुँह कर पास–पास खड़े हो तो यह स्थिति परस्पर पृष्ठ (पीछे का) अंग पीठ से पीठ, कुल्हे मिलनने की स्थिति बनती है। छत्तीसगढ़ी में इस भावाभिव्यक्ति के लिये कुल्हा जोरिक–जोरा प्यारा या कुल्हा मटकाने या पीठापीठ होने जैसे युग्मीय शब्द का प्रयोग किया जाता है। इसे गणित के परिपेक्ष में अवलोकन करने पर अँक ३ (तीन) ६ (छः) के दाँयी ओर अँक ६ (छः) लिखा हो तो परस्पर पृष्ठ (पीछे का) अंग पीठ से पीठ या कुल्हे से कुल्हे मिलने की स्थिति बनती है, अर्थात् कुल्हा जोरिक जोरा या कुल्हा मटकाने या पीठापीठ होने की स्थिति होगी। ऐसी स्थिति पर संख्या ३६ (छत्तीस) है, जो जो ४ और ९ के पहाड़ा (तालिका) में सम्मिलित है। इस संख्या को प्राप्त करने के लिये सरल गणित में पहाड़ा प्रश्न– के नियाँ छत्तीस ? अथवा के चौक तिरसठ ?

पूछा जाता है। जिसका उत्तर है– चार नियाँ छत्तीस अथवा नौ चौक छत्तीस होगा किन्तु यहाँ कुल्हा जोरिक–जोरा या कुल्हा मटकाने या पीठापीठ होने का प्रश्न है, जिसका प्रश्नानुसार सहज और सरल उत्तर– चार नियाँ कुल्हा जोरिक–जोरा /कुल्हा मटकई /पीठापीठ होगा। **अथवा** नौ चौक कुल्हा जोरिक–जोरा/कुल्हा मटकई / पीठापीठ होगा।

**पहाड़ा प्रश्न** : रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिये–

| | प्रचलित अध्ययन में | प्रस्तुति– पंक्ति में |
|---|---|---|
| | ...-----× ६ =३६ | ...-----× ६ = कुल्हा जोरिक–जोरा/कुल्हा मटकई /पीठापीठ |
| | ..-----× ४ =३६ | ...-----× ४ = कुल्हा जोरिक–जोरा/कुल्हा मटकई /पीठापीठ |
| उत्तर होगा– | ४ × ६ = ३६ | . × ६ = कुल्हा जोरिक–जोरा/कुल्हा मटकई /पीठापीठ |
| | ६ × ४ = ३६ | ...६× ४ = कुल्हा जोरिक–जोरा/कुल्हा मटकई /पीठापीठ |

--------01--------

## अध्याय -2
# जनउला

भारत धर्म प्रधान देश कहलाता है धार्मिक प्रगाढ़ता के लिये हार्दिक इच्छा शक्ति की आवश्यकता होती है। भारत का हृदय स्थल छत्तीसगढ़ होने के कारण यहाँ जनमानस में धार्मिक भावनायें इतनी प्रगाढ़ है कि गणित जैसे विषय पर उनका प्रभाव परिलक्षित होता है। ऐसे प्रश्नों में गणित और धर्म दोनों की शिक्षा साथ–साथ मिलती है। जनउला में देवी–देवताओं की महिमा, निजि व्यवहार, विचार–मंथन एवं चिंतन के साथ अपनी मिट्टी का रंग सम्मिलित है।

**प्रस्तुति[x] 2.1▪ छै हाँत, छै गोड़, छै कान ल ले सरवन •**
**तिन जीभ अऊ दू नैन ल तको धरन •**
**ओकरे बैरी बेटा के दिन रात भजन करन ••**

**शब्दार्थ** छै =छः। हाँत = हाँथ। गोड़ = पैर। सरवन =श्रवण कुमार। अऊ = और। नैन = आँख। तको = भी। ओकरे = उसी के। बैरी = दुश्मन।

**विश्लेषण** यह जनउला पंक्ति श्रवणकुमार के कथा पर आधारित है। श्रवणकुमार का वध महाराज दशरथ के शब्दभेदी बाण से हो गया था। पुत्र व्यथित उनके अंधे माता–पिता भी प्राण त्याग दिये थे। इस प्रकार तीनों प्राणियों की मौत हुई थी। वे प्राणी कौन और कैसे थे इसे जानने के लिये यह प्रश्न पूछा जाता है।

**गणितीय हल**

| क्र. | व्यक्ति नाम | हाथ | पैर | कान | जीभ | आँख |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | श्रवणकुमार | 2 | 2 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | श्रवणकुमार के माता | 2 | 2 | 2 | 1 | - |
| 3 | श्रवणकुमार के पिता | 2 | 2 | 2 | 1 | - |
| योग | | 6 | 6 | 6 | 3 | 2 |

इस प्रकार श्रवणकुमार और उनके माता पिता के छः हाथ, छः पैर, छःकान, तीन जीभ और दो आँख हुये। इनकी हत्या महाराज दशरथ के शब्दभेदी बाण के कारण हुई थी। इस कारण महाराज दशरथ उनके दुश्मन हुये। महाराज दशरथ के पुत्र श्रीरामचंद्र की पूजा सभी करते है।

**प्रस्तुति[xx] 2.2▪ दखत मनखे रूप धरे, सरग म खड़े •**
**चार देह, तेरह मुड़ी, अऊ सत्ताइस आँखी •**
**दाई–ददा कहिथे साखी ••**

**शब्दार्थ** देखव = देखे। मनसे = मनुष्य। धरे = धारण किये। सरग = स्वर्ग। दाई–ददा = माता–पिता।

**विश्लेषण** यह जनउला भगवान शंकर और उसके परिवार पर आधारित है। उनके परिवार के सदस्यों की संख्या (1) भगवान शंकर (2) माता पार्वती (3) श्री कार्तिकेय एवं (4) श्री गणेश को मिलाकर चार है। स्वर्ग में निवास करने वाले इन भगवानों का साकार रूप में शरीर तो केवल चार है, किन्तु उनके सिर और आँखों की निम्नानुसार है।

| क्र. | शरीर धारी नाम | सिर | आँख |
|---|---|---|---|
| 1 | भगवान शंकर | 5 | 11 |
| 2 | माता पार्वती | 1 | 2 |
| 3 | श्री कार्तिकेय | 6 | 12 |
| 4 | श्री गणेश | 1 | 2 |
| योग | | 13 | 27 |

**प्रस्तुति[xxx] 2.3▪ दस गोड़ तीन बेड़री • खोड़ोर–खोड़ोर खोडरी ••**
**देखत हे दुइ आँखी • करत हे दुइ फाँकी ••**

**शब्दार्थ** बेड़री = शरीर। खोडरी = लकड़ी से बनी नाँद (घण्टा) जिसे चरवाहे गाय भैस के गले बाँधते है। इसे लगभग एक फुट लम्बी नौ इंच चौड़ी नौ इंच मोटी घनाम लकड़ी को खोदकर बनाई जाती है। इस खुदाई में लकड़ी का एक छोटा डण्डा लगा होता है। खोड़ोर–खोड़ोर = खोडरी से उत्पन्न खड़–खड़ की आवाज। फाँकी = फाँक । देखत हे = देख रहा है।

[x], [xx], [xxx] दैनिक समाचार पत्र देशबंधु रायपुर अंक 29 जून 2012 में श्री मुरारीलाल जी साव कम्हारी वाले का प्रकाशित लेख शीर्षक अड़हा मन के गणित से साभार •

**विश्लेषण** यह जनडला हल चलाते किसान प्रयुक्त मवेशियों कग अंग अवयवें पर आधारित है। इस कार्य के लिये दो बैलों की आवश्कता होती है, जिसे हल में जोतकर एक किसान हल चलाता है। इस प्रकार कुल प्राणियों की संख्या तीन हुई, जिसके विभिन्न अंग अवयव की सख्या निम्नानुसार है।

| क्र. | प्राणी | शरीर | पैर | आँख |
|---|---|---|---|---|
| 1 | किसान | 1 | 2 | 2 |
| 2 | बैल | 2 | 8 | 4 |
| योग | | 3 | 10 | 6 |

उपरोक्त सारिणी में दो बैल और एक किसान मिलाकर प्राणी की संख्या यद्यपि तीन है, किन्तु पैरों की संख्या दस है। बैलों के गले में लकड़ी का घण्टा (खोडरी) बंधा है जिसके डण्डे के हिलने पर खोडरी के पार्श्व से खड़–खड़ की ध्वनि निकलती है। बैल हल (नांगर) में लगे फाल (नास) से आगे जुते होते है। इस कारण इन छः आखों में बैलों के चार आँख जुताई से होने वाले जमीन के होते फाँक को नहीं देख सकते । जबकि इस होते फाँक किसान ही जिसके हाथ हल का मुठ होता देखते रहता है।

--------02--------

## अध्याय -3
# अंकगणित विषयक

**प्रस्तुति 3.1▪ योग गुणा एवं भाग** योग गुणा एवं भाग की ओर संयुक्त कथन दर्शित करने वाली यह पंक्ति अवलोकित कीजिए–

**तिन तेरह, नौ अठ्ठारा, तेकर उप्पर साढ़े बारा•**
**जाने त ते मोर आजा, नइ जाने त ते मोर सारा ••**

**शब्दार्थ** बेड़री = शरीर। तीन तेरह = $3\times 13$ ! नौ अठ्ठारा = $9\times 18$ । साढ़े बारा = बारह सही एक बटे दो $\{12\frac{1}{2}\}$ । तेकर = उसके। उप्पर = ऊपर। आजा = नाना / मॉ का पिता श्री। सारा = साला ( सासु मॉ का लाल /प्यारा पुत्र या पत्नी का छोटा भाई।
**विश्लेषण** यह नवाशा (पुत्री कापुत्र) का गणित में पकड़ जानने के लिये नाना दुवारा मजाकिया लहजे में पूछा गया मौखिक प्रश्न है।
**गणितीय हल** $(3\times 13)+(9\times 18)+12\frac{1}{2} = 39+162+12\frac{1}{2} = 213\frac{1}{2}$ होगा।

**प्रस्तुति 3.2▪ आवर्ती अंकीय संख्या** आवर्ती अंकीय वे संख्या है , जिनके अंक या अंकों के समूह तक दोहराते हुये विस्तारित होता है। दशमलव भिन्न में आवर्त दशमलव भिन्न का व्यापक अध्ययन किया जाता है।
**टीप** 1• अंकेला अँक शून्य (0) आवर्त दशमलव भिन्न में मान्य नहीं है।
2• अंक या अंक समूह से बनी संख्या के बाँयी ओर शून्य–शून्य (0-0) अनावर्ती अथवा आवर्ती अँक समूह के अवयव हो सकते है।

**आवर्त दशमलव भिन्न का संक्षिप्तीकरण** जिस स्थान क्रम से कोई अंक या अँकों का समूह से बनी संख्या क्रमशः अनन्त क्रमों तक आवर्ती होता है उसे आवर्ती अंक या समूह के अन्त्य अँको के ऊपर बिन्दु ( ˙ एक अंकीय आवर्त, ¨ दो अंकीय आवर्त, ˙ — ˙ तीन अंकीय आवर्त, ˙ — — — ˙ तीन से अधिक आवर्त दर्शित होंगे। ) लगाकर एक ही बार अनावर्ती अँक या समूद के बाद लिखा जाता है। **जैसे–**

1• $0.\underline{3}\,\underline{3}\,\underline{3}$ ------.का संक्षिप्तीकरण $0.\dot{3}$
2• $0.\underline{35}\,\underline{35}\,\underline{35}$ ------. का संक्षिप्तीकरण $0.\dot{3}\dot{5}$
3• $0.\underline{547}\,\underline{547}\,\underline{547}$ .------ का संक्षिप्तीकरण $0.\dot{5}\dot{4}\dot{7}$
4• $0.75\,\underline{4}\,\underline{4}\,\underline{4}$ ------.का संक्षिप्तीकरण $\mathbf{0.75}\,\dot{4}$
5• $0.029\,\underline{312}\,\underline{312}\,\underline{312}$ ------. का संक्षिप्तीकरण $\mathbf{0.029}\,\dot{3}\,1\dot{2}$
6• $0.\underline{0005}\,\underline{0005}\,\underline{0005}$ ------.का संक्षिप्तीकरण $0.\dot{0}00\dot{5}$
7• $0.0\,0\,\underline{024015}\,\underline{024015}\,\underline{024015}$ ------. का संक्षिप्तीकरण $0.00\dot{0}24015\dot{}$
8• $0.567\,\underline{0001}\,\underline{0001}\,\underline{0001}$ ------. का संक्षिप्तीकरण $0.0567\dot{0}00\dot{1}$
9• $0.444\,\underline{29785}\,\underline{29785}\,\underline{29785}$ ------.का संक्षिप्तीकरण $0.444\dot{2}9785\dot{}$

**आवर्ती अंकीय संख्या विषयक प्रश्न प्रस्तुति–**

**प्रस्तुति 1• नौ गुणित पाटे पाट • उतारों भाई आठे आठ ••**
**विश्लेषण** वह कौन सी संख्या है जिसको **9** से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल के सभी अंक 8 ही हो और यह विस्तार तब तक जारी रहता है जब तक चिस्तारित संख्या **9** द्वारा पूर्ण विभाजित न हो जाय। अर्थात् 888-----$88\div 9$ के लिये $888888888\div 9 = 98765432$ पाटे–पाट ( बाँये से दाँये घटते क्रम में क्रमिक अंकों की संख्या है, जिसको **9**से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल के सभी अंक 8 ही बनी संख्या **9** स्थानिक होगा। उपरोक्त पंक्ति के भावार्थ को दर्शाता है।
**आवर्ती दशमलव प्रतिरूपण के प्रति** $0.0\dot{9}8765432\dot{}\times 9 = 0.\dot{8}$
या $0.0\dot{0}0000000\dot{9}\times 9875432 = 0.\dot{8}$

**प्रस्तुति 2• पन्द्रहम् बाइसम् शून्यम् सात • उतारों भाई आठे आठ ••**

**विश्लेषण** पन्द्रह, बाइस, शून्य एवं सात से बनी संख्या 1,52,207 को कौन सी संख्या से गूणा करें कि प्राप्त गुणनफल के अंक 8 ही 8 आवे। उत्तर प्राप्त करने 1,52,207 को भाजक तथा 8 ही 8 से बनी संख्या को भाज्य चुनते है। भाग की क्रिया सम्पन्न करने पर अभीष्ट भागफल

$8,88,88,888 \div 1,52,207 = 584$ को प्राप्त करना है। जिससे $1,52,207 \times 584 = 8,88,88,888$ दर्शित होगा।

**विस्तार** 73 की तालिका– (73 एकम73), (73 दूनी 146), (73 तिया 219), (73 चौक 292), (73 पंचे 365), (73 छक्के 438), (73 सत्ते 511), (73 अट्ठे 584), (73 निया 657), से क्रमशः–

$1,52,207 \times 73 = 1,11,11,111$ • $1,52,207 \times 146 = 2,22,22.222$ •

$1,52,207 \times 219 = 3,33,33,333$ • $1,52,207 \times 292 = 4,44,44,444$ •

$1,52,207 \times 365 = 5,55,55,555$ • $1,52,207 \times 438 = 6,66,66,666$ •

$1,52,207 \times 511 = 7,77,77.777$ • $1,52,207 \times 584 = 8,88,88,888$ •

$1,52,207 \times 657 = 9,99,99,999$ •

को भाज्य चुनने पर तार्किक संगता रोमांचित करता है।

**आवर्ती दशमलव प्रतिरूपण के प्रति –**

$0.\dot{0}0000073\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{1}$ • $0.\dot{0}0000146\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{2}$ •

$0.\dot{0}0000219\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{3}$ • $0.\dot{0}0000292\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{4}$ •

$0.\dot{0}0000365\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{5}$ • $0.\dot{0}0000438\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{6}$ •

$0.\dot{0}0000511\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{7}$ • $0.\dot{0}0000584\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{8}$ •

$0.\dot{0}0000657\dot{} \times 1,52,207 = 0.\dot{9}$ •

इसी प्रकार

$0.\dot{0}0152207\dot{} \times 73 = 0.\dot{1}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 146 = 0.\dot{2}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 219 = 0.\dot{3}$ •

$0.\dot{0}0152207\dot{} \times 292 = 0.\dot{4}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 365 = 0.\dot{5}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 438 = 0.\dot{6}$ •

$0.\dot{0}0152207\dot{} \times 511 = 0.\dot{7}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 584 = 0.\dot{8}$ • $0.\dot{0}0152207\dot{} \times 657 = 0.\dot{9}$ •

**प्रस्तुति** 3•3 **बाप बेटा करिन सियानी, मूसर बेचिन तिन दुआनी•**
**बता मोर छमिया रानी, मूसर के कीमत जुबानी•**

**शब्दार्थ** मूसर = मूसल (हाथ से अनाज कुटने का औजार)। दुआनी = दो आना का सिक्का। बेचिन = बेचे। सियानी = मुखिया का कार्य। मोर =मेरा, मेरी। छमिया रानी = प्रिये। किम्मत = कीमत। जुबानी =मौखिक।

**विश्लेषण** यह पंक्ति जनउला गणित का छोटा सा उदाहरण है, जिससे मूसल कीमत मूसल की कीमत दो आना के तीन सिक्के के बराबर है, अर्थात् मूसल की कीमत $= 3 \times 2 = 6$ आना होगा।

**प्रस्तुति 3.4▪ पूजा के फूल**

**जगततारनी पतितपावनी गंगातट बसे महातीरथ कासीधाम जी•**
**फुलबगिया म बने मंदिर, लक्ष्मी–नरायन, राधा–किशन, सीता–राम जी••**
**तिनों मंदिर के जाती दुआर में बने अजब–गजब चमत्कारी कुंड जी•**
**जेमा चघाय के फूल बुड़ों के निकाले ले हो जाथे उन्ना के दुन्ना जी••**
**फुलबगिया ले कतिक टोर ले आबे कमती ले कमती पूरा–पूरा फूल जी•**
**बारी–बारी फूल बुड़ों के निकाल चघाबे बरोबर कतिक–कतिक फूल जी••**
**तिनों मंदिर के पूजा चढ़ावा अऊ दरस कर आये ले झन बाँचे एकोठन फूल सेस जी•**
**मनवांछित फल के रूप म पाबे जम्मों देवी–देवता के सुंदर अऊ भरपूर असीस जी••**

**शब्दार्थ** जगततारनी = सबको तारनेवाली। पतितपावनी = पापियों को पवित्र करने वाली। गंगातट = गंगा नही के किनारे। महातीरथ = महानता वाले तीरथ। कासीधाम = काशी तीर्थस्थल। फुलबगिया = फूलों का बाग। लक्ष्मी–नरायन =लक्ष्मी–नारायण। राधा–किशन = राधा–कृष्ण। तिनों = तीनों। जाती दुआर = प्रवेश द्वार। अजब–गजब = विचित्र और सुन्दर मनमोहक। हो जाथे = हो जाता है। उन्ना के दुन्ना होना = बढ़कर दुगुना होना।बरोबर = बराबर। जेमा = जिसमे। चघाबे = चढावगे। बुड़ो के = डुबाकर। कतिक = कितना। टोर ले = तोड़ कर। कमती ले कमती = कम से कम। दरस =

दर्शन। झन = नहीं। एकोठन = एक भी। बाँचे = बचे। सेस =शेष। पाबे = पाओगे। मनवांछित = मनचाहा, जो चाहोग, इच्छानुसार। असीस = आशीष, वरदान।

**विश्लेषण** इस पंक्ति के द्वारा काशीधाम की महिमा बखान (2वर्णन) करने के साथ मन में गणित करने की इच्छा जगाने का सुन्दर प्रयास किया गया है। पंक्ति के माध्यम से प्रश्न है कि– काशीधाम के फूलबाग में लक्ष्मी–नारायण, राधे–कृष्ण, और सीता–राम के तीन मंदिर है। प्रत्येक मंदिर के प्रवेश आंगन में सुन्दर और विचित्र एवं मनभावन जल कुण्ड है जिसमें पूजा के फूल डुबाकर निकालने पर फूलों की संख्या डुबाये गये फूलों की संख्या से दुगुने संख्या में प्राप्त होता है। तब एक दर्शनार्थी फूलबाग से कम से कम कितना फूल तोड़ लायेगा और तीनों मंदिरों बराबर मात्रा में कितना फूल चढ़ायेगा कि तीनों मंदिरों दर्शन उपरांत फूल शेष न रहे।

**उत्तर** फूलबाग से कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या– 7 और तीनों मंदिरों बराबर मात्रा में चढ़ाये गये फूलों संख्या– 8 होगा।

**उत्तर जाँच–** फूलबाग से तोड़े गये फूलों की संख्या– 7

| मंदिर कानाम | कुण्ड में डुबाये गये फूलों की संख्या | कुण्ड में डुबाये गये फूलों को कुण्ड से निकालने पर प्राप्त फूलों की संख्या | मंदिर में चढ़ाये गयेफूलों की संख्या | मंदिर में फूल चढ़ाने बाद शष फूलों की संख्या |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| लक्ष्मी–नारायण | 7 | $7*2=14$ | 8 | $14-8=6$ |
| राधे–कृष्ण | 6 | $6*2=12$ | 8 | $12-8=4$ |
| सीता–राम | 4 | $4*2=8$ | 8 | $8-8=0$ (अशेष) |

**विस्तारित हल समिका** इस प्रकार के प्रश्नों में मंदिरों की संख्या $m$ तथा पूजा के फूल कुण्ड में डुबाकर निकालने बाद $p$ गुणा हो जाता है। तो प्रतिबंधानुसार फूलबाग से कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या $n = -(p^m - 1) \div (p-1)$ तथा प्रत्येक मंदिर में बराबर मात्रा चढ़ाये गये फूलों की संख्या $a = p^m$ होगा।

**उपरोक्त प्रस्तुति पंक्ति प्रश्न में** मंदिरों की संख्या $m=3$ तथा पूजा के फूल कुण्ड में डुबाकर निकालने बाद $p=2$ गुणा हो जाता है। तो प्रतिबंधानुसार फूलबाग से कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या $n=(p^m-1)\div(p-1)$ से

कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या $n = (2^3-1)\div(2-1)$

$= (8-1)\div 1$

$= 7\div 1$

$=7$ होगा।

तथा प्रत्येक मंदिर में बराबर मात्रा चढ़ाये गये फूलों की संख्या $a = p^m$ से

प्रत्येक मंदिर में बराबर मात्रा चढ़ाये गये फूलों की संख्या $a=2^3=8$ होगा।

**विस्तारित उदाहरण में –** यदि मंदिरों की संख्या $m=5$ तथा पूजा के फूल कुण्ड में डुबाकर निकालने बाद $p=4$ गुणा हो जाता है। तो प्रतिबंधानुसार फूलबाग से कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या $n=(p^m-1)\div(p-1)$ से

कम से कम तोड़े गये फूलों की संख्या $n = (4^5-1)\div(4-1)$

$= (1024-1)\div 3$

$= 1023\div 3$

$=341$ होगा।

तथा प्रत्येक मंदिर में बराबर मात्रा चढ़ाये गये फूलों की संख्या $a = p^m$ से

प्रत्येक मंदिर में बराबर मात्रा चढ़ाये गये फूलों की संख्या $a=4^5=1024$ होगा।

**उत्तर जाँच–** फूलबाग से तोड़े गये फूलों की संख्या– 341

| मंदिर कानाम | कुण्ड में डुबाये गये फूलों की संख्या | कुण्ड में डुबाये गये फूलों को कुण्ड से निकालने पर प्राप्त फूलों की संख्या | मंदिर में चढ़ाये गयेफूलों की संख्या | मंदिर में फूल चढ़ाने बाद शष फूलों की संख्या |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| क्रमांक 1• | 341 | 341*4 = 1364 | 1024 | 1364 – 1024=340 |
| क्रमांक 2• | 340 | 340*4 = 1360 | 1024 | 1360 – 1024 =336 |
| क्रमांक 3• | 336 | 336*4 = 1344 | 1024 | 1344–1024 =320 |
| क्रमांक 4• | 320 | 320*4=1280 | 1024 | 1280–1024 = 256 |
| क्रमांक 5• | 256 | 256*4=1024 | 1024 | 1024–1024 = 0 (अशेष) |

**---------03--------**

## अध्याय -4
# कम्प्यूटरिंग प्रस्तुति

**भविष्य** के इतिहास में यह **आ**धुनिक 21 वीं सदी का कलयुग सुपर कम्प्यूटर युग का स्वर्ण–युग होगा। आज प्रत्येक कार्य कम्प्यूटर से होने जा रहा है, जिसके लिए प्रारंभिक अध्ययन में प्रोग्रामिंग तैयार करना होता है। जैसे चाय बनाने का प्रोग्रामिंग, तीन आदमी जिसमें एक बालक है का एक नाव वाले बालक द्वारा नदी पार कराने का प्रोग्रामिंग .....। छत्तीसगढ़िया सयाने लोग इस नाव सम्बंधी प्रोग्रामिंग को आज भी चटकारे ले कर मुखान्तरित करते है, जो कम्प्यूटर प्रोग्रामिंग प्रारंभिक अध्ययन में सम्मिलित है। इसी श्रृंखला मे एक और प्रस्तुति– जिसे जिसे दो तरीके कम्प्यूटिंग कर सकते हैं। प्रस्तुत है–

**प्रस्तुति 4.1■** **दसरू राऊत दूध वाला भैया•**
**जेकर करा हाबे, बस तिनेच कसेलिया•**
**तिन, सात अऊ दस सेरिया•**
**पाँच सेर दूध ले बर आगे पंचू भैया•**
**नइ धरे कोई बर्तन कसेलिया•**
**तब कइसे के दिही दसरू भैया•**
**जतका दूध मांगत हे पंचू भैया•**
**लगा ले तहूँ अपन सूझ–बूझ के बुध•**
**दसरू भैया फोकट में तोला दिही बाँचल दूध••**

**सारांश में–**

**हाबे बस तिनेच ठन दुध कसेलिया•**
**तिन, सात अऊ दस सेरिया•**
**पूरा–पूरा दुध भराय हाबे दस सेरिया•**
**खाली हाबे तिन अऊ सात सेरिया•**
**ले जा कोई भी कसेलिया म पाँच सेर दुध•**
**लगा के अपन सूझ–बूझ अऊ बुध ••**

**शब्दार्थ** दुध =दूध। कसेलिया = दुहनाँ, दूध रखने का बर्तन। सेरिया = सेर (वजन नापने की इकाई) वाला। लेबर =खरीदने। उहूँ = वह। कइसे = कैसे। दिही = देगा। जतका = जितना। फोकट म = मुफ्त में। तहूँ = तुम, भी आप भी। बाँचल = बचा हुआ। भराय = भरा हुआ।

**प्रस्तुति हल प्रोग्रामिंग 1■**

| क्रमांक | वितरण प्रोग्राम | कसेलियों में दूध की मात्रा | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 10 सेरिया में | 7 सेरिया में | 3 सेरिया में |
| 0 | रखा है | 10 सेर | 0 सेर | 0 सेर |
| 1 | 10 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 3 सेर | 7 सेर | 0 सेर |
| 2 | 7 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 3 सेर | 4 सेर | 3 सेर |
| 3 | 3 सेरिया में से 10 सेरिया में डालों• | 6 सेर | 4 सेर | 0 सेर |
| 4 | 7 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 6 सेर | 1 सेर | 3 सेर |
| 5 | 3 सेरिया में से 10 सेरिया में डालों• | 9 सेर | 1 सेर | 0 सेर |
| 6 | 7 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 9 सेर | 0 सेर | 1 सेर |
| 7 | 10 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 2 सेर | 7 सेर | 1 सेर |
| 8 | 7 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 2 सेर | 5 सेर | 3 सेर |
| 9 | 3 सेरिया में से 10 सेरिया में डालों• | 5 सेर | 5 सेर | 0 सेर |

**प्रोग्रामिंग 2■**

| क्रमांक | वितरण प्रोग्राम | कसेलियों में दूध की मात्रा | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 10 सेरिया में | 7 सेरिया में | 3 सेरिया में |
| 0 | रखा है | 10 सेर | 0 सेर | 0 सेर |
| 1 | 10 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 7 सेर | 0 सेर | 3 सेर |
| 2 | 3 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 7 सेर | 3 सेर | 0 सेर |
| 3 | 10 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 4 सेर | 3 सेर | 3 सेर |
| 4 | 3 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 4 सेर | 6 सेर | 0 सेर |
| 5 | 10सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 1 सेर | 6 सेर | 3 सेर |
| 6 | 3 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 1 सेर | 7 सेर | 2 सेर |
| 7 | 7 सेरिया में से 10 सेरिया में डालों• | 8 सेर | 0 सेर | 2 सेर |
| 8 | 3 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 8 सेर | 2 सेर | 0 सेर |
| 9 | 10 सेरिया में से 3 सेरिया में डालों• | 5 सेर | 2 सेर | 3 सेर |
| 10 | 3 सेरिया में से 7 सेरिया में डालों• | 5 सेर | 5 सेर | 0 सेर |

**व्यापकता में–**

$n \geq 4$ के प्रति (3 **द्वारा अविभाजित संख्या**) उपरोक्तानुसार तीन पात्र (बर्तन) क्रमशः $2n$, $(2n-3)$ एवं 3 इकाई माप धारिता वाले बर्तनों में से $2n$, इकाई माप धारिता वाले बर्तन में रखे पूरे $2n$, इकाई माप में द्रवीय पदार्थ को उक्त तीनों माप के बर्तनों का ही अनुप्रयोग कर n-n इकाई मात्रा में बराबर.बराबर बाँटने की कम्प्यूटिंग प्रस्तुत किया जा सकता है।

**उदाहरण–** $n=4$ के प्रति $2n=2*4=8$, $(2n-3)=2*4-3=5$ एवं 3 इकाई माप धारिता वाले बर्तनों में से 8, इकाई माप धारिता वाले बर्तन में रखे पूरे 8, इकाई माप के द्रवीय पदार्थ को उक्त तीनों माप के बर्तनों का ही अनुप्रयोग कर 4-4 इकाई मात्रा में बराबर.–बराबर बाँटने की कम्प्यूटिंग प्रस्तुती–

| क्रमांक | वितरण प्रोग्राम | बर्तनां में रखे द्रवीय पदार्थ की मात्रा | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 8 इकाईवाले में | 5 इकाईवाले में | 3 इकाई वाले में |
| 0 | रखा है | 8 इकाई | 0 इकाई | 0 इकाई |
| 1 | 8 इकाई वाले में से 3 इकाई वाले में डालों• | 5 इकाई | 0 इकाई | 3 इकाई |
| 2 | 3 इकाई वाले में से 5 इकाई वाले में डालों• | 5इकाई | 3 इकाई | 0 इकाई |
| 3 | 8 इकाई वाले में से 3 इकाई वाले में डालों• | 2 इकाई | 3 इकाई | 3 इकाई |
| 4 | 3 इकाई वाले में से 5 इकाई वाले में डालों• | 2 इकाई | 5 इकाई | 1 इकाई |
| 5 | 5 इकाई वाले में से 8 इकाई वाले में डालों• | 7 इकाई | 0 इकाई | 1 इकाई |
| 6 | 3 इकाई वाले में से 5 इकाई वाले में डालों• | 7 इकाई | 1 इकाई | 0 इकाई |
| 7 | 8 इकाई वाले में से 3 इकाई वाले में डालों• | 4 इकाई | 1 इकाई | 3 इकाई |
| 8 | 3 इकाई वाले में से 5 इकाई वाले में डालों• | 4 इकाई | 4 इकाई | 0 इकाई |

?

---------04--------

## अध्याय -5
# युगपद समीकरण

**प्रस्तुति 5.1■** **राम राम दादा जानी, कर गणित मुँह जबानी•**
**सौ गोड़ बहँत्तर आँखी, कतका कुकरा कतका हाँथी•**

**शब्दार्थ** गोड़ = पैर। बहँत्तर =बहत्तर। आँखी = आँख। कुकरा = मुर्गा। हाँथी = हाथी।

**विश्लेषण** उक्त पंक्ति सरल एकघाती युगपद समीकरण का एक सरल उदाहरण है। जिसके हल के लिये माना कि हाथी की कुलसंख्या $x$ औरमुर्गे की कुल संख्या $y$ है। अंगो के विचार से एक हाथी के $4$ पैर और $2$आँख तथा एक मुर्गा के $2$ पैर और $2$ आँख होते है। तब इस आधार पर प्रश्न पंक्ति के प्रति युगपद समीकरण न्निानुसार प्राप्त होगा–

$4x+2y=100$ पैरों की संख्या के आधार पर --------(1)

$2x+2y=72$ पैरों की संख्या के आधार पर --------(2)

या $2x+y=50$ --------(3)

$x+y=36$ --------(4)

समीकरण $(3)$ में से समीकरण $(4)$ को घटाने पर–

$x=14$ हाथी की कुल संख्या

समीकरण $(4)$ में $x=14$ प्रतिस्थापित करने पर–

$14+y=36$ से

$y=36-14=22$ मुर्गे की कुल संख्या

**उत्तर** $22$ मुर्गे और $14$ हाथी

**---------05--------**

## अध्याय -6
# बिसकुटक

**प्रस्तावना** गणितीय मुहावरा विसकुटक में पड़ना का अर्थ विचित्र उलझन में पड़ना है। इस मुहावरे की उत्पत्ति का आधार छत्तीसगढ़ में प्रचलित पद्य (कवित्व) शैली में प्रमुखता से प्रचारित बिसकुटक गणित ही है। बिसकुटक गणित में प्रस्तुत वस्तु अथवा पात्र के तीन प्रकार होते है। इनकी कुल संख्या 20 (बीस = 1कोरी ) होता है तथा वस्तुओं के अलग–अलग मूल्य पर कुल मूल्य 20 मुद्रा इकाई अथवा पात्रों द्वारा एक ही प्रकार के वस्तु की अलग–अलग उपभोग मात्रा दर पर वस्तु की कुल उपभोग मात्रा 20 मात्रा इकाई होती है। इस प्रकार 20 – 20 का प्रतिबंध ही बिसकुटक का प्रतिबंध ही बिसकुटक के नाम से जाना जाता है। सामान्य जन आज भी इनके उत्तर प्राप्त करने कठिनाई अनुभव करते है और जमा–जमाया तुकबंदी करार देकर मनोरंजन की दृष्टि से सुन–सुनाकर मौखिक हल प्राप्त करने की ओर जुट जाते हैं। किसी बिसकुटक के हल इसे ऐसा सिद्ध करता है, लेकिन विशेष अध्ययन उपरांत यह सिद्ध करने में कतई भ्रम नहीं होगा कि यह बिसकुटक जमा–जमाया तुकबंदी नहीं है वरन् बीजगणित में रेखीय समीकरण के अध्ययन विस्तार में $n > 2$ **(जहाँ n प्राकृत संख्या का अवयव है।) के लिये $(n-1)$ समीकरणों में n व्यंजकीय n पदी शून्यसाम्य समीकरण या अनुपातिक बहुपद हल समीकरण के विस्तार में एक कदम आगे शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण की मार्ग प्रशस्त करने की प्रस्तुति देता है।** ज्ञात हो यह शून्यसाम्य समीकरण या अनुपातिक बहुपद हल समीकरण के विस्तार में एक कदम आगे शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण के प्रति वैदिक एवं आधुनिक गणित अध्ययन मौन प्रतीत होता है। सर्व प्रथम भून्यसाम्य समीकरण या अनुपातिक बहुपद हल समीकरण का अवलोकन करें।

**प्रस्तुति 6.1■ शून्य साम्य समीकरण** n प्रकार की चर राशि के लिए $(n-1)$ समीकरण इस प्रकार हों कि प्रत्येक समीकरण का दाँया भाग का अचर पद मान शून्य हो शून्यसाम्य समीकरण कहलाता है। इन शून्यसाम्य समीकरणों के प्रति चर राशियों के अद्वितीय मान प्राप्त नहीं होंगे। अनुपातिक मान ही प्राप्त होंगे। इन अनुपातिक मानों का विस्तार अनन्त प्रकारों के मानों की ओर अग्रसर करता है।

**सांकेतिक उदाहरण**

**1■** 2 प्रकार की चर राशि के लिए 1 समीकरण – $a_1x + b_1y = 0$

**2■** 3 प्रकार की चर राशि के लिए 2 समीकरण –

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad -----(1).$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad -----(2).$$

**3■** 4 प्रकार की चर राशि के लिए 3 समीकरण –

$$a_1p + b_1q + c_1r + d_1s = 0 \quad -----(1).$$
$$a_2p + b_2q + c_cr + d_2s = 0 \quad -----(2)$$
$$a_3p + b_3q + c_3r + d_3s = 0 \quad -----(3)$$

**व्यापकता में** n प्रकार की चर राशि के लिए $(n-1)$ समीकरण – n प्रकार की चर राशियाँ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 ---\theta_n)$ एवं प्रत्येक समीकरण में चर के संगत n-n राशि $[(a_1, b_1, c_1 ----z_1), (a_2, b_2, c_2 ----z_2) ------ (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} ----z_{n-1})$ द्वारा –

$$a_1\theta_1 + b_1\theta_2 + c_1\theta_3 -,-,-,-,z_1\theta_n = 0 \quad --------(1)$$
$$a_2\theta_1 + b_2\theta_2 + c_2\theta_3 -,-,-,-,z_2\theta_n = 0 \quad --------(2)$$
$$a_3\theta_1 + b_3\theta_2 + c_3\theta_3 -,-,-,-,z_3\theta_n = 0 \quad --------(3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n-2}\theta_1 + b_{n-2}\theta_2 + c_{n-2}\theta_3 -,-,-,-,z_{n-2}\theta_n = 0 \quad ----(n-2)$$
$$a_{n-1}\theta_1 + b_{n-1}\theta_2 + c_{n-1}\theta_3 -,-,-,-,z_{n-1}\theta_n = 0 \quad ----(n-1)$$

**टीप** प्रत्येक समीकरणों के बाँये पक्ष में अंतिम पद $(z_1, z_2, z_3 --z_{n-1})$ दर्शाने का तात्पर्य व्यापकता दर्शना ही है न कि अंग्रेजी वर्णमाला के कुल संख्या 26 की क्रमागत संरचना क्रम पर पद मान संख्या 26 ही होगा।

**प्रस्तुति 6.2■ शून्य साम्य समीकरणों के प्रति अनुपातिक हल प्राप्त करना** व्यापकता मे चर राशियाँ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 ---\theta_n)$ का अनुपातिक हलमान पूरोगामी चक्रीय सारणिक संरचना विधि द्वारा सरलता से प्राप्त किया जा सकता है। जिसके अनुसार–

**1•** चर राशियाँ की संख्या n सम मानों में $2m$ हो तो अनुपातिक हल मान –

$\theta_1 : \overline{\theta_2} : \theta_3 : \overline{\theta_4} : \theta_5 ; - - - - - - ; \overline{\theta_{2m-4}} : \theta_{2m-3} : \overline{\theta_{2m-2}} : \theta_{2m-1} : \overline{\theta_{2m}}$ एवं

**2•** चर राशियाँ की संख्या n विषम मानों में $2m+1$ हो तो अनुपातिक हल मान –

$\theta_1 : \theta_2 : \theta_3 : \theta_4 : \theta_5 : - - - - - ; \theta_{2m-3} : \theta_{2m-2} : \theta_{2m-1} : \theta_{2m} : \theta_{2m+1}$ के लिए–

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 & -- & -- & -- & x_1 & y_1 & z_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 & -- & -- & -- & x_2 & y_2 & z_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & -- & -- & -- & x_3 & y_3 & z_3 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ b_{n-1} & c_{n-1} & d_{n-1} & -- & -- & -- & x_{n-1} & y_{n-1} & z_{n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & -- & -- & -- & y_1 & z_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & -- & -- & -- & y_2 & z_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & -- & -- & -- & y_3 & z_3 & a_3 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ c_{n-1} & d_{n-1} & e_{n-1} & -- & -- & -- & y_{n-1} & z_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \end{vmatrix} :$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & a_1 & b_1 & -- & -- & -- & v_1 & w_1 & x_1 \\ z_2 & a_2 & b_2 & -- & -- & -- & v_2 & w_2 & x_2 \\ z_3 & a_3 & b_3 & -- & -- & -- & v_3 & w_3 & x_3 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ z_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} & -- & -- & -- & v_{n-1} & w_{n-1} & x_{n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & -- & -- & -- & w_1 & x_1 & y_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -- & -- & -- & w_2 & x_2 & y_2 \\ a_3 & b & c_3 & -- & -- & -- & w_3 & x_3 & y_3 \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & -- & -- & -- & w_{n-1} & x_{n-1} & y_{n-1} \end{vmatrix}$$

## सांकेतिक एव उसके रूपक उदाहरण

**1■** 2 प्रकार की चर राशि के लिए 1 समीकरण – $a_1x + b_1y = 0$ का हल $x : \bar{y} = |b_1| : |a_1| = b_1 : a_1$

समीकरण $3x + 4y = 0$ का हल $x : \bar{y} = |4| : |3| = 4 : 3$ से $x:y = 4:\bar{3}$ या $\bar{4}:3$ होगा ।

समीकरण $3x - 4y = 0$ का हल $x : \bar{y} = |\bar{4}| : |3| = \bar{4} : 3$ से $x:y = 4:3$ होगा ।

**2■** 3 प्रकार की चर राशि के लिए 2 समीकरण –

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad - - - - - (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad - - - - - (2) \quad \text{का हल}$$

$$x : y : z = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= \{b_1 * c_2 - b_2 * c_1\} : \{c_1 * a_2 - c_2 * a_1\} : \{a_1 * b_2 - a_2 * b_1\}$$

समीकरण $3x - 7y - 3z = 0 \quad - - - - - (1)$

$x - y - 4z = 0 \quad - - - - - (2)$ का हल

$$x : y : z = \begin{vmatrix} \bar{7} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{4} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{3} & 3 \\ \bar{4} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3 & \bar{7} \\ 1 & \bar{1} \end{vmatrix}$$

$$= \{\bar{7} * \bar{4} - \bar{1} * \bar{3}\} : \{\bar{3} * 1 - \bar{4} * 3\} : \{3 * \bar{1} - 1 * \bar{7}\} = 25 : 9 : 4$$

**3■** 4 प्रकार की चर राशि के लिए 3 समीकरण –

$$a_1p + b_1q + c_1r + d_1s = 0 \quad - - - - - (1)$$

$$a_2p + b_2q + c_cr + d_2s = 0 \ ------(2)$$
$$a_3p + b_3q + c_3r + d_3s = 0 \ ------(3) \text{ का हल}$$

$$P:\bar{q}:r:\bar{s} \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

समीकरण $p - 2q - 2r + s = 0 \ ------(1)$ .
$$-3p + q - 3r + 2s = 0 \ ------(2)$$
$$-5p - 5q + r + 3s = 0 \ ------(3) \text{ का हल}$$

प्रथम दृष्टि में समीकरणों

$$P:\bar{q}:r:\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{2} & \bar{2} & 1 \\ 1 & \bar{3} & 2 \\ \bar{5} & 1 & 3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{2} & 1 & 1 \\ \bar{3} & 2 & \bar{3} \\ 1 & 3 & \bar{5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{2} \\ 2 & \bar{3} & 1 \\ 3 & \bar{5} & \bar{5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & 1 & \bar{3} \\ \bar{5} & \bar{5} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \{\bar{2} * \begin{vmatrix} \bar{3} & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1^* \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ \bar{2} & 1 \end{vmatrix} + \bar{5}^* \begin{vmatrix} \bar{2} & 1 \\ \bar{3} & 2 \end{vmatrix}\} : \{\bar{2} * \begin{vmatrix} 2 & \bar{3} \\ 3 & \bar{5} \end{vmatrix} + \bar{3}^* \begin{vmatrix} 3 & \bar{5} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1^* \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \bar{3} \end{vmatrix}\} :$$

$$\{1 * \begin{vmatrix} \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{5} \end{vmatrix} + 2^* \begin{vmatrix} \bar{5} & \bar{5} \\ 1 & \bar{2} \end{vmatrix} + 3^* \begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ \bar{3} & 1 \end{vmatrix}\} : \{1 * \begin{vmatrix} 1 & \bar{3} \\ \bar{5} & 1 \end{vmatrix} + \bar{3}^* \begin{vmatrix} \bar{5} & 1 \\ \bar{2} & \bar{2} \end{vmatrix} + \bar{5}^* \begin{vmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 1 & \bar{3} \end{vmatrix}\}$$

$$= [\bar{2}^*(\bar{9} - 2) + 1^*(1 - \bar{6}) + \bar{5} * (\bar{4} - \bar{3})] : [\bar{2} * (\overline{10} - \bar{9}) + \bar{3} * (3 - \bar{5}) + 1^*(\bar{3} - 2)] :$$
$$[1^*(15 - \bar{5}) + 2^*(10 - \bar{5}) + 3^*(1 - 6)] : [1^*(1 - 15) + \bar{3} * (10 - \bar{2}) + \bar{5} * (6 - \bar{2})]$$
$$= [\bar{2}^*\overline{11} + 1 * 7 + \bar{\bar{5}}^*\bar{1}] : [\bar{2} * \bar{1} + \bar{3} * 8 + 1 * \bar{5}] :$$
$$[1^*20 + 2^*15 + 3^*\bar{5}] : [1^*\overline{14} + \bar{3} * 12 + \bar{5} * 8]$$
$$= [22 + 7 + 5] : [2 + \overline{24} + \bar{5}] : [20 + 30 + \overline{15}] : [\overline{14} + \overline{36} + \overline{40}]$$
$$= 34 : \overline{27} : 35 : \overline{90}$$

$\therefore p:q:r:s = 34:27:35:90$ मानक अनुपात में , $34k:27k:35k:90k$ विस्तारित अनुपात में होगा।

**अथवा**

3 प्रकार की चर राशि के लिए 2 समीकरण प्राप्त करने– समीकरण $1^*2$ मे से समीकरण 2 और समीकरण $1^*3$ मे से 3 घटाकर प्राप्त घटा मान को मानक रूप देने पर क्रमशः– शून्य साम्य समीकरण $5p - 5q - r = 0$ --------(4)
और शून्य साम्य समीकरण $8p - q - 7r = 0$ --------(5) का हल

$$p:q:r = \begin{vmatrix} \bar{5} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{7} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{1} & 5 \\ \bar{7} & 8 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 5 & \bar{5} \\ 8 & \bar{1} \end{vmatrix} = 34 : 27 : 35 \text{ से}$$

प्रश्नांकित समीकरण 1, 2 अथवा 3 में p ,q, r के लिए क्रमशः उनके अनुपात मान 34, 27, 35 प्रतिस्थापित करने पर–

समीकरण 1 $p - 2q - 2r + s = 0 \Rightarrow 34 - 2 * 27 - 2 * 35 + s = 0$
$$\Rightarrow -90 + s = 0 \text{ से } s=90$$

समीकरण 2 $-3p + q - 3r + 2s = 0 \Rightarrow -3 * 34 + 27 - 3 * 35 + 2s = 0$
$$\Rightarrow -180 + 2s = 0 \text{ से } s=90$$

समीकरण 3 $-5p - 5q + r + s = 0 \Rightarrow -5 * 34 - 5 * 27 + 35 + 3s = 0$
$$\Rightarrow -270 + 3s = 0 \text{ से } s=90$$

$\therefore p:q:r:s = 34:27:35:90$ मानक अनुपात में , $34k:27k:35k:90k$ विस्तारित अनुपात में होगा।

## प्रस्तुति 6.3■ शून्य साम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण

छत्तीसगढ़ गणित दर्शन में बिसकुटक गणित प्रश्नों के हल शून्य साम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण का अनुप्रयोग रोमांचित करता है। जिसे दृष्टिगत करते हुए शून्य साम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरणों का व्यापकता निम्नानुसार प्रस्तुत है।

**व्यापकता में** n प्रकार की चर राशि के लिए $(n-1)$ समीकरण– n प्रकार की चर राशियाँ $(\theta_1, \theta_2, \theta_3 - - - -\theta_n)$ एवं प्रत्येक समीकरण में चर के संगत n_n राशि $[(a_1, b_1, c_1 - - - -z_1)\ ,\ (a_2, b_2, c_2 - - - -z_2) - - - - - (a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1} - - - -z_{n-1})$ द्वारा –

$$a_1\theta_1 + b_1\theta_2 + c_1\theta_3 -,-,-,-,z_1\theta_n = k_1 \quad - - - - - - - - (1)$$
$$a_2\theta_1 + b_2\theta_2 + c_2\theta_3 -,-,-,-,z_2\theta_n = k_2 \quad - - - - - - - - (2)$$
$$a_3\theta_1 + b_3\theta_2 + c_3\theta_3 -,-,-,-,z_3\theta_n = k_3 \quad - - - - - - - - (3)$$

.....

.....

$$a_{n-2}\theta_1 + b_{n-2}\theta_2 + c_{n-2}\theta_3 -,-,-,-,z_{n-2}\theta_n = k_{n-2} \quad - - - -(n-2)$$
$$a_{n-1}\theta_1 + b_{n-1}\theta_2 + c_{n-1}\theta_3 -,-,-,-,z_{n-1}\theta_n = k_{n-1} \quad - - - -(n-1)$$

में दाँये पक्ष का अचर मानों $\{k_1, k_2, k_3 - - - - - k_{n-2}, k_{n-1}\}$ और इनके संगत बाँये पक्ष के चर राशियों $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, -,-,-,-,\theta_n\}$ में से किसी एक चर राशि $\theta_r$ के अचर गुणांक $\{r_1, r_2, r_3, -,-,-,-,r_{n-2}, r_{n-1}\}$ मानों में समान अनुपात नियम $\{k_1 : r_1 = k_2 : r_2 = k_3 : r_3 = -= - = k_{r-2} : r_{n-2} = k_{n-1} : r_{n-1} = \emptyset : 1\}$ का अनु– पालन होने पर उपरोंक्त दिया समीकरणों का समुच्चय शून्य साम्य समीकरण समुच्चय मे परिवर्तनीय होगा।

शून्य साम्य समीकरण समुच्चय मे परिवर्तन के लिए समीकरणो 1 ,2,3,4---------(n-2), (n-1) में $(\theta_r + \bar{\emptyset}) = \beta$ प्रतिस्थापन पद का अचर गुणांक क्रमशः $\theta_r$ के अचर गुणांक $\{r_1, r_2, r_3, -,-,-,-,r_{n-2}, r_{n-1}\}$ ही होंगें। और सभी समीकरण शून्य साम्य समीकरण में परिवर्तनीय होंगे। जिससे प्राप्त $\beta$ के मान को $(\theta_r + \bar{\emptyset}) = \beta \Rightarrow \theta_r = \beta + \emptyset$ में प्रतिस्थापित कर $\theta_r$ का मान प्राप्त करें।

**टीप** चूँकि $\theta_r = \beta + \emptyset$ दो राशियों का योगमान है। इसलिए चर राशियों $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, -,-,-,-,\theta_n\}$ के मान अद्वितीय होंगे।

**उदाहरण1■** समीकरण समुच्चय $\{x+y+z=20$ एवं $x+4y+20z=80\}$ के हल के लिए –

प्रथम दृष्टि में समीकरणो के दाँये पक्ष के अचर राशि और बाँये पक्ष के चर राशि y के गुणांकों का अनुपात मान $20:1 = 80:4 = (20:1)$ है। ∴ $w = (y+\overline{20})$ प्रतिस्थापित करने पर शून्य साम्य समीकरण समुच्चय –

$\{x+w+z=0$ एवं $x+4w+20z=0\}$ होगा। जिसका हल–

$$x:w:z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 : \overline{19} : 3 \text{ से } x=16,\ w=\overline{20}, z=3$$
$$y=\overline{19}+20=1$$

समीकरण का अद्वितीय हल $x=16\ , y=1, z=3$ होगा ।

**उदाहरण2■** समीकरण समुच्चय $\{\ p+3q+r+4s=20$ .
$-2p+5q+2r+2s=40$ एवं
$4p+7q+3r+s=60\ \}$ के हल के लिए–

प्रथम दृष्टि में समीकरणो के दाँये पक्ष के अचर राशि और बाँये पक्ष के चर राशि r के गुणांक का अनुपात मान $20:2 = 40:4 = 60:6 = (10:1)$ है। ∴ $w = (r+\overline{20})$ प्रतिस्थापित करने पर शून्य साम्य समीकरण समुच्चय –

$\{\ p+3q+w+4s=0$ .
$-2p+5q+2w+2s=0$ एवं
$4p+7q+3w+s=0\ \}$

$$P:\bar{q}:w:\bar{s} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & \bar{2} \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & \bar{2} & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \bar{2} & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \{3 * \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 5 * \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 7 * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\} : \{1 * \begin{vmatrix} 2 & \bar{2} \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2 * \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 3 * \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & \bar{2} \end{vmatrix}\} :$$

$$\{4*\begin{vmatrix}\overline{2} & 5\\ 4 & 7\end{vmatrix} + 2*\begin{vmatrix}4 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix}1 & 3\\ \overline{2} & 5\end{vmatrix}\} : \{1*\begin{vmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{vmatrix} + \overline{2}*\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 4*\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}\}$$

$= \{\overline{12}+55+\overline{42}\} : \{10+\overline{30}+\overline{30}\} : \{\overline{136}+10+1\text{-}1\} : \{1+4+4\} = 1 : \overline{50} : \overline{115} : 9$ से

$p=1,\ q=50,\ w=\overline{115}$, से $r=w+20=\overline{115}=\overline{115}+20=\overline{95}\quad s=\overline{9}$

समीकरण का अद्वितीय हल $p=1, q=50, r=\overline{95}, s=\overline{9}$ होगा।

**टीप** 4 व्यंजकीय , 4 पदी 3 शून्यसाम्य समीकरणों तथा इसी प्रकार $n>2$ (जहाँ $n$ प्राकृत संख्या समुच्चय छ का अवयव है।) के लिये व्यंजकीय $n$ पदी $(n-1)$ शून्यसाम्य समीकरण पर सउदाहरण प्रस्तुतियाँ विश्लेषित किया जायेगा।

## प्रस्तुति 6.4■ बिसकुटक आधारित प्रश्न पंक्तियों का हल प्राप्त करना–

इसी तारतम्य में प्रस्तावना में परिभाषित 3 व्यंजकीय , 3पदी 2शून्यसाम्य समीकरणों में परिवर्तनीय छत्तीसगढ़ी समाज में प्रचलित बिसकुटक आधारित प्रश्न पंक्तियों का हल प्राप्त कर हमारे पूर्वजों के गणित ज्ञान पर स्वमेव रोमांचित होंगे। जिसके हल के प्रति प्रश्न में दर्ज तीन नाम संकेतन x,y, z के प्रति कृत देय प्रश्नांकित संख्या दर मान $\frac{a}{b}, 1, \frac{c}{d}$ का प्रतिरूपण प्रतिबंध

$1■\ (\frac{a}{b}<1<\frac{c}{d})\ 2■$ ;$[1\le b(c-d)\ge 18)]$ एवं ;$[1\le d(b-a)\ge 18)]$ होगा।

शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण युग्म–

$x+y+z=20$ -----(1) $\frac{a}{b}x+y+\frac{c}{d}z=20$ -------(2) होगा।

$\Rightarrow$ $x+y+z=20$ -----(3) $(a*d)x+(b*d)y+(b*c)z=20\,(b*d)$ -------(4) होगा।

$\Rightarrow$ $x+y+z=20$ -----(5) $px+qy+rz=20\,q$ -------(6) होगा।

$\Rightarrow$ $x+(y\text{-}20)+z=0$ -----(7) $px+q(y\text{-}20)+rz=0$ -------(8) होगा।

$\Rightarrow$ $x+w+z=0$ -----(7) $px+qw+rz=0$ -------(8) [ $(y\text{-}20)=w$ प्रतिस्थापित करने पर मानक यून्य साम्य समिका युग्म होगा।] जिसके प्रति –

$$x=\begin{vmatrix}1 & 1\\ q & r\end{vmatrix}=(1*r-q*1)=(r-q)$$

$$w=\begin{vmatrix}1 & 1\\ r & p\end{vmatrix}=(1*p-r*1)=(p-r)=(y-20)\ \therefore\ y=[20+(p-r)]$$

$$z=\begin{vmatrix}1 & 1\\ p & q\end{vmatrix}=(1*q-r*1)=(q-r)$$ होगा।

**ध्यानाकर्षण– आप यह जानकर आश्चर्य करेंगे कि** बिसकुटक के –

अद्वितीय हल के प्रति $b(c-d)\ne d(b-a)$ का प्रतिबंध होगा।

तब अद्वितीय हल $x=b(c-d), z=d(b-a)$ तथा $y=[20-\{b(c\text{-}d)+d(b=a)\}]=[20-(b*c-a*d)$

जबकि $b(c-d)=d(b-a)\Rightarrow a*d+b*c=2bd$ होने पर नौ हल $x=z=[1,2,3,4,5,6;7;89]$ क`संगत

$y=[18,16,14,12,10,8,6,4,2]$ होगा। जिसमें से–

$x=z=b(c-d)=d(b-a)$ एवं $y=[20-2b(c-d)=[20-2d(b-a)]$ होगा।

**अथवा**

$x+y+z=20$ -----(1) $\frac{a}{b}x+y+\frac{c}{d}z=20$ -------(2) के सरल प्रतिरूपण समीकरण युग्म

$x+y+z=20$ -----(3) $px+qy+rz=20*q$ -------(4) दर्शित होने के प्रति

प्रतिबंध $1■\ (p<q<r)$ प्रतिबंध $2■$ ;$[1\le(r\text{-}q)\ge 18]$एवं;$[1\le(q\text{-}p)\ge 18]$ , होगा। तब

अद्वितीय हल के प्रति $(r-q)\ne(q-p)$ का प्रतिबंध होगा।

तअ $x+y+z=20$ -----(3) $px+qy+rz=20*q$ -------(4) दर्शित होने के प्रति

अद्वितीय हल $x=(r-q), z=(q-p)\ y=[20-\{(r-q)+(q-p)\}]$

$= [20 - (r - p)]$ होगा।

जबकि $(r - q) = (q - p) \Rightarrow p + r = 2q$ होने पर नौ हल $x = z = [1,2,3,4,5,6;7;89]$ के पंगत $y = [18,16,14,12,10,8,6,4,2]$ होगा। जिसमें से– शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय समीकरण युग्म–

$x + y + z = 20$ -----(1) $\mathbf{px + qy + rz = 20}$ -------(2) के हल –

$x = z = (r - q) = (q - p)$ एवं $y = [20 - 2(r - q)] = [20 - 2(q - p)]$ होगा।

नौ उत्तर वाले बिसकुटक उदाहरणार्थ प्रस्तुति 6.6■ में प्रश्न पंक्ति 3 और 4 के विस्तारित हल का अवलोकन कीजिये।

## प्रस्तुति 6.6■ बिसकुटक आधारित प्रश्न पंक्तियाँ एवं उनके हल–

**प्रश्न पंक्ति 1■ सुका छेरी रूपिया गाय, पाँच रूपिया म भँइस बेचाय•**
**मनीस एले रूपिया बिस, ख्रीद के लाबे मुँड़ी बिस•**
**जेमे होय तिनों जिनिस, छेरी गाय अऊ भँइस•**
**के छेरी, के गाय अऊ भँइस, खरीद के लाही मनीस•**

**शब्दार्थ** सुका = एक रूपये का चौथाई भाग अर्थात् चार आना या वर्तमान में पच्चीस नये पैसे। छेरी = बकरी। एले = पकड़ या रख। भँइस= भैंस। मुँड़ी = सिर या नग या संख्या। जिनिस = वस्तु। जेमे = जिसमें। अऊ= और। लेके = ख्रीदकर। लाबे = लाना है। लाथे = लाता है।

**भावार्थ** यह पंक्ति सस्ते जमाने का प्रश्न पंक्ति है जब रूपये के चौथाई भाग मूल्य में बकरी मिलना आश्चर्य नहीं था। इसी प्रकार गाय एक रूपये और भँइस पाँच रूपये में खरीदा जा सकता था। इसी तात्कालिक परिवेश में रचित इस बिसकुटक का भावार्थ है कि– 25 नये पैसे प्रति बकरी, 1 रूपये प्रति गाय एवं 5 रूपये प्रति भैस की दर से मनीस गाय, भैस एवं बकरी तीनों मिलाकर कुल 20 जानवर खरीदने में 20 रूपये खर्च करता है। तो बताइये मनीस ने कितने बकरी कितने गाय, और कितने भैस ख्रीदा?

**हल** माना कि मनीस ने x बकरी, y गाय, और z भैस खरीदा–

तब $x + y + z = 20$ -------(1) बकरी, गाय, और भैस मिलाकर कुल 20 जानवर के प्रतिबंध पर।

$\frac{x}{4} + y + 5z = 20$..-------(2) 25 नये पैसे प्रति बकरी, 1रूपये प्रति गाय एवं 5 रूपये प्रति भैस की दर पर कुल कीमत।

समीकरण (1) और .(2) को सरल करने पर–

$$x + y + z = 20 \quad \text{-------(3)}$$
$$x + 4y + 20z = 80 \quad \text{-------(4)}$$

समीकरण (3) और .(4) के बाँया पक्ष में चर राशि y के गुणांकों का अनुपात 1:4 तथा दाँया में अचर पद का अनुपात 20:80 =1:4 समानुपाती है। अतः समीकरण (3) और .(4) शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय है–

**शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तन –**

$$x + (y - 20) + z = 0 \quad \text{-------(5)}$$
$$x + (4y - 80) + 20z = 0 \quad \text{-------(6)}$$
$$\Rightarrow x + (y - 20) + z = 0 \quad \text{-------(7)}$$
$$x + 4(y - 20) + 20z = 0 \quad \text{-------(8)}$$

समीकरण (7) और .(8) में $y - 20 = d$ प्रतिस्थापित करने पर–

$$\Rightarrow x + d + z = 0 \quad \text{-------(9)}$$
$$x + 4d + 20z = 0 \quad \text{-------(10)}$$

समीकरण (9) और .(10) को सरल करने पर–

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = (1*20) - (4*1) = 20 - 4 = 16$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 20 & 1 \end{vmatrix} = (1*1) - (20*1) = 1 - 20 = -19 \Big\} \text{ से}$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1*4)-(1*1) = 4-1 = 3$$

$\therefore$ बकरी की संख्या $x=16$

गाय की संख्या $y$ के लिये

$y-20 = d = -19$ से

$y = -19+20 = 1$

भैस की संख्या $z=3$

**उत्तर जाँच**

| | | |
|---|---|---|
| 16 | बकरी की कीमत | $=\frac{16}{4} = 4$ रूपये |
| 1 | गाय की कीमत | $1*1 = 1$ रूपये |
| 3 | भैस की कीमत | $3*5 = 15$ रूपये |
| योग 20 | जानवर की कीमत | $= 20$ रूपये |

**प्रश्न पंक्ति 2■**

**ये डोकरा ते जा झटकुन अरजुन्दा बजार •**
**खा के दारभात अऊ संग में आमा अचार ••**
**उहाँ बेचावत हे सुका घाधर रूपिया कुकरा •**
**अऊ अढ़ई रूपिया म बेचाथे बोकरा ••**
**कोरी रूपिया ले के जा मोर मयारू डोकरा •**
**लानबे तिनों मिलाके कोरी जिवरा ••**
**तोला कइसे के कहव निच्चट निपोरा •**
**ते तो अड़बर बिसकुटक जनकारा ••**
**जोस म आगे मयारू डोकरा •**
**मुसका के जवाब उत्ता–धुर्रा ••**
**सुन मोर रानी श्यामा केसरिया •**
**वोकर गिनती अऊ रूपिया ••**
**छे घाघर ड़ेढ़ रूपिया •**
**गियारा कुकरा गियारा रूपिया ••**
**तिन बोकरा साढ़े सात रूपिया •**
**होगे कोरी जिवरा के कोरीरूपिया ••**
**मोर सास के मयारू पुत्तर •**
**कइसे के पाही ये सब उत्तर ••**

**शब्दार्थ** घाघर = बटेर। कुकरा = मुर्गा। बोकरा = बकरा। झटकुन = जल्दी से। दारभात = दालभात। अढ़ई = दो और आधा $(2\frac{1}{2})$ या $\frac{5}{2}$ या $2.5$ मयारू = प्रिय। कोरी = बीस$(20)$, जिवरा = प्राणी। जनकारा = ज्ञाता। निच्चट निपोरा = महामूर्ख । अड़बर = बहुत। देवय = दिया। लानबे = लाना। कइसे = कैसे। डोकरा = उम्र–दराज व्यक्ति। डेढ़ = एक और आधा $1\frac{1}{2}$ या $1.5$ । सास के मयारू पुत्तर = साला (पत्नी का भाई)। मोर = मेरा, मेरी, मेरे। पाही = पायेगा। साढ़े सात =सात और आधा $7\frac{1}{2}$ या $7.5$ । गियारा = ग्यारह $(11)$ ।

**भावार्थ** पति–पत्नी के बीच मजकिया अन्दाज में इस बिसकुटक गणित का भावार्थ है कि– पत्नी अपने पति कहती है– चार आने ( एक चौथाई या $\frac{1}{4}$ रूपये) में एक बटेर, एक रूपये में एक मुर्गा और अढ़ई( $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ )रूपये में एक बकरा बिक रहा है। तीनों प्रकार के प्राणी मिलाकर 20 रूपयें 20 ही प्राणी ख्रीद लाना है, तब ही मानूँगी तुम बिसकुटक के ज्ञाता हो। पति जोश आके उत्तर देता है। 6 बटेर डेढ़ रूपये में 11 मुर्गा ग्यारह रूपये 3 बकरा साढ़े सात रूपये ये हागे कोरी $(20)$ रूपिया कोरी$(20)$ जिवरा। और ताना मारथे तेरा भाई कैसे ये उत्तर देगा।

**हल** माना कि– $x$ बटेर, $y$ मुर्गा और $z$ बकरी ख्रीदा।

तब $x+y+z=20$ -------(1) बटेर, मुर्गा, और बकरा मिलाकर कुल 20 जिवरा के प्रतिबंध पर।

$\frac{x}{4}+y+\frac{5}{2}z = 20$..-------(2) $\frac{1}{4}$ रूपये प्रति बकरी, 1रूपये प्रति मुर्गा एवं $\frac{5}{2}$ रूपये प्रति भैस की दर पर कुल कीमत।

समीकरण (1) और .(2) को सरल करने पर–

$$x + y + z = 20 \quad \text{-------(3)}$$ समीकरण (1) को यथावत लेने पर

$$x + 4y + 10z = 80 \quad \text{-------(4)}$$

समीकरण (3) और .(4) के बाँया पक्ष में चर राशि $y$ के गुणांकों का अनुपात $1:4$ तथा दाँया में अचर पद का अनुपात $20:80 = 1:4$ समानुपाती है। अतः समीकरण (3) और .(4) शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय है–

**शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तन–** $x + (y-20) + z = 0$ -------(5)

$$x + (4y-80) + 10z = 0 \quad \text{-------(6)}$$

$$\Rightarrow x + (y-20) + z = 0 \quad \text{-------(7)}$$

$$x + 4(y-20) + 10z = 0 \quad \text{-------(8)}$$

समीकरण (7) और .(8) में $y-20 = d$ प्रतिस्थापित करने पर–

$$\Rightarrow x + d + z = 0 \quad \text{-------(9)}$$

$$x + 4d + 10z = 0 \quad \text{-------(10)}$$

समीकरण (9) और .(10) को सरल करने पर–

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (1*10)-(4*1) = 10-4 = 6$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = (1*1)-(10*1) = 1-10 = -9$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1*4)-(1*1) = 4-1 = 3$$

} से

$\therefore$ बटेर की संख्या $x=6$

मुर्गे की संख्या $y$ के लिये

$y-20 = d = -9$ से

$y = -9+20 = 11$

बकरे की संख्या $z=3$

**उत्तर जाँच**

6 बटेर की कीमत $= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$- = डेढ़ रूपये

11 मुर्गे की कीमत $11*1 = 11$ रूपये

3 बकरे की कीमत $3*2.5 = 7.5$ साढ़े सात रूपये

योग 20 (कोरी) जिवरा की कीमत $= 20$ (कोरी)रूपये

**प्रश्न पंक्ति 3■ अनाज का आयतन मापी की इकाई पर बिसकुटक पंक्ति**

**पौनिया गाय खाय •**
**भर काठा बइला पाय •**
**सवा काठा घोड़ा पहुँचाय •**
**गाय बइला घोड़ा मिलाय •**
**कोरी भर गिनाय •**
**अऊ खंडी भर दाना सिराय ••**
**सुझो–बुझो मोर बिसकुटक जनकरा मितान •**
**के गाय, के बइला अऊ के घोड़ा पाले हे किसान •**

**शब्दार्थ** पौनिया = तीन चौथाई या $\frac{3}{4}$ , भरकाठा = एक काठा। सवा = एक और एक चौथाई या $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ । खण्डी भर = पूरा–पूरा बीस काठा। बइला = बैल।कोरी भर गिनाय = गिनती में पूरा 20 । सिराय = खपत होता है। पाले हे = पाला है।

**भावार्थ** यदि खाने मे एक किसान एक गाय को $\frac{3}{4}$ काठा , एक बैल को $1$ काठा और एक घोड़ा को $\frac{5}{4}$ काठा देता है। जिससे दाने की खपत $20$ काठा है तो मेरे मित्रों बताओं किसान कितने– कितने गाय,बैल और धोड़ा पाल रखा है।

**हल** माना कि– किसान $x$ गाय , $y$ बैल, और $z$ घोड़ा पाल रखा है।

तब $x+y+z=20$ -------(1) गाय, बैल, और घोड़ा मिलाकर कुल $20$ जानवर के प्रतिबंध पर।

$\frac{3x}{4}+y+\frac{5}{4}z=20$.-------(2) $\frac{1}{4}$ काठा प्रति गाय, $1$ काठा प्रति बैल एवं $\frac{5}{4}$ काठा प्रति भैस की दर पर कुल दाने की खपत।

समीकरण $(1)$ और .$(2)$ को सरल करने पर–

$x+y+z=20$ -------(3) समीकरण $(1)$ को यथावत लेने पर

$3x+4y+5z=80$ -------(4)

समीकरण $(3)$ और .$(4)$ के बाँया पक्ष में चर राशि $y$ के गुणांकों का अनुपात $1:4$ तथा दाँया में अचर पद का अनुपात $20:80=1:4$ समानुपाती है। अतः समीकरण $(3)$ और .$(4)$ शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय है–

**शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तन** – $x+(y-20)+z=0$ -------(5)

$3x+(4y-80)+5z=0$ -------(6)

$\Rightarrow x+(y-20)+z=0$ -------(7)

$3x+4(y-20)+5z=0$ -------(8)

समीकरण $(7)$ और .$(8)$ में $y-20=d$ प्रतिस्थापित करने पर–

$\Rightarrow x+d+z=0$ -------(9)

$3x+4d+5z=0$ -------(10)

समीकरण $(9)$ और .$(10)$ को सरल करने पर–

$$\left.\begin{aligned} x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1*5)-(4*1)=5-4=1 \\ d &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (1*3)-(5*1)=3-5=-2 \\ z &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1*4)-(1*3)=4-3=1 \end{aligned}\right\} \text{ से}$$

$\therefore$ गाय की संख्या $x=1$

बैल की संख्या $y$ के लिये

$y-20=d=-2$ से

$y=-2+20=18$

घोड़े की संख्या $z=1$

**उत्तर जाँच**

$1$ गाय पर दाने की खपत मात्रा $=\frac{3}{4}=$ पौन काठा

$18$ बैल पर दाने की खपत मात्रा $=18$ काठा

$1$ घोड़े पर दाने की खपत मात्रा $=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$ सवा काठा

योग $20$ (कोरी) जानवर पर दाने की खपत मात्रा $=20$ काठा $=$ एक खंडी

**ध्यानाकर्षण** उक्त बिसकुटक प्रश्न का तार्किक हल क्रम विस्तार नौ प्रकारों में प्राप्त होंगे। निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

प्रति गाय पौन $=|||=0.75$ काठा, , प्रति बैल भर काठा , प्रति घोड़ा सवा $=1|=1.25$ काठा की दर पर चारा–दाना खपत होने के प्रति गाय,बैल एवं घोड़ा मिलाकर कुल जानवारों की संख्या $20$ के प्रति चारा–दाना की कुल खपत मात्रा $20$ काठा होने की शर्त पर–

| तार्किक उत्तर क्रम | | | | | तार्किक उत्तर क्रम की जाँच | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्तर क्रमांक | गाय की संख्या | बैल की संख्या | घोड़ा की संख्या | योग | गायो के प्रति खपत मात्रा | बैलों के प्रति खपत मात्रा | घोड़ों के प्रति खपत मात्रा | योग |
| 1 | 1 | 18 | 1 | 20 | \|\|\|=0.75 काठा | 18 काठा | 1\|=1.25 काठा | 20 काठा |
| 2 | 2 | 16 | 2 | 20 | 1\|\|=1.50काठा | 16 काठा | 2\|\|=2.50 काठा | 20 काठा |
| 3 | 3 | 14 | 3 | 20 | 2\|=2.25काठा | 14 काठा | 3\|\|\|=3.75 काठा | 20 काठा |
| 4 | 4 | 12 | 4 | 20 | 3काठा | 12 काठा | 5 काठा | 20 काठा |
| 5 | 5 | 10 | 5 | 20 | 3\|\|\|=3.75 काठा | 10काठा | 6\|=6.25 काठा | 20 काठा |
| 6 | 6 | 8 | 6 | 20 | 4\|\|=4.50काठा | 8 काठा | 7\|\|=7.50 काठा | 20 काठा |
| 7 | 7 | 6 | 7 | 20 | 5\|=5.25काठा | 6 काठा | 8\|\|\|=8.75 काठा | 20 काठा |
| 8 | 8 | 4 | 8 | 20 | 6काठा | 4 काठा | 10 काठा | 20 काठा |
| 9 | 9 | 2 | 9 | 20 | 6\|\|\|=675 काठा | 2 काठा | 11\|=11.25 काठा | 20 काठा |

**प्रश्न पंक्ति 4■ फल–फूल खाने का आनन्द देता बिसकुटक पंक्ति–**

**अठन्नी लिमऊ, रूपिया जाम •**
**डेढ़ रूपिया म बेचावय आम ••**
**कोरी रूपिया म कोरी भर फल लाबे राम •**
**झन चुके लिमऊ , आम अऊ जाम ••**

**शब्दार्थ** अठन्नी = पचास नये पैसे , आधा रूपिया, या $\frac{1}{2}$ रूपिया। डेढ़ =एक और आधाया $1\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$। लिमऊ = नीबू। जाम=बिही। बेचावय = बेचा जा रहा है। छन चुके=छुटना नहीं चाहिये।

**भावार्थ** यदि प्रति नीबू $\frac{1}{2}$ रूपिया, प्रति जाम 1रूपिया, और प्रति आम $\frac{3}{2}$ रूपिया मूल्यमान परं बेचा जा रहा है। तो 20 रूपये में कितने–कितने नीबू, बिही और आम खरीदा सकता है कि तीनों फल मिलाकर कुल20 फल हो ।

**हल** माना कि– x नीबू , y बिही, और z आम खरीदा सकता है।

तब $x+y+z=20$ -------(1) नीबू, जाम, और आम मिलाकर कुल 20 फल के प्रतिबंध पर।

$\frac{1}{2}x+y+\frac{3}{2}z=20$.-------(2) प्रति नीबू $\frac{1}{2}$ रूपिया, प्रति जाम 1रूपिया, और प्रति आम $\frac{3}{2}$ रूपिया के मूल्यमान पर

समीकरण (1) और .(2) को सरल करने पर–

$x+y+z=20$ -------(3) समीकरण (1) को यथावत लेने पर

$x+2y+3z=40$ -------(4)

समीकरण (3) और .(4) के बाँया पक्ष में चर राशि y के गुणांकों का अनुपात 1:2 तथा दाँया में अचर पद का अनुपात 20:40 =1:2 समानुपाती है। अतः समीकरण (3) और .(4) शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय है–

**शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तन –**

$$x+(y-20)+z=0 \text{ -------(5)}$$
$$x+(2y-40)+3z=0 \text{ -------(6)}$$
$$\Rightarrow x+(y-20)+z=0 \text{ -------(7)}$$
$$3x+2(y-20)+3z=0 \text{ -------(8)}$$

समीकरण (7) और .(8) में $y-20=d$ प्रतिस्थापित करने पर–

$$\Rightarrow x + d + z = 0 \quad \text{-------(9)}$$
$$x + 2d + 3z = 0 \quad \text{-------(10)}$$

समीकरण (9) और (10) को सरल करने पर–

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (1*3)-(2*1) = 3-2 = 1$$
$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1*1)-(3*1) = 1-3 = -2$$
$$z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1*2)-(1*1) = 2-1 = 1$$

से

$\therefore$ नीबू की संख्या $x=1$

जाम की संख्या $y$ के लिये

$y-20 = d = -2$ से

$y = -2+20 = 18$

आम की संख्या $z=1$

**उत्तर जाँच** 1 नीबू का मूल्यमान $=\frac{1}{2} = 0.50$ रूपिया

18 जाम का मूल्यमान $=18$ रूपिया

1 आम का मूल्यमान $=\frac{3}{2} = 1.50$ रूपिया

योग 20 फल का मूल्यमान $= 20$ रूपये ।

**सीधा–सीधा नौ उत्तर**–प्रति नीबू की कीमत आठ आना $=||=0.5$ रूपया , प्रति बैल कीमत एक रूपयाा , प्रति जाम की कीमत डेढ़ $= 1||=1.50$ रूपया की दर पर नीबू,आम एवं जाम मिलाकर कुल 20 फलों की कुल कीमत 20 रूपये होने की शर्त पर–

| तार्किक उत्तर क्रम | | | | | तार्किक उत्तर क्रम की जाँच | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| उत्तर क्रमांक | नीबू की संख्या | आम की संख्या | जाम की संख्या | योग | नीबुओं की कुल कीमत | आमों की कुल कीमत | जामों की कुल कीमत | योग |
| 1 | 1 | 18 | 1 | 20 | ||=0.50 रूपया | 18 रूपये | 1||=1.50 रूपये | 20 रूपये |
| 2 | 2 | 16 | 2 | 20 | 1.00 रूपया | 16 रूपये | 3.00 रूपये | 20 रूपये |
| 3 | 3 | 14 | 3 | 20 | 1||=1.50 रूपये | 14 रूपये | 4||=4.50 रूपये | 20 रूपये |
| 4 | 4 | 12 | 4 | 20 | 2.00 रूपये | 12 रूपये | 6.00 रूपये | 20 रूपये |
| 5 | 5 | 10 | 5 | 20 | 2||=1.50 रूपये | 10 रूपये | 7||=7.50 रूपये | 20 रूपये |
| 6 | 6 | 8 | 6 | 20 | 3.00 रूपये | 8 रूपये | 9.00 रूपये | 20 रूपये |
| 7 | 7 | 6 | 7 | 20 | 3||=3.50 रूपये | 6 काठा | 10||=10.50 रूपये | 20 रूपये |
| 8 | 8 | 4 | 8 | 20 | 4.00 रूपये | 4 रूपये | 12.00 रूपये | 20 रूपये |
| 9 | 9 | 2 | 9 | 20 | 4||=4.50 रूपये | 2 रूपये | 13||=13.50 रूपये | 20 रूपये |

**प्रतिबंध ■ ऐसे नौ प्रकार उत्तर देने वाले बिसकुटक के हल के प्रति शून्यसाम्य समीकरण में प्रश्न पंक्ति 5■ पूजा–पाठ का आनन्द देता बिसकुटक पंक्ति–**

**गणेश भगवान के पूजा म बैठइया •**
**बाई सियान अऊ नान्हे–नान्हे लरकइया ••**
**पूजा म सब मिला के बइठिन पूरा बिस •**
**जे मन ल बाटिन लड्डू बिस ••**
**बताव जी बिसकुटक जनइया•**

**के बाई कें सियान के लरकइया ••**
**पाथे लड्डू एक, दो अऊ अधइया •**
**नइ जाने म पुछव भइया ••**

**शब्दार्थ** बैठइया = बैठने वाले। बाई = स्त्री वर्ग के लिये आदर सूचक शब्द। सियान = वयोवृद्ध या करिष्ठ जन या बुंजर्ग या पुरूष वर्ग के लिये आदर सूचक शब्द।नान्है–नान्हे लरकइया = छोटे–छोटे बच्चे। जे मन ल = उन सबको। जनइया = जानने वाले। पाथे = प्राप्त करते है। अऊ= और। अधइया= आधा।

**हल** माना कि– x बाई y सियान और z बच्चे पूजा में बैठै है।

तब $x+y+z=20$ -------(1) बाई सियान, और बच्चे मिलाकर कुल 20 होने के प्रतिबंध पर।

$x+2y+\frac{1}{2}z=20$.-------(2) बाटे गये लड्डू की कुल संख्या 20 होने के प्रतिबंध पर।

समीकरण (1) और .(2) को सरल करने पर– $x+y+z=20$ -------(3) समीकरण (1) को यथावत लेने पर

$2x+4y+z=40$ -------(4)

समीकरण (3) और .(4) के बाँया पक्ष में चर राशि x के गुणांकों का अनुपात 1:2 तथा दाँया में अचर पद का अनुपात 20:40 =1:2 समानुपाती है। अतः समीकरण (3) और .(4) शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तनीय है–

**शून्यसाम्य समीकरण में परिवर्तन** – $(x-20)+y+z=0$ -------(5)

$(2x-40)+4y+z=0$ -------(6)

$\Rightarrow (x-20)+y+z=0$ -------(7)

$2(x-20)+4y+z=0$ -------(8)

समीकरण (7) और .(8) में $x-20=d$ प्रतिस्थापित करने पर–

$\Rightarrow d+y+z=0$ -------(9)

$2d+4y+z=0$ -------(10)

समीकरण (9) और .(10) को सरल करने पर–

$$d=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=(1*1)-(1*3)=1-4=-3$$

$$y=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(1*2)-(1*1)=2-1=-1$$

$$z=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=(1*4)-(2*1)=4-2=2$$

} से

∴ बाई की संख्या के लिये

$x-20=d=-3$ से

$x=-3+20=17$

सियान की संख्या $y=1$

बच्चों की संख्या $z=2$

**उत्तर जाँच**

1 लड्डू /बाई के हिसाब से 17 बाई को बाँटे गये लड्डू की संख्या = 17 लड्डू

2 लड्डू /सियान के हिसाब से 1 सियान को बाँटे गये लड्डू की संख्या = 2 लड्डू

$\frac{1}{2}$ लड्डू /बच्चे के हिसाब से 2 बच्चे को बाँटे गये लड्डू की संख्या = 1 लड्डू

योग पूजा में बैइठने वाले की संख्या कुल 20 को बाँटे गये लड्डू की संख्या = 20 लड्डू

**प्रस्तुति 6.5■ शून्यसाम्य समीकरणों में 4 व्यंजकीय 4 पदी 3 समीकरण–**

4 चर राशियाँ " p, q, r और s" का 4 पदी 3 शून्यसाम्य समीकरणों में पद क्रमानुसार चर राशि के प्रति p के अचर गुणांक $(a_1,a_2,a_3)$, q के अचर गुणांक $(b_1,b_2,b_3)$, r के अचर गुणांक $(c_1,c_2,c_3)$ और sके अचर गुणांक $(d_1,d_2,d_3)$ से शून्यसाम्य समीकरण निम्नानुसार होगा–

$$a_1p + b_1q + c_1r + +d_1s = 0 \text{ ---------(1)}$$
$$a_2p + b_2q + c_2r + +d_2s = 0 \text{ ---------(2)}$$
$$a_3p + b_3q + c_3r + +d_3s = 0 \text{ ---------(3)}$$

**हल** चक्रीयक्रम प्रतिबंध से $p:\bar{q}:r:\bar{s}$ के प्रति सारिणिक हल प्रतिबंध निम्नानुसार अवलोकित कीजिये–

$$p:\bar{q}:r:\bar{s} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & d_1 & a_1 \\ c_2 & d_2 & a_2 \\ c_3 & d_3 & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\, b_1 \begin{vmatrix} c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_3 & d_3 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + b_3 \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} ] :$$

$$[\, c_1 \begin{vmatrix} d_2 & a_2 \\ d_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} d_3 & a_3 \\ d_1 & a_1 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} ] :$$

$$[\, d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} ] :$$

$$[\, a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_2 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} ]$$

$$= [\, b_1(c_2 * d_3 - c_3 * d_2) + b_2(c_3 * d_1 - c_1 * d_3) + b_3(c_1 * d_2 - c_2 * d_1)]:$$
$$[\, c_1(d_2 * a_3 - d_3 * a_2) + c_2(d_3 * a_1 - d_1 * a_3) + c_3(d_1 * a_2 - d_2 * a_1)]:$$
$$[\, d_1(a_2 * b_3 - a_3 * b_2) + d_2(a_3 * b_1 - a_1 * b_3) + d_3(a_1 * b_2 - a_2 * b_1)]:$$
$$[\, a_1(b_2 * c_3 - b_3 * c_2) + a_2(b_3 * c_1 - b_1 * c_3) + a_3(b_1 * c_2 - b_2 * c_1)]$$

**उदाहरण पंक्ति–**

**अघनू फगनू सगनू रहे तिन मितान•**
**गाँव तिर के मेला जावे तिनों मितान••**
**रद्दा चलत लाली रंग थैली पाय•**
**जेमे कुछ चाँदी के रूपिया सिक्का रहाय ••**
**तब तिनों के मन म सुन्दर गणित जनाय •**
**अऊ अपन धरे रूपिया के हिसाब सुझाय••**
**अघनू कहे मोर अऊ थैली के रूपिया मिलाय •**
**हाबे दुगुना तुहर दुनों के धरे रूपिया मिलाय ••**
**अइसने फगनू तिगुना अऊ सगनू पँचगुना बताय •**
**बता देव–लोक के बबा तहुँ ल अड़बर गणित सुझाय ••**
**के–के रूपिया धर के तिनों मितान मेला जाय •**
**अऊ रद्दा चलत पाये लाली थैली म रहाय••**

**शब्दार्थ** तिर = पास। रद्दा = रास्ता। चलत =चलते हुये। रहाय = रखा/रखे था। मिजान = मित्र। जेमे = जिसमें । गणित जनाय = गणित का ज्ञान हुआ। तुहर दुनों =तम्हारे दोनों। धरे = रखे हुये। अइसने = ऐसा ही। धर के = लेकर

**हल** माना कि अघनू ,फगनू और सगनू क्रमशः $p,q$ और $r$ रूपये ले कर मेला जा रहे हैं तथा लाल थैली में $s$ रूपये रखा था। तब पंक्ति अनुसार –

( अघनू के रूपये और लाल थैली में रखे रूपये मिलाकर) = 2* ( फगनू के रूपये और सगनू के रूपये मिलाकर) के लिये

$$P+s = 2*(q+r) \Rightarrow p - 2q - 2r + s = 0 \text{-------- शून्यसाम्य समीकरण (1)}$$

( फगनू के रूपये और लाल थैली में रखे रूपये मिलाकर) = 3* ( सगनू के रूपये और अघनू के रूपये मिलाकर) के लिये

$$q+s=3*(r+p) \Rightarrow -3p+q-3r+s=0$$--------शून्यसाम्य समीकरण (2)

( सगनू के रूपये और लाल थैली में रखे रूपये मिलाकर) = 5* ( अघनू के रूपये और फगनू के रूपये मिलाकर) के लिये

$$r+s=5*(p+q) \Rightarrow -5p-5q+r+s=0$$--------शून्यसाम्य समीकरण (3)

शून्यसाम्य समीकरण (1), (2) और (3) से–

**हल 1■ 4 व्यंजकीय 4 पदी 3 शून्यसाम्य समीकरण द्वारा–**

$$p:\bar{q}:r:\bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{2} & \bar{2} & 1 \\ 1 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & 1 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \bar{2} & 1 & 1 \\ \bar{3} & 1 & \bar{3} \\ 1 & 1 & \bar{5} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & \bar{2} \\ 1 & \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{5} & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{3} & 1 & \bar{3} \\ \bar{5} & \bar{5} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [\bar{2}*\begin{vmatrix} \bar{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \bar{2} & 1 \end{vmatrix} + \bar{5}*\begin{vmatrix} \bar{2} & 1 \\ \bar{3} & 1 \end{vmatrix}] :$$

$$[\bar{2}*\begin{vmatrix} 1 & \bar{3} \\ 1 & \bar{5} \end{vmatrix} + \bar{3}*\begin{vmatrix} 1 & \bar{5} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \bar{3} \end{vmatrix}] :$$

$$[1*\begin{vmatrix} \bar{3} & 1 \\ \bar{5} & \bar{5} \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} \bar{5} & \bar{5} \\ 1 & \bar{2} \end{vmatrix} + 1*\begin{vmatrix} 1 & \bar{2} \\ \bar{3} & 1 \end{vmatrix}] :$$

$$[1*\begin{vmatrix} 1 & \bar{3} \\ \bar{5} & 1 \end{vmatrix} + \bar{3}*\begin{vmatrix} \bar{5} & 1 \\ \bar{2} & \bar{2} \end{vmatrix} + \bar{5}*\begin{vmatrix} \bar{2} & \bar{2} \\ 1 & \bar{3} \end{vmatrix}]$$

$$= [\bar{2}*(\bar{3}*1-1*1)+1*(1*1-\bar{2}*1)+\bar{5}*(\bar{2}*1-\bar{3}*1)]:$$
$$[\bar{2}*(1*\bar{5}-1*\bar{3})+\bar{3}*(1*1-1*\bar{5})+1*(1*\bar{3}-1*1)]:$$
$$[1*(\bar{3}*\bar{5}-\bar{5}*1)+1*(\bar{5}*\bar{2}-1*\bar{5})+1*(1*1-\bar{3}*\bar{2})]:$$
$$[1*(1*1-\bar{5}*\bar{3})+\bar{3}*(\bar{5}*\bar{2}-\bar{2}*1)+\bar{5}*(\bar{2}*\bar{3}-1*\bar{2})]$$

$$= [\bar{2}*\bar{4}+1*3+\bar{5}*1]:$$
$$[\bar{2}*\bar{2}+\bar{3}*6+1*\bar{4}]:$$
$$[1*20+1*15+1*\bar{5}]:$$
$$[1*14+\bar{3}*12+\bar{5}*8]$$

$$= [8+3+\bar{5}] : [4+\overline{18}+\bar{4}] : [20+15+\bar{5}] : [\overline{14}+\overline{36}+\overline{40}]$$
$$= 6:\overline{18}:30:\overline{90}$$
$$= 1:\bar{3}:5:\overline{15}$$ मानक अनुपात लेने पर।

$\therefore$ $p:q:r:s=1:3:5:15$ मानक अनुपात में होगा।

$$= k:3k:5k:15k$$ (विस्तारित अनुपात में हागा जहाँ $k$ शून्येतर धनात्मक राशि है।)

**हल 2■ 3 व्यंजकीय 3 पदी 2 शून्यसाम्य समीकरण द्वारा–**

शून्यसाम्य समीकरण (1)−(2) से $4p-3q+r=0$----------शून्यसाम्य समीकरण (4)

शून्यसाम्य समीकरण (1)−(3) से $6p+3q-3r=0$

$$\Rightarrow 2p+q-r=0$$ ----------शून्यसाम्य समीकरण (5)

शून्यसाम्य समीकरण (4) और (5) से

$$P : q : r = \begin{vmatrix} \bar{3} & 1 \\ 1 & \bar{1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ \bar{1} & 2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4 & \bar{3} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= [\bar{3} * \bar{1} - 1 * 1] : [1*2 - \bar{1} * 4] : [4*1 - 2 * \bar{3}]$$

$$= [3-1] : [2 - \bar{4}] : [4 - \bar{6}] = 2 : 6 : 10 = 1 : 3 : 5$$

शून्यसाम्य समीकरण (1) $p - 2q - 2r + s = 0$ में $p = 1, q = 3$ और $r = 5$ प्रतिस्थापित करने पर–

$$1 - 2 * 3 - 2 * 5 + s = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 6 - 10 + s = 0$$

$$s - 15 = 0 \quad \text{से } s = 15$$

अतः $p : q : r : s = 1 : 3 : 5 : 15$ मानक अनुपात में होगा।

$= k : 3k : 5k : 15k$ (विस्तारित अनुपात में होगा जहाँ $k$ शून्येतर धनात्मक राशि है।)

अर्थात् कम से कम रूपिये में अघनू 1 रूपिया , फगनू 3 रूपिया और सगनू 5 रूपिया ले कर मेला जा रहे हें। तथा रास्ता चलते प्राप्त लाल थैली में रखा15 रूपिये मिल जाता है।

व्यापकता में अघनू $k$ रूपिया , फगनू $3k$ रूपिया और सगनू $5k$ रूपिया ले कर मेला जा रहे हें। तथा रास्ता चलते प्राप्त लाल थैली में रखा $15k$ रूपिये मिल जाता है। जहाँ $k$ शून्येतर धनात्मक राशि है।

**-------06-------**

## अध्याय -7
# मितानी गणित

**प्रस्तावना** इंसान एक सामाजिक प्राणी है। समाज का विस्तार परिवार, अपनी पास–पड़ोस, गाँ/शहर से विस्तारित होते हुये अपने राजस्व इकाईयों ( विकासखण्ड, तहसील, जिला, प्रदेश, देश) से आगे सम्पूर्ण दुनिया है। सुख, शान्ति एवं समृद्धि बनाये रखने आपस में इकाईवार सामाजिक सौहाद्र एवं सद्भाव होना आवश्यक है। सामाजिक सौहाद्र एवं सद्भाव को कायम रखने रिश्तों–नातों का ताना–बाना गढ़ा गया। इसी ताने–बाने एक रिश्ता मित्रता का है, जो कि उपरोक्त इकाईवार विकसित होता है। सबसे छोटी इकाई व्यक्तिगत मित्रता है। मित्रता निभाने में आपस में एक–दूसरे के प्रति त्याग और प्रेम का आदान–प्रदान मित्रता की प्रगाढ़ता को सुदृढ़ करता है। मित्रता निभाना को छत्तीसगढ़ी में "मितानी निभाना" कहते है। इसी तारतम्य में एक गणित प्रश्न पंक्ति निम्नानुसार प्रस्तुत है।

**समारू, मंगलू अऊ बुधारू सब्जी किसान •**
**तिनों छत्तिसगढ़िया छुटपन ले रहे मितान ••**
**75** सेर भाँटा , **55** सेर पताल अऊ **39** सेर करेला •
**अपन–अपन ये जिनिस बेंचे ल आइन राजिम मेला ••**
**तिनों के हमउमर पचपन म बचपन के मितानी जागिस •**
**अपन–अपन जिनिस पाँच–पाँच सेर संग–संग बाँटिस ••**
**अइसने सुन्दर मितानी में होगे, तिनों मेर तिनों जिनिस•**
**तिनों मितान बेच–भाँच के बचेरी के बरोगर रूपिया गिनिस ••**
**बताओ बबा के बब्बू ये आय मुँह जुबानी गणित जउनला •**
**के–के रूपिया सेर–सेर म बेचिन भाटा, पताल अऊ करेला ••**

**शब्दार्थ** छुटपन = बचपन / बालक पन। मितान = मित्र/सखे। भाँटा = भटा/बैगन। आइन = आये। जिनिस = वस्तु। अपन–अपन = अपने–अपने। तिनों मेर= तीनों के पास। बेच–भाँज के = बेचने के बाद। बेचरी के = कुल विक्रय मूल्य। गिनिस= हिसाब किये। मुँहजुबानी = मौखिक। मितानी जागिस = मित्रता का भाव उमड़ा। पताल = टमाटर। सेर = वजन मापने की एक इकाई ( मेर =के पास । परिशिष्ट 3 में अवलोकित कीजिये।) बेचिन = बेचे। सेर–सेर म =प्रतिसेर। बेचिन = बेचे।

**भावार्थ** समारू 75सेर भटा, मंगलू 55सेर टमाटर और बुधारू 39सेर करेला राजिम मेला में बेचने आये। आपसी प्रीतिवश तीनों अपने–अपने रखे सब्जियों में से 5-5 सेर सब्जी आदान–प्रदान करते हैं, जिससे तिनों के पास बेचने हेतु तीनों प्रकार की सब्जियाँ हो जाती है। बेचने उपरांत बराबर रूपये प्राप्त होते हैं। तो भटा, टमाटर और करेला का न्यूनतम् अनुपातिक मूल्य प्राप्त कीजिये।

### विधि 1■ लघुत्तम समापर्वक विधि

**प्रक्रम1•** भटा, टमाटर और करेला की मात्रा संख्या क्रमशः 75सेर, 55सेर और 39 सेर में { वस्तु (सब्जी) के प्रकार संख्या} *{ वस्तु (सब्जी) के आदान–प्रदान की मात्रा संख्या} = 3*5 =15 सेर को अलग–अलग घटाने पर –

| | भटा, | टमाटर | करेला |
|---|---|---|---|
| | 75सेर | 55सेर | 39सेर |
| – | 15सेर | 15सेर | 15सेर |
| = | 60सेर | 40सेर | 24सेर |

**प्रक्रम2•** प्रक्रम1 से प्राप्त सेर में मात्रा संख्या 60,40, और 24 का लघुत्तम समापवर्त्य =120 प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम3•** प्रक्रम2 से प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य =120 को प्रक्रम1 से प्राप्त मात्रा संख्या 60,40, और 24 द्वारा अलग–अलग भाग देकर क्रमशः भटा, टमाटर और करेला का मानक अनुपात मूल्य प्राप्त कीजिये। यथा–

$120 \div 60 = 2$ रूपये प्रति सेर भटा
$120 \div 40 = 3$ रूपये प्रति सेर भटा
$120 \div 24 = 5$ रूपये प्रति सेर करेला
} का पूर्ण रूपये न्यूनतम बाजार मूल्य होगा।

**अथवा** (प्रक्रम1• के बाद)

**प्रक्रम2•** प्रक्रम1 से प्राप्त सेर में मात्रा संख्या 60,40, और 24 का मानक अनुपात 15, 10, और 6 प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम3•** प्रक्रम2 से प्राप्त मानक अनुपात 15, 10, और 6 का लघुत्तम समापवर्त्य = 30 प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम4•** प्रक्रम3 से प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य = 30 को प्रक्रम2 से प्राप्त मानक अनुपात संख्या 15,10, और 6 द्वारा अलग–अलग भाग देकर क्रमशः भटा, टमाटर और करेला का मानक अनुपात मूल्य प्राप्त कीजिये। यथा–

$30 \div 15 = 2$ रूपये प्रति सेर भटा
$30 \div 10 = 3$ रूपये प्रति सेर भटा
$30 \div 6 = 5$ रूपये प्रति सेर करेला
} का पूर्ण रूपये में न्यूनतम अनुपातिक बाजार मूल्य होगा।

## विधि 2■ सरल बीजगणित समिका विधि–

माना कि भटा, टमाटर और करेला का न्यूनतम अनुपातिक बाजार मूल्य रूपियों में $x : y : z$ है, तब आदान–प्रदान उपरांत बेचने हेतु–

| | भटा | टमाटर | करेला |
|---|---|---|---|
| समारू के पास | 65सेर | 5सेर | 5सेर |
| मंगलू के पास | 5सेर | 45सेर | 5सेर |
| बुधारू के पास | 5सेर | 5सेर | 29सेर |

समारू को प्राप्त विक्रय मूल्य $65x + 5y + 5z$ ----------(1)
मंगलू को प्राप्त विक्रय मूल्य $5x + 45y + 5z$ ----------(2)
बुधारू को प्राप्त विक्रय मूल्य $5x + 5y + 29z$ ----------(3)

चूँकि उक्त विक्रय मूल्य आपस में बराबर है।

अतः विक्रय मूल्य (1)– विक्रय मूल्य (2) से $60x - 40y = 0$

$\Rightarrow 3x - 2y = 0$ से

$x : y = 2:3$ -------(4)

विक्रय मूल्य (1)– विक्रय मूल्य (3) से $60x - 24z = 0$

$\Rightarrow 5x - 2z = 0$ से

$x : z = 2 : 5$ -------(5)

(4) और (5) के अनुपात संयोजन से $x : y : z = 2 : 3 : 5$ होगा।

ठस प्रकार आदान– प्रदान उपरांत तीनों मित्रों के पास बेचने हेतू तीनों प्रकार की सब्जियाँ की मात्रा एवं विक्रय दर ( भटा 2 रूपये/सेर , टमाटर 3रूपये/सेर और करेला 5रूपये/सेर) पर उन्हें प्राप्त कुल विक्रय (बेचरी) मूल्य की गणना–

समारू को प्राप्त विक्रय मूल्य $65x + 5y + 5z = 65*2+3*5+5*5 = 130+15+25 = 170$ रूपये
मंगलू को प्राप्त विक्रय मूल्य $5x + 45y + 5z = 5*2+45*3+5*5 = 10+135+25 = 170$ रूपये
बुधारू को प्राप्त विक्रय मूल्य $5x + 5y + 29z = 5*2+5*3+29*5 = 10+25+135 = 170$ रूपये
} होगा।

**उत्तर की व्यापकता** तीनों प्रकार की सब्जियाँ के विक्रय दर को शून्येतर चर राशि k द्वारा गुणा करने पर विक्रय दर की व्यापकता ( भटा 2k रूपये/सेर , टमाटर 3kरूपये/सेर और करेला 5kरूपये/सेर) दर्शित होता है। k के अनन्त मानों के प्रति अनन्त उत्तर प्राप्त होंगे।

**प्रश्न की व्यापकता** यदि n विक्रेताओं $(s_1, s_2, s_3, \text{----------}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n)$ ने n प्रकार की अलग–अलग वस्तुयें $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ की क्रमशः अलग–अलग $(m_1, m_2, m_3, \text{----------}, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n)$ इकाई मात्रा में बेचने ( विक्रय करने) बाजार लाये हैं। इन सबने आपसी प्रीति या व्यवहार वश प्रत्येक विक्रेताओं ने अपने पास रखे वस्तु में से शेष $(n-1)$ विक्रताओं को "d-d" इकाई मात्रा में आदान– प्रदान करते हैं। ( यह तभी सम्भव है जब सभी n व्यक्तियों के लाये वस्तु की इकाई मात्रा $d*n=x$ इकाई मात्रा से अधिक होगी।) इस प्रकार के आदान– प्रदान उपरांत n व्यक्तियों के पास सभी n प्रकार वस्तुयें विक्रय हेतु हो जाती है, जिनके विक्रय उपरांत सभी n विक्रेताओं को प्राप्त अलग–अलग विक्रय मूल्य आपस में बराबर–बराबर है। तब सभी n प्रकार वस्तु $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ का अलग–अलग कुल विक्रय मूल्य दर (---मुद्रा इकाई/मात्रा इकाई में) का सरल अनुपात $(k_1 : k_2 : k_3 : \text{----------} : k_{n-2} : k_{n-1} : k_n)$ निम्नानुसार हल प्रक्रम पूरा कर प्राप्त कीजिये।

## विधि 1■ लघुत्तम समापर्वक विधि

**प्रक्रम1•** n प्रकार की अलग–अलग वस्तुयें $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ की क्रमशः $(m_1, m_2, m_3, \text{----------}, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n)$ इकाई मात्रा में से $d*n=x$ इकाई मात्रा घटाकर क्रमशः–

$$m_1 - x = a_1$$
$$m_2 - x = a_2$$
$$m_3 - x = a_3$$
$$\text{----------}$$
$$\text{----------}$$
$$m_{n-2} - x = a_{n-2}$$
$$m_{n-1} - x = a_{n-1}$$
$$m_n - x = a_n$$ प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम2•** प्रक्रम1से प्राप्त घटा मान संख्यायें $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , ------ , $a_{n-2}$ , $a_{n-1}$ , $a_n$ का लघुत्तम समापवर्त्य $L_m$ प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम3•** प्रक्रम2से प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य L को क्रमशः $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , ------ , $a_{n-2}$ , $a_{n-1}$ , $a_n$ द्वारा अलग–अलग भाग देकर क्रमशः वस्तु $w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n$ का मानक अनुपात मूल्य प्राप्त कीजिये। यथा–

वस्तु $w_1$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_m \div a_1 = k_1$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_2$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_m \div a_2 = k_2$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_3$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_m \div a_3 = k_3$ मुद्रा इकाई
---
---
वस्तु $w_{n-2}$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_m \div a_{n-2} = k_{n-2}$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_{n-1}$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_m \div a_{n-1} = k_{n-1}$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_n$ का प्रति इकाई विक्रय मात्रा मूल्य = $L_m \div a_n = k_n$ मुद्रा इकाई होगा।

अर्थात् $w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n$ का सरल अनुपात मूल्य दर–

$$k_1 : k_2 : k_3 : \text{----------} : k_{n-2} : k_{n-1} : k_n$$
$$= \frac{L_m}{m_1 - x} : \frac{L_m}{m_2 - x} : \frac{L_m}{m_3 - x} : \text{----------} : \frac{L_m}{m_{n-2} - x} : \frac{L_m}{m_{n-1} - x} : \frac{L_m}{m_n - x}$$
$$= \frac{L_m}{m_1 - n*d} : \frac{L_m}{m_2 - n*d} : \frac{L_m}{m_3 - n*d} : \text{----------} : \frac{L_m}{m_{n-2} - n*d} : \frac{L_m}{m_{n-1} - nd} : \frac{L_m}{m_n - nd}$$ होगा।

**मानक अनुपात** – (प्रक्रम**1•** के बाद)

**प्रक्रम2•** प्रक्रम1से प्राप्त घटा मान संख्यायें $a_1$ , $a_2$ , $a_3$ , ------ , $a_{n-2}$ , $a_{n-1}$ , $a_n$ का मानक अनुपात मान $b_1 : b_2 : b_3 : \text{------} : b_{n-2} : b_{n-1} : b_n$ प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम3•** प्रक्रम1से प्राप्त मानक अनुपात मान $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , ------ , $b_{n-2}$ , $b_{n-1}$ , $b_n$ लघुत्तम समापवर्त्य $L_r$ प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम4•** प्रक्रम3से प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य $L_r$ को क्रमशः $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , ------ , $b_{n-2}$ , $b_{n-1}$ , $b_n$ द्वारा अलग–अलग भाग देकर क्रमशः वस्तु $w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n$ का मानक अनुपात मूल्य प्राप्त कीजिये। यथा–

वस्तु $w_1$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_r \div b_1 = r_1$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_2$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_r \div b_2 = r_2$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_3$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_r \div b_3 = r_3$ मुद्रा इकाई
---
---

वस्तु $w_{n-2}$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_r \div b_{n-2} = r_{n-2}$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_{n-1}$ का प्रति इकाई मात्रा विक्रय मूल्य = $L_r \div b_{n-1} = r_{n-1}$ मुद्रा इकाई
वस्तु $w_n$ का प्रति इकाई विक्रय मात्रा मूल्य = $L_r \div b_n = r_n$ मुद्रा इकाई होगा।

## विधि 2■ सरल बीजगणित समिका विधि ( विधि 1■ का प्रमाण)

**मितानी गणित प्रमेय** यदि n विक्रेताओं $(s_1, s_2, s_3, \text{----------}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n)$ ने n प्रकार की अलग–अलग वस्तुयें $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ की क्रमशः अलग–अलग $(m_1, m_2, m_3, \text{----------}, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n)$ इकाई मात्रा में बेचने ( विक्रय करने) बाजार लाये हैं। इन सबने आपसी प्रीति या व्यवहार वश प्रत्येक विक्रेता अपने पास रखे वस्तु में से शेष $(n-1)$ विक्रेताओं को "d-d" इकाई मात्रा में आदान– प्रदान करते हैं। ( यह तभी सम्भव है जब सभी n विक्रेताओं के लाये वस्तु की इकाई मात्रा $d*n=x$ इकाई मात्रा से अधिक होगी।) इस प्रकार के आदान– प्रदान उपरांत सभी n विक्रेताओं के पास सभी n प्रकार वस्तुयें विक्रय हेतु हो जाती है, जिनके विक्रय उपरांत सभी n विक्रेताओं को प्राप्त अलग–अलग कुल विक्रय मूल्य आपस में बराबर–बराबर है। तब सभी n प्रकार वस्तु $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ का अलग–अलग विक्रय मूल्य दर (---मुद्रा इकाई/मात्रा इकाई में) का सरल अनुपात संयोजन $(k_1 : k_2 : k_3 : \text{----------} : k_{n-2} : k_{n-1} : k_n) = \frac{L_m}{m_1 - x} : \frac{L_m}{m_2 - x} : \frac{L_m}{m_3 - x} : \text{----------} : \frac{L_m}{m_{n-2} - x} : \frac{L_m}{m_{n-1} - x} : \frac{L_m}{m_n - x}$ होगा। जहाँ $L_m$ = [संख्या मानों $(m_1 - x)$, $(m_2 - x)$, $(m_3 - x)$,------- $(m_{n-2} - x), (m_{n-1} - x), (m_n - x)$ का लघुत्तम समापवर्त्य है।]

## प्रमाण

**प्रक्रम1•** यदि n विक्रेताओं $(s_1, s_2, s_3, \text{----------}, s_{n-2}, s_{n-1}, s_n)$ ने n प्रकार की अलग–अलग वस्तुयें $(w_1, w_2, w_3, \text{----------}, w_{n-2}, w_{n-1}, w_n)$ की क्रमशः अलग–अलग $(m_1, m_2, m_3, \text{----------}, m_{n-2}, m_{n-1}, m_n)$ इकाई मात्रा में बेचने ( विक्रय करने) बाजार लाये हैं। इन सबने आपसी प्रीति या व्यवहार वश प्रत्येक व्यक्ति अपने पास रखे वस्तु में से शेष $(n-1)$ व्यक्तियों को "d-d" इकाई मात्रा में आदान– प्रदान करते हैं। आदान– प्रदान उपरांत n सभी विक्रेताओं के पास सभी n प्रकार वस्तुयें विक्रय हेतु हो जाती है, तब $(n-1)*d = c$ के प्रतिस्थापन से–विक्रय हेतु सभी विक्रेता के प्रति क्रमानुसार सभी n प्रकार वस्तुओं की मात्रा तालिका

| वस्तुयें→ | $w_1$ | $w_2$ | $w_3$ | ---------- | $w_{n-2}$ | $w_{n-1}$ | $w_n$ ' की मात्रायें |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| विक्रेता $s_1$ के पास | $m_1 - c$ | d | d | ---------- | d | d | d |
| विक्रेता $s_2$ के पास | d | $m_2 - c$ | d | ---------- | d | d | d |
| विक्रेता $s_3$ के पास | d | d | $m_3 - c$ | ---------- | d | d | d |
| ---------- | | | | | | | |
| ---------- | | | | | | | |
| विक्रेता $s_{n-2}$ के पास | d | d | d | ---------- | $m_{n-2} - c$ | d | d |
| विक्रेता $s_{n-1}$ के पास | d | d | d | ---------- | d | $m_{n-1} - c$ | d |
| विक्रेता $s_n$ के पास | d | d | d | ---------- | d | d | $m_n - c$ |

**प्रक्रम2•** विक्रय उपरांत सभी विक्रेता को प्राप्त विक्रय मूल्य की गणना–

विक्रेता $s_1$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_1$ $= (m_1 - c) * k_1) + d*k_2 + d*k_3 + \text{--------} + d*k_{n-2} + d*k_{n-1} + d*k_n$
विक्रेता $s_2$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_2$ $= d*k_1 + (m_2 - c)*k_2 + d*k_3 + \text{--------} + d*k_{n-2} + d*k_{n-1} + d*k_n$
विक्रेता $s_3$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_3$ $= d*k_1 + d*k_2 + (m_3 - c)*k_3 + \text{--------} + d*k_{n-2} + d*k_{n-1} + d*k_n$
---
---
विक्रेता $s_{n-2}$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_{n-2}$ $= d*k_1 + d*k_2 + d*k_3 + \text{--------} + (m_{n-2} - c)*k_{n-2} + d*k_{n-1} + d*k_n$
विक्रेता $s_{n-1}$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_{n-1}$ $= d*k_1 + d*k_2 + d*k_3 + \text{--------} + d*k_{n-2} + (m_{n-1} - c)*k_{n-1} + d*k_n$
विक्रेता $s_n$ को प्राप्त विक्रय मूल्य$_n$ $= d*k_1 + d*k_2 + d*k_3 + \text{--------} + d*k_{n-2} + d*k_{n-1} + (m_{n-1} - c)*k_n$

**प्रक्रम3•** प्रतिबंधानुसार प्रक्रम3से प्राप्त क्रमानुसार आपस में बराबर है।

$\therefore$ विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_2$ = $[(m_1 - c) * k_1 - d * k_1] - [(m_2 - c) * k_2 - d * k_2] = 0$ से

$[(m_1 - c) * k_1 - d * k_1] = [(m_2 - c) * k_2 - d * k_2]$

$\Rightarrow [m_1 - (c + d)] * k_1 = [m_2 - (c + d)] * k_2$

$\Rightarrow [m_1 - nd] * k_1 = [m_2 - nd] * k_2$

$c = (n - 1) * d = nd - d$ के प्रतिस्थान से

$\Rightarrow [m_1 - x] * k_1 = [m_2 - x] * k_2$ $nd = x$ के प्रतिस्थान से

इसी प्रकार

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_3$ ) से $[m_1 - x] * k_1 = [m_3 - x] * k_3$ ---------(2)

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_4$ ) से $[m_1 - x] * k_1 = [m_4 - x] * k_4$ ---------(3)

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_5$ ) से $[m_1 - x] * k_1 = [m_5 - x] * k_5$ ---------(4)

---

---

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_{n-2}$ ) से $[m_1 - x] * k_1 = [m_{n-2} - x] * k_{n-2}$ ---------(n−3)

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_{n-1}$ ) से $[m_1 - x] * k_1 = [m_{n-1} - x] * k_{n-1}$ ---------(n−2)

( विक्रय मूल्य$_1$ − विक्रय मूल्य$_n$ ) से $[m_1 - x] * k_n = [m_n - x] * k_n$ ---------(n−1)

अर्थात् समीकरण 1, 2, 3, 4, ------- (n−3), (n−2), (n − 1) से

$[m_1 - x] * k_1 = [m_2 - x] * k_2 = [m_3 - x] * k_3 = [m_4 - x] * k_4 =$ --------= ---- = ----

-

--=---------= ----------= $[m_{n-2} - x] * k_{n-2} = [m_{n-1} - x] * k_{n-1} = [m_n - x] * k_n$ से

$k_1 : k_2 = [m_2 - x] : [m_1 - x]$

$k_1 : k_3 = [m_3 - x] : [m_1 - x]$

$k_1 : k_4 = [m_4 - x] : [m_1 - x]$

.-- : -- = --------- : .---------- .

.-- : -- = --------- : .----------

$k_1 : k_{n-2} = [m_{n-2} - x] : [m_1 - x]$

$k_1 : k_{n-1} = [m_{n-1} - x] : [m_1 - x]$

$k_1 : k_n = [m_n - x] : [m_1 - x]$

**प्रक्रम4• सरल अनुपात संयोजन–**

यदि उक्त अनुपात मानों को $k_1$ के प्राप्त मानों $[m_2 - x]$, $[m_3 - x]$ --------$[m_{n-2} - x]$, $[m_{n-1} - x]$,

$[m_n - x]$ का लघुत्तम समापवर्त्य $L_m$ के तुल्यता पर विस्तारित करने पर–

$k_1 : k_2 = L_m : \frac{L_m(m_1 - x)}{(m_2 - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_2 - x)}$

$k_1 : k_3 = L_m : \frac{L_m(m_1 - x)}{(m_3 - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_3 - x)}$

$k_1 : k_4 = L_m : \frac{L_m(m_1 - nd)}{(m_4 - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_4 - x)}$

.-- : -- = --- : .---------- =. .------- : .-------- .

.-- : -- = --- : .---------- = .------- : .--------

$k_1 : k_{n-2} = L_m : \frac{L_m(m_1 - nd)}{(m_{n-2} - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_{n-2} - x)}$

$k_1 : k_{n-1} = L_m : \frac{L_m(m_1 - x)}{(m_{n-1} - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_{n-1} - x)}$

$k_1 : k_n = L_m : \frac{L_m(m_1 - x)}{(m_n - x)} = \frac{L_m}{(m_1 - x)} : \frac{L_m}{(m_n - x)}$

सरल अनुपात संयोजन $k_1 : k_2 : k_3 :$ ----------$: k_{n-2} : k_{n-1} : k_n = \frac{L_m}{(m_1-x)} : \frac{L_m}{(m_2-x)} : \frac{L_m}{(m_3-x)} : \frac{L_m}{(m_4-x)} :$ .-----

.------ : .------ : .------: $\frac{L_m}{(m_{n-2}-x)} : \frac{L_m}{(m_{n-1}-x)} : \frac{L_m}{(m_n-x)}$ होगा। --------(1)

$[m_2 - x], [m_3 - x]$ --------$[m_{n-2} - x], [m_{n-1} - x], [m_n - x]$ का लघुत्तम समापवर्त्य $L_m$

$[m_1 - x], [m_2 - x], [m_3 - x]$ --------$[m_{n-2} - x], [m_{n-1} - x], [m_n - x]$ का लघुत्तम समापवर्त्य $=$ $[m_1 - x]$ और $L_m$ का लघुत्तम समापवर्त्य $L_r$ से

सरल अनुपात संयोजन $k_1 : k_2 : k_3 :$ ----------$: k_{n-2} : k_{n-1} : k_n = \frac{L_r}{(m_1-x)} : \frac{L_r}{(m_2-x)} : \frac{L_r}{(m_3-x)} : \frac{L_r}{(m_4-x)} :$ .-----

.------ : .------ : .------: $\frac{L_r}{(m_{n-2}-x)} : \frac{L_r}{(m_{n-1}-x)} : \frac{L_r}{(m_n-x)}$ होगा। --------(2) **प्रमाणित**

**मानक अनुपात संयोजन–** सरल अनुपात संयोजन $k_1 : k_2 : k_3 :$ ----------$: k_{n-2} : k_{n-1} : k_n$ के प्रति $k_1, k_2, k_3,$ ----------$, k_{n-2}, k_{n-1}, k_n$ का महत्तम समापवर्तक $= h$ हो तो मानक अनुपात संयोजन–

$r_1 : r_2 : r_3 :$ ----------$: r_{n-2} : r_{n-1} : r_n = \frac{k_1}{h} : \frac{k_2}{h} : \frac{k_3}{h} :$----------$: \frac{k_{n-2}}{h} : \frac{k_{n-1}}{h} : \frac{k_n}{h}$ होगा।

**अथवा**

**प्रक्रम1•** $[m_1 - x], [m_2 - x], [m_3 - x]$ --------$[m_{n-2} - x], [m_{n-1} - x], [m_n - x]$ को इनके महत्तम समापवर्तक $= h$ द्वारा विभाजित कर क्रमशः भागफल $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , ------ , $b_{n-2}$ , $b_{n-1}$ , $b_n$ प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम2•** प्रक्रम 1 से प्राप्त भागफल $b_1$ , $b_2$ , $b_3$ , ------ , $b_{n-2}$ , $b_{n-1}$ , $b_n$ का लघुत्तम समापवर्त्य $L_b$ प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम3•** मानक अनुपात संयोजन–

$r_1 : r_2 : r_3 :$ ----------$: r_{n-2} : r_{n-1} : r_n = \frac{L_b}{b_1} : \frac{L_b}{b_2} : \frac{L_b}{b_3} :$ ---------- $: \frac{L_b}{b_{n-2}} : \frac{L_b}{b_{n-1}} : \frac{L_b}{b_n}$ होगा।

**उदाहरण** रत्नों के पाँच व्यापारी मूलचँद, फकीरचँद, गरीबचँद, फूलचंद और गुलाबँद क्रमशः 135 नग हीरा, 95 नग मोती, 75 नग पन्ना, 63 नग नीलम, और 45 नग पुखराज विक्रय करने गौरैया मेला चौरेल आये। आपसी प्रीतिवश अपने–अपने रत्नों में से पाँचों व्यापारी 3-3 नग आदान–प्रदान करते हैं, जिससे विक्रय के लिये पाँचों व्यापारियों के पास उपरोक्त पाँचों प्रकार के रत्न हो जाते है। मेले के अन्त में सभी पूरे–पूरे रत्न विक्रय कर बराबर–बराबर विक्रय मूल्य प्राप्त करते हैं। तो पाँचों रत्न हीरा, मोती, पन्ना, नीलम और पुखराज का प्रति नग मानक अनुपात मूल्य हजार की इकाई में ज्ञात कीजिये।

## विधि 1■ लघुत्तम समापर्वक विधि

**प्रक्रम1•** हीरा, मोती, पन्ना, नीलम और पुखराज की मात्रा संख्या क्रमशः 135 नग, 95नग, 75 नग, 63नग और 45 नग में से { रत्नों के प्रकार संख्या} *{ रत्न के आदान–प्रदान की नग संख्या} $= 5*3 = 15$ नग को अलग–अलग घटाने पर –

| | हीरा | मोती | पन्ना | नीलम | पुखराज |
|---|---|---|---|---|---|
| | 135 नग | 95 नग | 75 नग | 63 नग | 45 नग |
| – | 15 नग | 15 नग | 15 नग | 15 नग | 15 नग |
| = | 120 नग | 80 नग | 60 नग | 48 नग | 30 नग |

**प्रक्रम2•** प्रक्रम1 से प्राप्त नग संख्या $120, 80, 60$ 48 और 30 का लघुत्तम समापवर्त्य $= 240$ प्राप्त कीजिये।

**प्रक्रम3•** प्रक्रम2 से प्राप्त लघुत्तम समापवर्त्य $= 240$ को प्रक्रम1 से प्राप्त नग संख्या $120, 80, 60$ 48 और 30 द्वारा अलग–अलग भाग देकर क्रमशः हीरा, मोती, पन्ना, नीलम और पुखराज का मानक अनुपात मूल्य हजार रूप्ये की इकाई में प्राप्त कीजिये। यथा–

$240 \div 60 = 2$ हजार रूपये प्रति नग हीरा
$240 \div 80 = 3$ हजार रूपये प्रति नग मोती
$240 \div 60 = 4$ हजार रूपये प्रति नग पन्ना
$240 \div 48 = 5$ हजार रूपये प्रति नग नीलम
$240 \div 30 = 8$ हजार रूपये प्रति नग पुखराज

} का हजार रूपये की इकाई मान पर न्यूनतम बाजार मूल्य होगा।

## बीजगणित समिका विधि

माना कि – हीरा का प्रति नग विक्रय मूल्य $= p$ हजार रूपये
मोती का प्रति नग विक्रय मूल्य $= q$ हजार रूपये
पन्ना का प्रति नग विक्रय मूल्य $= r$ हजार रूपये
नीलम का प्रति नग विक्रय मूल्य $= s$ हजार रूपये
पुखराज का प्रति नग विक्रय मूल्य $= t$ हजार रूपये } है।

आदान–प्रदान उपरांत विक्रय हेतु रत्नों की मात्रा–

| | हीरा | मोती | पन्ना | नीलम | पुखराज |
|---|---|---|---|---|---|
| मूलचँद के पास | 123 नग | 3 नग | 3 नग | 3 नग | 3 नग |
| फकीरचँद के पास | 3 नग | 83 नग | 3 नग | 3 नग | 3 नग |
| गरीबचँद के पास | 3 नग | 3 नग | 63 नग | 3 नग | 3 नग |
| फूलचँद के पास | 3 नग | 3 नग | 3 नग | 51 नग | 3 नग |
| गुलाबचँद के पास | 3 नग | 3 नग | 3 नग | 3 नग | 33 नग |

विक्रय उपरांत प्राप्त कूल विक्रय मूल्य–

मूलचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य – $123p + 3q + 3r + 3s + 3t$ --------(1)
फकीरचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य – $3p + 83q + 3r + 3s + 3t$ --------(2)
गरीबचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य – $3p + 3q + 63r + 3s + 3t$ --------(3)
फूलचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य – $3p + 3q + 3r + 51s + 3t$ --------(4)
गुलाबचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य – $3p + 3q + 3r + 3s + 33t$ --------(5)

चूँकि पाचों व्यापारी को बराबर–बराबर विक्रय मूल्य प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ $(1) - (2)$ से $120p - 80q = 0 \Rightarrow 120p = 80q \Rightarrow 3p = 2q$ से $p : q = 2 : 3$
$(1) - (3)$ से $120p - 60r = 0 \Rightarrow 120p = 60r \Rightarrow 2p = r$ से $p : r = 1 : 2$
$(1) - (4)$ से $120p - 48s = 0 \Rightarrow 120p = 48s \Rightarrow 5p = 2s$ से $p : s = 2 : 5$
$(1) - (4)$ से $120p - 30t = 0 \Rightarrow 120p = 30t \Rightarrow 4p = t$ से $p : t = 1 : 4$

उक्त अनुपात मानों को $p$ के प्राप्त मानों $2, 1, 2, 1$ के लघुत्तम समापवर्त्य $2$ के तुल्यता पर विस्तारित करने पर–

$p : q = 2 : 3 \bullet$ $p : r = 2 : 4 \bullet$ $p : s = 2 : 5 \bullet$ $p : t = 2 : 8 \bullet$ से

सरल अनुपात संयोजन $p : q : r : s : t = 2 : 3 : 4 : 5 : 8$ होगा।

अतः पाँचों रत्न हीरा, मोती, पन्ना, नीलम और पुखराज का प्रति नग मानक अनुपात मूल्य हजार रूपये की इकाई में क्रमशः

2 हजार रूपये , 3 हजार रूपये, 4 हजार रूपये, 5 हजार रूपये, और 8 हजार रूपये होगा। **उत्तर।**

## उत्तर जाँच

मूलचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य $= 123p + 3q + 3r + 3s + 3t = 123*2 + 3*3 + 3*4 + 3*5 + 3*8$
$= 246 + 9 + 12 + 15 + 24 = 306$ हजार रूपये

फकीरचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य $= 3p + 83q + 3r + 3s + 3t = 3*2 + 83*3 + 3*4 + 3*5 + 3*8$
$= 6 + 249 + 12 + 15 + 24 = 306$ हजार रूपये

गरीबचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य $= 3p + 3q + 63r + 3s + 3t = 3*2 + 3*3 + 63*4 + 3*5 + 3*8$
$= 6 + 9 + 252 + 15 + 24 = 306$ हजार रूपये

फूलचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य $= 3p + 3q + 3r + 51s + 3t = 3*2 + 3*3 + 3*4 + 51*5 + 3*8$
$= 6 + 9 + 12 + 255 + 24 = 306$ हजार रूपये

गुलाबचँद को प्राप्त कुल विक्रय मूल्य $= 3p + 3q + 3r + 3s + 33t = 3*2 + 3*3 + 3*4 + 3*5 + 33*8$
$= 6 + 9 + 12 + 15 + 264 = 306$ हजार रूपये

**निष्कर्ष** प्राप्त उत्तर सही है।

**-------07--------**

## अध्याय -8
# खण्डो में बाँटना

**पंक्ति 8.1■ कारीगीर एक मनिया लोहा देखा कहे बिसाहू से•**
**एकर चार कुटका करन कतिक–कतिक ले••**
**जेकर ले एक से चालीस सेर तउलो वैसे•**
**सेर–सेर म जो मांगे तउल सके वैसे••**
**ये चारे ठन बाँटे ल करहीं डेरी–जेवनी•**
**सिंधी बनियाँ के जइसने अकल पुरनी••**

चटकारू बिसाहू के उत्तर

**गनित चटकारू बिसाहू थोरकुन बिचारिस•**
**कारीगीर के समसिया क सुंदर हल सुझाइस••**
**एकर कुटका होही एक, तिन,नौ अऊ सत्ताइस सेरिया•**
**तेकर ले तउल सकहीं, एक ले चालिस सेर सिंधी बनिया••**

**शब्दार्थ** कारीगीर = कारीगर, लोहार। एक मनियाँ = एक मन वाले, (40 सेर) का। कुटका करन = तुकड़ा या बाँटा या भाग करेंगे। जेकर ले = जिससे। कतिक–कतिक =कितने–कितने का। तउलों = तौल सकूँ। डेरी–जेवनी = बाँया–दाँया। जइसने = जैसे। सुझइस =बताया। बिचारिस = विचार किया। सिंधी बनियाँ = सिंध प्रांत से आये बनिया समुदाय के लोग।

**विश्लेषण** एक दुकान वाले सिंधी बनिया के पास 40 सेर (1 मन) का एक लोहा है। वह उस लोहे का सेर–सेर इकाई मात्रा पर अलग–अलग तौल मात्रा में चार खण्ड कराने का इस प्रकार विचार आया कि इन चारों खण्ड ही मे से आवश्यकतानुसार खण्ड मानों का अनुप्रोग कर एक से चालीस सेर तक तौल मात्रा को तौल जा सके । तौलने में इन खण्ड मानों को बाँया पलड़े में एक ही खण्डमान अथवा दो अथवा तीन अथवा चारों ही खण्ड मान अथवा बाँया एवं दाँया दोनों के पलड़े रखना होगा। गणितीय प्रक्रिया अन्तर्गत केवल बाँये पलड़े में रखे खण्डमानों के भार मात्रा योगमान में से बाँये पलड़े में रखे खण्डमानों के भार मात्रा योगमान को घटाना होगा। ऐसा कहकर उस लोह पिण्ड को कारीगर लोहार को दे देता है। कारीगर ठीक–ठीक समझ नहीं पाया तो पड़ोसी गणित जनकारा बिसाहू से पूछने लगा। गणित जनकारा बिसाहू जरा सोच विचार कर सुझाया– इस एक मनिया लोहा के एक, तीन, नौ और सत्ताइस सेर भार वाले चार खण्ड किया जावे।

**भावार्थ** यह पंक्ति गणित तौलने की इकाई सेर (40 सेर= 1 मन) पद्धत्ति पर आधारित है। तब प्रश्न बनता हे कि चार संख्या चुने जिनका योगमान 40 हो तथा इन्हीं चारों संख्या में से ही आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन (जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------38, 39, 40 दर्शित कराया जा सकता है।

## हल प्रस्तुति

**प्रक्रम1•** सर्व प्रथम "1" चाहिये। अतः प्रथम भार मात्रा इकाई खण्ड / संख्या "1" होगा।

**प्रक्रम2•** दूसरा खण्डमान/संख्या प्राप्त करने के लिये वह संख्या प्राप्त करें जिसमें से 1 घटाने पर 2 प्राप्त हो।
अतः दूसरा खण्डमान/संख्या 1+2 = 3 होगा।

**प्रक्रम3•** 1 और 3 द्वारा अधिकतम् 1+3 = 4 प्राप्त कर सकते हैं। तब तीसरा खण्ड या संख्या प्राप्त करने के लिये वह संख्या प्राप्त करें जिसमें से 4 घटाने पर 5 प्राप्त हो।
अतः तीसरा खण्डमान/संख्या 4+5 = 9 होगा।

**प्रक्रम4•** 1,3 और 9 द्वारा अधिकतम् 1+3+9 = 13 प्राप्त कर सकते हैं। तब तीसरा खण्ड या संख्या प्राप्त करने के लिये वह संख्या प्राप्त करें जिसमें से 13 घटाने पर 14 प्राप्त हो।
अतः चौथा खण्डमान/संख्या 13+14 = 27 होगा।

**प्रक्रम5•** 1,3, 9 और 27 द्वारा अधिकतम् 1+3+9+27 = 40 प्राप्त कर सकते हैं।

अतः चार खण्डमान 1,3,9 और27 सेर के होंगे। और संख्यायें 1,3,9 और27 होंगे।

**उत्तर जाँच** **सेर या संख्या में**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 01 के लिये | 1 | 21 के लिये | (27+3)-9 |
| 02 के लिये | 3-1 | 22 के लिये | (27+3+1)-9 |
| 03 के लिये | 3 | 23 के लिये | 27-(3+1) |
| 04 के लिये | 3+1 | 24 के लिये | 27-3 |
| 05 के लिये | 9-(3+1) | 25 के लिये | (27+1)-3 |
| 06 के लिये | 9-3 | 26 के लिये | 27-1 |
| 07 के लिये | (9+1)-3 | 27 के लिये | 27 |
| 08 के लिये | 9-1 | 28 के लिये | 27+1 |
| 09 के लिये | 9 | 29 के लिये | (27+3)-1 |
| 10 के लिये | 9+1 | 30 के लिये | 27+3 |
| 11 के लिये | (9+3)-1 | 31 के लिये | 27+3+1 |
| 12 के लिये | 9+3 | 32 के लिये | (27+9)-(3+1) |
| 13 के लिये | 9+3+1 | 33 के लिये | (27+9)-3 |
| 14 के लिये | 27-(9+3+1) | 34 के लिये | (27+9+1)-3 |
| 15 के लिये | 27-(9+3) | 35 के लिये | (27+9)-1 |
| 16 के लिये | (27+1)-(9+3) | 36 के लिये | 27+9 |
| 17 के लिये | 27-(9+1) | 37 के लिये | 27+9+1 |
| 18 के लिये | 27-9 | 38 के लिये | (27+9+3)-1 |
| 19 के लिये | (27+1)-9 | 39 के लिये | 27+9+3 |
| 20 के लिये | (27+3)-(9+1) | 40 के लिये | 27+9+3+1 |

**पंक्ति** 8.2■ **एक जनगनना परिवार म रहवइया मनुख पाँच •**
**पूरा सौ बरस सबके उमर के जोड़ हाबे आज ••**
**एक नइते दू ,तिन चार झन के उमर ल लिख •**
**तभो नइ बने त पाँचों झन उमर ल तको लिख ••**
**नाना के नानू एकरे बीच कर ले जोड़ नइते घटाना •**
**चाहे कर ले दुनों साथ –साथ जोड़ना अऊ घटाना ••**
**काकरो उमर के संखिया न दुहराना न तिहराना •**
**न छटवाँ के उमर समाना, एक से सौ तक लिखना ••**
**गनित के पाठ म नवाँ गोठ हे सिखना अऊ सिखाना •**
**सोच–बिचार के पाँचों मनुख के ओरी–ओरी उमर बताना ••**
**संग में बइठे नानू के संगवारी मन ल घलो हे बताना •**
**पाछू नइ हे पछताना, ये सब के उमर बताहीं जब नाना ••**

**शब्दार्थ** जनगनना = मानव गिनती । म= में। रहवइया = रहनेवाले। बरस= वर्ष। उमर =उम्र। मनुख = मनुष्य , मानव। नानू = नवाशा (बेटी का बेटा)। न्इते = या। दु = दो। तिन=तीन तभो = तो भी। नइ = नहीं। पाँचोंझन के = पाँचों मिला के । एकरे = इसके ही। कर ले = कर लो। संखिया = संख्या। दुहराना = दोहराना। तिहराना = तीन बार लेना। समाना = मिलाना। गनित= गणित। नवाँ = नया। गोठ= बात। अऊ = और।सोच–बिचार=समझ–बूझ। ओरी–ओरी= क्रम से। बइठे = बैठे। संगवारी = मित्र। घलो = भी। पाछू = पीछे। बताहीं = बतायेंगें।

**भावार्थ** **नाना एवं नवाशा के बीच का गणितीय संवाद भाव में–**

जनगणना करने पर पाया गया कि एक परिवार विशेष में पाँच व्यक्ति येसे मिले कि उन सभी व्यक्ति के उम्रों का योगमान 100 वर्ष है। उनके वर्षों में अलग–अलग उम्रमान संख्या इस तरह के है कि – इन्हीं पाँचों संख्या में से ही आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन

(जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------98, 99, 100 दर्शित कराया जा सकता है। मेरे प्रिय नवाशा एवं नवाशा के मित्रों उन पाँचों व्यक्तियों के उम्र अलग–अलग क्रम से जल्द बताना। गणित नयी बात बताना है, जिसके लिये उत्तर की जाँच प्रतिबंधानुसार केवल जोड़ने, या जोड़ने एवं घटाने दोनों की संक्रिया को स्पष्ट करते हुये 1, 2, 3, ----------98, 99, 100 दर्शित कीजिये। पीछे नहीं पछताना जब ये सब उत्तर बतायेगा नाना।

**हल प्रस्तुति** जनगणना हल प्रस्तुति 8.1 के अन्तर्गत प्रक्रम 1,2,3 एवं 4 की व्याख्या प्रस्तुति के अनुसार – 1,3,9 और 27 द्वारा 1 से 40 तक की संख्या प्राप्त किया जा चुका है। तब इसी क्रम में–

**प्रक्रम5•** 1,3,9 और 27 से अधिकतम् $1+3+9+27=40$ प्राप्त किया जा सकता है। तब पाँचवीं संख्या प्राप्त करने के लिये वह संख्या प्राप्त करें जिसमें से 40 घटाने पर 41 प्राप्त हो।

अतः पाँचवीं संख्या $40+41=81$ होना चाहिये। $1+3+9+27+81=121,100$ से अधिक है। अतः पाँववीं संख्या 81 लिया जाना यथेष्ठ नहीं होगा। तब पाँववीं संख्या $100-(1+3+9+27)=100-40=60$ होगा।

इस प्रकार उक्त जनगणना परिवार रहने वाले व्यक्तियों उम्र क्रमानुसार 1वर्ष, 3वर्ष, 9वर्ष, 27वर्ष, और 60वर्ष, है। **उत्तर।**

**उत्तर जाँच**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 41 के लिये | [60+9]-[27+1] | 59 के लिये | 60-1 |
| 42 के लिये | [60+9]-27 | 60 के लिये | 60 |
| 43 के लिये | [60+9+1]-27 | 61 के लिये | 6o+1 |
| 44 के लिये | [60+9+3]-[27+1] | 62 के लिये | [60+3]-1 |
| 45 के लिये | [60+9+3]-27 | 63 के लिये | 60+3 |
| 46 के लिये | [60+9+3+1]-27 | 64 के लिये | 60+3+1 |
| 47 के लिये | 60-[9+3+1] | 65 के लिये | [60+9]-[3+1] |
| 48 के लिये | 60-[9+3] | 66 के लिये | [60+9]-3 |
| 49 के लिये | [60+1]-[9+3] | 67 के लिये | [60+9+1]-3 |
| 50 के लिये | 60-[9+1] | 68 के लिये | [60+9]-1 |
| 51 के लिये | 60-9 | 69 के लिये | 60+9 |
| 52 के लिये | [60+1]-9 | 70 के लिये | 60+9+1 |
| 53 के लिये | [60+3]-[9+1] | 71 के लिये | [60+9+3]-1 |
| 54 के लिये | [60+3]-9 | 72 के लिये | 60+9+3 |
| 55 के लिये | [60+3+1]-9 | 73 के लिये | 60+9+3+1 |
| 56 के लिये | 60-[3+1] | 74 के लिये | [60+27]-[9+3+1] |
| 57 के लिये | 60-3 | 75 के लिये | [60+27]-[9+3] |
| 58 के लिये | [60+1]-3 | 76 के लिये | [60+27+1]-[9+3] |
| 77 के लिये | [60+27]-[9+1] | 89 के लिये | [60+27+3]-1 |
| 78 के लिये | [60+27]-9 | 90 के लिये | 60+27+3 |
| 79 के लिये | [60+27+1]-9 | 91 के लिये | 60+27+3+1 |
| 80 के लिये | [60+27+3]-[9+1] | 92 के लिये | [60+27+9]-[3+1] |
| 81 के लिये | [60+27+3]-9 | 93 के लिये | [60+27+9]-3 |
| 82 के लिये | [60+27+3+1]-9 | 94 के लिये | [60+27+9+1]-3 |
| 83 के लिये | [60+27]-[3+1] | 95 के लिये | [60+27+9]-1 |
| 84 के लिये | [60+27]-3 | 96 के लिये | 60+27+9 |
| 85 के लिये | [60+27+1]-3 | 97 के लिये | 60+27+9+1 |
| 86 के लिये | [60+27]-1 | 98 के लिये | [60+27+9+3]-1 |
| 87 के लिये | 60+27 | 99 के लिये | 60+27+9+3 |
| 88 के लिये | 60+27+1 | 100 के लिये | 60+27+9+3+1 |

**आधुनिक विस्तार (व्यापक प्रस्तुति)**

A■ यदि संख्या $x=\frac{3^n-1}{2}$ हो । जहाँ n प्राकृत संख्या समुच्चयN का अवयव है।

**जैसे** 1• $x=40=\frac{3^4-1}{2}$ 2• $x=121=\frac{3^5-1}{2}$ 3• $x=364=\frac{3^7-1}{2}$

**अभिगृहीत** संख्या $x=\frac{3^n-1}{2}=[1+3+3^2+3^3$ ----------$3^{n-3}+3^{n-2}+3^{n-1}]$ n पद तक होंगे।

तब n पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3$, --------..$3^{n-3}, 3^{n-2}, 3^{n-1}$में से ही आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन (जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------(x-2),(x-1), x दर्शित कराया जा सकता है।

**उदाहरण** $x=40=\frac{3^4-1}{2}=1+3+3^2+3^3=1+3+9+27$ 4 पद तक होंगे।

तब 4 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3 \Rightarrow 1,3,9,27$ में से ही आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन (जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------(x-2),(x-1), x दर्शित कराया जा सकता है। **पंक्ति8.1■** हल में स्पष्ट किया जा चुका है।

**इसी प्रकार–**

$x=121=\frac{3^5-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4=1+3+9+27+81$

$x=364=\frac{3^6-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5=1+3+9+27+81+243$

$x=1093=\frac{3^7-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6$

$=1+3+9+27+81+243+729$

$x=3280=\frac{3^8-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7$

$=1+3+9+27+81+243+729+2187$

$x=9841=\frac{3^9-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8$

$=1+3+9+27+81+243+729+2187+6561$

$x=29524=\frac{3^{10}-1}{2}=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9$

$=1+3+9+27+81+243+729+2187+6561+19683$

B■ यदि संख्या $x>(y=\frac{3^n-1}{2})$ हो ।

**जैसे** 1• $x=47>(y=40=\frac{3^4-1}{2})$ 2• $x=163>(y=121=\frac{3^5-1}{2})$

3• $x=500>(364=\frac{3^6-1}{2})$ 4• $x=1100>(y=1093=\frac{3^7-1}{2})$

**अभिगृहीत** संख्या $x>(y=\frac{3^n-1}{2}=1+3+3^2+3^3$ ----------$3^{n-3}+3^{n-2}+3^{n-1}$ n पद तक है)

तब n पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3$, --------..$3^{n-3}, 3^{n-2}, 3^{n-1}$ बाद (n+1) वीं संख्या (x-y) के बराबर होगी। यह (n+1) वीं संख्या (x-y) प्रथम प्राप्त n पदी संख्या क्रम का अवयव हो सकता है दोहराये हुये माना जाना चाहिये। अन्यथा एक नवीन संख्या होगी। इस प्रकार प्राप्त(n+1) संख्या मानों में से ही आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन (जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------(x-2),(x-1), x दर्शित कराया जा सकता है।

**जैसे** आवश्यकतानुसार संकलन– व्यवकलन (जोड़ना–घटाना) की प्रक्रिया करते हुये 1, 2, 3, ----------48 ,49, 50 तक की संख्या दर्शित कराने–

$x=50>(y=40=\frac{3^4-1}{2}=1+3+3^2+3^3=1+3+9+27$ 4 पद तक है)

तब 4 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3, \Rightarrow$ 1,3,9,27 बाद 5 वीं संख्या $50-40=10$ होगी।

**उत्तर जाँच** **पंक्ति** 8.1■ हल में 1, 2, 3, ----------38 ,39, 40 तक की संख्या दर्शित कराने उपरांत–

| | | | |
|---|---|---|---|
| 41 के लिये | 27+10+3+1 | 46 के लिये | 27+10+9 |
| 42 के लिये | (27+10+9)-(3+1) | 47 के लिये | 27+10+9+1 |
| 43 के लिये | (27+10+9)-3 | 48 के लिये | (27+10+9+3)-1 |
| 44 के लिये | (27+10+9+1)-3 | 49 के लिये | 27+10+9+3 |
| 45 के लिये | (27+10+9)-1 | 50 के लिये | 27+10+9+3+1 |

**इसी प्रकार**

1 से 67 तक के लिये–

$x=67 > (y = 40 = \frac{3^4-1}{2} = 1+3+3^2+3^3 = 1+3+9+27$ 4 पद तक है)

तब 4 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3, \Rightarrow$ 1,3,9,27 बाद 5 वीं संख्या $(x-y) = 67-40 = 27$ होगी, जो प्रथम 4 पदी संख्या क्रम का अवयव है।

**उत्तर जाँच** **पंक्ति 8.1■** हल में 1, 2, 3, ----------38 ,39, 40 तक की संख्या दर्शित कराने उपरांत–

| | | | |
|---|---|---|---|
| 41 के लिये | (27+27)-(9+3+1) | 55 के लिये | 27+27+1 |
| 42 के लिये | (27+27)-(9+3) | 56 के लिये | (27+27+3)-1 |
| 43 के लिये | (27+27+1)-(9+3) | 57 के लिये | 27+27+3 |
| 44 के लिये | (27+27)-(9+1) | 58 के लिये | 27+27+3+1 |
| 45 के लिये | (27+27)-9 | 59 के लिये | (27+27+9)-(3+1) |
| 46 के लिये | (27+27+1)-9 | 60 के लिये | (27+27+9)-3 |
| 47 के लिये | (27+27+3)-(9+1) | 61 के लिये | (27+27+9+1)-3 |
| 48 के लिये | (27+27+3)-9 | 62 के लिये | (27+27+9)-1 |
| 49 के लिये | (27+27+3+1)-9 | 63 के लिये | (27+27+9) |
| 50 के लिये | (27+27)-(3+1) | 64 के लिये | 27+27+9+1 |
| 51 के लिये | (27+27)-3 | 65 के लिये | (27+27+9+3)-1 |
| 52 के लिये | (27+27+1)-3 | 66 के लिये | 27+27+9+3 |
| 53 के लिये | (27+27)-1 | 67 के लिये | 27+27+9+3+1 |
| 54 के लिये | 27+27 | | |

1 से 500 तक के लिये–

$x=500 > (y = 368 = \frac{3^6-1}{2} = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5 = 1+3+9+27+81+243$ 6 पद तक है।

तब 6 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, \Rightarrow$ 1,3,9,27,81,243 बाद 7 वीं संख्या $(x-y) = 500 - 364 = 136$ होगी,

1 से 1100 तक के लिये–

$x=1100 > (y = 1093 = \frac{3^7-1}{2} = 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6 = 1+3+9+27+81+243+729$ 7 पद तक है।

तब 7 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6 \Rightarrow$ 1,3,9,27,81,243 ,729 बाद 8 वीं संख्या $(x-y) = 1100 - 1093 = 7$ होगी।

1 से 10084 तक के लिये–

$x=10084 > (y = 9841 = \frac{3^9-1}{2}$

$= 1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8$

$= 1+3+9+27+81+243+729+2187+6561$ 9 पद तक है।

तब 9 पदी संख्या क्रम $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6, 3^7, 3^8 \Rightarrow$ 1,3,9,27,81,243 ,729,2187, 6561 बाद

10 वीं संख्या $(x-y)= 10084 - 9841 = 243$ होगी। जो प्रथम 9 पदी संख्या क्रम का अवयव है।

---------08-------

# अध्याय – 9
# जादुई–वर्ग

## 9-1 n*n का जादुई–वर्ग

सरल शब्दों में n*n का जादुई–वर्ग व्यवस्थित एवं प्रतिबंधित संख्या जाल है, जिसमें n*n वर्गिक चौखानों में भरी हुई संख्याओं में प्रत्येक आड़ी (पंक्तिक), खड़ी (स्तम्भिक) एवं तिर्यक (विकर्णिक) n चौखानों के संख्याओं का अलग–अलग योगमान बराबर होता है। **जैसे**–

3*3 का जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 1 | 6 |
| 3 | 5 | 7 |
| 4 | 9 | 2 |

4*4 का जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 101 | 4 | 6 | 97 |

5*5 का जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 249 | 42 | 231 | 168 |
| 123 | 195 | 96 | 159 | 177 |
| 222 | 114 | 150 | 186 | 78 |
| 213 | 141 | 204 | 105 | 87 |
| 132 | 51 | 258 | 69 | 240 |

**जादुई–वर्ग के अवयवों का नाम संयोजन** n*n वर्गिक चौखानों से तात्पर्य है ऐसा वर्गाकार पृष्ठतल या खण्ड जिसमें बाँये से दाँये एवं ऊपर से नीचे वर्ग या चौखानों की संख्या n*n हो प्रत्येक वर्ग का नाम बाँये से दाँये स्तम्भ क्रमांक $c_p$ एवं ऊपर से नीचे पंक्तिक क्रमांक $r_q$ के संयोजन से $c_p r_q$ होगा। जैसे– उपरोक्त 5*5 के जादुई–वर्ग में स्तम्भ क्रमांक 4 एवं पंक्तिक क्रमांक 3 में स्थित अवयव 186 को $c_4 r_3$ में स्थित अवयव माना जायेगा।

## 9-2 जादुई–वर्ग के प्रकार–

**1■ आकार की दृष्टि से**– आकार की दृष्टि से जादुई–वर्ग के तीन प्रकार होंगे।

**a• विषम * विषम जादुई–वर्ग** n*n के जादुई–वर्ग में n=3 या 3 से बड़े विषम संख्या समुच्चय [3,5,7---- (2x+1)] विषम* विषम जादुई–वर्ग कहलाता है।

**b• चार द्वारा विभाजित सम * सम जादुई–वर्ग** n*n के जादुई–वर्ग में n=4 या 4 से बड़े 4 द्वारा विभाजितसम संख्या समुच्चय [4,8,12------ 4x] चार द्वारा विभाजित सम* सम जादुई–वर्ग कहलाता है।

**c• चार द्वारा अविभाजित सम * सम जादुई–वर्ग** n*n के जादुई–वर्ग में n=6 या 6 से बड़े 4 द्वारा अविभाजितसम संख्या समुच्चय [6,10,14------{2*(2x+1)] चार द्वारा अविभाजित सम* सम जादुई–वर्ग कहलाता है।

उपरोक्त दर्शित संख्या समुच्चय में (2x+1)एवं 4x के प्रति x प्राकृत संख्या का अवयव है। प्राकृत संख्या को अनुच्छेद 9.3 में परिभाषित किया गया है।

**2■ आकार की दृष्टि से रंग धारण करने के आधार पर** जादुई–वर्ग में रंग चढ़ाने का अपना एक नियम है, जिसके आधार प्र जादुई–वर्ग के दो प्रकार हांगे।

**a• सरल जादुई–वर्ग** वे जादुई–वर्ग जिसमें रंग चढ़ाने का नियम प्रतिपादित नहीं होता है, सरल जादुई–वर्ग कहलाता है। मेरे विचार में सभी विषम* विषम जादुई–वर्ग एवं सम* सम जादुई–वर्ग में मात्र 4*4 का पर ही स्वीकार्य है।

**b• विशेष जादुई–वर्ग या अन्तःनिष्ठ–वर्ग या रंगीन जादुई–वर्ग** वे जादुई–वर्ग जिसमें रंग चढ़ाने का नियम प्रतिपादित होता है, विशेषजादुई–वर्ग या अन्तःनिष्ठ–वर्ग या रंगीन जादुई–वर्ग कहलाता है। मेरे विचार में आकार की दृष्टि से जादुई–वर्ग के तीनो प्रकार विषम* विषम, चार से विभाजित एवं चार से अविभाजित सम* सम होंगे।

## 9-3 जादुई–वर्ग रचना विषयक महत्वपूर्ण शब्दावली

**1• प्राकृत संख्या समुच्चय** रंगीन रिक्तता एवं विभाजन भाव से रहित संख्यात्मक पूर्णता को दर्शित करने वाले गिनने की संख्या समूह को प्राकृत संख्या समुच्चय कहते हैं। इसका गणितीय संकेतन ऑग्ल भाषा लिपि के बड़े अक्षर लिपि का अक्षर N हैं।

अर्थात् N =[1, 2, 3, 4, ----------∞ की ओर] जहाँ ∞ अनन्त का संकेतन है।

**2• यथार्थ भाजक** किसी संख्या n का यथार्थ भाजक वे सभी भाजक कहलाते है, जिनके द्वारा भाज्य n पूरा–पूरा (शून्य शेष पर) विभाजित होता है या संख्या n के सभी गुणनखण्ड को संख्या n के यथार्थ भाजक के रूप में जाना जाना चाहिये।

संख्या n के यथार्थ भाजक समुच्चय (समूह) के अवयवों में कम से कम दो अवयव सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1(एक) और स्वयं संख्या n अवश्य होगा।

**1 से 20 तक की संख्या के यथार्थ भाजक तालिका**

| संख्या | यथार्थ भाजक | संख्या | यथार्थ भाजक |
|---|---|---|---|
| 1 | भाज्य है, न अभाज्य | 11 | 1, 11 |
| 2 | 1, 2 | 12 | 1, 2, 3, 4, 6,12 |
| 3 | 1,3 | 13 | 1, 13 |
| 4 | 1, 2, 4 | 14 | 1, 2, 7, 14 |
| 5 | 1, 5 | 15 | 1, 3, 5, 15 |
| 6 | 1, 2, 3, 6 | 16 | 1, 2, 4, 8, 16 |
| 7 | 1, 7 | 17 | 1, 17 |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | 18 | 1, 2, 3, 6, 9, 18 |
| 9 | 1, 3,9 | 19 | 1, 19 |
| 10 | 1, 5, 10 | 20 | 1, 2, 4, 5,10, 20 |

**3• श्रेढ़ी** श्रेढ़ी का तात्पर्य सीढ़ी से है। सामान्यतः सीढ़ी का उपयोग ऊँचाई की ओर चढ़ने या ऊँचाई से उतरने के लिए किया जाता है। इसमें पैर रखने हेतू पायदान होते हैं। इसी पायदान को सीढ़ी (पँउठा) कहते हैं। सामान्यतः प्रत्येक सीढ़ी के बीच का ऊँचाई का अन्तराल बराबर होता है। इसी अन्तराल भावना को दृष्टिगत करते हुए संख्या जगत पर अध्ययन विस्तार किया गया। जिसमें गणितीय संक्रिया योग, व्यवकलन (घटाव) गुणा और भाग, का प्रभाव का विशेष अध्ययन किया जा सकता है। जिसे संख्या श्रेढ़ी कहते हैं।

**संख्या श्रेढ़ी के प्रकार** अध्ययन विस्तार में इनके गुणों के आधार पर श्रेढ़ी को सातः प्रकार होंगे।

**1•** समान्तर संख्या श्रेढ़ी **2•** हरात्मक संख्या श्रेढ़ी **3•** गुणोत्तर संख्या श्रेढ़ी **4•** क्रमगुणित संख्या श्रेढ़ी
**5•** घातांकी संख्या श्रेढ़ी **6•** योग–योग संख्या श्रेढ़ी **7•** करणी गत संख्या श्रेढ़ी

**समान्तर श्रेढ़ी** एक ऐसा संख्या समुच्चय जिनके किन्हीं भी दो क्रमागत अवयव का अन्तर मान एक उभयनिष्ठ संख्या हो समान्तर संख्या श्रेढ़ी का समुच्चय या केवल समान्तर संख्या श्रेढ़ी कहलाता है।

मानलो

एक समान्तर संख्या श्रेढ़ी का समुच्चय $A = [a_1, a_2, a_3, a_4$----------$a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n]$ हो तो–

$(a_2 - a_1) = (a_3 - a_2) = (a_4 - a_3) =$ ---------- $= (a_{n-2} - a_{n-3}) = (a_{n-1} - a_{n-2}) = (a_n - a_{n-1})$ होगा।

**उदाहरण** A= [2, 5 , 8 , 11, 14 , 17, 20, 23 26, 29, 32,35, 38 , 41] 14 पदी समान्तर श्रेढ़ी है।

B= [61, 57 , 53, 49, 45, 41, 37, 33, 29, 25] 10 पदी समान्तर श्रेढ़ी है।

**समान्तर श्रेढ़ी शब्दावली**

**[1] प्रथम पद** श्रेढ़ी का बाँयी ओर से प्रथम शुरूवाती अवयव श्रेढ़ी का प्रथम पद कहलाता है।
संकेत में a दर्शाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में श्रेढ़ी A और B का क्रमशः 2 और 61 प्रथम पद है।

**[2] सर्वान्तर** श्रेढ़ी के किन्हीं भी दो क्रमागत अवयव का अन्तर मान एक उभयनिष्ठ संख्या होता है, यही उभयनिष्ठ अन्तर मान ही समान्तर संख्या श्रेढ़ी का सर्वान्तर कहलाता है। संकेत में d दर्शाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में श्रेढ़ी A और B का सर्वान्तर क्रमशः 3 और – 4 होगा।

**[3] पद संख्या** श्रेढ़ी मे स्थित कुल अवयव की संख्या को पद संख्या कहते हैं। संकेत में n दर्शाते हें। उपरोक्त उदाहरण में श्रेढ़ी A और B में पद संख्या क्रमशः 14 और 10 है।

**[4] अंतिम पद या n वाँ पद** पद संख्या मान पर स्थित अवयव अंतिम पद या nवाँ पद कहलाता है। संकेत में L दर्शाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में श्रेढ़ी A और B का अंतिम पद क्रमशः 14 वाँ पद = 41 और 10 वाँ पद = 25 है।

**[5] r वाँ पद** श्रेढ़ी के प्रथम पद एवं अंतिम पद के बीच के किसी क्रमांक के पद को r वाँ पद कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में $r=5$ के लिए श्रेढ़ी A और B का 5वाँ पद क्रमशः 14 और 45 है।

**4• क्रम गुणित n** क्रमगुणित n का तात्पर्य 1 से n तक की संख्याओं का परस्पर गुणन संक्रिया से है। क्रमगुणित n का गणितीय संकेतन $!n$ है।

**उदाहरण** $!5 = 1*2*3*4*5 = 120$

$!9 = 1*2*3*4*5*6*7*8*9 = 362880$

**5• आधार–वर्ग** जादुई–वर्ग की रचना में आधार–वर्ग का विशेष महत्व है। आधार–वर्ग के आधार पर ही जादुई–वर्ग के रचना नियमों एवं प्रक्रमों को समझा जा सकता है। n*n के जादुई–वर्ग रचना हेतु n*n के आधार–वर्ग के अवयवों का नियमानुसार स्थानान्तण सह प्रतिस्थापन करते हुये उस आधार–वर्ग के संगत जादुई–वर्ग की रचना पूरा कर सकते है।

**आधार–वर्ग का विस्तार** अध्ययन विस्तार में n के यथार्थ भाजक k के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की व्यापक श्रृंखला $n_k$ प्राप्त कर सकते है। पुनः इन प्रथम आधार–वर्ग श्रृंखला के किसी भी आधार–वर्ग के अवयवों को पंक्तिक एवं स्तम्भिक अवयव समूह में स्थानान्तण कर आधार–वर्ग की नवीन श्रृंखला प्राप्त कर सकते है। इस प्रकार प्राप्त आधार–वर्ग की सम्पूर्ण प्रस्तुति संख्या n के मानों पर निहित है।

**a• स्तम्भिक दिशा अवयव** : बाँये से दाँये स्तम्भवार (उर्ध्व) अवयव

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ |

**b• पंक्तिक दिशा अवयव** : ऊपर से नीचे पंक्तिवार (क्षैतिज) अवयव

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ |
| $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ |
| $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ |

**c• स्तम्भिक दिशा अवयव को उलट कर दर्ज करना** : बाँये से दाँये स्तम्भवार अवयव को दाँये से बाँये उसी पंक्ति में दर्ज करे। **जैसे a•** के साकेतिक अवयव को उलटने पर –

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |
| $c_5$ | $c_4$ | $c_3$ | $c_2$ | $c_1$ |

**d• पंक्तिक दिशा अवयव को उलट कर दर्ज करना** : ऊपर से नीचे पंक्तिवार अवयव को नीचे से ऊपर उसी स्तम्भ में दर्ज करे। **जैसे b•** के साकेतिक अवयव को उलटने पर –

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ | $r_5$ |
| $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ | $r_4$ |
| $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ | $r_3$ |
| $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ | $r_2$ |
| $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ | $r_1$ |

**9- 4 विषम * विषम (2x+1)*(2x+1) जादुई–वर्ग की रचना** विषम* विषम जादुई–वर्ग रचना की दो विधियाँ हैं।
[1] झण्डा विधि या सरल गतिशील विधि [2] अन्तःनिष्ठ–वर्ग या रंगीन (रंगों भरा) जादुई–वर्ग रचना विधि।

**1■ झण्डा विधि या सरल गतिशील विधि** झण्डा विधि द्वारा केवल विषम* विषम $[(2x+1)*(2x+1)]$ जहाँ प्राकृत संख्या समुच्चय का अवयव है, के प्रति जादुई–वर्ग की रचना आश्चर्य जनक रूप से एकदम गतिशीलता (द्रुतगति से) में मनोरंजक शैली में प्राप्त कर सकते है।

सर्व प्रथम सरलता से समझने की दृष्टि से $(2x+1)$ के यथार्थ भाजक 1 पर जादुई–वर्ग की प्रस्तुति देने के प्रति $(2x+1)^2$ पदी ऐसे समांतर श्रेढ़ी को लेते है, जिसका प्रथमपद $a=1$ एवं सर्वान्तर $d=1$ हो। अर्थात् 1 से $(2x+1)^2$ तक की क्रमागत संख्या हो, जैसे श्रेढ़ी $A=[1, 2, 3, 4, \text{----------}\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\},\{(2x+1)^2-1\},\{(2x+1)^2\}]$ होगा। ऐसे क्रमागत समान्तर श्रेढ़ी के अवयवों के प्रति $[(2x+1)*(2x+1)]$ का विषम* विषम जादुई–वर्ग रचना हेतु अलग से आधार–वर्ग की रचना प्रस्तुति आवश्यक नहीं है। रचना प्रस्तुति निम्नानुसार प्रक्रमों में प्रस्तुत कीजिये।

| | | | | | P |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

**प्रक्रम 1•** जादुई–वर्ग रचना प्रारम्भ करने हेतु $[(2x+1)*(2x+1)]$ का मूल वर्ग बनाइये। इस मूल वर्ग के प्रथम पंक्ति के ऊपर एवं अन्तिम स्तम्भ के दाँये खुले खाने की बढ़ाकर क्रमशः एक–एक अतिरिक्त पंक्ति एवं स्तम्भ दर्शित कीजिये। दाँयी ओर के तिर्यक कोने वाली खाने में झण्डा (फ्लेग) चिन्हित करने रंग भरे, जो इस विधि को नामांकित करता है।$[(2x+1)*(2x+1)]=[(2*2+1)*(2*2+1]=5*5$ का विषम* विषम जादुई–वर्ग रचना विषयक प्रस्तुति में p (फ्लेग), फ्लेग के बाँयी ओर बाहर खुला पंक्ति और नीचे बाहर खुला स्तम्भ छायांकित कर दर्शित कराया गया है।

**प्रक्रम 2•** श्रेढ़ी के प्रथम पद अवयव 1 को मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1$ खाने में दर्शित कीजिये।

**प्रक्रम 3•** द्वितीय पद अवयव 2 को मूल में दर्ज करने मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1$ से ऊपर दाँयी ओर तिर्यकचाल से बाहर खुले पंक्ति के स्तम्भ $c_{x+2}$ में आते है। इसे मूल वर्ग के ठीक नीचे $(2x+1)$ वें पंक्ति के स्तम्भ $c_{x+2}$ में दर्ज करे। अर्थात् $c_{x+2}r_{2x+1}$ में दर्ज होगा।

**प्रक्रम 4•** 3रा, 4था, 5वाँ ----------$(x-1), x, (x+1)$ वाँ अवयव क्रमशः $3, 4, 5$ ----------$(x-1), x, (x+1)$ को मूल वर्ग में दर्ज करने के लिये मूल वर्ग के $c_{x+2}r_{2x+1}$ वें से पुनः प्रक्रम3 की भाँति ऊपर दाँयी ओर तिर्यक चाल चलते हुये $c_{2x+1}r_{x+2}$ तक दर्ज करने उपरांत $(x+2)$ वाँ पद अवयव को मूल वर्ग में दर्ज करने इसी तिर्यक चाल से बाहर स्तम्भ के पंक्ति $r_{x+1}$ में आते हैं। जिसे वर्ग के ठीक बाँये प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति $r_{x+1}$ में दर्ज करे। इस प्रकार $(x+2)$ वाँ पद अवयव मूल वर्ग के $c_1r_{x+1}$ में दर्ज होगा।

**प्रक्रम 5•** $(x+3)$वाँ, $(x+4)$वाँ, $(x+5)$वाँ, --------$(2x-1)$वाँ, $2x$वाँ, $(2x+1)$वाँ अवयव क्रमश $(x+3), (x+4), (x+5)$ -------$(2x-1), 2x$ $(2x+1)$ को मूल वर्ग में दर्ज करने के लिये $c_1r_{x+1}$ वें से पुनः प्रक्रम3 की भाँति ऊपर दाँयी ओर तिर्यक चाल चलते हुये $c_xr_2$ तक दर्ज करे। तद् उपरांत $(2x+2)$ वाँ अवयव $(2x+2)$ मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1$ में दर्ज होना होता है, जहाँ प्रक्रम 2 के तहत् प्रथम पद अवयव दर्ज है। अतः इसे मूल वर्ग के $c_xr_2$ वँ, के नीचे $c_xr_3$ में दर्ज करें।

प्रक्रम 3, प्रक्रम 4 एवं प्रक्रम 5 को दृष्टिगत करते हुये आवश्यकतानुसार अग्र प्रक्रमों द्वारा श्रेढ़ी के पूरे अवयव मूल वर्ग मे दर्ज करे।
अर्थात यदि–

**1•** प्रक्रम 3 की भाँति श्रेढ़ी का कोई अवयव मूल वर्ग के ऊपर बाहर पंक्ति के जिस स्तम्भ में दर्ज होना होता है, उसे ठीक मूल वर्ग के नीचे अन्तिम $(2x+1)$ वें पंक्ति के यथा स्तम्भ ( ऊपर बाहर पंक्ति के जिस स्तम्भ में दर्ज होना होता हैं) में दर्ज करें।

**2•** प्रक्रम 4 की भाँति श्रेढ़ी का कोई अवयव मूल वर्ग के दायें बाहर स्तम्भ के जिस पंक्ति में दर्ज होना होता है, उसे ठीक मूल वर्ग के बाँये प्रथम स्तम्भ के यथा पंक्ति ( दाँये बाहर स्तम्भ के जिस पंक्ति में दर्ज होना होता हैं) में दर्ज करें।

**3•** प्रक्रम 5 की भाँति श्रेढ़ी का कोई अवयव मूल वर्ग में पूर्व प्रक्रमों द्वारा दर्ज हो चुके $c_pr_q$ दर्ज होना होता है, उसे $c_{p-1}r_{q+1}$ में दर्ज करें।

**4•** प्रक्रम 1से प्राप्त झण्डे (फ्लेग), को पूर्व प्रक्रमों द्वारा भरा हुआ माना जाना चाहिये। तब $[(2x+1)*(x+1)]$ वाँ अवयव $c_{2x+1}r_1$ में दर्ज होनं उपरांत $[(2x+1)*(x+1)+1]$ वाँ अवयव झण्डे (फ्लेग) वाले खाने में दर्ज होने होता है। उसे $c_{2x+1}r_2$ में दर्ज करें।

**निष्कर्ष** मूल वर्ग में दर्ज समस्त $(2x+1)^2$ अवयवों द्वारा $(2x+1)*(x+1)$ का जादुई–वर्ग रचना पूरा होगा।

## 9- 5 (2x+1)*(2x+1) की जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुती में उपरोक्त रचना विधि के अनुपालन में पक्ति बद्ध सरल क्रमांक (1,2,3,4,-------$(2x+1)^2$) की कुछ विशेषतायें

**1■** तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के वे अवयव जो बाहर पंक्ति के मध्य स्तम्भ $(x+1)$ के बाद दाँयी ओर के स्तम्भ $(x+2)$ वें, $(x+3)$ वें, $(x+4)$ वें --------$(2x-1)$ वें 2xवें $(2x+1)$वें में दर्ज होने होता है, मूलवर्ग के $(2x+1)$ वें पंक्ति में यथा स्तम्भ$(x+2)$ वें, $(x+3)$ वें, $(x+4)$ वें --------$(2x-1)$ वें 2xवें $(2x+1)$वें में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में x पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते है। जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का दूसरा पद तथा सर्वान्तर $(2x+3)$ होगा। इसी प्रकार श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के वे अवयव जो बाहर पंक्ति के 2रे, 3रे, 4थ ---- ---- (x-1) वें, x वें, (x+1) वें स्तम्भ में दर्ज होने होता है, मूलवर्ग के $(2x+1)$ वें पंक्ति में यथा स्तम्भ 2रे, 3रे, 4थे -------- (x-1) वें, x वें, (x+1) वें स्तम्भ में में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में x पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का $[(2x+1)*(x+1)+3]$ वाँ पद तथा सर्वान्तर $(2x+3)$ होगा।

**2■** तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के वे अवयव जो बाहर स्तम्भ के मध्य पंक्ति $(x+1)$ से नीचे की ओर के पंक्ति $(x+1)$ वें, (x+2)वें, $(x+3)$ वें --------$(2x-2)$ वें, (2x-1)वें, 2xवें में दर्ज होने होता है, मूलवर्ग के प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति $(x+1)$ वें, (x+2)वें, $(x+3)$ वें --------$(2x-2)$ वें, (2x-1)वें, 2xवे में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में x पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का (x+2)वाँ पद तथा सर्वान्तर $(2x+2)$ होगा। इसी प्रकार श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के वे अवयव जो बाहर स्तम्भ के 1ले 2रे, 3रे, ---- ------ (x-1) वें, x वें, पंक्ति में दर्ज होने होता है, मूलवर्ग के प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति 1ले 2रे, 3रे, -------- (x-1) वें, x वें, पंक्ति में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में x पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का [(2x+1)*(x+1)+2] वाँ पद तथा सर्वान्तर (2x+2) होगा।

**3■** श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के प्रथम अवयव 1 को मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1$ में दर्ज करने उपसांत एवं $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ अर्थात् झण्डा p को भी पूर्व मे दर्ज अवयव माने जाने पर तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}$, $\{(2x+1)^2-1\}$ ,$\{(2x+1)^2\}$] के वे सभी अवयव जो मूल वर्ग में पुर्व दर्ज हो चुके $c_pr_q$ में दर्ज होने होता है, उस अवयव को $c_{p-1}r_{q+1}$ के ठीक नीचे $c_{p-1}r_{q+2}$में और $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ में दर्ज होने होता है, उस अवयव को $c_{2x*1}r_1$ के ठीक नीचे $c_{2x+1}r_2$में दर्ज करे। क्रमशः (2x+2) वे, (4x+3) वें, (6x+4)------ वें ऐसे सभी अवयव जो पूर्व दर्ज अवयव की ओर दर्ज होने होता है, बढ़ते क्रम में 2x पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते हैं, जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का (2x+2)वाँ पद तथा सर्वान्तर (2x+1) होगा।

ऐसी ही व्यवस्थित जादुई–वर्ग का अनुप्रयोग ज्योतिष शास्त्र के अन्तर्गत ग्रह बाधाएँ दूर करने वाले विभिन्न प्रकार के सिद्धि यंत्रों एवं सुरक्षा कवचों के निर्माण में विद्वता पूर्वक स्वीकारा है, जो कि मात्र 3*3, 4*4 और 5*5 के स्तर तक ही अनुप्रयोग में है। यह छत्तीसगढ़ी बोली–भाषा में भी ऐसा ही प्रश्न हँसी–मजाक के दौरान सहज ही मुखान्तरित होते आ रहा है। यह गणित छत्तीसगढ़ी बोली–भाषा में एवं ज्योतिष की व्यापकता, गंभीरता एवं लोक व्यापीकरण को सूचित करता है। ज्ञातव्य हो कि इतने विशद् मौखिक ज्ञान कोष रखने वाले छत्तीसगढ़ी भाषा–भाषियों ने इसका कभी व्यावसायिक प्रयोग नहीं किया। ज्ञान को ज्ञान का भण्डार बनाकर आज पर्यन्त तक सुरक्षित रखा तिसका ज्वलन्त उदाहरण है।

## जादुई–वर्ग उत्पत्ति विषयक छत्तीसगढ़ गणित दर्शन

## प्रश्न पंक्ति

**पाले हाबे भईस ओनचास ठन एक तबेलिया •**
**सबके दूद देय म हे लोकलुभावन गनित बढ़िया ••**
**पहली , दुसरइया, तिसरइया अऊ चौथइया •**
**कहाथे सुन्दर एक, दू , तिन अऊ चार सेरिया ••**
**अइसने–अइसने सबके नाम धराय हे भइया •**
**तब जानों भईस ओनचासवाँ ओनचास सेरिया ••**

दादू–भाई सात कमइया म कर दे सुन्दर बाँटा •
कोई कमइया ल झन होय भईंस अऊ दूउ के घाटा ••

**शब्दार्थ** पाले हाबे = पाला है। भईंस = भैस। तबेलिया = भैस पालक एक जाति विशेष। बढ़िया = सुन्दर। लोक लुभावन = भैसब को भाने वाला। धाटा = हानि। कमइया = काम करने वाले। दूद = दूध। गनित = गणित। सेरिया = सेर(किलो) वाला। दादू–भाई = नाती (पुत्र कापुत्र)। अऊ = और।

**विश्लेषण** यह प्रश्न पंक्ति 7*7 का जादुई–वर्ग रचना करने का है। एक भैस पालने के पास 7*7=49 भैस है, जो क्रमशः 1,2,3, --------,47,48, 49 सेर दूध देती है, जिसके देखभाल के लिये 7व्यक्ति हैं। इन 7व्यक्तियों को7-7 भैस इस प्रकार बाँटे कि प्रत्येक व्यक्ति को बराबर–बराबर दूध निकालना पड़े। जिसके हल के तारतम्य में 7*7 का जादुई–वर्ग रचना अध्ययन क्रम बनता है।

**9-6 जादुई–वर्ग रचना** $7=(2*3+1)$ पद संख्या $=7^2 = 49$, प्रथम पद $a = 1$, सर्वान्तर $d = 1$, से 7*7=49 पदी समांतर–श्रेढ़ी A=[1,2,3, ----------47, 48,49] द्वारा जादुई–वर्ग रचना निम्नानुसार होगा।

**प्रक्रम 1•** जादुई–वर्ग रचना प्रारम्भ करने हेतु 7*7 का मूल वर्ग बनाइये। इस मूल वर्ग के प्रथम पंक्ति के ऊपर एवं अन्तिम स्तम्भ के दाँये खुले खाने की बढ़ाकर क्रमशः एक–एक अतिरिक्त पंक्ति एवं स्तम्भ दर्शित कीजिये। दाँयी ओर के तिर्यक कोने वाली खाने में झण्डा (फ्लेग) चिन्हित करने रंग भरे, जो इस विधि को नामांकित करता है।

**प्रक्रम 2•** श्रेढ़ी के प्रथम पद अवयव 1 को मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1 = c_{3+1}r_1 = c_4r_1$ खाने में दर्शित कीजिये।

**प्रक्रम 3•** द्वितीय पद अवयव 2 को मूल में दर्ज करने मूल वर्ग के $c_4r_1$ से ऊपर दाँयी ओर तिर्यकचाल से बाहर खुले पंक्ति के स्तम्भ $c_5$ में आते है। इसे मूल वर्ग के ठीक नीचे 7 वें पंक्ति के स्तम्भ $c_5$ में दर्ज करे। अर्थात् $c_5r_7$ में दर्ज होगा।

**7*7 का सरल जादुई–वर्ग**

| | | **31** | **40** | **49** | **2** | **11** | **20** | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **क•1** | 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 | **30** |
| **क•2** | 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 | **38** |
| **क•3** | 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 | **46** |
| **क•4** | 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 | **5** |
| **क•5** | 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 | **13** |
| **क•6** | 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 | **21** |
| **क•7** | 22 | 31 | 40 | 50 | 2 | 11 | 20 | |
| | **क•1** | **क•2** | **क•3** | **क•4** | **क•5** | **क•6** | **क•7** | |

**प्रक्रम 4•** 3रा और 4था अवयव क्रमशः 3और4 को मूल वर्ग में दर्ज करने के लिये मूल वर्ग के $c_5r_7$ वें से पुनः प्रक्रम3 की भाँति ऊपर दाँयी ओर तिर्यक चाल चलते हुये $c_7r_5$ तक दर्ज करने उपरांत 5 वाँ पद अवयव 5को मूल वर्ग में दर्ज करने इसी तिर्यक चाल से बाहर स्तम्भ के पंक्ति $r_4$ में आते हैं। जिसे वर्ग के ठीक बाँये प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति $r_4$ में दर्ज करे। इस प्रकार 5वाँ पद अवयव5 मूल वर्ग के $c_1r_4$ में दर्ज होगा।

**प्रक्रम 5•** 6वाँ और 7वाँ अवयव क्रमश 6, और 7 को मूल वर्ग में दर्ज करने के लिये $c_1r_4$ वें से पुनः प्रक्रम3 की भाँति ऊपर दाँयी ओर तिर्यक चाल चलते हुये $c_3r_2$ तक दर्ज करे। तद् उपरांत 8वाँ अवयव 8 मूल वर्ग के $c_4r_1$ में दर्ज होना होता है, जहाँ प्रक्रम 2 के तहत् प्रथम पद अवयव दर्ज है। अतः इसे मूल वर्ग के $c_3r_2$ वँ, के नीचे $c_3r_3$ में दर्ज करें।इसी प्रकार श्रेढ़ी के पूरे अवयव मूल वर्ग में दर्ज होने तक जारी रखे। अर्थात् उपरोक्त प्रक्रम 3, 4 और 5 को दृष्टिगत करते हुये आवश्यकतानुसार अग्र प्रक्रमों द्वारा श्रेढ़ी के पूरे अवयव मूल वर्ग मे दर्ज करे।

**9-7 कुछ विश्लेषित विशेषताओं का प्रमाण–** $2x+1=7, x=3$, $(2x+1)^2 - x = 49-3 = 46$ से

**1■** तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1, 2, 3, 4, -------- 47, 48, 49 के वे अवयव जो बाहर पंक्ति के मध्य स्तम्भ 4 के बाद दाँयी ओर के स्तम्भ 5 वें, 6वें एवं 7वें में क्रमशः 2,11एवं 20 दर्ज होने होता है, मूल वर्ग के 7 वें पंक्ति में यथा स्तम्भ 5 वें, 6वें एवं 7वें

में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में 3 पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते है। जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का दूसरा पद मान 2 तथा सर्वान्तर $(2x+3)=9$ होगा। इसी प्रकार श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, --------47, 48, 49 के वे अवयव जो बाहर पंक्ति के 2रे, 3रे, 4थे स्तम्भ में क्रमशः 31,40 एवं 49 दर्ज होने होता है, मूल वर्ग के 7वें पंक्ति में यथा स्तम्भ 2रे, 3रे, 4थे स्तम्भ में में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में 3 पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का $[(2x+1)*(x+1)+3]=7*4+3 = 31$ वाँ पद तथा सर्वान्तर $(2x+3) =9$ होगा।

**2■** तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, --------47, 48, 49 के वे अवयव जो बाहर स्तम्भ के मध्य पंक्ति 4 से नीचे की ओर के पंक्ति 4वें, 5वें, 6वें में क्रमशः 5, 13 एवं 21 दर्ज होने होता है, मूलवर्ग के प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति 4वें, 5वें, 6वें में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में 3 पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का $(x+2)=5$वाँ पदमान =5 तथा सर्वान्तर $(2x+2)=8$ होगा। इसी प्रकार श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- 47, 48, 49] के वे अवयव जो बाहर स्तम्भ के 1ले 2रे, 4 3रे, पंक्ति में क्रमशः 30, 38 एवं 46 दर्ज होने होता है, मूल वर्ग के प्रथम स्तम्भ में यथा पंक्ति 1ले 2रे, 3रे, पंक्ति में दर्ज करते हैं। क्रमशः बढ़ते क्रम में 3 पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का $[(2x+1)*(x+1)+2]=7*4+2 = 30$ वाँ पदमान $= 30$ तथा सर्वान्तर $(2x+2)=8$ होगा।

**3■** श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- 47, 48, 49] के प्रथम अवयव 1 को मूल वर्ग के $c_{x+1}r_1$ में दर्ज करने उपरांत एवं $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ अर्थात् झण्डा p को भी पूर्व मे दर्ज अवयव माने जाने पर तिर्यक चाल नियम से श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, --------47, 48, 49 के वे सभी अवयव जो मूल वर्ग में पुर्व दर्ज हो चुके $c_p r_q$ में दर्ज होने होता है, उस अवयव को $c_{p-1}r_{q+1}$ के ठीक नीचे $c_{p-1}r_{q+2}$में और $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ में दर्ज होने होता है, उस आवयव को $c_{2x*1}r_1$ के ठीक नीचे $c_{2x+1}r_2$में दर्ज करे। क्रमशः 8,15,22,29,36 पूर्व दर्ज अवयव की ओर दर्ज होने होता है, बढ़ते क्रम में 6 पदी उस समान्तर श्रेढी का अवयव होते हैं, जिसका प्रथम पद श्रेढ़ी A का $(2x+2)=8$ वाँ पद तथा सर्वान्तर $(2x+1)=7$ होगा।

### 9-8 x= प्राकृत संख्या समुच्चय N का एक अवयव, प्रथम पद = a, सर्वान्तर= d से प्राप्त $(2x+1)^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयवो द्वारां (2x+1)* (2x+1) का जादुई–वर्ग रचना–

समस्त रचना प्रक्रम $(2x+1)$ के यथार्थ भाजक 1पर जादुई–वर्ग रचना की प्रथम प्रस्तुति देने $(2x+1)^2$ पदी ऐसे समान्तर श्रेढ़ी को लेते है, जिसका प्रथम पद a=1, सर्वान्तर d=1 से प्राप्त हो, अर्थात् श्रेढ़ी के अवयव 1से $(2x+1)^2$ तक का क्रमाागत संख्या हो। **जैसे–**

श्रेढ़ी A =[1,2,3, 4, -------- $\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\}, \{(2x+1)^2-1\}, \{(2x+1)^2\}$] के अवयवों द्वारा **(2x+1)* (2x+1)** का जादुई–वर्ग रचना प्रक्रम अनुच्छेद 9- 4 में दिये प्रक्रम ही होंगे। मात्र मात्र **x=** प्राकृत संख्या समुच्चय N का एक अवयव, प्रथम पद = a, सर्वान्तर= d से प्राप्त $(2x+1)^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयवो का सरल पद क्रमांक का विस्तार निम्नानुसार ध्यान रखना होगा।

| क्रमांक | 1 | 2 | 3 | - | - | - | $[(2x+1)^2-2]$ | $[(2x+1)^2-1]$ | $(2x+1)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| अवयव | a | a+b | a+2b | - | - | - | [a+{$(2x+1)^2-1$}d] | [a+{$(2x+1)^2-1$}d] | [a+(2x+1)2d] |

**उदाहरण■** उस 25 पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयवों जादुई–वर्ग की रचना कीजिये, जिसका प्रथम पद a=3 सर्वान्तर d=4 ह।

**क्रमांक**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

**समान्तर श्रेढ़ी के अवयव**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 11 | 15 | 19 |
| 23 | 27 | 31 | 35 | 39 |
| 43 | 47 | 51 | 55 | 59 |
| 63 | 67 | 71 | 75 | 79 |
| 83 | 87 | 91 | 95 | 99 |

**जादुई–वर्ग की रचना**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 71 | 99 | 7 | 35 | |
| 67 | 95 | 3 | 31 | 59 | 67 |
| 91 | 19 | 27 | 55 | 63 | 91 |
| 15 | 23 | 51 | 79 | 87 | 15 |
| 39 | 47 | 75 | 83 | 11 | 39 |
| 43 | 71 | 99 | 7 | 35 | |

### 9-9 आधार–वर्ग

उपरोक्त उदाहरण में समान्तर श्रेढ़ी के अवयव का प्रबंधन वर्ग जादुई–वर्ग के लिये सामान्य–वर्ग है। इसी प्रकार n*n का जादुई–वर्ग के लिये प्रयुक्त संख्या अवयवों का नियमानुसार प्रस्तुत सामान्य –वर्ग को आधार–वर्ग कहते है।

**यथार्थ भाजक** उपरोक्त अनुच्छेद **9- 3** में यथा नाम शीर्षक पर अध्ययन कीजिये।

**n क यथार्थ भाजक k क लिये प्रथम आधार–वर्ग $n_k$–**

$\frac{n^2}{k}$ पदी k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी इस तरह हो कि पहली श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा प्रत्येक श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर b हो और सभी k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी का r पद अवयवों से प्राप्त k पदी $\frac{n^2}{k}$ प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर c हो, जिनमें r=1 से प्रथम–प्रथम पद अवयवों से प्राप्त समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a ही होगा। क्रमशः k प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी पंक्तिवार $\frac{n}{k}$ पंक्ति समूह में दर्ज होंगे। n के यथार्थ भाजक k के लिये प्रथम आधार–वर्ग $n_k$ होगा। अर्थात् पंक्तिक दृष्टि से $\frac{n^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद अवयव क्रमशः a, (a+c), (a+2c), (a+3c),-------, {a+(k-3)c} , {a+(k-2)c}, {a+(k-1)c} तथा इन प्रथम पदों विस्तारित $\frac{n^2}{k}$ पदी k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी के प्रति प्रत्येक श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर b होगा। इन समान्तर श्रेढ़ी के पूरे अवयव क्रमशः $\frac{n}{k}-\frac{n}{k}$. पंक्तियों में दर्ज होते जाकर n*n का आधार–वर्ग रचना पूरा करेंगे। ज्ञात हो कि यह आधार–वर्ग का विस्तारित प्रतिपादन n=(2x+1) विषम , 4x चार से विभाजित सम एवं 2(2x+1) चार से अविभाजित सम संख्या मानों के प्रति यथा शब्द स्वीकार्य है।

**1-9 n क किसी यथार्थ भाजक k पर ऐसे n*n का जादुई–वर्ग जिसके स्तम्भिक, पंक्तिक एवं विकर्णिक n संख्या अवयव का अलग–अलग योग मान S क बराबर हो तो प्रथम आधार–वर्ग $n_k$ की श्रृंखला प्राप्त करने विषयक समिका–**

उपरोक्त विश्लेषण के आधार पर यदि nके किसी यथार्थ भाजक k पर ऐसे n*n का जादुई–वर्ग जिसक स्तम्भिक, पंक्तिक एवं विकर्णिक n संख्या अवयव का अलग–अलग योग मान S के बराबर हो तो S, n, k, a, b एवं c के मानों के प्रति निम्नानुसार समिका प्रतिचादित होगा–

$$\mathbf{b(n^2-k)+c(k^2-k)=2k[\frac{S}{K}-a]}$$

विस्तारित अध्ययन के लिये पृष्ठ -116...अनुच्छेद 10-9 के शीर्षक व्यापकता B का अध्ययन कीजिये।

**उदाहरण■** 3 के यथार्थ भाजक 1और 3 पर अलग–अलग 3*3 का जादुई–वर्ग रचना करने प्रति प्रथम आघार –वर्ग की श्रृंखला अवलोकित कीजिये, जिनके स्तम्भिक, पंक्तिक एवं विकर्णिक 3-3 संख्या अवयव का अलग–अलग योग मान 27 के बराबर हो।

**[A] यथार्थ भाजक 1 पर प्रथम आधार–वर्ग $3_1$ की श्रृंखला प्राप्त करना–**

$n*n=3*3$ से $n=3$ के यथार्थ भाजक $k=1, \frac{n^2}{K}=\frac{3^2}{1}=9$ पदी एक समान्तर श्रेढ़ी होगा।

मानलो श्रेढ़ी का प्रथम पद a , श्रेढ़ी का एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर bतथा इन तीनों श्रेढ़ियों कें किसी r वाँ पद अवयव से प्राप्त श्रेढ़ी का सर्वान्तर c है।

हल समिका $b(n^2-k)+c(k^2-k)=2k[\frac{S}{n}-a]$ में प्राप्त मान रखने पर–

$$b(3^2-1)+c(1^2-1)=2*1[\frac{27}{3}-a]$$

$$\Rightarrow b(9-1)+c(1-1)=2[9-a]$$

$$\Rightarrow 8b=2[9-a] \Rightarrow 4b=9-a \Rightarrow a=9-4b$$ के प्रति–

| | | |
|---|---|---|
| a | 1 | 5 |
| b | 2 | 1 |

तब a=1 तथा और b= 2 से

प्रथम आधार–वर्ग 1

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 7 | 9 | 11 |
| 13 | 15 | 17 |

प्रथम जादुई–वर्ग1

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 1 | 11 |
| 5 | 9 | 13 |
| 7 | 17 | 3 |

a=5 तथा और b= 1 से

प्रथम आधार–वर्ग2

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 |

प्रथम जादुई–वर्ग 2

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 5 | 10 |
| 7 | 9 | 11 |
| 8 | 13 | 6 |

[B] **यथार्थ भाजक 3 पर प्रथम आधार–वर्ग $3_3$ की श्रृंखला प्राप्त करना–**

$n*n = 3*3$ से $n=3$ के यथार्थ भाजक $k=3, \frac{n^2}{K} = \frac{3^2}{3} = 3$पदी 3 प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी होंगे।

मानलो श्रेढ़ी का प्रथम पद a , श्रेढ़ियों का एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर b तथा इन तीनों श्रेढ़ियों कें किसी r वाँ पद अवयव से प्राप्त श्रेढ़ी का सर्वान्तर c है।

हल समिका $b(n^2-k)+c(k^2-k)=2k[\frac{S}{n}-a]$ में प्राप्त मान रखने पर–

$$b(3^2-3)+c(3^2-3)=2*3[\frac{27}{3}-a]$$

$$\Rightarrow c(9-3)+b(9-3)+c(9-3)=6[9-a]$$

$$\Rightarrow 6b+6c=6[9-a] \Rightarrow b+c=9-a$$ के प्रति–

$a=1$ लेने पर $b+c=8$

| b | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| c | 7 | 6 | 5 |

आधार–वर्ग

[3]

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 8 | 9 | 10 |
| 15 | 16 | 17 |

[4]

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 |
| 7 | 9 | 11 |
| 13 | 15 | 17 |

[5]

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 |
| 6 | 9 | 12 |
| 11 | 14 | 17 |

जादुई–वर्ग

[3]

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 1 | 10 |
| 3 | 9 | 15 |
| 8 | 17 | 2 |

[4]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 1 | 11 |
| 5 | 9 | 13 |
| 7 | 17 | 3 |

[5]

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 1 | 12 |
| 7 | 9 | 11 |
| 6 | 17 | 4 |

$a=2$ लेने पर $b+c=7$

| b | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| c | 6 | 5 | 4 |

आधार–वर्ग

[6]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 |
| 8 | 9 | 10 |
| 14 | 15 | 16 |

[7]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 |
| 7 | 9 | 11 |
| 12 | 14 | 16 |

[8]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 |
| 6 | 9 | 12 |
| 10 | 13 | 16 |

जादुई–वर्ग

[6]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 2 | 10 |
| 4 | 9 | 14 |
| 8 | 16 | 3 |

[7]

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 2 | 11 |
| 6 | 9 | 12 |
| 7 | 16 | 4 |

[8]

| | | |
|---|---|---|
| 13 | 2 | 12 |
| 8 | 9 | 10 |
| 6 | 16 | 5 |

a =3 लेने पर $b + c = 6$

| b | 1 | 2 |
|---|---|---|
| c | 5 | 4 |

आधार–वर्ग

[9]

| 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 13 | 14 | 15 |

[10]*

| 3 | 5 | 7 |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 11 |
| 11 | 13 | 15 |

जादुई–वर्ग

[9]

| 15 | 3 | 10 |
|---|---|---|
| 5 | 9 | 14 |
| 8 | 15 | 4 |

[10]*

| 13 | 3 | 11 |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 11 |
| 7 | 15 | 5 |

a =4 लेने पर $b + c = 5$

| b | 1 | 2 |
|---|---|---|
| c | 4 | 3 |

आधार–वर्ग

[11]

| 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 12 | 13 | 14 |

[12]

| 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 11 |
| 10 | 12 | 14 |

जादुई–वर्ग

[11]

| 13 | 4 | 10 |
|---|---|---|
| 6 | 9 | 12 |
| 8 | 14 | 5 |

[12]

| 12 | 4 | 11 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 7 | 14 | 6 |

a =5 लेने पर $b + c = 4$

| b | 1 |
|---|---|
| c | 3 |

आधार–वर्ग 13

| 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 |

जादुई–वर्ग 13

| 12 | 5 | 10 |
|---|---|---|
| 7 | 9 | 11 |
| 8 | 13 | 6 |

a =6 लेने पर $b + c = 3$

| b | 1 |
|---|---|
| c | 2 |

आधार–वर्ग 14 *

| 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 10 | 11 | 12 |

जादुई–वर्ग 14 *

| 11 | 6 | 10 |
|---|---|---|
| 8 | 9 | 10 |
| 8 | 12 | 7 |

**टीप 1•** उपरोक्त श्रृखला विस्तार में [A] में यथार्थ भाजक 1 पर तथा[B] में यथार्थ भाजक 3 पर 3*3 का प्रथम आधार–वर्ग एवं उसके संगत जादुई–वर्ग की श्रृंखला सम्मिलित है। इसी प्रकार सभी n*n के लिये n के समस्त यथार्थ भाजकों के प्रति प्रथम आधार–वर्ग एवं उसके संगत जादुई–वर्ग की श्रृंखला सम्मिलित होना दर्शित कराया जा सकता है।

**2 •** तारांकित आधार–वर्ग एवं संगत जादुई–वर्ग क्रमांक 10 में 7 और 11 एवं क्रमांक 14 में 8 और 10 दोहराये हूये है। ऐसे प्रतिबंधात्मक नियम के लिये पृष्ठ अनुच्छेद 10-9 व्यापकता A की टीप का अवलोकन करें।

## 9-10 प्रथम आधार–वर्ग श्रृंखला के किसी प्रथम आधार–वर्ग $n_k$ के प्रति पुनः n के यथार्थ भाजकों के प्रति प्रथम आधार–वर्ग $(n_k)_k$ –

प्रथम आधार–वर्ग के $n^2$ पदी अवयवों का n के किसी यथार्थ भाजक k को सर्वान्तर कर उनके सरल स्थिति क्रमांकों $[1, 2, 3,$-------$(n^2-2),(n^2-1),(n^2)]$ में से सर्वान्तर क्रमों में अवयवों को स्थान्तरित कर पुनः प्रथम आधार–वर्ग $n_k$ के लिये प्रथम आधार–वर्ग $(n_k)_k$ का श्रृंखला विस्तार किया जा सकता है। यथा अवलोकित कीजिये–

$3^2 = 9$ पदी समान्तर संख्या समुच्चय $[2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42]$ के प्रति–

$3_1$ पर –

प्रथम आधार–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 |
| 17 | 22 | 27 |
| 32 | 37 | 42 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 37 | 2 | 27 |
| 12 | 22 | 32 |
| 17 | 42 | 7 |

$3_3$ पर – प्रथम आधार–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 17 | 32 |
| 7 | 22 | 37 |
| 12 | 27 | 42 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 27 | 2 | 37 |
| 32 | 22 | 12 |
| 7 | 42 | 17 |

**यथार्थ भाजकों के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग $(n_k)_k$ से विस्तारित आधार–वर्ग की व्यापक श्रृंखला प्राप्त करना–** यथार्थ भाजकों के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग $(n_k)_k$ के अवयवों को पंक्ति–पंक्ति एवं स्तम्भ–स्तम्भ अवयव समूह के स्थानान्तण करने के नियम से विस्तारित आधार–वर्ग की व्यापक श्रृंखला प्राप्त किया जा सकता है।

प्रथम आधार–वर्ग के समस्त $n^2$ अवयव को निम्नानुसार पंक्तिवार सरल क्रमांक देकर n के समस्त यथार्थ भाजक अन्तराल के अवयवों को

| | स्त• 1 | स्त• 2 | स्त• 3 | – | – | – | स्त• n-2 | स्त• n-1 | स्त• n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| क्र• 1 | 1 | 2 | 3 | – | – | – | n-2 | n-1 | N |
| क्र• 2 | n+1 | n+2 | n+3 | – | – | – | 2n-2 | 2n-1 | 2n |
| क्र• 3 | 2n+1 | 2n+2 | 2n+3 | – | – | – | 3n-2 | 3n-1 | 3n |
| – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| – | – | – | – | – | – | – | – | – | – |
| क्र•n-2 | (n-3)n+1 | (n-3)n+2 | (n-3)n+3 | – | – | – | [(n-2)n] -2 | [(n-2)n] -1 | (n-2)n |
| क्र•n-1 | (n-2)n+1 | (n-2)n+2 | (n-2)n+3 | – | – | – | [(n-1)n] -2 | [(n-1)n] -1 | (n-1)n |
| क्र•n | (n-1)n+1 | (n-1)n+2 | (n-1)n+3 | – | – | – | $n^2$ -2 | $n^2$ -1 | $n^2$ |

पुनः इन्हीं: सरल क्रमांकों में व्यवस्थित कर नवीन प्रथम आधार–वर्ग श्रृखला $[(n_k)_1, (n_k)_2, (n_k)_3$-------$(n_k)_k, (n_k)_n]$ प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार पुनः प्राप्त नवीन प्रथम आधार–वर्ग श्रृंखला के किसी भी प्रथम आधार–वर्ग के मध्य पंकित $[n=(2x+1)$ के प्रति $(x+1)$ वाँ पंक्ति] के अवयव को यथावत रखते हुये शेष पंक्ति अवयवों को पंक्तिवार स्थानान्तरण करने पर $[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग विस्तार में प्रथम श्रृंखला होगी। उक्त प्राप्त $[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग के अवयवों को स्तम्भिक ( बाँये से दाँये) को (दाँये से बाँये) उलटने पर $[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग विस्तार में द्वितीय श्रृंखला होगी। इसी प्रकार प्रथम आधार–वर्ग के मध्य स्तम्भ $[n=(2x+1)$ के प्रति $(x+1)$ वाँ पंक्ति] के अवयव को यथावत रखते हुये शेष पंक्ति अवयवों को स्तम्भवार स्थानान्तरण करने पर $2x[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग विस्तार में तृतीय श्रृंखला होगी। उक्त प्राप्त $[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग के अवयवों को पंक्तिक ( ऊपर से नीचे) को (नीचे से ऊपर)उलटने पर $[!(2x)]$ प्रकारों में आधार –वर्ग विस्तार में चतुर्थ श्रृंखला होगी।

इस प्रकार विषम * विषम $(2x+1)^*(2x+1)$ के प्रति यथार्थ भाजर–वर्ग $n_k$ के प्रति विस्तारित आधार–वर्ग की विस्तारित चारों श्रृंखला मिलाकर कुल $4^*[!(2x)]$ प्रकारों दर्शित होंगे जिनमें 4 प्रकार के आधार–वर्ग दुहराये हुये दर्शित होता है के लिये एकैक आधार–वर्ग ही स्वीकारे जाने पर वास्तविक कुल आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या $=4^*[!(2x)]-4=4[!(2x)-1]$ होगा। $n=(2x+1)$ के यथार्थ की कुल संख्या m होने पर समस्त (सभी यथार्थ भाजकों m के प्रति) प्रकारों के आधार वर्ग के कुल संख्या $=4m[!(2x)-1]$ होगा।

## 9-11 विषम * विषम $(2x+1)^*(2x+1)$ के आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या

चूँकि आधार–वर्ग को दृष्टिगत करते हुये जादुर्ठ–वर्ग रचना के नियम प्रतिपादित है।

∴ [1] विषम * विषम $(2x+1)^*(2x+1)$ के $(2x+1)$ के प्रति किसी यथार्थ भाजक k के प्रति –
आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $=4[!(2x)-1]$ होगा।

[2] विषम * विषम $(2x+1)^*(2x+1)$ के $(2x+1)$ के समस्त यथार्थ भाजक की कुल संख्या m के प्रति–
आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $=4m[!(2x)-1]$ होगा।

## 9-12 आधार–वर्ग के द्वारा जादुई–वर्ग की रचना–

आधार–वर्ग के द्वारा जादुई–वर्ग रचना के लिये अनुच्छेद **9-7** में

$x$ = प्राकृत संख्या समुच्चय N का एक अवयव, प्रथम पद = a, सर्वान्तर= d से प्राप्त $(2x+1)^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयवो द्वारा विषम * विषम $(2x+1)^*(2x+1)$ का जादुई–वर्ग रचना करने उक्त समान्तर श्रेढ़ी के अवयवों को जिस प्रकार सरल क्रमांक [ 1 से $(2x+1)^2$ तक] के आबंटित किये गये हैं, उसी प्रकार $\frac{(2x+1)^2}{k}$ पदी k प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी $\frac{2x+1}{k}$ पंक्तियों में इस तरह दर्ज होंगें कि– **1•** पहली श्रेढ़ी का प्रथम पद a, **2•** प्रत्येक श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर b तथा **3•** सभी श्रेढ़ियों का क्रमशः r वाँ पद अवयवों से प्राप्त k पदी $\frac{(2x+1)^2}{k}$ प्रकार की समान्तर श्रेढ़ियों का एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर c को दृष्टिगत करत हुये सरल क्रमांक [ 1 से $(2x+1)^2$ तक] निम्नानुसार आबंटित करते हैं। $n=2x+1$ के प्रति $\frac{(2x+1)^2}{k}=\frac{n^2}{k}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| क्रमांक | 1 | 2 | – | – | $\frac{n^2}{k}-1$ | $\frac{n^2}{k}$ |
| अवयव | a | a+b | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b$ |
| क्रमांक | $[\frac{n^2}{k}+1]$ | $[\frac{n^2}{k}+2]$ | – | – | $\frac{2n^2}{k}-1$ | $\frac{2n^2}{k}$ |
| अवयव | a+c | (a+b)+c | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b+c$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b+c$ |
| क्रमांक | $[\frac{2n^2}{k}+1]$ | $[\frac{2n^2}{k}+2]$ | – | – | $\frac{3n^2}{k}-1$ | $\frac{3n^2}{k}$ |
| अवयव | a+2c | (a+b)+2c | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b+2c$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b+2c$ |
| क्रमांक | – | – | – | – | – | – |
| अवयव | – | – | – | – | – | – |
| क्रमांक | $[\frac{(k-3)n^2}{k}+1]$ | $[\frac{(k-3)n^2}{k}+2]$ | – | – | $\frac{(k-2)n^2}{k}-1$ | $\frac{(k-2)n^2}{k}$ |
| अवयव | a+(k-3)c | (a+b)+(k-3)c | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b+(k-3)c$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b+(k-3)c$ |
| क्रमांक | $[\frac{(k-2)n^2}{k}+1]$ | $[\frac{(k-2)n^2}{k}+2]$ | – | – | $\frac{(k-1)n^2}{k}-1$ | $\frac{(k-1)n^2}{k}$ |
| अवयव | a+(k-2)c | (a+b)+(k-2)c | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b+(k-2)c$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b+(k-2)c$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| क्रमांक | $[\frac{(k-1)n^2}{k}+1]$ | $[\frac{(k-1)n^2}{k}+2]$ | – | – | $n^2-1$ | $n^2$ |
| अवयव | a+(k-1)c | (a+b)+(k-1)c | – | – | $a+[\frac{n^2}{k}-2]b+(k-1)c$ | $a+[\frac{n^2}{k}-1]b+(k-1)c$ |

अनुच्छेद **9- 4** में $(2x+1)*(2x+1)$ स्तर का जादुई–वर्ग रचना उदाहरण में $(2x+1)$ के यथार्थ भाजक 1 पर जादुई–वर्ग की प्रस्तुति देने के प्रति $(2x+1)^2$ पदी ऐसे समांतर श्रेढ़ी को लेते है, जिसका प्रथमपद $a=1$ एवं सर्वान्तर $d=1$ हो। अर्थात् 1 से $(2x+1)^2$ तक की क्रमागत संख्या हो, जैसे

श्रेढ़ी A $=[1,2,3,4,\text{----------}\{(2x+1)^2-3\},\{(2x+1)^2-2\},\{(2x+1)^2-1\},\{(2x+1)^2\}]$ ।

उक्त क्रमागत संख्या श्रेढ़ी अवयव से जादुई–वर्ग रचना के लिये प्रयुक्त सरल नियम के अनुसार संगत सरल क्रमांक अवयव को चुनते हुये आधार –वर्ग द्वारा जादुई–वर्ग की रचना पूरा करें।

**आधार–वर्ग के द्वारा जादुई–वर्ग की रचना प्रगुण** $n=2x+1 \Rightarrow x=\frac{n+1}{2}$

**1•** आधार–वर्ग के ऊपर बाँये कोने से तिर्यक नीचे दाँये कोने तक $[c_1r_1, c_2r_2, c_3r_3\text{--------}c_{n-2}r_{n-2}, c_{n-1}r_{n-1}, c_nr_n]$ के अवयव क्रमशः जादुई–वर्ग के मध्य $(x+1)$ वाँ में पंक्ति 1 से n तक $[c_{x+1}r_1, c_{x+1}r_2, c_{x+1}r_3\text{ --------}c_{x+1}r_{2x-1}, c_{x*1}r_{2x}, c_{x+1}r_{2x+1}]$ दर्ज होंगे।

**2•** आधार–वर्ग के मध्य $(x+1)$ वाँ पंक्ति $[c_1r_{x+1}, c_2r_{x+1}, c_3r_{x+1}\text{--------}c_{2x-1}r_{x+1}, c_{2x}r_{x+1}, c_{2x+1}r_{x+1}]$ के अवयव क्रमशः जादुई–वर्ग में नीचे बाँये कोने से तिर्य्रक ऊपर दाँये कोने तक $[c_1r_n, c_2r_{n-1}, c_3r_{n-2}\text{--------}c_{n-2}r_3, c_{n-1}r_2, c_nr_1]$ दर्ज होंगे।

**3•** तिर्यक चाल नियम से आधार–वर्ग के $[c_2r_1, c_4r_2, c_6r_3\text{--------}c_{2x}r_x]$ में दर्ज अवयव जादुई–वर्ग रचना नियम (बाहर पंक्ति का नियम) के अनुसार बाहर पंक्ति में मध्य $(x+1)$वाँ स्तम्भ के दाँयी ओर क्रमशः $(x+2)$वाँ, $(x+3)$वाँ,-------- 2xवाँ, $(2x+1)$वाँ स्तम्भ में दर्ज होने होता है। इसी प्रकार आधार–वर्ग के $[c_3r_{x+2}, c_5r_{x+3}, c_7r_{x+4}\text{--------}c_{2x+1}r_{2x+1}]$ में दर्ज अवयव जादुई–वर्ग रचना नियम (बाहर पंक्ति का नियम) के अनुसार बाहर पंक्ति में मध्य $(x+1)$वाँ स्तम्भ के बाँयी ओर क्रमश 2रा, 3रा, --------xवाँ $(2x+1)$वाँ स्तम्भ में दर्ज होने होता है। इस प्रकार आधार–वर्ग वे सभी अवयव बाहर पंक्ति में दर्ज होने होता है ,उन्हें जादुई–वर्ग में यथा स्तम्भ नीचे अंतिम $(2x+1)$वाँ पंक्ति में दर्ज होंगे।

**4•** तिर्यक चाल नियम से आधार–वर्ग के $[c_{x*2}r_1, c_{x+3}r_2, c_{x+4}r_3\text{--------}c_{2x+1}r_x]$ में दर्ज अवयव जादुई–वर्ग रचना नियम (बाहर स्तम्भ का नियम) के अनुसार बाहर स्तम्भ में मध्य $(x+1)$वाँ पंक्ति से नीचे की ओर क्रमशः $(x+2)$वाँ, $(x+3)$वाँ,-------- 2xवाँ, पंकित में दर्ज होने होता है। इसी प्रकार आधार–वर्ग के $[c_2r_{x+2}, c_3r_{x+3}, c_4r_{x+5}\text{--------}c_{x+1}r_{2x+1}]$ में दर्ज अवयव जादुई–वर्ग रचना नियम (बाहर स्तम्भ का नियम) के अनुसार बाहर पंक्ति में मध्य $(x+1)$वाँ पंक्ति के ऊपर की ओर क्रमश 1ली, 2रा, --------(x-1)वाँ xवाँ पंक्ति में दर्ज होने होता है। इस प्रकार आधार–वर्ग वे सभी अवयव जो बाहर स्तम्भ में दर्ज होने होता है ,उन्हें जादुई–वर्ग में यथा पंक्ति बाँयी ओर प्रथम पंक्ति में दर्ज होंगे।

**5•** आधार–वर्ग के प्रथम अवयव $c_1r_1$ को जादुई–वर्ग के $c_{x+1}r_1$ में दर्ज करने उपसांत एवं $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ अर्थात् झण्डा p को भी पूर्व मे दर्ज अवयव माने जाने पर तिर्यक चाल नियम से आधार–वर्ग के वे सभी अवयव जो जादुई–वर्ग में पूर्व दर्ज हो चुके $c_pr_q$ में दर्ज होने होता है, उस अवयव को $c_{p-1}r_{q+1}$ के ठीक नीचे $c_{p-1}r_{q+2}$में और $c_{\text{बाहर}}$ $r_{\text{बाहर}}$ में दर्ज होने होता है, उस अवयव को $c_{2x*1}r_1$ के ठीक नीचे $c_{2x+1}r_2$में दर्ज करने के परिपालन मे–आधार–वर्ग के अवयव $[c_1r_2, c_1r_3, c_1r_4\text{ --------}c_1r_{x+1}]$ क्रमशः जादुई–वर्ग में $[c_xr_3, c_{x-1}r_5, c_{x-3}r_7\text{ --------}c_3r_{2x-3}, c_2r_{2x-1}, c_1r_{2x+1},]$ तथा आधार–वर्ग के अवयव $[c_1r_{x+2}, c_1r_{x+4}, c_1r_{x+5}\text{ --------}c_1r_{2x+1}]$ क्रमशः जादुई–वर्ग में $[c_{2x+1}r_2, c_{2x}r_4, c_{2x-1}r_6\text{ --------}c_{x+3}r_{2x-4}, c_{x+2}r_{2x-2}, c_{x+1}r_{2x},]$ में दर्ज होंगे।

**उदाहरण** 27 पदी तीन समान्तर श्रेढ़ी जिसमें पहली श्रेढ़ी का प्रथम पद $a=3$, तीनों श्रेढ़ी का एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर $b=5$ तथा तीनों श्रेढ़ी का क्रमशः $r$ वाँ पद अवयवों से प्राप्त 3 पदी 27 श्रेढ़ी का एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर $c=33$ के अवयवों द्वारा

n*n =9*9 का जादुई–वर्ग 9 के यथार्थ भाजकों के प्रथम प्रथम प्रस्तुति पर दर्शित कराने–

## 9 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 |
| 48 | 53 | 58 | 63 | 68 | 73 | 78 | 83 | 88 |
| 93 | 98 | 103 | 108 | 113 | 118 | 123 | 128 | 133 |
| 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 |
| 81 | 86 | 91 | 96 | 101 | 106 | 111 | 116 | 121 |
| 126 | 131 | 136 | 141 | 146 | 151 | 156 | 161 | 166 |
| 69 | 74 | 79 | 84 | 89 | 94 | 99 | 104 | 109 |
| 114 | 119 | 124 | 129 | 134 | 139 | 144 | 149 | 154 |
| 159 | 164 | 169 | 174 | 179 | 184 | 189 | 194 | 199 |

## प्रथम आधार–वर्ग के द्वारा प्रथम जादुई–वर्ग –

| | 136 | 89 | 144 | 199 | 8 | 63 | 118 | 71 | P |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 131 | 84 | 139 | 194 | 3 | 58 | 113 | 66 | 121 | 131 |
| 79 | 134 | 189 | 43 | 53 | 108 | 61 | 116 | 126 | 79 |
| 129 | 184 | 38 | 48 | 103 | 56 | 111 | 166 | 74 | 129 |
| 179 | 33 | 88 | 98 | 51 | 106 | 161 | 69 | 124 | 179 |
| 28 | 83 | 93 | 46 | 101 | 156 | 109 | 119 | 174 | 28 |
| 78 | 133 | 41 | 96 | 151 | 104 | 114 | 169 | 23 | 78 |
| 128 | 36 | 91 | 146 | 99 | 154 | 164 | 18 | 73 | 128 |
| 76 | 86 | 141 | 94 | 149 | 159 | 13 | 68 | 123 | 76 |
| 81 | 136 | 89 | 144 | 199 | 8 | 63 | 118 | 71 | |

## 9 के यथार्थ भाजक 3 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 18 | 33 | 48 | 63 | 78 | 93 | 108 | 123 |
| 36 | 51 | 66 | 81 | 96 | 111 | 126 | 131 | 146 |
| 69 | 84 | 99 | 114 | 129 | 144 | 159 | 174 | 189 |
| 8 | 23 | 38 | 53 | 68 | 83 | 98 | 113 | 128 |
| 41 | 56 | 71 | 86 | 101 | 116 | 131 | 146 | 161 |
| 74 | 89 | 104 | 119 | 134 | 149 | 164 | 179 | 194 |
| 13 | 28 | 43 | 58 | 73 | 88 | 103 | 118 | 133 |
| 46 | 61 | 76 | 91 | 106 | 121 | 136 | 151 | 166 |
| 79 | 94 | 109 | 124 | 139 | 154 | 169 | 184 | 199 |

## आधार–वर्ग के द्वारा प्रथम जादुई–वर्ग –

| | 104 | 73 | 136 | 199 | 18 | 81 | 144 | 113 | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 89 | 58 | 121 | 184 | 3 | 66 | 129 | 98 | 161 | 89 |
| 43 | 106 | 169 | 123 | 51 | 114 | 83 | 146 | 74 | 43 |
| 91 | 154 | 108 | 36 | 99 | 68 | 131 | 194 | 28 | 91 |
| 139 | 93 | 156 | 84 | 53 | 116 | 179 | 13 | 76 | 139 |
| 78 | 141 | 69 | 38 | 101 | 164 | 133 | 61 | 124 | 78 |
| 126 | 189 | 23 | 86 | 149 | 118 | 46 | 109 | 63 | 126 |
| 174 | 8 | 71 | 134 | 103 | 166 | 94 | 48 | 111 | 174 |
| 128 | 56 | 119 | 88 | 151 | 79 | 33 | 96 | 159 | 128 |
| 41 | 104 | 73 | 136 | 199 | 18 | 81 | 144 | 113 | |

9 के यथार्थ भाजक 9 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 48 | 93 | 36 | 81 | 126 | 69 | 114 | 159 |
| 8 | 53 | 98 | 41 | 86 | 131 | 74 | 119 | 164 |
| 13 | 58 | 103 | 46 | 91 | 136 | 79 | 124 | 169 |
| 18 | 63 | 108 | 51 | 96 | 141 | 84 | 129 | 174 |
| 23 | 68 | 113 | 56 | 101 | 146 | 89 | 134 | 179 |
| 28 | 73 | 118 | 61 | 106 | 151 | 94 | 139 | 184 |
| 33 | 78 | 123 | 66 | 111 | 156 | 99 | 144 | 189 |
| 38 | 83 | 128 | 71 | 116 | 161 | 104 | 149 | 194 |
| 43 | 88 | 133 | 76 | 121 | 166 | 109 | 154 | 199 |

**प्रथम आधार–वर्ग के द्वारा प्रथम जादुई–वर्ग –**

| | 118 | 111 | 1o4 | 199 | 48 | 41 | 136 | 129 | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 73 | 66 | 161 | 154 | 3 | 98 | 91 | 84 | 179 | 73 |
| 123 | 116 | 109 | 159 | 53 | 46 | 141 | 134 | 28 | 123 |
| 71 | 166 | 114 | 8 | 103 | 96 | 89 | 184 | 78 | 71 |
| 121 | 69 | 164 | 58 | 51 | 146 | 139 | 33 | 128 | 121 |
| 126 | 119 | 13 | 108 | 101 | 94 | 189 | 83 | 76 | 126 |
| 74 | 169 | 63 | 56 | 151 | 144 | 38 | 133 | 81 | 74 |
| 124 | 18 | 113 | 106 | 99 | 194 | 88 | 36 | 131 | 124 |
| 174 | 68 | 61 | 156 | 149 | 43 | 93 | 86 | 79 | 174 |
| 23 | 118 | 111 | 104 | 199 | 48 | 41 | 136 | 129 | |

**विषम * विषम** $(2x+1)*(2x+1)$ **के आधार–वर्ग के प्रकारों की संख्या समिका सत्यापन उदाहरण–**

चूँकि आधार–वर्ग को दृष्टिगत करते हुये जादुर्ठ–वर्ग रचना के नियम प्रतिपादित है।

विषम * विषम $(2x+1)*(2x+1)$ के $(2x+1)$ के प्रति किसी यथार्थ भाजक $k$ के प्रति –

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $=4[!(2x)-1]$ होगा के प्रति सत्यापन उदाहरण–

1■ $(2*1+1)*(2*1+1)=3*3$ के प्रति आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग की प्रस्तुतियाँ–

**यथार्थ भाजक 1 पर–**

**a•** मध्य पंकित अवयव यथावत रखने पर

b• [1] और [2] को स्तम्भिक दिशा में उलटने पर

आधार–वर्ग

[1]*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 |
| 11 | 14 | 17 |
| 20 | 23 | 26 |

[2]**

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 23 | 26 |
| 11 | 14 | 17 |
| 2 | 5 | 8 |

[3] ***

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 2 |
| 17 | 14 | 11 |
| 26 | 23 | 20 |

[4]****

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 23 | 20 |
| 17 | 14 | 11 |
| 8 | 5 | 2 |

जादुई–वर्ग

[1]*

| | 26 | 5 | p |
|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 17 | 23 |
| 8 | 14 | 20 | 8 |
| 11 | 26 | 5 | |

[2]**

| | 8 | 23 | P |
|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 17 | 5 |
| 26 | 14 | 2 | 26 |
| 11 | 8 | 23 | |

[3]***

| | 20 | 5 | p |
|---|---|---|---|
| 23 | 8 | 11 | 23 |
| 2 | 14 | 26 | 2 |
| 17 | 20 | 5 | |

[4]****

| | 2 | 23 | p |
|---|---|---|---|
| 5 | 26 | 11 | 5 |
| 20 | 14 | 8 | 20 |
| 17 | 2 | 23 | |

।

**c•** मध्य स्तम्भ अवयव यथावत रखने पर

आधार–वर्ग

[5]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 |
| 11 | 14 | 17 |
| 20 | 23 | 26 |

[6]

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 2 |
| 17 | 14 | 11 |
| 26 | 23 | 20 |

जादुई–वर्ग

[1]

| | 26 | 5 | p |
|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 17 | 23 |
| 8 | 14 | 20 | 8 |
| 11 | 26 | 5 | |

[2]

| | 20 | 5 | P |
|---|---|---|---|
| 23 | 8 | 11 | 23 |
| 2 | 14 | 26 | 2 |
| 17 | 20 | 5 | |

**d•** [1] और [2] को पंक्तिक दिशा में उलटने पर

[7]

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 23 | 26 |
| 11 | 14 | 17 |
| 2 | 5 | 8 |

[8]

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 23 | 20 |
| 17 | 14 | 11 |
| 8 | 5 | 2 |

[3]

| | 8 | 23 | p |
|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 17 | 5 |
| 26 | 14 | 2 | 26 |
| 11 | 8 | 23 | |

[4]

| | 2 | 23 | p |
|---|---|---|---|
| 5 | 26 | 11 | 5 |
| 20 | 14 | 8 | 20 |
| 17 | 2 | 23 | |

**यथार्थ भाजक** 3 **पर–**

**a•** मध्य पंकित अवयव यथावत रखने पर

**b•** [1] और [2] को स्तम्भिक दिशा में उलटने पर

आधार–वर्ग

[1]*

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 11 | 20 |
| 5 | 14 | 23 |
| 8 | 17 | 26 |

[2]**

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 17 | 26 |
| 5 | 14 | 23 |
| 2 | 11 | 20 |

[3] ***

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 11 | 2 |
| 23 | 14 | 5 |
| 26 | 17 | 8 |

[4]****

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 17 | 8 |
| 23 | 14 | 5 |
| 20 | 11 | 2 |

जादुई–वर्ग

[1]*

| | 26 | 11 | p |
|---|---|---|---|
| 17 | 2 | 23 | 17 |
| 20 | 14 | 8 | 20 |
| 5 | 26 | 11 | |

[2]**

| | 20 | 17 | P |
|---|---|---|---|
| 11 | 8 | 23 | 11 |
| 26 | 14 | 2 | 26 |
| 5 | 20 | 17 | |

[3]***

| | 8 | 11 | p |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 5 | 17 |
| 2 | 14 | 26 | 2 |
| 23 | 8 | 11 | |

[4]****

| | 2 | 17 | p |
|---|---|---|---|
| 11 | 26 | 5 | 11 |
| 8 | 14 | 20 | 8 |
| 23 | 2 | 17 | |

**c•** मध्य स्तम्भ अवयव यथावत रखने पर

आधार–वर्ग

[5]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 11 | 20 |
| 5 | 14 | 23 |
| 8 | 17 | 26 |

[6]

| | | |
|---|---|---|
| 20 | 11 | 2 |
| 23 | 14 | 5 |
| 26 | 17 | 8 |

जादुई–वर्ग

[1]

| | 26 | 11 | p |
|---|---|---|---|
| 17 | 2 | 23 | 17 |
| 20 | 14 | 8 | 20 |
| 5 | 26 | 11 | |

[2]

| | 8 | 11 | P |
|---|---|---|---|
| 17 | 20 | 5 | 17 |
| 2 | 14 | 26 | 2 |
| 23 | 8 | 11 | |

**d•** [1] और [2] को स्तम्भिक दिशा में उलटने पर

[7]

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 17 | 26 |
| 5 | 14 | 23 |
| 2 | 11 | 20 |

[8]

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 17 | 8 |
| 23 | 14 | 5 |
| 20 | 11 | 2 |

[3]

| | 20 | 17 | p |
|---|---|---|---|
| 11 | 8 | 23 | 11 |
| 26 | 14 | 2 | 26 |
| 5 | 20 | 17 | |

[4]

| | 2 | 17 | p |
|---|---|---|---|
| 11 | 26 | 5 | 11 |
| 8 | 14 | 20 | 8 |
| 23 | 2 | 17 | |

उपरोक्त 3*3 के प्रति यथार्थ भाजक 1 और 5 की अलग–अलग 8-8 प्रकार की आधार–वर्ग एवं जादुई–वर्ग की प्रस्तुतियों में (1-5),(2-7),(3-6),(4-8) परस्पर यथावत दोहराये युग्म हैं। अतः इनमें से 1-1 लिये जाने पर आधार–वर्ग = जादुई–वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या = (8-4)+(8-4) = 4+4 =8 होगा।--------(1)

**समिका से** (2x+1) के समस्त यथार्थ भाजकों की कुल संख्या m पर(2x+1)* (2x+1) के प्रति –

समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या = $4m[!(2x) - 1]$ में– x= 1 तथा समस्त यथार्थ भाजकों( 1 और 3) की कुल संख्या m=2 से–

$(2x+1)^*\ (2x+1) = (2^*1+1)^*\ (2^*1+1) = 3^*3$ के प्रति– समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या $= 4^*2[!\,(2*1)-1] = 8[!\,2-1] == 8^*1 = 8$ होगा। ------(2)

अतः (1) और (2) से समिका सत्यापित हुआ।

2■ $(2x+1)*(2x+1) = (2^*2+1)^*(2^*2+1) = 5^*5$ के प्रति–

आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग की प्रस्तुतियाँ–

यथार्थ भाजक 1 के प्रति–

**[A] प्रथम आधार–वर्ग का मध्य तीसरा पंक्ति यथावत रखने पर आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग**

[1]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 25 | 2 | 9 | |
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 | 23 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 | 4 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 | 10 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 | |

[2]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 20 | 2 | 9 | |
| 22 | 19 | 1 | 8 | 15 | 22 |
| 18 | 5 | 7 | 14 | 21 | 18 |
| 4 | 6 | 13 | 25 | 17 | 4 |
| 10 | 12 | 24 | 16 | 3 | 10 |
| 11 | 23 | 20 | 2 | 9 | |

[3]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 25 | 2 | 19 | |
| 7 | 24 | 1 | 18 | 15 | 7 |
| 23 | 5 | 17 | 14 | 6 | 23 |
| 4 | 16 | 13 | 10 | 22 | 4 |
| 20 | 12 | 9 | 21 | 3 | 20 |
| 11 | 8 | 25 | 2 | 19 | |

[4]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 10 | 2 | 19 | |
| 22 | 9 | 1 | 18 | 15 | 22 |
| 8 | 5 | 17 | 14 | 21 | 8 |
| 4 | 16 | 13 | 25 | 7 | 4 |
| 20 | 12 | 24 | 6 | 3 | 20 |
| 11 | 23 | 10 | 2 | 19 | |

[5]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 20 | 2 | 24 | |
| 7 | 19 | 1 | 23 | 15 | 7 |
| 18 | 5 | 22 | 14 | 6 | 18 |
| 4 | 21 | 13 | 10 | 17 | 4 |
| 25 | 12 | 9 | 16 | 3 | 25 |
| 11 | 8 | 20 | 2 | 24 | |

[6]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 10 | 2 | 24 | |
| 17 | 9 | 1 | 23 | 15 | 17 |
| 8 | 5 | 22 | 14 | 16 | 8 |
| 4 | 21 | 13 | 20 | 7 | 4 |
| 25 | 12 | 19 | 6 | 3 | 25 |
| 11 | 18 | 10 | 2 | 24 | |

[7]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 25 | 7 | 4 | |
| 17 | 34 | 6 | 3 | 15 | 17 |
| 23 | 10 | 2 | 14 | 16 | 23 |
| 9 | 1 | 13 | 20 | 22 | 9 |
| 5 | 12 | 19 | 21 | 8 | 5 |
| 11 | 18 | 10 | 7 | 4 | |

[8]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 20 | 7 | 4 | |
| 22 | 19 | 6 | 3 | 15 | 22 |
| 18 | 10 | 2 | 14 | 21 | 18 |
| 9 | 1 | 13 | 25 | 17 | 9 |
| 5 | 12 | 24 | 16 | 8 | 5 |
| 11 | 23 | 20 | 7 | 4 | |

[9]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 25 | 7 | 19 | |
| 2 | 24 | 6 | 18 | 15 | 2 |
| 23 | 10 | 17 | 14 | 1 | 23 |
| 9 | 16 | 13 | 5 | 22 | 9 |
| 20 | 12 | 4 | 21 | 8 | 20 |
| 11 | 3 | 25 | 7 | 19 | |

[10]

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | 23 | 5 | 7 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 4 | 6 | 18 | 15 | 22 |
| 3 | 10 | 17 | 14 | 21 | 3 |
| 9 | 16 | 13 | 25 | 2 | 9 |
| 20 | 12 | 24 | 1 | 8 | 20 |
| 11 | 23 | 5 | 7 | 19 | |

[11]

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | 3 | 20 | 7 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 19 | 6 | 23 | 15 | 2 |
| 18 | 10 | 22 | 14 | 1 | 18 |
| 9 | 21 | 13 | 5 | 17 | 9 |
| 25 | 12 | 4 | 16 | 8 | 25 |
| 11 | 3 | 20 | 7 | 24 | |

[12]

| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | 18 | 5 | 7 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 4 | 6 | 23 | 15 | 17 |
| 3 | 10 | 22 | 14 | 16 | 3 |
| 9 | 21 | 13 | 20 | 2 | 9 |
| 25 | 12 | 19 | 1 | 8 | 25 |
| 11 | 18 | 5 | 7 | 24 | |

[13]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | 8 | 25 | 17 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 24 | 16 | 3 | 15 | 7 |
| 23 | 20 | 2 | 14 | 6 | 23 |
| 19 | 1 | 13 | 10 | 22 | 19 |
| 5 | 12 | 9 | 21 | 18 | 5 |
| 11 | 8 | 25 | 17 | 4 | |

[14]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | 23 | 10 | 17 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 9 | 16 | 3 | 15 | 22 |
| 8 | 20 | 2 | 14 | 21 | 8 |
| 19 | 1 | 13 | 25 | 7 | 19 |
| 5 | 12 | 24 | 6 | 18 | 5 |
| 11 | 23 | 10 | 17 | 4 | |

[15]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | 3 | 25 | 17 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 24 | 16 | 8 | 15 | 2 |
| 3 | 20 | 7 | 14 | 1 | 23 |
| 19 | 6 | 13 | 5 | 22 | 19 |
| 10 | 12 | 4 | 21 | 18 | 10 |
| 11 | 3 | 5 | 17 | 9 | |

[16]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | 23 | 5 | 17 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 4 | 16 | 8 | 15 | 22 |
| 3 | 20 | 7 | 14 | 21 | 3 |
| 19 | 6 | 13 | 25 | 2 | 19 |
| 10 | 12 | 24 | 1 | 18 | 10 |
| 11 | 23 | 5 | 17 | 9 | |

[17]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | 3 | 10 | 17 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 16 | 23 | 15 | 2 |
| 8 | 20 | 22 | 14 | 1 | 8 |
| 19 | 21 | 13 | 5 | 7 | 19 |
| 25 | 12 | 4 | 6 | 18 | 25 |
| 11 | 3 | 10 | 17 | 24 | |

[18]

| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | 8 | 5 | 17 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 16 | 23 | 15 | 7 |
| 3 | 20 | 22 | 14 | 6 | 3 |
| 19 | 21 | 13 | 10 | 2 | 19 |
| 25 | 12 | 9 | 1 | 18 | 25 |
| 11 | 8 | 5 | 17 | 24 | |

[19]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

[20]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

[21]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | 8 | 20 | 22 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 19 | 21 | 3 | 15 | 7 |
| 18 | 25 | 2 | 14 | 6 | 18 |
| 24 | 1 | 13 | 10 | 17 | 24 |
| 5 | 12 | 9 | 16 | 23 | 5 |
| 11 | 8 | 20 | 22 | 4 | |

| | 18 | 10 | 22 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 9 | 21 | 3 | 15 | 17 |
| 8 | 25 | 2 | 14 | 16 | 8 |
| 24 | 1 | 13 | 20 | 7 | 24 |
| 5 | 12 | 19 | 6 | 23 | 5 |
| 11 | 18 | 10 | 22 | 4 | |

| | 3 | 20 | 22 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 19 | 21 | 8 | 15 | 2 |
| 18 | 25 | 7 | 14 | 1 | 18 |
| 24 | 6 | 13 | 5 | 17 | 24 |
| 10 | 12 | 4 | 16 | 23 | 10 |
| 11 | 3 | 20 | 22 | 9 | |

[22]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

[23]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

[24]

| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | 18 | 5 | 22 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 4 | 21 | 8 | 15 | 17 |
| 3 | 25 | 7 | 14 | 16 | 3 |
| 24 | 6 | 13 | 20 | 2 | 24 |
| 10 | 12 | 19 | 1 | 23 | 10 |
| 11 | 18 | 5 | 22 | 9 | |

| | 3 | 10 | 22 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 21 | 18 | 15 | 2 |
| 8 | 25 | 17 | 14 | 1 | 8 |
| 24 | 16 | 13 | 5 | 7 | 24 |
| 20 | 12 | 4 | 6 | 23 | 20 |
| 11 | 3 | 10 | 22 | 19 | |

| | 8 | 5 | 22 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 4 | 21 | 18 | 15 | 7 |
| 3 | 25 | 17 | 14 | 6 | 3 |
| 24 | 16 | 13 | 10 | 2 | 24 |
| 20 | 12 | 9 | 1 | 23 | 20 |
| 11 | 8 | 20 | 22 | 19 | |

**[B] 1 से 24 तक के आधार–वर्ग को स्तम्भिक उलट कर प्रस्तुत करने पर–**

[25]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

[26]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

[27]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | 18 | 21 | 4 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 22 | 5 | 8 | 11 | 19 |
| 23 | 1 | 9 | 12 | 20 | 23 |
| 2 | 10 | 13 | 16 | 24 | 2 |
| 6 | 14 | 17 | 25 | 3 | 6 |
| 15 | 18 | 21 | 4 | 7 | |

| | 23 | 16 | 4 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 17 | 5 | 8 | 11 | 24 |
| 18 | 1 | 9 | 12 | 25 | 18 |
| 2 | 10 | 13 | 21 | 19 | 2 |
| 6 | 14 | 22 | 20 | 3 | 6 |
| 15 | 23 | 16 | 4 | 7 | |

| | 8 | 21 | 4 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 22 | 5 | 18 | 11 | 9 |
| 23 | 1 | 19 | 12 | 10 | 23 |
| 2 | 20 | 13 | 6 | 24 | 2 |
| 16 | 14 | 7 | 25 | 3 | 16 |
| 15 | 8 | 21 | 4 | 17 | |

[28]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[29]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

[30]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

| | 23 | 6 | 4 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 7 | 5 | 18 | 11 | 24 |
| 8 | 1 | 19 | 12 | 25 | 8 |
| 2 | 20 | 13 | 21 | 9 | 2 |
| 16 | 14 | 22 | 10 | 3 | 16 |
| 15 | 23 | 6 | 4 | 17 | |

| | 8 | 16 | 4 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 17 | 5 | 23 | 11 | 9 |
| 18 | 1 | 24 | 12 | 10 | 18 |
| 2 | 25 | 13 | 6 | 19 | 2 |
| 21 | 14 | 7 | 20 | 3 | 21 |
| 15 | 8 | 16 | 4 | 22 | |

| | 18 | 6 | 4 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 5 | 23 | 11 | 19 |
| 8 | 1 | 24 | 12 | 20 | 8 |
| 2 | 25 | 13 | 16 | 9 | 2 |
| 21 | 14 | 17 | 10 | 3 | 21 |
| 15 | 18 | 6 | 4 | 22 | |

[31]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 21 | 9 | 2 | |
| 19 | 22 | 10 | 3 | 11 | 19 |
| 23 | 6 | 4 | 12 | 20 | 23 |
| 7 | 5 | 13 | 16 | 24 | 7 |
| 1 | 14 | 17 | 25 | 8 | 1 |
| 15 | 18 | 21 | 9 | 2 | |

[32]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 16 | 9 | 2 | |
| 24 | 17 | 10 | 3 | 11 | 24 |
| 18 | 6 | 4 | 12 | 25 | 18 |
| 7 | 5 | 13 | 21 | 19 | 7 |
| 1 | 14 | 22 | 20 | 8 | 1 |
| 15 | 23 | 16 | 9 | 2 | |

[33]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 21 | 9 | 17 | |
| 4 | 22 | 10 | 18 | 11 | 4 |
| 23 | 6 | 19 | 12 | 5 | 23 |
| 7 | 20 | 13 | 1 | 24 | 7 |
| 16 | 14 | 2 | 25 | 8 | 16 |
| 15 | 3 | 21 | 9 | 17 | |

[34]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 1 | 9 | 17 | |
| 24 | 2 | 10 | 18 | 11 | 24 |
| 3 | 6 | 19 | 12 | 25 | 3 |
| 7 | 20 | 13 | 21 | 4 | 7 |
| 16 | 14 | 22 | 5 | 8 | 16 |
| 15 | 23 | 1 | 9 | 17 | |

[35]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 16 | 9 | 22 | |
| 4 | 17 | 10 | 23 | 11 | 4 |
| 18 | 6 | 24 | 12 | 5 | 18 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 | 7 |
| 21 | 14 | 2 | 20 | 8 | 21 |
| 15 | 3 | 16 | 9 | 22 | |

[36]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 1 | 9 | 22 | |
| 19 | 2 | 10 | 23 | 11 | 19 |
| 3 | 6 | 24 | 12 | 20 | 3 |
| 7 | 25 | 13 | 21 | 4 | 7 |
| 21 | 14 | 17 | 5 | 8 | 21 |
| 15 | 18 | 1 | 9 | 22 | |

[37]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 21 | 19 | 2 | |
| 9 | 22 | 20 | 3 | 11 | 9 |
| 23 | 16 | 4 | 12 | 10 | 23 |
| 17 | 5 | 13 | 6 | 24 | 17 |
| 1 | 14 | 7 | 25 | 18 | 1 |
| 15 | 8 | 21 | 19 | 2 | |

[38]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 23 | 6 | 19 | 2 | |
| 24 | 7 | 20 | 3 | 11 | 24 |
| 8 | 16 | 4 | 12 | 25 | 8 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 | 17 |
| 1 | 14 | 22 | 10 | 18 | 1 |
| 15 | 23 | 6 | 19 | 2 | |

[39]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 21 | 19 | 7 | |
| 4 | 22 | 20 | 8 | 11 | 4 |
| 23 | 16 | 9 | 12 | 5 | 23 |
| 17 | 10 | 13 | 1 | 24 | 17 |
| 6 | 14 | 2 | 25 | 18 | 6 |
| 15 | 3 | 21 | 19 | 7 | |

[40]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

[41]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[42]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | 23 | 1 | 19 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 2 | 20 | 8 | 11 | 24 |
| 3 | 16 | 9 | 12 | 25 | 3 |
| 17 | 10 | 13 | 21 | 4 | 17 |
| 6 | 14 | 22 | 5 | 18 | 6 |
| 15 | 23 | 1 | 19 | 7 | |

| | 3 | 6 | 19 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 20 | 23 | 11 | 4 |
| 8 | 16 | 24 | 12 | 5 | 8 |
| 17 | 25 | 13 | 1 | 9 | 17 |
| 21 | 14 | 2 | 10 | 18 | 21 |
| 15 | 3 | 6 | 19 | 22 | |

| | 8 | 1 | 19 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 22 | 20 | 23 | 11 | 9 |
| 3 | 16 | 24 | 12 | 10 | 3 |
| 17 | 25 | 13 | 6 | 4 | 17 |
| 21 | 14 | 7 | 5 | 18 | 21 |
| 15 | 8 | 1 | 19 | 22 | |

[43]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

[44]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[45]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| | 8 | 16 | 24 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 17 | 25 | 3 | 11 | 9 |
| 18 | 21 | 4 | 12 | 10 | 18 |
| 22 | 5 | 13 | 6 | 19 | 22 |
| 1 | 14 | 7 | 20 | 23 | 1 |
| 15 | 8 | 16 | 24 | 2 | |

| | 18 | 6 | 24 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 25 | 3 | 11 | 19 |
| 8 | 21 | 4 | 12 | 20 | 8 |
| 22 | 5 | 13 | 16 | 9 | 22 |
| 1 | 14 | 17 | 10 | 23 | 1 |
| 15 | 18 | 6 | 24 | 2 | |

| | 3 | 16 | 24 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 17 | 25 | 8 | 11 | 4 |
| 18 | 21 | 9 | 12 | 5 | 18 |
| 22 | 10 | 13 | 1 | 19 | 22 |
| 6 | 14 | 2 | 20 | 23 | 6 |
| 15 | 3 | 16 | 24 | 7 | |

[46]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

[47]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[48]

| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | 18 | 1 | 24 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 2 | 25 | 8 | 11 | 29 |
| 3 | 21 | 9 | 12 | 20 | 3 |
| 22 | 10 | 13 | 16 | 4 | 22 |
| 6 | 14 | 17 | 5 | 23 | 6 |
| 15 | 18 | 1 | 24 | 7 | |

| | 3 | 6 | 24 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 25 | 18 | 11 | 4 |
| 8 | 21 | 19 | 12 | 5 | 8 |
| 22 | 20 | 13 | 1 | 9 | 22 |
| 16 | 14 | 2 | 10 | 23 | 16 |
| 15 | 3 | 6 | 24 | 17 | |

| | 8 | 1 | 24 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 2 | 25 | 18 | 11 | 9 |
| 3 | 21 | 19 | 12 | 10 | 3 |
| 22 | 20 | 13 | 6 | 4 | 22 |
| 16 | 14 | 7 | 5 | 23 | 16 |
| 15 | 8 | 1 | 24 | 17 | |

**[C] प्रथम आधार–वर्ग का मध्य तीसरा स्तम्भ यथावत रखने पर आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग**

[49]

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

[50]

| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 10 | 9 |
| 11 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 16 | 17 | 18 | 20 | 19 |
| 21 | 22 | 23 | 25 | 24 |

[51]

| 1 | 4 | 3 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 9 | 8 | 7 | 10 |
| 11 | 14 | 13 | 12 | 15 |
| 16 | 19 | 18 | 17 | 20 |
| 21 | 24 | 23 | 22 | 25 |

| | 18 | 25 | 2 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 | 17 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 | 23 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 | 4 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 | 10 |
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 | |

| | 18 | 24 | 2 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 25 | 1 | 8 | 14 | 17 |
| 23 | 4 | 7 | 15 | 16 | 23 |
| 5 | 6 | 13 | 19 | 22 | 5 |
| 9 | 12 | 20 | 21 | 3 | 9 |
| 11 | 18 | 24 | 2 | 10 | |

| | 18 | 25 | 4 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 22 | 1 | 8 | 15 | 19 |
| 23 | 5 | 9 | 12 | 16 | 23 |
| 2 | 6 | 13 | 20 | 24 | 2 |
| 10 | 14 | 17 | 21 | 3 | 10 |
| 11 | 18 | 25 | 4 | 7 | |

[52]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 5 | 2 |
| 6 | 9 | 8 | 10 | 7 |
| 11 | 14 | 13 | 15 | 12 |
| 16 | 19 | 18 | 20 | 17 |
| 21 | 24 | 23 | 25 | 22 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 22 | 4 | 10 | |
| 19 | 25 | 1 | 8 | 12 | 19 |
| 23 | 2 | 9 | 15 | 16 | 23 |
| 5 | 6 | 13 | 17 | 24 | 5 |
| 7 | 14 | 20 | 21 | 3 | 7 |
| 11 | 18 | 22 | 4 | 10 | |

[53]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 2 | 4 |
| 6 | 10 | 8 | 7 | 9 |
| 11 | 15 | 13 | 12 | 14 |
| 16 | 20 | 18 | 17 | 19 |
| 21 | 25 | 23 | 22 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 24 | 5 | 7 | |
| 20 | 22 | 1 | 8 | 14 | 20 |
| 23 | 4 | 10 | 12 | 16 | 23 |
| 2 | 6 | 13 | 19 | 25 | 2 |
| 9 | 15 | 17 | 21 | 3 | 9 |
| 11 | 18 | 24 | 5 | 7 | |

[54]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 4 | 2 |
| 6 | 10 | 8 | 9 | 7 |
| 11 | 15 | 13 | 14 | 12 |
| 16 | 20 | 18 | 19 | 17 |
| 21 | 25 | 23 | 24 | 22 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 22 | 5 | 9 | |
| 20 | 24 | 1 | 8 | 12 | 20 |
| 23 | 2 | 10 | 14 | 16 | 23 |
| 4 | 6 | 13 | 17 | 25 | 4 |
| 7 | 15 | 19 | 21 | 3 | 7 |
| 11 | 18 | 22 | 5 | 9 | |

[55]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |
| 7 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 12 | 11 | 13 | 14 | 15 |
| 17 | 16 | 18 | 19 | 20 |
| 22 | 21 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 25 | 1 | 9 | |
| 16 | 24 | 2 | 8 | 15 | 16 |
| 23 | 5 | 6 | 14 | 17 | 23 |
| 4 | 7 | 13 | 20 | 21 | 4 |
| 10 | 11 | 19 | 22 | 3 | 10 |
| 12 | 18 | 25 | 1 | 9 | |

[56]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 8 | 10 | 9 |
| 12 | 11 | 13 | 15 | 14 |
| 17 | 16 | 18 | 20 | 19 |
| 22 | 21 | 23 | 25 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 24 | 1 | 10 | |
| 16 | 25 | 2 | 8 | 14 | 16 |
| 23 | 4 | 6 | 15 | 17 | 23 |
| 5 | 7 | 13 | 19 | 21 | 5 |
| 9 | 11 | 20 | 22 | 3 | 9 |
| 12 | 18 | 24 | 1 | 10 | |

[57]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 1 | 5 |
| 7 | 9 | 8 | 6 | 10 |
| 12 | 14 | 13 | 11 | 15 |
| 17 | 19 | 18 | 16 | 20 |
| 22 | 24 | 23 | 21 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 25 | 4 | 6 | |
| 19 | 21 | 2 | 8 | 15 | 19 |
| 23 | 5 | 9 | 11 | 17 | 23 |
| 1 | 7 | 13 | 20 | 24 | 1 |
| 10 | 14 | 16 | 22 | 3 | 10 |
| 12 | 18 | 25 | 4 | 6 | |

[58]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |
| 7 | 9 | 8 | 10 | 6 |
| 12 | 14 | 13 | 15 | 11 |
| 17 | 19 | 18 | 20 | 16 |
| 22 | 24 | 23 | 25 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 21 | 4 | 5 | |
| 19 | 25 | 2 | 8 | 11 | 19 |
| 23 | 1 | 9 | 15 | 17 | 23 |
| 5 | 7 | 13 | 16 | 24 | 5 |
| 1 | 14 | 20 | 22 | 3 | 1 |
| 12 | 18 | 21 | 4 | 5 | |

[59]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 7 | 10 | 8 | 6 | 9 |
| 12 | 15 | 13 | 11 | 14 |
| 17 | 20 | 18 | 16 | 19 |
| 22 | 25 | 23 | 21 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 24 | 5 | 6 | |
| 20 | 21 | 2 | 8 | 14 | 20 |
| 23 | 4 | 10 | 11 | 17 | 23 |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 |
| 9 | 15 | 16 | 22 | 3 | 9 |
| 12 | 18 | 24 | 5 | 6 | |

[60]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 4 | 1 |
| 7 | 10 | 8 | 9 | 6 |
| 12 | 15 | 13 | 14 | 11 |
| 17 | 20 | 18 | 19 | 16 |
| 22 | 25 | 23 | 24 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 18 | 21 | 5 | 9 | |
| 20 | 24 | 2 | 8 | 11 | 20 |
| 23 | 1 | 10 | 14 | 17 | 23 |
| 4 | 7 | 13 | 16 | 25 | 4 |
| 6 | 15 | 19 | 22 | 3 | 6 |
| 12 | 18 | 21 | 5 | 9 | |

[61]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 2 | 5 |
| 9 | 6 | 8 | 7 | 10 |
| 14 | 11 | 13 | 12 | 15 |
| 19 | 16 | 18 | 17 | 20 |
| 24 | 21 | 23 | 22 | 25 |

[62]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 5 | 2 |
| 9 | 6 | 8 | 10 | 7 |
| 14 | 11 | 13 | 15 | 12 |
| 19 | 16 | 18 | 20 | 17 |
| 24 | 21 | 23 | 25 | 22 |

[63]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 1 | 5 |
| 9 | 7 | 8 | 6 | 10 |
| 14 | 12 | 13 | 11 | 15 |
| 19 | 17 | 18 | 16 | 20 |
| 24 | 22 | 23 | 21 | 25 |

| | 18 | 25 | 1 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 22 | 4 | 8 | 15 | 16 |
| 23 | 5 | 6 | 12 | 19 | 23 |
| 2 | 9 | 13 | 20 | 21 | 2 |
| 10 | 11 | 17 | 24 | 3 | 10 |
| 14 | 18 | 25 | 1 | 7 | |

| | 18 | 22 | 1 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 25 | 4 | 8 | 12 | 16 |
| 23 | 2 | 6 | 15 | 19 | 23 |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 5 |
| 7 | 11 | 20 | 24 | 3 | 7 |
| 14 | 18 | 22 | 1 | 10 | |

| | 18 | 25 | 2 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 21 | 4 | 8 | 15 | 17 |
| 23 | 5 | 7 | 11 | 19 | 23 |
| 1 | 9 | 13 | 20 | 22 | 1 |
| 10 | 12 | 16 | 24 | 3 | 10 |
| 14 | 18 | 25 | 2 | 6 | |

[64]

| 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 7 | 8 | 10 | 6 |
| 14 | 12 | 13 | 15 | 11 |
| 19 | 17 | 18 | 20 | 16 |
| 24 | 22 | 23 | 25 | 21 |

[65]

| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 14 | 15 | 13 | 11 | 12 |
| 19 | 20 | 18 | 16 | 17 |
| 24 | 25 | 23 | 21 | 22 |

[66]

| 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 10 | 8 | 7 | 6 |
| 14 | 15 | 13 | 12 | 11 |
| 19 | 20 | 18 | 17 | 16 |
| 24 | 25 | 23 | 22 | 21 |

| | 18 | 21 | 2 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 25 | 4 | 8 | 11 | 22 |
| 23 | 1 | 7 | 15 | 24 | 23 |
| 5 | 9 | 13 | 16 | 22 | 5 |
| 6 | 12 | 20 | 24 | 3 | 6 |
| 14 | 18 | 21 | 2 | 10 | |

| | 18 | 22 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 4 | 8 | 12 | 20 |
| 23 | 2 | 10 | 11 | 19 | 23 |
| 1 | 9 | 13 | 17 | 25 | 1 |
| 7 | 15 | 16 | 24 | 3 | 7 |
| 14 | 18 | 22 | 5 | 6 | |

| | 18 | 21 | 5 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 22 | 4 | 8 | 11 | 20 |
| 23 | 1 | 10 | 12 | 19 | 23 |
| 2 | 9 | 13 | 16 | 25 | 2 |
| 6 | 15 | 17 | 24 | 3 | 6 |
| 14 | 18 | 21 | 5 | 7 | |

[67]

| 5 | 1 | 3 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 8 | 7 | 9 |
| 15 | 11 | 13 | 12 | 14 |
| 20 | 16 | 18 | 17 | 19 |
| 25 | 21 | 23 | 22 | 24 |

[68]

| 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 8 | 9 | 7 |
| 15 | 11 | 13 | 14 | 12 |
| 20 | 16 | 18 | 19 | 17 |
| 25 | 21 | 23 | 24 | 22 |

[69]

| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 7 | 8 | 6 | 9 |
| 15 | 12 | 13 | 11 | 14 |
| 20 | 17 | 18 | 16 | 19 |
| 25 | 22 | 23 | 21 | 24 |

| | 18 | 24 | 1 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 22 | 5 | 8 | 14 | 16 |
| 23 | 4 | 6 | 12 | 20 | 23 |
| 2 | 10 | 13 | 19 | 21 | 2 |
| 9 | 11 | 17 | 25 | 3 | 9 |
| 15 | 18 | 24 | 1 | 7 | |

| | 18 | 22 | 1 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 24 | 5 | 8 | 12 | 16 |
| 23 | 2 | 6 | 14 | 20 | 23 |
| 4 | 10 | 13 | 17 | 21 | 4 |
| 7 | 11 | 19 | 25 | 3 | 7 |
| 15 | 18 | 22 | 1 | 9 | |

| | 18 | 24 | 2 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 21 | 5 | 8 | 14 | 17 |
| 23 | 4 | 7 | 11 | 20 | 23 |
| 1 | 10 | 13 | 19 | 22 | 1 |
| 9 | 12 | 16 | 25 | 3 | 9 |
| 15 | 18 | 24 | 2 | 6 | |

[70]

| 5 | 2 | 3 | 4 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 7 | 8 | 9 | 6 |
| 15 | 12 | 13 | 14 | 11 |
| 20 | 17 | 18 | 19 | 16 |
| 25 | 22 | 23 | 24 | 21 |

[71]

| 5 | 4 | 3 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 6 | 7 |
| 15 | 14 | 13 | 11 | 12 |
| 20 | 19 | 18 | 16 | 17 |
| 25 | 24 | 23 | 21 | 22 |

[72]

| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | 18 | 21 | 2 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 24 | 5 | 8 | 11 | 17 |
| 23 | 1 | 7 | 14 | 20 | 23 |
| 4 | 10 | 13 | 16 | 22 | 4 |
| 6 | 12 | 19 | 25 | 3 | 6 |
| 15 | 18 | 21 | 2 | 9 | |

| | 18 | 22 | 4 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 21 | 5 | 8 | 12 | 19 |
| 23 | 2 | 9 | 11 | 20 | 23 |
| 1 | 10 | 13 | 17 | 24 | 1 |
| 7 | 14 | 16 | 25 | 3 | 7 |
| 15 | 18 | 22 | 4 | 6 | |

| | 18 | 21 | 4 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 22 | 5 | 8 | 11 | 19 |
| 23 | 1 | 9 | 12 | 20 | 23 |
| 2 | 10 | 13 | 16 | 24 | 2 |
| 6 | 14 | 17 | 25 | 3 | 6 |
| 15 | 18 | 21 | 4 | 7 | |

**[D] 49 से 72 तक के आधार–वर्ग को पंक्तिक उलट कर प्रस्तुत करने पर–**

[73]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 22 | 19 | |
| 7 | 4 | 21 | 18 | 15 | 7 |
| 3 | 25 | 17 | 14 | 6 | 3 |
| 24 | 16 | 13 | 10 | 2 | 24 |
| 20 | 12 | 9 | 1 | 23 | 20 |
| 11 | 8 | 5 | 22 | 19 | |

[74]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 25 | 24 |
| 16 | 17 | 18 | 20 | 19 |
| 11 | 12 | 13 | 15 | 14 |
| 6 | 7 | 8 | 10 | 9 |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | 22 | 20 | |
| 7 | 5 | 21 | 18 | 14 | 7 |
| 3 | 24 | 17 | 15 | 6 | 3 |
| 25 | 16 | 13 | 9 | 2 | 25 |
| 19 | 12 | 10 | 1 | 23 | 19 |
| 11 | 8 | 4 | 22 | 20 | |

[75]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 24 | 23 | 22 | 25 |
| 16 | 19 | 18 | 17 | 20 |
| 11 | 14 | 13 | 12 | 15 |
| 6 | 9 | 8 | 7 | 10 |
| 1 | 4 | 3 | 2 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 24 | 17 | |
| 9 | 2 | 21 | 18 | 15 | 9 |
| 3 | 25 | 19 | 12 | 6 | 3 |
| 22 | 16 | 13 | 10 | 4 | 22 |
| 20 | 14 | 7 | 1 | 23 | 20 |
| 11 | 8 | 5 | 24 | 17 | |

[76]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 24 | 23 | 25 | 22 |
| 16 | 19 | 18 | 20 | 17 |
| 11 | 14 | 13 | 15 | 12 |
| 6 | 9 | 8 | 10 | 7 |
| 1 | 4 | 3 | 5 | 2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 24 | 20 | |
| 9 | 5 | 21 | 18 | 12 | 9 |
| 3 | 22 | 19 | 15 | 6 | 3 |
| 25 | 16 | 13 | 7 | 4 | 25 |
| 17 | 14 | 10 | 1 | 23 | 17 |
| 11 | 8 | 2 | 24 | 20 | |

[77]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 25 | 23 | 22 | 24 |
| 16 | 20 | 18 | 17 | 19 |
| 11 | 15 | 13 | 12 | 14 |
| 6 | 10 | 8 | 7 | 9 |
| 1 | 5 | 3 | 2 | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | 25 | 17 | |
| 10 | 2 | 21 | 18 | 14 | 10 |
| 3 | 24 | 20 | 12 | 6 | 3 |
| 22 | 16 | 13 | 9 | 5 | 22 |
| 19 | 15 | 7 | 1 | 23 | 19 |
| 11 | 8 | 4 | 25 | 17 | |

[78]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 25 | 23 | 24 | 22 |
| 16 | 20 | 18 | 19 | 17 |
| 11 | 15 | 13 | 14 | 12 |
| 6 | 10 | 8 | 9 | 7 |
| 1 | 5 | 3 | 4 | 2 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 25 | 19 | |
| 10 | 4 | 21 | 18 | 12 | 10 |
| 3 | 22 | 20 | 14 | 6 | 3 |
| 24 | 16 | 13 | 7 | 5 | 24 |
| 17 | 15 | 9 | 1 | 23 | 17 |
| 11 | 8 | 2 | 25 | 19 | |

[79]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 21 | 23 | 24 | 25 |
| 17 | 16 | 18 | 19 | 20 |
| 12 | 11 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 1 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 21 | 19 | |
| 6 | 4 | 22 | 18 | 15 | 6 |
| 3 | 25 | 16 | 14 | 7 | 3 |
| 24 | 17 | 13 | 10 | 1 | 24 |
| 20 | 11 | 9 | 2 | 23 | 20 |
| 12 | 8 | 5 | 21 | 19 | |

[80]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 21 | 23 | 25 | 24 |
| 17 | 16 | 18 | 20 | 19 |
| 12 | 11 | 13 | 15 | 14 |
| 7 | 6 | 8 | 10 | 9 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 4 | 21 | 20 | |
| 6 | 5 | 22 | 18 | 14 | 6 |
| 3 | 24 | 16 | 15 | 7 | 3 |
| 25 | 17 | 13 | 9 | 1 | 25 |
| 19 | 11 | 10 | 2 | 23 | 19 |
| 12 | 8 | 4 | 21 | 20 | |

[81]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 24 | 23 | 21 | 25 |
| 17 | 19 | 18 | 16 | 20 |
| 12 | 14 | 13 | 11 | 15 |
| 7 | 9 | 8 | 6 | 10 |
| 2 | 4 | 3 | 1 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 5 | 24 | 16 | |
| 9 | 1 | 22 | 18 | 15 | 9 |
| 3 | 25 | 19 | 11 | 7 | 3 |
| 21 | 17 | 13 | 10 | 4 | 21 |
| 20 | 14 | 6 | 2 | 23 | 20 |
| 12 | 8 | 5 | 24 | 16 | |

[82]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 24 | 23 | 25 | 21 |
| 17 | 19 | 18 | 20 | 16 |
| 12 | 14 | 13 | 15 | 11 |
| 7 | 9 | 8 | 10 | 6 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 1 |

[83]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 25 | 23 | 21 | 24 |
| 17 | 20 | 18 | 16 | 19 |
| 12 | 15 | 13 | 11 | 14 |
| 7 | 10 | 8 | 6 | 9 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |

[84]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 25 | 23 | 24 | 21 |
| 17 | 20 | 18 | 19 | 16 |
| 12 | 15 | 13 | 14 | 11 |
| 7 | 10 | 8 | 9 | 6 |
| 2 | 5 | 3 | 4 | 1 |

| | 8 | 1 | 24 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 5 | 22 | 18 | 11 | 9 |
| 3 | 21 | 19 | 15 | 7 | 3 |
| 25 | 17 | 13 | 6 | 4 | 25 |
| 16 | 14 | 10 | 2 | 23 | 16 |
| 12 | 8 | 1 | 24 | 20 | |

| | 8 | 4 | 25 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 22 | 18 | 14 | 10 |
| 3 | 24 | 20 | 11 | 7 | 3 |
| 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 21 |
| 19 | 15 | 6 | 2 | 23 | 19 |
| 12 | 8 | 4 | 25 | 16 | |

| | 8 | 1 | 25 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 4 | 22 | 18 | 11 | 10 |
| 3 | 21 | 20 | 14 | 7 | 3 |
| 24 | 17 | 13 | 6 | 5 | 24 |
| 16 | 15 | 9 | 2 | 23 | 16 |
| 12 | 8 | 1 | 25 | 19 | |

[85]

| 24 | 21 | 23 | 22 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 18 | 17 | 20 |
| 14 | 11 | 13 | 12 | 15 |
| 9 | 6 | 8 | 7 | 10 |
| 4 | 1 | 3 | 2 | 5 |

[86]

| 24 | 21 | 23 | 25 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 16 | 18 | 20 | 17 |
| 14 | 11 | 13 | 15 | 12 |
| 9 | 6 | 8 | 10 | 7 |
| 4 | 1 | 3 | 5 | 2 |

[87]

| 24 | 22 | 23 | 21 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 17 | 18 | 16 | 20 |
| 14 | 12 | 13 | 11 | 15 |
| 9 | 7 | 8 | 6 | 10 |
| 4 | 2 | 3 | 1 | 5 |

| | 8 | 5 | 21 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 24 | 18 | 15 | 6 |
| 3 | 25 | 16 | 12 | 9 | 3 |
| 22 | 19 | 13 | 10 | 1 | 22 |
| 20 | 11 | 7 | 4 | 23 | 20 |
| 14 | 8 | 5 | 21 | 17 | |

| | 8 | 2 | 21 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 24 | 18 | 12 | 6 |
| 3 | 22 | 16 | 15 | 9 | 3 |
| 25 | 19 | 13 | 7 | 1 | 25 |
| 17 | 11 | 10 | 4 | 23 | 17 |
| 14 | 8 | 2 | 21 | 20 | |

| | 8 | 5 | 22 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 24 | 18 | 15 | 7 |
| 3 | 25 | 17 | 11 | 9 | 3 |
| 21 | 19 | 13 | 10 | 2 | 21 |
| 20 | 12 | 6 | 4 | 23 | 20 |
| 14 | 8 | 5 | 22 | 16 | |

[88]

| 24 | 22 | 23 | 25 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 17 | 18 | 20 | 16 |
| 14 | 12 | 13 | 15 | 11 |
| 9 | 7 | 8 | 10 | 6 |
| 4 | 2 | 3 | 5 | 1 |

[89]

| 24 | 25 | 23 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 20 | 18 | 16 | 17 |
| 14 | 15 | 13 | 11 | 12 |
| 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |

[90]

| 24 | 25 | 23 | 22 | 21 |
|---|---|---|---|---|
| 19 | 20 | 18 | 17 | 16 |
| 14 | 15 | 13 | 12 | 11 |
| 9 | 10 | 8 | 7 | 6 |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 1 |

| | 8 | 1 | 22 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 24 | 18 | 11 | 7 |
| 3 | 21 | 17 | 15 | 9 | 3 |
| 25 | 19 | 13 | 6 | 2 | 25 |
| 16 | 12 | 10 | 4 | 23 | 16 |
| 14 | 8 | 1 | 22 | 20 | |

| | 8 | 2 | 25 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 1 | 24 | 18 | 12 | 10 |
| 3 | 22 | 20 | 11 | 9 | 3 |
| 21 | 19 | 13 | 7 | 5 | 21 |
| 17 | 15 | 6 | 4 | 23 | 17 |
| 14 | 8 | 2 | 25 | 16 | |

| | 8 | 1 | 25 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 24 | 18 | 11 | 10 |
| 3 | 21 | 20 | 12 | 9 | 3 |
| 22 | 19 | 13 | 6 | 5 | 22 |
| 16 | 15 | 7 | 4 | 23 | 16 |
| 14 | 8 | 1 | 25 | 17 | |

[91]

| 25 | 21 | 23 | 22 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 18 | 17 | 19 |
| 15 | 11 | 13 | 12 | 14 |
| 10 | 6 | 8 | 7 | 9 |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 4 |

[92]

| 25 | 21 | 23 | 24 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 16 | 18 | 19 | 17 |
| 15 | 11 | 13 | 14 | 12 |
| 10 | 6 | 8 | 9 | 7 |
| 5 | 1 | 3 | 4 | 2 |

[93]

| 25 | 22 | 23 | 21 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 17 | 18 | 16 | 19 |
| 15 | 12 | 13 | 11 | 14 |
| 10 | 7 | 8 | 6 | 9 |
| 5 | 2 | 3 | 1 | 4 |

| | 8 | 4 | 21 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2 | 25 | 18 | 14 | 6 |
| 3 | 24 | 16 | 12 | 10 | 3 |
| 22 | 20 | 13 | 9 | 1 | 22 |
| 19 | 11 | 7 | 5 | 23 | 19 |
| 15 | 8 | 4 | 21 | 17 | |

| | 8 | 2 | 21 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 25 | 18 | 12 | 6 |
| 3 | 22 | 16 | 14 | 10 | 3 |
| 24 | 20 | 13 | 7 | 2 | 24 |
| 17 | 11 | 9 | 5 | 23 | 17 |
| 15 | 8 | 2 | 21 | 19 | |

| | 8 | 4 | 22 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 25 | 18 | 14 | 7 |
| 3 | 24 | 17 | 11 | 10 | 3 |
| 21 | 20 | 13 | 9 | 2 | 21 |
| 19 | 12 | 6 | 5 | 23 | 19 |
| 15 | 8 | 4 | 22 | 16 | |

[94]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 22 | 23 | 24 | 21 |
| 20 | 17 | 18 | 19 | 16 |
| 15 | 12 | 13 | 14 | 11 |
| 10 | 7 | 8 | 9 | 6 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 1 |

[95]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 21 | 22 |
| 20 | 19 | 18 | 16 | 17 |
| 15 | 14 | 13 | 11 | 12 |
| 10 | 9 | 8 | 6 | 7 |
| 5 | 4 | 3 | 1 | 2 |

[96]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 1 | 22 | 19 | |
| 7 | 4 | 25 | 18 | 11 | 7 |
| 3 | 21 | 17 | 14 | 10 | 3 |
| 24 | 20 | 13 | 6 | 2 | 24 |
| 16 | 12 | 9 | 5 | 23 | 16 |
| 15 | 8 | 1 | 22 | 19 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 24 | 16 | |
| 9 | 1 | 25 | 18 | 12 | 9 |
| 3 | 22 | 19 | 11 | 10 | 3 |
| 21 | 20 | 13 | 7 | 4 | 21 |
| 17 | 14 | 6 | 5 | 23 | 17 |
| 15 | 8 | 2 | 24 | 16 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 2 | 24 | 17 | |
| 9 | 2 | 25 | 18 | 11 | 7 |
| 3 | 21 | 19 | 12 | 10 | 3 |
| 22 | 20 | 13 | 6 | 4 | 22 |
| 16 | 12 | 7 | 5 | 23 | 16 |
| 15 | 8 | 1 | 24 | 17 | |

यथार्थ भाजक 5 के प्रति–

**[A] प्रथम आधार–वर्ग का मध्य तीसरा पंक्ति यथावत रखने पर आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग**

[1]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

[2]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

[3]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 25 | 6 | 17 | |
| 9 | 20 | 1 | 12 | 23 | 9 |
| 15 | 21 | 7 | 18 | 4 | 15 |
| 16 | 2 | 13 | 24 | 10 | 16 |
| 22 | 8 | 19 | 5 | 11 | 22 |
| 3 | 14 | 25 | 6 | 17 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 24 | 6 | 17 | |
| 10 | 19 | 1 | 12 | 23 | 10 |
| 14 | 21 | 7 | 18 | 5 | 14 |
| 16 | 2 | 13 | 25 | 9 | 16 |
| 22 | 8 | 20 | 4 | 11 | 22 |
| 3 | 15 | 24 | 6 | 17 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 25 | 6 | 19 | |
| 7 | 20 | 1 | 14 | 23 | 7 |
| 15 | 21 | 9 | 18 | 2 | 15 |
| 16 | 4 | 13 | 22 | 10 | 16 |
| 24 | 8 | 17 | 5 | 11 | 24 |
| 3 | 12 | 25 | 6 | 19 | |

[4]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[5]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

[6]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 22 | 6 | 19 | |
| 10 | 17 | 1 | 14 | 23 | 10 |
| 12 | 21 | 9 | 18 | 5 | 12 |
| 16 | 4 | 13 | 25 | 7 | 16 |
| 24 | 8 | 20 | 2 | 11 | 24 |
| 3 | 15 | 22 | 6 | 19 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 24 | 6 | 20 | |
| 7 | 19 | 1 | 15 | 23 | 7 |
| 14 | 21 | 10 | 18 | 2 | 14 |
| 16 | 5 | 13 | 22 | 9 | 16 |
| 25 | 8 | 17 | 4 | 11 | 25 |
| 3 | 12 | 24 | 6 | 20 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 6 | 20 | |
| 9 | 17 | 1 | 15 | 23 | 9 |
| 12 | 21 | 10 | 18 | 4 | 12 |
| 16 | 5 | 13 | 24 | 7 | 16 |
| 25 | 8 | 19 | 2 | 11 | 25 |
| 3 | 14 | 22 | 6 | 20 | |

[7]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

[8]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

[9]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

| | 14 | 25 | 7 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 20 | 2 | 11 | 23 | 9 |
| 15 | 22 | 6 | 18 | 4 | 15 |
| 17 | 1 | 13 | 24 | 10 | 17 |
| 21 | 8 | 19 | 5 | 12 | 21 |
| 3 | 14 | 25 | 7 | 16 | |

| | 15 | 24 | 7 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 19 | 2 | 11 | 23 | 10 |
| 14 | 22 | 6 | 18 | 5 | 14 |
| 17 | 1 | 13 | 25 | 9 | 17 |
| 21 | 8 | 20 | 4 | 12 | 21 |
| 3 | 15 | 24 | 7 | 16 | |

| | 11 | 25 | 7 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 20 | 2 | 14 | 23 | 6 |
| 15 | 22 | 9 | 18 | 1 | 15 |
| 17 | 4 | 13 | 21 | 10 | 17 |
| 24 | 8 | 16 | 5 | 12 | 24 |
| 3 | 11 | 25 | 7 | 19 | |

[10]

| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[11]

| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

[12]

| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

| | 15 | 21 | 7 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 16 | 2 | 14 | 23 | 10 |
| 11 | 22 | 9 | 18 | 5 | 11 |
| 17 | 4 | 13 | 25 | 6 | 17 |
| 24 | 8 | 20 | 1 | 12 | 24 |
| 3 | 15 | 21 | 7 | 19 | |

| | 11 | 24 | 7 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 19 | 2 | 15 | 23 | 6 |
| 14 | 22 | 10 | 18 | 1 | 14 |
| 17 | 5 | 13 | 21 | 9 | 17 |
| 25 | 8 | 16 | 4 | 12 | 25 |
| 3 | 11 | 24 | 7 | 20 | |

| | 14 | 21 | 7 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 16 | 2 | 15 | 23 | 9 |
| 11 | 22 | 10 | 18 | 4 | 11 |
| 17 | 5 | 13 | 24 | 6 | 17 |
| 25 | 8 | 19 | 1 | 12 | 25 |
| 3 | 14 | 21 | 7 | 20 | |

[13]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

[14]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[15]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

| | 12 | 25 | 9 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 20 | 4 | 11 | 23 | 7 |
| 15 | 24 | 6 | 18 | 2 | 15 |
| 19 | 1 | 13 | 22 | 10 | 19 |
| 21 | 8 | 17 | 5 | 14 | 21 |
| 3 | 12 | 25 | 9 | 16 | |

| | 15 | 22 | 9 | 16 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 17 | 4 | 11 | 23 | 10 |
| 12 | 24 | 6 | 18 | 5 | 12 |
| 19 | 1 | 13 | 24 | 7 | 19 |
| 21 | 8 | 20 | 2 | 14 | 21 |
| 3 | 15 | 22 | 9 | 16 | |

| | 11 | 25 | 9 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 20 | 4 | 12 | 23 | 6 |
| 15 | 24 | 7 | 18 | 1 | 15 |
| 19 | 2 | 13 | 21 | 10 | 19 |
| 22 | 8 | 16 | 5 | 14 | 22 |
| 3 | 11 | 25 | 9 | 17 | |

[16]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[17]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[18]

| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

| | 15 | 21 | 9 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 16 | 4 | 12 | 23 | 10 |
| 11 | 24 | 7 | 18 | 5 | 11 |
| 19 | 2 | 13 | 25 | 6 | 19 |
| 22 | 8 | 20 | 1 | 14 | 22 |
| 3 | 15 | 21 | 9 | 17 | |

| | 11 | 22 | 9 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 17 | 4 | 15 | 23 | 6 |
| 12 | 24 | 10 | 18 | 1 | 12 |
| 19 | 5 | 13 | 21 | 7 | 19 |
| 25 | 8 | 16 | 2 | 14 | 25 |
| 3 | 11 | 22 | 9 | 20 | |

| | 12 | 21 | 9 | 20 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 16 | 4 | 15 | 23 | 7 |
| 11 | 24 | 10 | 18 | 2 | 11 |
| 19 | 5 | 13 | 22 | 6 | 19 |
| 25 | 8 | 17 | 1 | 14 | 25 |
| 3 | 12 | 21 | 9 | 20 | |

[19]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

[20]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[21]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 24 | 10 | 16 | |
| 7 | 19 | 5 | 11 | 23 | 7 |
| 14 | 25 | 6 | 18 | 2 | 14 |
| 20 | 1 | 13 | 22 | 9 | 20 |
| 21 | 8 | 17 | 4 | 15 | 21 |
| 3 | 12 | 24 | 10 | 16 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 22 | 10 | 16 | |
| 9 | 17 | 5 | 11 | 23 | 9 |
| 12 | 25 | 6 | 18 | 4 | 12 |
| 20 | 1 | 13 | 24 | 7 | 20 |
| 21 | 8 | 19 | 2 | 15 | 21 |
| 3 | 14 | 22 | 10 | 16 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 24 | 10 | 17 | |
| 6 | 19 | 5 | 12 | 23 | 6 |
| 14 | 25 | 7 | 18 | 1 | 14 |
| 20 | 2 | 13 | 21 | 9 | 20 |
| 22 | 8 | 16 | 4 | 15 | 22 |
| 3 | 11 | 24 | 10 | 17 | |

[22]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[ 23]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[24]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 21 | 10 | 17 | |
| 9 | 16 | 5 | 12 | 23 | 9 |
| 11 | 25 | 7 | 18 | 4 | 11 |
| 20 | 2 | 13 | 24 | 6 | 20 |
| 22 | 8 | 19 | 1 | 15 | 22 |
| 3 | 14 | 21 | 10 | 17 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 22 | 10 | 19 | |
| 6 | 17 | 5 | 14 | 23 | 6 |
| 12 | 25 | 9 | 18 | 1 | 12 |
| 20 | 4 | 13 | 21 | 7 | 20 |
| 24 | 8 | 16 | 2 | 15 | 24 |
| 3 | 11 | 22 | 10 | 19 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 21 | 10 | 19 | |
| 7 | 16 | 5 | 14 | 23 | 7 |
| 11 | 25 | 9 | 18 | 2 | 11 |
| 20 | 4 | 13 | 22 | 6 | 20 |
| 24 | 8 | 17 | 1 | 15 | 24 |
| 3 | 12 | 21 | 10 | 19 | |

**[B] A से प्राप्त1 से 24 के आधार–वर्ग को स्तम्भिक उलट कर प्रस्तुत करने पर–**

[25]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

[26]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[27]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 5 | 16 | 7 | |
| 19 | 10 | 21 | 12 | 3 | 19 |
| 15 | 1 | 17 | 8 | 24 | 15 |
| 6 | 22 | 13 | 4 | 20 | 6 |
| 2 | 18 | 9 | 25 | 11 | 2 |
| 23 | 14 | 5 | 16 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 4 | 16 | 7 | |
| 20 | 9 | 21 | 12 | 3 | 20 |
| 14 | 1 | 17 | 8 | 25 | 14 |
| 6 | 22 | 13 | 5 | 19 | 6 |
| 2 | 18 | 10 | 24 | 11 | 2 |
| 23 | 15 | 4 | 16 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 5 | 16 | 9 | |
| 17 | 10 | 21 | 14 | 3 | 17 |
| 15 | 1 | 19 | 8 | 22 | 15 |
| 6 | 24 | 13 | 2 | 20 | 6 |
| 4 | 18 | 7 | 25 | 11 | 4 |
| 23 | 12 | 5 | 16 | 9 | |

[28]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[29]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[30]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

| | 15 | 2 | 16 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 7 | 21 | 14 | 3 | 20 |
| 12 | 1 | 19 | 8 | 25 | 12 |
| 6 | 24 | 13 | 5 | 17 | 6 |
| 4 | 18 | 10 | 22 | 11 | 4 |
| 23 | 15 | 2 | 16 | 9 | |

| | 12 | 4 | 16 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 9 | 21 | 15 | 3 | 17 |
| 14 | 1 | 20 | 8 | 22 | 14 |
| 6 | 25 | 13 | 2 | 19 | 6 |
| 5 | 18 | 7 | 24 | 11 | 5 |
| 23 | 12 | 4 | 16 | 10 | |

| | 14 | 2 | 16 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 7 | 21 | 15 | 3 | 19 |
| 12 | 1 | 20 | 8 | 24 | 12 |
| 6 | 25 | 13 | 4 | 17 | 6 |
| 5 | 18 | 9 | 22 | 11 | 5 |
| 23 | 14 | 2 | 16 | 10 | |

[31]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

[32]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[33]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | 14 | 5 | 17 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 10 | 22 | 11 | 3 | 19 |
| 15 | 2 | 16 | 8 | 24 | 15 |
| 7 | 21 | 13 | 4 | 20 | 7 |
| 1 | 18 | 9 | 25 | 12 | 1 |
| 23 | 14 | 5 | 17 | 6 | |

| | 15 | 4 | 17 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 9 | 22 | 11 | 3 | 20 |
| 14 | 2 | 16 | 8 | 25 | 14 |
| 7 | 21 | 13 | 5 | 19 | 7 |
| 1 | 18 | 10 | 24 | 12 | 1 |
| 23 | 15 | 4 | 17 | 6 | |

| | 11 | 5 | 17 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 10 | 22 | 14 | 3 | 16 |
| 15 | 2 | 19 | 8 | 21 | 15 |
| 7 | 24 | 13 | 1 | 20 | 7 |
| 4 | 18 | 6 | 25 | 12 | 4 |
| 23 | 11 | 5 | 17 | 9 | |

[34]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

[35]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[36]

| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | 15 | 1 | 17 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 6 | 22 | 14 | 3 | 20 |
| 11 | 2 | 19 | 8 | 25 | 11 |
| 7 | 24 | 13 | 5 | 16 | 7 |
| 4 | 18 | 10 | 21 | 12 | 4 |
| 23 | 15 | 1 | 17 | 9 | |

| | 11 | 4 | 17 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 9 | 22 | 15 | 3 | 16 |
| 14 | 2 | 20 | 8 | 21 | 14 |
| 7 | 25 | 13 | 1 | 19 | 7 |
| 5 | 18 | 6 | 24 | 12 | 5 |
| 23 | 11 | 4 | 17 | 10 | |

| | 14 | 1 | 17 | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 6 | 22 | 15 | 3 | 19 |
| 11 | 2 | 20 | 8 | 24 | 11 |
| 7 | 25 | 13 | 4 | 16 | 7 |
| 5 | 18 | 9 | 21 | 12 | 5 |
| 23 | 14 | 1 | 17 | 10 | |

[37]

| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

[38]

| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[39]

| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | 12 | 5 | 19 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 10 | 24 | 11 | 3 | 17 |
| 15 | 4 | 16 | 8 | 22 | 15 |
| 9 | 21 | 13 | 2 | 20 | 9 |
| 1 | 18 | 7 | 25 | 14 | 1 |
| 23 | 12 | 5 | 19 | 6 | |

| | 15 | 2 | 19 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 7 | 24 | 11 | 3 | 20 |
| 12 | 4 | 16 | 8 | 25 | 12 |
| 9 | 21 | 13 | 5 | 17 | 9 |
| 1 | 18 | 10 | 22 | 14 | 1 |
| 23 | 15 | 2 | 19 | 6 | |

| | 11 | 5 | 19 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 10 | 24 | 12 | 3 | 16 |
| 15 | 4 | 17 | 8 | 21 | 15 |
| 9 | 22 | 13 | 1 | 20 | 9 |
| 2 | 18 | 6 | 25 | 14 | 2 |
| 23 | 11 | 5 | 19 | 7 | |

[40]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

[41]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[42]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 15 | 1 | 19 | 7 | |
| 20 | 6 | 24 | 12 | 3 | 20 |
| 11 | 4 | 17 | 8 | 25 | 11 |
| 9 | 22 | 13 | 5 | 16 | 9 |
| 2 | 18 | 10 | 21 | 14 | 2 |
| 23 | 15 | 1 | 19 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 2 | 19 | 10 | |
| 16 | 7 | 24 | 15 | 3 | 16 |
| 12 | 4 | 29 | 8 | 21 | 12 |
| 9 | 25 | 13 | 1 | 17 | 9 |
| 5 | 18 | 6 | 22 | 14 | 5 |
| 23 | 11 | 2 | 19 | 10 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 19 | 10 | |
| 17 | 6 | 24 | 15 | 3 | 17 |
| 11 | 4 | 20 | 8 | 22 | 11 |
| 9 | 25 | 13 | 2 | 16 | 9 |
| 5 | 18 | 7 | 21 | 14 | 5 |
| 23 | 12 | 6 | 19 | 10 | |

[43]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[44]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[45]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 4 | 20 | 6 | |
| 17 | 9 | 25 | 11 | 3 | 17 |
| 14 | 5 | 16 | 8 | 22 | 14 |
| 10 | 21 | 13 | 2 | 19 | 10 |
| 1 | 18 | 7 | 24 | 15 | 1 |
| 23 | 12 | 4 | 20 | 6 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 2 | 20 | 6 | |
| 19 | 7 | 25 | 11 | 3 | 19 |
| 12 | 5 | 16 | 8 | 24 | 12 |
| 10 | 21 | 13 | 4 | 17 | 10 |
| 1 | 18 | 9 | 22 | 15 | 1 |
| 23 | 14 | 2 | 20 | 6 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 4 | 20 | 7 | |
| 16 | 9 | 25 | 12 | 3 | 16 |
| 14 | 5 | 17 | 8 | 21 | 14 |
| 10 | 22 | 13 | 1 | 19 | 10 |
| 2 | 18 | 6 | 24 | 15 | 2 |
| 23 | 11 | 4 | 20 | 7 | |

[46]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

[47]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[48]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 1 | 20 | 7 | |
| 19 | 6 | 25 | 12 | 3 | 19 |
| 11 | 5 | 17 | 8 | 24 | 11 |
| 10 | 22 | 13 | 4 | 16 | 10 |
| 2 | 18 | 9 | 21 | 15 | 2 |
| 23 | 14 | 4 | 20 | 7 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 11 | 2 | 20 | 9 | |
| 16 | 7 | 25 | 14 | 3 | 16 |
| 12 | 5 | 19 | 8 | 21 | 12 |
| 10 | 24 | 13 | 1 | 17 | 10 |
| 4 | 18 | 6 | 22 | 15 | 4 |
| 23 | 11 | 2 | 20 | 9 | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 20 | 9 | |
| 17 | 6 | 25 | 14 | 3 | 17 |
| 11 | 5 | 19 | 8 | 22 | 11 |
| 10 | 24 | 13 | 2 | 16 | 10 |
| 4 | 18 | 5 | 21 | 15 | 4 |
| 23 | 12 | 1 | 20 | 9 | |

**[C] प्रथम आधार–वर्ग का मध्य तीसरा स्तम्भ यथावत रखने पर आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग**

[49]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

[50]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 21 | 16 |
| 2 | 7 | 12 | 22 | 17 |
| 3 | 8 | 13 | 23 | 18 |
| 4 | 9 | 14 | 24 | 19 |
| 5 | 10 | 15 | 25 | 20 |

[51]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 11 | 6 | 21 |
| 2 | 17 | 12 | 7 | 22 |
| 3 | 18 | 13 | 8 | 23 |
| 4 | 19 | 14 | 9 | 24 |
| 5 | 20 | 15 | 10 | 25 |

| | 14 | 25 | 6 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 20 | 1 | 12 | 23 | 9 |
| 15 | 21 | 7 | 18 | 4 | 15 |
| 16 | 2 | 13 | 24 | 10 | 16 |
| 22 | 8 | 19 | 5 | 11 | 22 |
| 3 | 14 | 25 | 6 | 17 | |

| | 14 | 20 | 6 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 25 | 1 | 12 | 18 | 9 |
| 15 | 16 | 7 | 23 | 4 | 15 |
| 21 | 2 | 13 | 19 | 10 | 21 |
| 17 | 8 | 24 | 5 | 11 | 17 |
| 3 | 14 | 20 | 6 | 22 | |

| | 14 | 24 | 16 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 9 | 1 | 12 | 23 | 19 |
| 15 | 21 | 17 | 8 | 4 | 15 |
| 6 | 2 | 13 | 24 | 20 | 6 |
| 22 | 18 | 9 | 5 | 11 | 22 |
| 3 | 14 | 24 | 16 | 7 | |

[52]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 11 | 21 | 6 |
| 2 | 17 | 12 | 22 | 7 |
| 3 | 18 | 13 | 23 | 8 |
| 4 | 19 | 14 | 24 | 9 |
| 5 | 20 | 15 | 25 | 10 |

[53]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 11 | 6 | 16 |
| 2 | 22 | 12 | 7 | 17 |
| 3 | 23 | 13 | 8 | 18 |
| 4 | 24 | 14 | 9 | 19 |
| 5 | 25 | 15 | 10 | 20 |

[54]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 11 | 16 | 6 |
| 2 | 22 | 12 | 17 | 7 |
| 3 | 23 | 13 | 18 | 8 |
| 4 | 24 | 14 | 19 | 9 |
| 5 | 25 | 15 | 20 | 10 |

| | 14 | 10 | 16 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 25 | 1 | 12 | 8 | 19 |
| 15 | 6 | 17 | 23 | 4 | 15 |
| 21 | 2 | 13 | 9 | 20 | 21 |
| 7 | 18 | 24 | 5 | 11 | 7 |
| 3 | 14 | 10 | 16 | 22 | |

| | 14 | 20 | 21 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 10 | 1 | 12 | 18 | 24 |
| 15 | 16 | 22 | 8 | 4 | 15 |
| 6 | 2 | 13 | 19 | 25 | 6 |
| 17 | 23 | 9 | 5 | 11 | 17 |
| 3 | 14 | 20 | 21 | 7 | |

| | 14 | 10 | 21 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 20 | 1 | 12 | 8 | 24 |
| 15 | 6 | 22 | 18 | 4 | 15 |
| 16 | 2 | 13 | 9 | 25 | 16 |
| 7 | 23 | 19 | 5 | 11 | 7 |
| 3 | 14 | 10 | 21 | 17 | |

[55]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 11 | 16 | 21 |
| 7 | 2 | 12 | 17 | 22 |
| 8 | 3 | 13 | 18 | 23 |
| 9 | 4 | 14 | 19 | 24 |
| 10 | 5 | 15 | 20 | 25 |

[56]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 11 | 21 | 16 |
| 7 | 2 | 12 | 22 | 17 |
| 8 | 3 | 13 | 23 | 18 |
| 9 | 4 | 14 | 24 | 19 |
| 10 | 5 | 15 | 25 | 20 |

[57]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 16 | 11 | 1 | 21 |
| 7 | 17 | 12 | 2 | 22 |
| 8 | 18 | 13 | 3 | 23 |
| 9 | 19 | 14 | 4 | 24 |
| 10 | 20 | 15 | 5 | 25 |

| | 14 | 25 | 1 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 20 | 6 | 12 | 23 | 4 |
| 15 | 21 | 2 | 18 | 9 | 15 |
| 16 | 7 | 13 | 24 | 5 | 16 |
| 22 | 3 | 19 | 10 | 11 | 22 |
| 8 | 14 | 25 | 1 | 17 | |

| | 14 | 20 | 1 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 25 | 6 | 12 | 18 | 4 |
| 15 | 16 | 2 | 23 | 9 | 15 |
| 21 | 7 | 13 | 19 | 5 | 21 |
| 17 | 3 | 24 | 10 | 11 | 17 |
| 8 | 14 | 20 | 1 | 22 | |

| | 14 | 25 | 16 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 5 | 6 | 12 | 23 | 19 |
| 15 | 21 | 17 | 3 | 9 | 15 |
| 1 | 7 | 13 | 24 | 20 | 1 |
| 22 | 18 | 4 | 10 | 11 | 22 |
| 8 | 14 | 25 | 16 | 2 | |

[58]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 16 | 11 | 21 | 1 |
| 7 | 17 | 12 | 22 | 2 |
| 8 | 18 | 13 | 23 | 3 |
| 9 | 19 | 14 | 24 | 4 |
| 10 | 20 | 15 | 25 | 5 |

[59]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 21 | 11 | 1 | 16 |
| 7 | 22 | 12 | 2 | 17 |
| 8 | 23 | 13 | 3 | 18 |
| 9 | 24 | 14 | 4 | 19 |
| 10 | 25 | 15 | 5 | 20 |

[60]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 21 | 11 | 16 | 1 |
| 7 | 22 | 12 | 17 | 2 |
| 8 | 23 | 13 | 18 | 3 |
| 9 | 24 | 14 | 19 | 4 |
| 10 | 25 | 15 | 20 | 5 |

| | 14 | 5 | 16 | 22 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 25 | 6 | 12 | 3 | 19 |
| 15 | 1 | 17 | 23 | 9 | 15 |
| 21 | 7 | 13 | 4 | 20 | 21 |
| 2 | 18 | 24 | 10 | 11 | 2 |
| 8 | 14 | 5 | 16 | 22 | |

| | 14 | 20 | 21 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 5 | 6 | 12 | 18 | 24 |
| 15 | 16 | 22 | 3 | 9 | 15 |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 1 |
| 17 | 23 | 4 | 10 | 11 | 17 |
| 8 | 14 | 20 | 21 | 2 | |

| | 14 | 5 | 21 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 20 | 6 | 12 | 3 | 24 |
| 15 | 1 | 22 | 18 | 9 | 15 |
| 16 | 7 | 13 | 4 | 25 | 16 |
| 2 | 23 | 18 | 10 | 11 | 2 |
| 8 | 14 | 25 | 21 | 17 | |

[61]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 11 | 6 | 21 |
| 17 | 2 | 12 | 7 | 22 |
| 18 | 3 | 13 | 8 | 23 |
| 19 | 4 | 14 | 9 | 24 |
| 20 | 5 | 15 | 10 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 25 | 1 | 7 | |
| 4 | 10 | 16 | 12 | 23 | 4 |
| 15 | 21 | 2 | 8 | 19 | 15 |
| 6 | 17 | 13 | 24 | 5 | 6 |
| 22 | 3 | 9 | 20 | 11 | 22 |
| 18 | 14 | 25 | 1 | 7 | |

[62]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 11 | 21 | 6 |
| 17 | 2 | 12 | 22 | 7 |
| 18 | 3 | 13 | 23 | 8 |
| 19 | 4 | 14 | 24 | 9 |
| 20 | 5 | 15 | 25 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 10 | 1 | 22 | |
| 4 | 25 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 15 | 6 | 2 | 23 | 19 | 15 |
| 21 | 17 | 13 | 9 | 5 | 21 |
| 7 | 3 | 24 | 20 | 11 | 7 |
| 18 | 14 | 10 | 1 | 22 | |

[63]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 6 | 11 | 1 | 21 |
| 17 | 7 | 12 | 2 | 22 |
| 18 | 8 | 13 | 3 | 23 |
| 19 | 9 | 14 | 4 | 24 |
| 20 | 10 | 15 | 5 | 25 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 25 | 6 | 2 | |
| 9 | 5 | 16 | 12 | 23 | 9 |
| 15 | 21 | 7 | 3 | 19 | 15 |
| 1 | 17 | 13 | 24 | 10 | 1 |
| 22 | 8 | 4 | 20 | 11 | 22 |
| 18 | 14 | 25 | 6 | 2 | |

[64]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 6 | 11 | 21 | 1 |
| 17 | 7 | 12 | 22 | 2 |
| 18 | 8 | 13 | 23 | 3 |
| 19 | 9 | 14 | 24 | 4 |
| 20 | 10 | 15 | 25 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 5 | 6 | 22 | |
| 9 | 25 | 16 | 12 | 3 | 9 |
| 15 | 1 | 7 | 23 | 19 | 15 |
| 21 | 17 | 13 | 4 | 10 | 21 |
| 2 | 8 | 24 | 20 | 11 | 2 |
| 18 | 14 | 5 | 6 | 22 | |

[65]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 21 | 11 | 1 | 6 |
| 17 | 22 | 12 | 2 | 7 |
| 18 | 23 | 13 | 3 | 8 |
| 19 | 24 | 14 | 4 | 9 |
| 20 | 25 | 15 | 5 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 10 | 21 | 2 | |
| 24 | 5 | 16 | 12 | 8 | 24 |
| 15 | 6 | 22 | 3 | 19 | 15 |
| 1 | 17 | 13 | 9 | 25 | 1 |
| 7 | 23 | 4 | 20 | 11 | 7 |
| 18 | 14 | 10 | 21 | 2 | |

[66]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 21 | 11 | 6 | 1 |
| 17 | 22 | 12 | 7 | 2 |
| 18 | 23 | 13 | 8 | 3 |
| 19 | 24 | 14 | 9 | 4 |
| 20 | 25 | 15 | 10 | 5 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 5 | 21 | 7 | |
| 24 | 10 | 16 | 12 | 3 | 24 |
| 15 | 1 | 22 | 8 | 19 | 15 |
| 6 | 17 | 13 | 4 | 25 | 6 |
| 2 | 23 | 9 | 20 | 11 | 2 |
| 18 | 14 | 5 | 21 | 7 | |

[67]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 1 | 11 | 6 | 16 |
| 22 | 2 | 12 | 7 | 17 |
| 23 | 3 | 13 | 8 | 18 |
| 24 | 4 | 14 | 9 | 19 |
| 25 | 5 | 15 | 10 | 20 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 20 | 1 | 7 | |
| 4 | 10 | 21 | 12 | 18 | 4 |
| 15 | 16 | 2 | 8 | 24 | 15 |
| 6 | 22 | 13 | 19 | 5 | 6 |
| 17 | 3 | 9 | 25 | 11 | 17 |
| 23 | 14 | 20 | 1 | 7 | |

[68]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 1 | 11 | 16 | 6 |
| 22 | 2 | 12 | 17 | 7 |
| 23 | 3 | 13 | 18 | 8 |
| 24 | 4 | 14 | 19 | 9 |
| 25 | 5 | 15 | 20 | 10 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 10 | 1 | 17 | |
| 4 | 20 | 21 | 12 | 8 | 4 |
| 15 | 6 | 2 | 18 | 24 | 15 |
| 16 | 22 | 13 | 9 | 5 | 16 |
| 7 | 3 | 19 | 25 | 11 | 7 |
| 23 | 14 | 10 | 1 | 17 | |

[69]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 6 | 11 | 1 | 16 |
| 22 | 7 | 12 | 2 | 17 |
| 23 | 8 | 13 | 3 | 18 |
| 24 | 9 | 14 | 4 | 19 |
| 25 | 10 | 15 | 5 | 20 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 14 | 20 | 6 | 2 | |
| 9 | 5 | 21 | 12 | 18 | 9 |
| 15 | 16 | 7 | 3 | 24 | 15 |
| 1 | 22 | 13 | 19 | 10 | 1 |
| 17 | 8 | 4 | 25 | 11 | 17 |
| 23 | 14 | 20 | 6 | 2 | |

[70]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 22 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 23 | 8 | 13 | 18 | 3 |
| 24 | 9 | 14 | 19 | 4 |
| 25 | 10 | 15 | 20 | 5 |

[71]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 1 | 6 |
| 22 | 17 | 12 | 2 | 7 |
| 23 | 18 | 13 | 3 | 8 |
| 24 | 19 | 14 | 4 | 9 |
| 25 | 20 | 15 | 5 | 10 |

[72]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | 14 | 5 | 6 | 17 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 20 | 21 | 12 | 3 | 9 |
| 15 | 1 | 7 | 18 | 24 | 15 |
| 16 | 22 | 13 | 4 | 10 | 16 |
| 2 | 8 | 19 | 25 | 11 | 2 |
| 23 | 14 | 5 | 6 | 17 | |

| | 14 | 10 | 16 | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 5 | 21 | 12 | 8 | 19 |
| 15 | 6 | 17 | 3 | 24 | 15 |
| 1 | 22 | 13 | 9 | 20 | 1 |
| 7 | 18 | 4 | 25 | 11 | 7 |
| 23 | 14 | 10 | 16 | 2 | |

| | 14 | 5 | 16 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 10 | 21 | 12 | 3 | 19 |
| 15 | 1 | 17 | 8 | 25 | 15 |
| 6 | 22 | 13 | 4 | 20 | 6 |
| 2 | 18 | 9 | 25 | 11 | 2 |
| 23 | 14 | 20 | 16 | 7 | |

**[D] C से प्राप्त 49 से 72 तक के आधार–वर्ग को पंक्तिक उलट कर प्रस्तुत करने पर–**

[73]

| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[74]

| 5 | 10 | 15 | 25 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 24 | 19 |
| 3 | 8 | 13 | 23 | 18 |
| 2 | 7 | 12 | 22 | 17 |
| 1 | 6 | 11 | 21 | 16 |

[75]

| 5 | 20 | 15 | 10 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 19 | 14 | 9 | 24 |
| 3 | 18 | 13 | 8 | 23 |
| 2 | 17 | 12 | 7 | 22 |
| 1 | 16 | 11 | 6 | 21 |

| | 12 | 21 | 10 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 16 | 5 | 14 | 23 | 7 |
| 11 | 25 | 9 | 18 | 2 | 11 |
| 20 | 4 | 13 | 22 | 6 | 20 |
| 24 | 8 | 17 | 1 | 15 | 24 |
| 3 | 12 | 21 | 10 | 19 | |

| | 12 | 16 | 10 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 21 | 5 | 14 | 18 | 7 |
| 11 | 20 | 9 | 23 | 2 | 11 |
| 25 | 4 | 13 | 17 | 6 | 25 |
| 19 | 8 | 22 | 1 | 15 | 19 |
| 3 | 12 | 16 | 10 | 24 | |

| | 12 | 21 | 20 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 6 | 5 | 14 | 23 | 17 |
| 11 | 25 | 19 | 8 | 2 | 11 |
| 10 | 4 | 13 | 22 | 16 | 10 |
| 24 | 18 | 7 | 1 | 15 | 24 |
| 3 | 12 | 21 | 20 | 9 | |

[76]

| 5 | 20 | 15 | 25 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 19 | 14 | 24 | 9 |
| 3 | 18 | 13 | 23 | 8 |
| 2 | 17 | 12 | 22 | 7 |
| 1 | 16 | 11 | 21 | 6 |

[77]

| 5 | 25 | 15 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 24 | 14 | 9 | 19 |
| 3 | 23 | 13 | 8 | 18 |
| 2 | 22 | 12 | 7 | 17 |
| 1 | 21 | 11 | 6 | 16 |

[78]

| 5 | 25 | 15 | 20 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 24 | 14 | 19 | 9 |
| 3 | 23 | 13 | 18 | 8 |
| 2 | 22 | 12 | 17 | 7 |
| 1 | 21 | 11 | 16 | 6 |

| | 12 | 6 | 20 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 21 | 5 | 14 | 8 | 17 |
| 11 | 10 | 19 | 23 | 2 | 11 |
| 25 | 4 | 13 | 7 | 16 | 25 |
| 9 | 18 | 22 | 1 | 15 | 9 |
| 3 | 12 | 6 | 20 | 24 | |

| | 12 | 16 | 25 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 6 | 5 | 14 | 18 | 22 |
| 11 | 20 | 24 | 8 | 2 | 11 |
| 10 | 4 | 13 | 17 | 21 | 10 |
| 19 | 23 | 7 | 1 | 15 | 19 |
| 3 | 12 | 16 | 25 | 9 | |

| | 12 | 6 | 25 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 16 | 5 | 14 | 8 | 22 |
| 11 | 10 | 24 | 18 | 2 | 11 |
| 20 | 4 | 13 | 7 | 21 | 20 |
| 9 | 23 | 17 | 1 | 15 | 9 |
| 3 | 12 | 6 | 25 | 19 | |

[79]

| 10 | 5 | 15 | 20 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 14 | 19 | 24 |
| 8 | 3 | 13 | 18 | 23 |
| 7 | 2 | 12 | 17 | 22 |
| 6 | 1 | 11 | 16 | 21 |

[80]

| 10 | 5 | 15 | 25 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 4 | 14 | 24 | 19 |
| 8 | 3 | 13 | 23 | 18 |
| 7 | 2 | 12 | 22 | 17 |
| 6 | 1 | 11 | 21 | 16 |

[81]

| 10 | 20 | 15 | 5 | 25 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 19 | 14 | 4 | 24 |
| 8 | 18 | 13 | 3 | 23 |
| 7 | 17 | 12 | 2 | 22 |
| 6 | 16 | 11 | 1 | 21 |

| | 12 | 21 | 5 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 10 | 14 | 23 | 2 |
| 11 | 25 | 4 | 18 | 7 | 11 |
| 20 | 9 | 13 | 22 | 1 | 20 |
| 24 | 3 | 17 | 6 | 15 | 24 |
| 8 | 12 | 21 | 5 | 19 | |

| | 12 | 16 | 5 | 24 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 21 | 10 | 14 | 18 | 2 |
| 11 | 20 | 4 | 23 | 7 | 11 |
| 25 | 9 | 13 | 17 | 1 | 25 |
| 19 | 3 | 22 | 6 | 15 | 19 |
| 8 | 12 | 16 | 5 | 24 | |

| | 12 | 21 | 20 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 1 | 10 | 14 | 23 | 17 |
| 11 | 25 | 19 | 3 | 7 | 11 |
| 5 | 9 | 13 | 22 | 16 | 5 |
| 24 | 18 | 2 | 6 | 15 | 24 |
| 8 | 12 | 21 | 20 | 4 | |

[82]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 20 | 15 | 25 | 5 |
| 9 | 19 | 14 | 24 | 4 |
| 8 | 18 | 13 | 23 | 3 |
| 7 | 17 | 12 | 22 | 2 |
| 6 | 16 | 11 | 21 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 20 | 24 | |
| 17 | 21 | 10 | 14 | 3 | 17 |
| 11 | 5 | 19 | 23 | 7 | 11 |
| 25 | 9 | 13 | 2 | 16 | 25 |
| 4 | 18 | 22 | 6 | 15 | 4 |
| 8 | 12 | 1 | 20 | 24 | |

[83]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 25 | 15 | 5 | 20 |
| 9 | 24 | 14 | 4 | 19 |
| 8 | 23 | 13 | 3 | 18 |
| 7 | 22 | 12 | 2 | 17 |
| 6 | 21 | 11 | 1 | 16 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 16 | 25 | 4 | |
| 22 | 1 | 10 | 14 | 18 | 22 |
| 11 | 20 | 24 | 3 | 7 | 11 |
| 5 | 9 | 13 | 17 | 21 | 5 |
| 19 | 23 | 2 | 6 | 15 | 19 |
| 8 | 12 | 16 | 25 | 4 | |

[84]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 25 | 15 | 20 | 5 |
| 9 | 24 | 14 | 19 | 4 |
| 8 | 23 | 13 | 18 | 3 |
| 7 | 22 | 12 | 17 | 2 |
| 6 | 21 | 11 | 16 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 25 | 19 | |
| 22 | 16 | 10 | 14 | 3 | 22 |
| 11 | 5 | 24 | 18 | 7 | 11 |
| 20 | 9 | 13 | 2 | 21 | 20 |
| 4 | 23 | 17 | 6 | 15 | 4 |
| 8 | 12 | 1 | 25 | 19 | |

[85]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 15 | 10 | 25 |
| 19 | 4 | 14 | 9 | 24 |
| 18 | 3 | 13 | 8 | 23 |
| 17 | 2 | 12 | 7 | 22 |
| 16 | 1 | 11 | 6 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 21 | 5 | 9 | |
| 2 | 6 | 20 | 14 | 23 | 2 |
| 11 | 25 | 4 | 8 | 17 | 11 |
| 10 | 19 | 13 | 22 | 1 | 10 |
| 24 | 3 | 7 | 16 | 15 | 24 |
| 18 | 12 | 21 | 5 | 9 | |

[86]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 15 | 25 | 10 |
| 19 | 4 | 14 | 24 | 9 |
| 18 | 3 | 13 | 23 | 8 |
| 17 | 2 | 12 | 22 | 7 |
| 16 | 1 | 11 | 21 | 6 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 6 | 5 | 24 | |
| 2 | 21 | 20 | 14 | 8 | 2 |
| 11 | 10 | 4 | 23 | 17 | 11 |
| 25 | 19 | 13 | 7 | 1 | 25 |
| 9 | 3 | 22 | 16 | 15 | 9 |
| 18 | 12 | 6 | 5 | 24 | |

[87]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 15 | 5 | 25 |
| 19 | 9 | 14 | 4 | 24 |
| 18 | 8 | 13 | 3 | 23 |
| 17 | 7 | 12 | 2 | 22 |
| 16 | 6 | 11 | 1 | 21 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 21 | 10 | 4 | |
| 7 | 1 | 20 | 14 | 23 | 7 |
| 11 | 25 | 9 | 3 | 17 | 11 |
| 5 | 19 | 13 | 22 | 6 | 5 |
| 24 | 8 | 2 | 16 | 15 | 24 |
| 18 | 12 | 21 | 10 | 4 | |

[88]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 10 | 15 | 25 | 5 |
| 19 | 9 | 14 | 24 | 4 |
| 18 | 8 | 13 | 23 | 3 |
| 17 | 7 | 12 | 22 | 2 |
| 16 | 6 | 11 | 21 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 10 | 24 | |
| 7 | 21 | 20 | 14 | 3 | 7 |
| 11 | 5 | 9 | 23 | 17 | 11 |
| 25 | 19 | 13 | 2 | 6 | 25 |
| 4 | 8 | 22 | 16 | 15 | 4 |
| 18 | 12 | 1 | 10 | 24 | |

[89]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 25 | 15 | 5 | 10 |
| 19 | 24 | 14 | 4 | 9 |
| 18 | 23 | 13 | 3 | 8 |
| 17 | 22 | 12 | 2 | 7 |
| 16 | 21 | 11 | 1 | 6 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 6 | 25 | 4 | |
| 22 | 1 | 20 | 14 | 8 | 22 |
| 11 | 10 | 24 | 3 | 17 | 11 |
| 5 | 19 | 13 | 7 | 21 | 5 |
| 9 | 23 | 2 | 16 | 15 | 9 |
| 18 | 12 | 6 | 25 | 4 | |

[90]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 25 | 15 | 10 | 5 |
| 19 | 24 | 14 | 9 | 4 |
| 18 | 23 | 13 | 8 | 3 |
| 17 | 22 | 12 | 7 | 2 |
| 16 | 21 | 11 | 6 | 1 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 1 | 25 | 9 | |
| 22 | 6 | 20 | 14 | 3 | 22 |
| 11 | 5 | 24 | 8 | 17 | 11 |
| 10 | 19 | 13 | 2 | 21 | 10 |
| 4 | 23 | 7 | 16 | 15 | 4 |
| 18 | 12 | 21 | 25 | 9 | |

[91]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 5 | 15 | 10 | 20 |
| 24 | 4 | 14 | 9 | 19 |
| 23 | 3 | 13 | 8 | 18 |
| 22 | 2 | 12 | 7 | 17 |
| 21 | 1 | 11 | 6 | 16 |

[92]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 5 | 15 | 20 | 10 |
| 24 | 4 | 14 | 19 | 9 |
| 23 | 3 | 13 | 18 | 8 |
| 22 | 2 | 12 | 17 | 7 |
| 21 | 1 | 11 | 16 | 6 |

[93]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 15 | 5 | 20 |
| 24 | 9 | 14 | 4 | 19 |
| 23 | 8 | 13 | 3 | 18 |
| 22 | 7 | 12 | 2 | 17 |
| 21 | 6 | 11 | 1 | 16 |

| | 12 | 16 | 5 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 25 | 14 | 18 | 2 |
| 11 | 20 | 4 | 8 | 22 | 11 |
| 10 | 24 | 13 | 17 | 1 | 10 |
| 19 | 3 | 7 | 21 | 15 | 19 |
| 23 | 12 | 16 | 5 | 9 | |

| | 12 | 6 | 5 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 16 | 25 | 14 | 8 | 2 |
| 11 | 10 | 4 | 18 | 22 | 11 |
| 20 | 24 | 13 | 7 | 1 | 20 |
| 9 | 3 | 17 | 21 | 15 | 9 |
| 23 | 12 | 6 | 5 | 19 | |

| | 12 | 16 | 10 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 1 | 25 | 14 | 18 | 7 |
| 11 | 20 | 9 | 3 | 22 | 11 |
| 5 | 24 | 13 | 17 | 6 | 5 |
| 19 | 8 | 2 | 21 | 15 | 19 |
| 23 | 12 | 16 | 10 | 4 | |

[94]

| 25 | 10 | 15 | 20 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 9 | 14 | 19 | 4 |
| 23 | 8 | 13 | 18 | 3 |
| 22 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 21 | 6 | 11 | 16 | 1 |

[95]

| 25 | 20 | 15 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 4 | 9 |
| 23 | 18 | 13 | 3 | 8 |
| 22 | 17 | 12 | 2 | 7 |
| 21 | 16 | 11 | 1 | 6 |

[96]

| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | 12 | 1 | 10 | 19 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 16 | 25 | 14 | 3 | 7 |
| 11 | 5 | 9 | 18 | 22 | 11 |
| 20 | 24 | 13 | 2 | 6 | 20 |
| 4 | 8 | 17 | 21 | 15 | 4 |
| 23 | 12 | 1 | 10 | 19 | |

| | 12 | 6 | 20 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 1 | 25 | 14 | 8 | 17 |
| 11 | 10 | 19 | 3 | 22 | 11 |
| 5 | 24 | 13 | 7 | 16 | 5 |
| 9 | 18 | 2 | 21 | 15 | 9 |
| 23 | 12 | 6 | 20 | 4 | |

| | 12 | 1 | 20 | 9 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17 | 6 | 25 | 14 | 3 | 17 |
| 11 | 5 | 19 | 8 | 22 | 11 |
| 10 | 24 | 13 | 2 | 16 | 10 |
| 4 | 18 | 7 | 21 | 15 | 4 |
| 23 | 12 | 1 | 20 | 9 | |

उपरोक्त 5*5 के प्रति यथार्थ भाजक 1 और 5 की अलग–अलग 96-96 प्रकार की आधार–वर्ग एवं जादुई–वर्ग की प्रस्तुतियों में (1-49),(24-73),(25-72),(48-96) परस्पर यथावत दोहराये युग्म हैं। अतः इनमें से 1-1 लिये जाने पर आधार–वर्ग = जादुई–वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या = (96-4)+(96-4) = 92+92 =184 होगा।--------(1)

**समिका से** (2x+1) के समस्त यथार्थ भाजकों की कुल संख्या m पर(2x+1)* (2x+1) के प्रति –
समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या = $4m[!(2x)-1]$ में– x= 2 तथा समस्त यथार्थ भाजकों( 1 और 5) की कुल संख्या m=2 से–
(2x+1)* (2x+1)= (22*2+1)* (2*+1)= 5*5 के प्रति– समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या = $4*2[!(2*2)-1] = 8[!4-1] = 8*(24-1) = 8*23 = 184$ होगा। ------(2)
अतः (1) और (2) से समिका सत्यापित हुआ।

**टीप** उपरोक्त पृष्ठ 45 मे दर्शित पंक्ति (पाले हे.....दूद के घाटा) के हल – भइस बाँटने के प्रकारों की कुल संख्या –

**समिका से** (2x+1) के समस्त यथार्थ भाजकों की कुल संख्या m पर(2x+1)* (2x+1) के प्रति –
समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या = $4m[!(2x)-1]$ में– x= 3 तथा समस्त यथार्थ भाजकों( 1 और 7) की कुल संख्या m=2 से–
(2x+1)* (2x+1)= (2*3+1)* (2*3+1)= 7*7 के प्रति– समस्त आधार–वर्ग की कुल संख्या = समस्त जादुई–वर्ग की कुल संख्या = $4*2[!(2*3)-1] = 8[!6-1] = 8*(720-1) = 8*719 = 5752$ होगा।

---------09-------

# अध्याय - 10
# अन्तःनिष्ठ–वर्ग विधि या रंगीन जादुई–वर्ग की रचना विधि

## 10-1 रंगीन जादुई–वर्ग

यह जादुई–वर्ग आधार–वर्ग में स्थित अन्तःनिष्ठ–वर्गों के परिधि के अवयवो को दृष्टिगत रखते हुए सम्मुख पंक्ति परिधि एवं सम्मुख स्तम्भ परिधि पर ही नियमानुसार स्थानान्तरित कर दृष्टिगत रखते हुए रचित किया जाता है, तो प्राप्त जादुई–वर्ग के अन्तःनिष्ठ–वर्गों के परिधि में रंगे गए बाएँ स्तम्भ के अवयवों के वर्गो का योग $[L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \text{------} L_{m-2}^2 + L_{m-1}^2 + L_m^2]=$ रंगे गए दाएँ स्तम्भ के अवयवों के वर्गो का योग $[R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \text{------} R_{m-2}^2 + R_{m-1}^2 + R_m^2]$ होता है। इसी प्रकार ऊपर पंक्ति के अवयवों के वर्गो का योग $[H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \text{------} H_{m-2}^2 + H_{m-1}^2 + H_m^2]=$ रंगे गए नीचे पंक्ति के अवयवों के वर्गो का योग $[S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + \text{------} S_{m-2}^2 + S_{m-1}^2 + S_m^2]$ होता है, रंगीन जादुई–वर्ग कहलाता है।

**टीप** यह उक्त वर्गों की नियम अध्याय 9 में प्रस्तुत झण्डा या सरल या गतिशील के प्रति जादुई–वर्ग के अंतिम सबसे बडे अन्तःनिष्ठ–वर्ग परिधिके अवयवों के लिये ही प्रतिपादित होगा।

## 10-2 प्रस्तुति की स्थितियाँ –:

संख्या के प्रकारों के आधार पर रचना की तीन स्थितियाँ बनती है।

1• (विषम संख्या) * (विषम संख्या) $(2x+1) * (2x+1)$

2• (चार से विभाजित सम संख्या) * (चार से विभाजित सम संख्या) $4x * 4x$

3• (चार से अविभाजित सम संख्या) * (चार से अविभाजित सम संख्या) $[2(2x+1)] \times [2(2x+1)]$

प्रत्येक स्थिति पर क्रमानुसार व्यापक अध्ययन प्रस्तुत है।

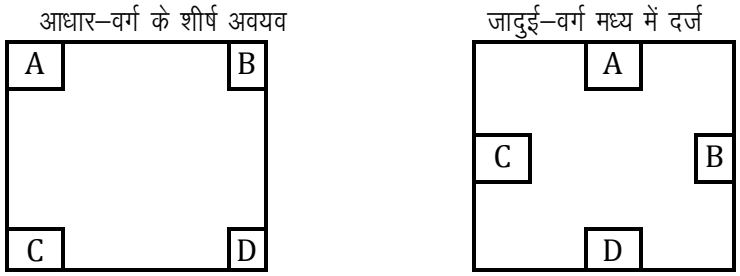
### 1■ (विषम संख्या) * (विषम संख्या) (2x+1) * (2x+1) का रंगीन जादुई–वर्ग

**रचना विधि** रंगीन जादुई रचना के लिए आधार–वर्ग के अवयवों को प्राप्त होने वाले जादुई–वर्ग में निम्नानुसार नियमों के तहत दर्ज करते है।

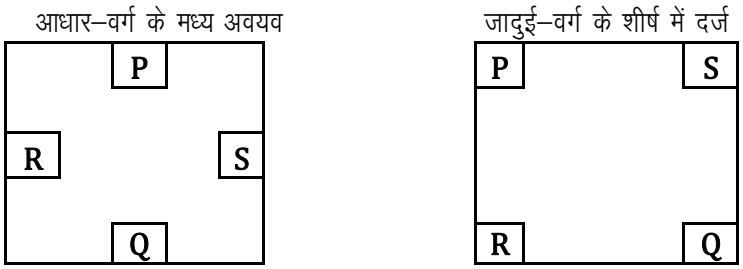
**1•** आधार–वर्ग के बीचों–बीच मध्य अवयव $c_{x+1}r_{x+1}$ को जादुई–वर्ग के बीचों–बीच मध्य $c_{x+1}r_{x+1}$ में ही दर्ज करते हैं।

**2•** अन्तःनिष्ठ वर्ग $(2m+1)*(2m+1)$ जिसमें m = सम संख्या (2 , 4 , 6 , .– – –) अर्थात 5*5 , 9*9 , 13*13 , 17*17, - - - - -के लिए सांकेतिक नियम –:

(a)

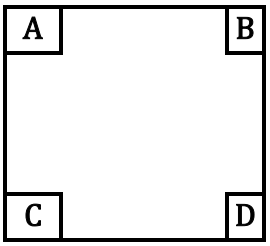



(b)

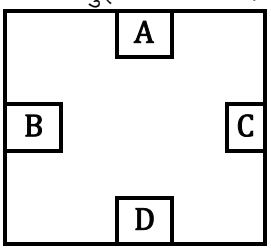



**3•** अन्तःनिष्ठ वर्ग $(2m+1)*(2m+1)$ जिसमें m=विषम संख्या (1 , 3 , 5 , .– – –) अर्थात 3*3 , 7*7 , 11*11 , 15*15, - - - - -के लिए सांकेतिक नियम

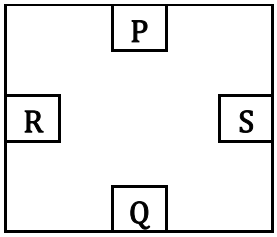
(a) आधार–वर्ग के शीर्ष अवयव



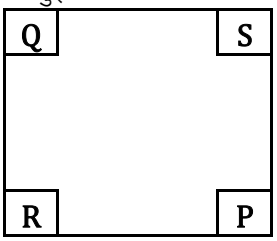

जादुई–वर्ग मध्य में दर्ज




(b) आधार–वर्ग के मध्य अवयव




जादुई–वर्ग के शीर्ष में दर्ज




**व्यापक एवं सयुक्त संकेतन**

(a) अन्तःनिष्ठ–वर्ग [2m+1]*[2m+1] के लिए m विषम प्राकृत संख्या होने के प्रति–

**आधार–वर्ग का रंगीन जादुई–वर्ग में**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | P | | | B | | Q | | | A | | S |
| | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| R | | | | | | S | | B | | | | | C |
| | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| C | | | Q | | | D | | R | | | D | | P |

(b) अन्तःनिष्ठ–वर्ग [2m+1]*[2m+1] के लिए m सम प्राकृत संख्या होने के प्रति–

**आधार–वर्ग का रंगीन जादुई–वर्ग में**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | P | | | B | | P | | | A | | S |
| | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| R | | | | | | S | | C | | | | | B |
| | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| C | | | Q | | | D | | R | | | D | | Q |

**4•** उपरोक्त सांकेतिक नियमों से जादुई–वर्ग के शीर्ष खानो एवं,मध्य पंक्ति सह मध्यस्तम्भ खानों पर आधार–वर्ग के मध्य पंक्ति सह मध्यस्तम्भ खानों एवं शीर्ष खानो के अवयव दर्ज किये जाने के बाद शेष खानों में दर्ज हेतू नीचे दर्शित वर्ग आकृति के अवलोकन करते हुए नियमें का विष्लेषण प्रस्तुत कर सकते हैं।

जादुई–वर्ग रचित करने के क्रम में आकृति से स्पष्ट है कि रिक्त रंगीन खाने उपरोक्त नियमों 1, 2 एवं 3 के सांकेतिक प्रस्तुति के अनुसार भरे जा चुके हैं। शेष रंगीन खाने जिन्हें अंकन किया गया, को भरने का नियम निम्नानुसार होगा ।

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 |
| 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | | | | | | | | | | | | |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 | | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 3 | 3 | | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |

**(1) आधार–वर्ग के विषम स्थानिक अवयवों को जादुई–वर्ग में भरना या दर्ज करना–:**

**[a] ऊपर एवं नीचे पंक्ति परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर तथा दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

**ऊपर पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – A दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – B

**नीचे पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – C दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – D

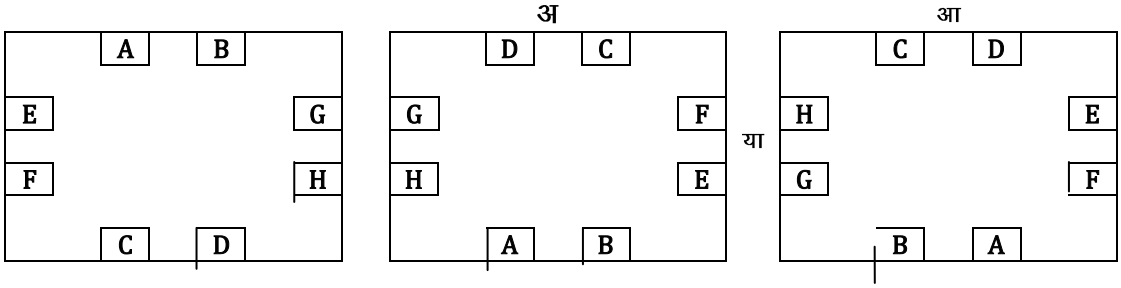
**[b] बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के ऊपर से दाएँ मध्य पंक्ति की ओर तथा नीचे से मध्य पंक्ति की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव – **बाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – E नीचे से मध्य पंक्ति की ओर –F

**दाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – G नीचे से मध्य पंक्ति की ओर – H

के प्रति जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण संकेत –यथा दर्ज होगा।




**(2) आधार–वर्ग के सम स्थानिक अवयवों को जादुई–वर्ग में भरना या दर्ज करना–:**

**[a] ऊपर एवं नीचे पंक्ति परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर तथा दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

**ऊपर पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – K दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – L

**नीचे पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – M दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – N

**[b] बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के ऊपर से दाएँ मध्य पंक्ति की ओर तथा नीचे से मध्य पंक्ति की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

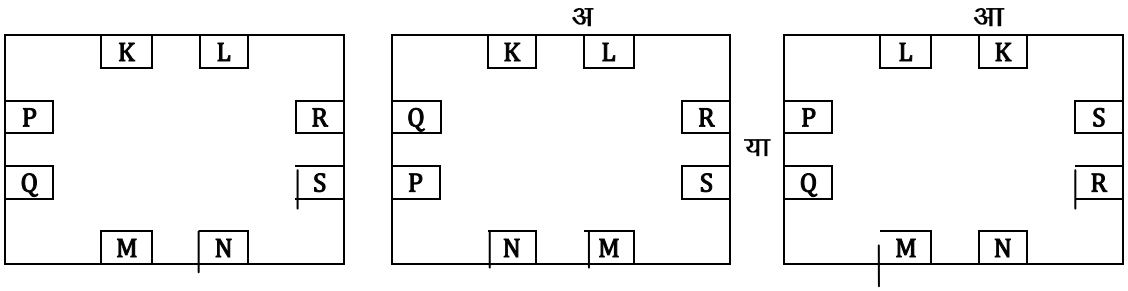
**बाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – P नीचे से मध्य पंक्ति की ओर –Q

**दाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – R नीचे से मध्य पंक्ति की ओर – S

के प्रति जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण संकेत –यथा दर्ज होगा।




**ध्यान विशेष**– आधार–वर्ग के अवयवों का जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण के 2 तरीके (अ) और (आ) सुझाए गए है। इनमें कोई भी एक तरीका (अ) अथवा (आ) से प्रारंभ कर अंत करें।

**ध्यान विशेष**– आधार–वर्ग के अवयवों का जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण के 2 तरीके (अ) और (आ) सुझाए गए है। इनमें कोई भी एक तरीका (अ) अथवा (आ) से प्रारंभ कर अंत करें।

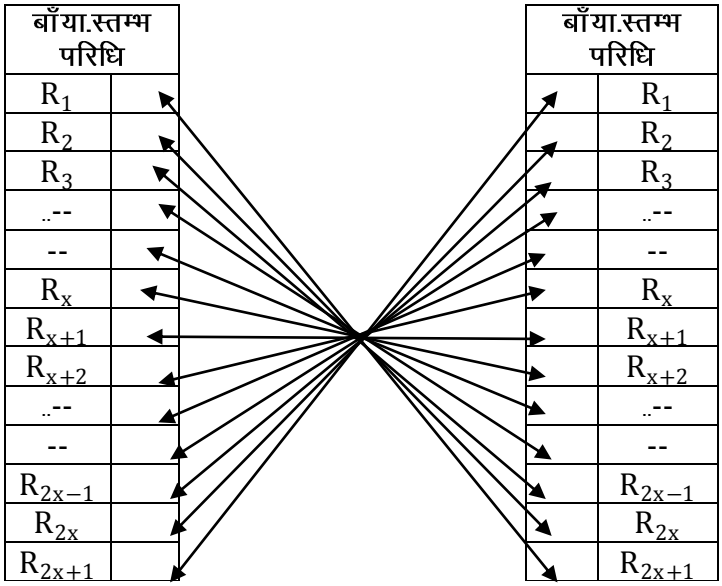
## -10-3 =n*n = (2x+1)*(2x+1) का रंगीन जादुई–वर्ग रचना के विस्तारित प्रकारों के प्रति आधार–वर्ग अवयवों का स्थानान्तरण नियम–

**प्रक्रम1** • [2x+1] के सभी यथार्थ भाजक ज्ञात करें ।

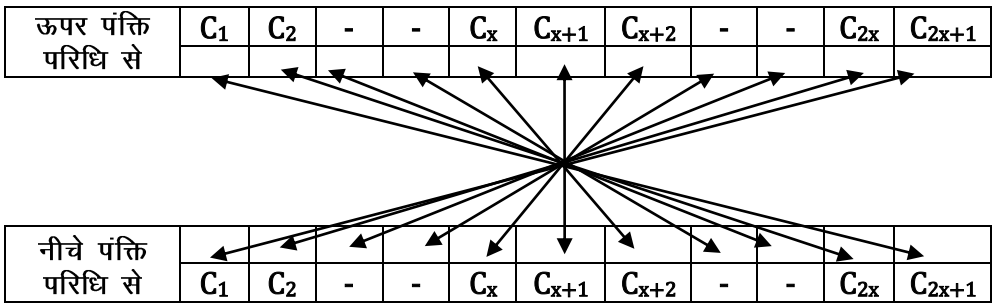
**प्रक्रम2**• रचना के लिए सामान्य $(2x+1)^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी जिसका सर्वान्तर d है, के अवयवों को क्रमशः बढ़ते क्रम में पंक्तिवार बाँये से दाँयेदर्ज करने पर यथार्थ भाजक 1 के लिए आधार–वर्ग की प्रथम प्रस्तुति मानी जानी चाहिए। **अथवा** व्यापकता में $\frac{n^2}{k}$ पदी k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी इस तरह हो कि पहली श्रेढ़ी का प्रथम पद a तथा प्रत्येक श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर b हो औरग सभी k प्रकार का समान्तर श्रेढ़ी का r पद अवयवों से प्राप्त k पदी $\frac{n^2}{k}$ प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी का उभयनिष्ठ सर्वान्तर c हो, जिनमें r=1 से प्रथम–प्रथम पद अवयवों से प्राप्त समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद a ही होगा। क्रमशः k प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी पंक्तिवार $\frac{n}{k}$ पंक्ति समूह में दर्ज होंगे। n के यथार्थ भाजक k के लिये प्रथम आधार–वर्ग $n_k$ होगा।

**प्रक्रम3**• इस प्रकार यथार्थ भाजक k के लिए रचित प्रथम आधार–वर्ग के मध्य स्तम्भ अवयव एवं मध्य पंक्ति को अलग–अलग स्तर पर स्थिर रखकर आधार–वर्ग की विविध आयामों प्रकारो में रचना प्ररूतुति प्राप्त कर सकते है। इस हेतू व्याख्या निम्नानुसार है।

**व्याख्या 1**• मध्य स्तम्भ को स्थिरिता में रखने पर षेश 2द स्तम्भ के द युग्म बनेंगे। तब सम्मुख स्तम्भ परिधि अथवा मध्य स्थिर स्तम्भ से समान दूरी पर स्थित युग्म (बा.स्त$_1$–दा स्त$_1$), (बा.स्त$_2$–दा.स्त$_2$), (बा.स्त$_3$–दा.स्त$_3$ ) – – – –(बा.स्त$_x$–दा.स्त$_x$) के पंक्तिक क्षैतिज तिर्यक युग्मीय अवयव का योग भी बीचोबीच स्थित अवयव का दुगुना होता है।आकृति अवलोकित करे।




**व्याख्या 2•** मध्य पंक्ति को स्थिरिता में रखने पर शेष $2x$ पंक्ति के $x$ युग्म बनेंगे। तब सम्मुख पंक्ति परिधि अथवा मध्य स्थिर पंक्ति से समान दूरी पर स्थित युग्म (उ.पं$_1$–नी.पं$_2$), (उ.पं$_2$–नीपं$_2$), (उ.पं$_3$–नी.पं$_3$) – – – – –(उ.पं$_x$–नीचे.$_x$) के स्तम्भिक प्रत्येक उर्ध्व तिर्यक युग्मीय अवयव का योग बीचोबीच स्थित बवयव का दुगुना होता है। आकृति अवलोकित करे।




एक उदाहरण $2.4,6,-----(2*4+1)^2=9^2=81$ पद तक $-----158;160,162$ का $9$ के यथार्थ भाजक $1,3$ और $9$ के लिए अलग–अलग प्रथम आधार–वर्ग एवं उनके संगत रंगीन जादुई–वर्ग की रचना प्रस्तुति अवलाकित करते हैं।

### यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 |
| 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 | 52 | 54 |
| 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 | 68 | 70 | 72 |
| 74 | 76 | 78 | 80 | 82 | 84 | 86 | 88 | 90 |
| 92 | 94 | 96 | 98 | 100 | 102 | 104 | 106 | 108 |
| 110 | 112 | 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 |
| 128 | 130 | 132 | 134 | 136 | 138 | 140 | 142 | 144 |
| 146 | 148 | 150 | 152 | 154 | 156 | 158 | 160 | 162 |

### यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रथम रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 160 | 6 | 156 | 2 | 152 | 14 | 148 | 90 |
| 36 | 136 | 140 | 26 | 22 | 30 | 132 | 88 | 128 |
| 110 | 52 | 46 | 120 | 42 | 116 | 86 | 112 | 54 |
| 72 | 94 | 68 | 100 | 62 | 84 | 96 | 70 | 92 |
| 146 | 34 | 114 | 66 | 82 | 98 | 50 | 130 | 18 |
| 108 | 58 | 104 | 80 | 102 | 64 | 60 | 106 | 56 |
| 38 | 124 | 78 | 44 | 122 | 48 | 118 | 40 | 126 |
| 144 | 76 | 24 | 138 | 142 | 134 | 32 | 28 | 20 |
| 74 | 4 | 158 | 8 | 162 | 12 | 150 | 16 | 154 |

### यथार्थ भाजक 3 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |
| 56 | 62 | 68 | 74 | 80 | 86 | 92 | 98 | 104 |
| 110 | 116 | 122 | 128 | 134 | 140 | 146 | 152 | 158 |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 | 52 |
| 58 | 64 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | 100 | 106 |
| 112 | 118 | 124 | 130 | 136 | 142 | 148 | 154 | 160 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 | 102 | 108 |
| 114 | 120 | 126 | 132 | 138 | 144 | 150 | 156 | 162 |

### यथार्थ भाजक 3 के प्रति प्रथम रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 156 | 14 | 144 | 2 | 132 | 38 | 120 | 106 |
| 104 | 84 | 96 | 74 | 62 | 86 | 72 | 100 | 60 |
| 6 | 152 | 134 | 36 | 122 | 24 | 94 | 12 | 158 |
| 52 | 118 | 40 | 136 | 22 | 88 | 124 | 46 | 112 |
| 114 | 98 | 18 | 34 | 82 | 130 | 146 | 66 | 50 |
| 160 | 10 | 148 | 76 | 142 | 28 | 16 | 154 | 4 |
| 110 | 48 | 70 | 128 | 42 | 140 | 30 | 116 | 54 |
| 108 | 64 | 68 | 90 | 102 | 78 | 92 | 80 | 56 |
| 58 | 8 | 150 | 20 | 162 | 32 | 126 | 44 | 138 |

### यथार्थ भाजक 9 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 20 | 38 | 56 | 74 | 92 | 110 | 128 | 146 |
| 4 | 22 | 40 | 58 | 76 | 94 | 112 | 130 | 148 |
| 6 | 24 | 42 | 60 | 78 | 96 | 114 | 132 | 150 |
| 8 | 26 | 44 | 62 | 80 | 98 | 116 | 134 | 152 |
| 10 | 28 | 46 | 64 | 82 | 100 | 118 | 136 | 154 |
| 12 | 30 | 48 | 66 | 84 | 102 | 120 | 138 | 156 |
| 14 | 32 | 50 | 68 | 86 | 104 | 122 | 140 | 158 |
| 16 | 34 | 52 | 70 | 88 | 106 | 124 | 146 | 160 |
| 18 | 36 | 54 | 72 | 90 | 108 | 126 | 144 | 162 |

## यथार्थ भाजक 9 के प्रति प्रथम रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 74 | 144 | 38 | 108 | 2 | 72 | 110 | 36 | 154 |
| 148 | 88 | 124 | 58 | 22 | 94 | 52 | 136 | 76 |
| 14 | 132 | 78 | 104 | 42 | 98 | 118 | 32 | 150 |
| 152 | 30 | 116 | 84 | 62 | 100 | 48 | 134 | 12 |
| 18 | 130 | 50 | 98 | 82 | 66 | 114 | 34 | 146 |
| 156 | 26 | 120 | 64 | 102 | 80 | 44 | 138 | 8 |
| 6 | 140 | 46 | 60 | 122 | 66 | 86 | 24 | 158 |
| 160 | 28 | 40 | 106 | 142 | 70 | 112 | 76 | 4 |
| 10 | 20 | 126 | 56 | 162 | 92 | 54 | 128 | 90 |

**प्रक्रम 5• [A1]** इस प्रकार प्रत्येक यथार्थ भाजक के लिए प्रथम आधार–वर्ग सुनिष्चित कर इसके मध्य पंक्ति के अवयवों को यथावत खाने (सेल) में ही रखते हुए इस मध्य पंक्ति के समान्तर ऊपर एवं नीचे पंक्ति युग्मों $[R_1—R_{2x+1}]$, $[R_2—R_{2x}]$, $[R_3—R_{2x-1}]$---------- $R_x—R_{x+2}$ अर्थात वे युग्म जिनके सरल क्रमांक योग $[2x+2]$ होगा, के युग्मीय प्रतिबंध पर कुल $[!x * 2^x]$ तरह से स्थानान्तरित कर सकते है। अधो सांकेतिक प्रस्तुति का अवलोकन करें।

## 5*5 का रंगीन जादुई–वर्ग की विविध प्रकारों की प्रस्तुति हेतू आधार–वर्ग की रचना संकेतन–

| प्रकार1 | प्रकार2 | प्रकार3 | प्रकार 4 | प्रकार5 | प्रकार6 | प्रकार 7 | प्रकार 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | $R_1$ | $R_2$ | $R_2$ | $R_4$ | $R_4$ | $R_5$ | $R_5$ |
| $R_2$ | $R_4$ | $R_1$ | $R_5$ | $R_1$ | $R_5$ | $R_2$ | $R_4$ |
| $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ | $R_3$ |
| $R_4$ | $R_2$ | $R_5$ | $R_1$ | $R_5$ | $R_1$ | $R_4$ | $R_2$ |
| $R_5$ | $R_5$ | $R_4$ | $R_4$ | $R_2$ | $R_2$ | $R_1$ | $R_1$ |

**प्रक्रम 5[A2]** उपरोक्त रचना (प्र.1 से प्र.8 तक) प्रकारों को स्तम्भिक दिषा परिवर्तन ( बाएँ से दाएँ को दाएँ से बाएँ) देकर पुनः $[(!x)(2^x)]$ प्रकार की रचना प्रस्तुति दे सकते हैं।

**प्रक्रम 5[B1**, इस प्रकार प्रत्येक यथार्थ भाजक के लिए प्रथम आधार–वर्ग सुनिश्ति कर इसके मध्य स्तम्भ के अवयवों को यथावत खाने (सेल) में ही रखते हुए इस मध्य स्तम्भ के समान्तर बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ युग्मों $[C_1—C_{2x+1}]$, $[C_2—C_{2x}]$ --------$[C_3—C_{2x-}$----------$[C_x—C_{x-+2}]$ जिनके सरल क्रमांक योग $[2x+2]$ होगा, के युग्मीय प्रतिबंध पर कुल $[(n)(2\ [(!x)(2^x)]$ तरह से स्थानान्तरित कर सकते है। अधो सांकेतिक प्रस्तुति का अवलोकन करें।

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **प्रकार 1** | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
| **प्रकार 2** | $C_1$ | $C_4$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_5$ |
| **प्रकार 3** | $C_2$ | $C_1$ | $C_3$ | $C_5$ | $C_4$ |
| **प्रकार 4** | $C_2$ | $C_5$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_4$ |
| **प्रकार 5** | $C_4$ | $C_1$ | $C_3$ | $C_5$ | $C_2$ |
| **प्रकार 6** | $C_4$ | $C_5$ | $C_3$ | $C_1$ | $C_2$ |
| **प्रकार 7** | $C_5$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_1$ |
| **प्रकार 8** | $C_5$ | $C_4$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_1$ |

**प्रक्रम 5[B2]** उपरोक्त रचना (प्र.1 से प्र.8 तक) प्रकारों को पंक्तिक दिशा परिवर्तन ( नीचे से ऊपर को ऊपर से नीचे) देकर पुनः $[(!x)(2^x)]$ प्रकार की रचना प्रस्तुति दे सकते हैं।

इस प्रकार किसी यथार्थ भाजक के लिए प्राप्त आधार–वर्ग के कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या $[(!x)(2^x)] + [(!x)(2^x)] [+ [(!x)(2^x)] + [(!x)(2^x)] = 4[(!x)(2^x)]$ होंगे, जिसमें 4प्रकार की रचना प्रस्तूति दुहराई गई होंगी।

**अतः किसी यथार्थ भाजक क प्रति प्राप्त आधार–वर्गों की वास्तविक संख्या** $=4[(!x)(2^x)] - 4$
$=4[(!x)(2^x) - 1]$ **होगा।**

पुनः यदि [2x+1] के कुल यथार्थ भाजको की संख्या 2m **के प्रति–**

**प्राप्त समस्त आधार–वर्गों की कुल संख्या** $=4m[(!x)(2^x) - 1]$ **होगा।**

**[2x+1] *[2x+1] के रंगीन जादुई–वर्गों के प्रकारों की संख्या–**

रंगीन जादुई–वर्ग की संख्या = आधार वर्ग की संख्या ––से

**[1] किसी यथार्थ भाजक क प्रति प्राप्त रंगीन जादुई–वर्गों की वास्तविक संख्या** $=4[(!x)(2^x)] - 4$
$=4[(!x)(2^x) - 1]$ **होगा।**

पुनः यदि [2x+1] के कुल यथार्थ भाजको की संख्या 2m के प्रति–

**प्राप्त समस्त रंगीन–वर्गों की कुल संख्या** $=4m[(!x)(2^x) - 1]$ **होगा।**

**उदाहरण 1■ 3*3 के प्रति समस्त आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग–**

**[A]** 3 के यथार्थ भाजक 1के प्रति –

**मध्य पंक्ति अवयवों को यथावत रखने पर**

आ.वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 15 | 18 |
| 22 | 25 | 28 |
| 32 | 35 | 38 |

जा.वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 12 | 28 |
| 18 | 25 | 32 |
| 22 | 38 | 15 |

आ.वर्ग [2]

| | | |
|---|---|---|
| 32 | 35 | 38 |
| 22 | 25 | 28 |
| 12 | 15 | 18 |

जा.वर्ग [2]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 32 | 28 |
| 38 | 25 | 12 |
| 22 | 18 | 35 |

1और 2 को स्तम्भिक परिवर्तन देने पर

आ.वर्ग [3]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 15 | 12 |
| 28 | 25 | 22 |
| 38 | 35 | 32 |

जा.वर्ग [3]

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 18 | 22 |
| 12 | 25 | 38 |
| 28 | 32 | 15 |

आ.वर्ग [4]

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 35 | 32 |
| 28 | 25 | 22 |
| 18 | 15 | 12 |

जा.वर्ग [4]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 38 | 22 |
| 32 | 25 | 18 |
| 28 | 12 | 35 |

**मध्य स्तम्भ अवयवों को यथावत रखने पर**

आ.वर्ग [5]

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 15 | 18 |
| 22 | 25 | 28 |
| 32 | 35 | 38 |

जा.वर्ग [5]

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 12 | 28 |
| 18 | 25 | 32 |
| 22 | 38 | 15 |

आ.वर्ग [6]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 15 | 12 |
| 28 | 25 | 22 |
| 38 | 35 | 32 |

जा.वर्ग [6]

| | | |
|---|---|---|
| 35 | 18 | 22 |
| 12 | 25 | 18 |
| 28 | 32 | 15 |

5और 6 को स्तम्भिक परिवर्तन देने पर

आ.वर्ग [7]

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 35 | 38 |
| 22 | 25 | 28 |
| 12 | 15 | 18 |

जा.वर्ग [7]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 32 | 28 |
| 38 | 25 | 12 |
| 22 | 18 | 35 |

आ.वर्ग [8]

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 35 | 32 |
| 28 | 25 | 22 |
| 18 | 15 | 12 |

जा.वर्ग [8]

| | | |
|---|---|---|
| 15 | 38 | 22 |
| 32 | 25 | 18 |
| 28 | 12 | 35 |

**[B]** 3 के यथार्थ भाजक 3के प्रति –

**मध्य पंक्ति अवयवों को यथावत रखने पर**

आ.वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 22 | 32 |
| 15 | 25 | 35 |
| 18 | 28 | 38 |

जा.वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 12 | 35 |
| 32 | 25 | 18 |
| 15 | 38 | 22 |

आ.वर्ग [2]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 28 | 38 |
| 15 | 25 | 35 |
| 12 | 22 | 32 |

जा.वर्ग [2]

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 18 | 35 |
| 38 | 25 | 12 |
| 15 | 32 | 28 |

1और 2 को स्तम्भिक परिवर्तन देने पर

आ.वर्ग [3]

| | | |
|---|---|---|
| 32 | 22 | 12 |
| 35 | 25 | 15 |
| 38 | 28 | 18 |

जा.वर्ग [3]

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 32 | 15 |
| 12 | 25 | 38 |
| 35 | 18 | 22 |

आ.वर्ग [4]

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 28 | 18 |
| 35 | 25 | 15 |
| 32 | 22 | 12 |

जा.वर्ग [4]

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 38 | 15 |
| 18 | 25 | 32 |
| 35 | 12 | 28 |

**मध्य स्तम्भ अवयवों को यथावत रखने पर**

आ.वर्ग [5]

| | | |
|---|---|---|
| 12 | 22 | 32 |
| 15 | 25 | 35 |
| 18 | 28 | 38 |

जा.वर्ग [5]

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 12 | 35 |
| 32 | 25 | 18 |
| 15 | 38 | 22 |

आ.वर्ग [6]

| | | |
|---|---|---|
| 32 | 22 | 12 |
| 35 | 25 | 15 |
| 38 | 28 | 18 |

जा.वर्ग [6]

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 32 | 12 |
| 12 | 25 | 38 |
| 38 | 18 | 22 |

5और 6 को स्तम्भिक परिवर्तन देने पर

आ.वर्ग [7]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 28 | 38 |
| 15 | 25 | 35 |
| 12 | 22 | 32 |

जा.वर्ग [7]

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 18 | 35 |
| 38 | 25 | 12 |
| 15 | 32 | 28 |

आ.वर्ग [8]

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 28 | 18 |
| 35 | 25 | 15 |
| 32 | 22 | 12 |

जा.वर्ग [8]

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 38 | 15 |
| 18 | 25 | 32 |
| 35 | 12 | 28 |

उपरोक्त 3*3 के प्रति प्राप्त 3 के यथार्थ भाजक 1और 3 पर अलग–अलग क्रमांक 1 से 8 तक आधार–वर्ग एवं आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुत है, जिनमें ( 1 और 5), ( 2 और 7 ), ( 3 और 6) एवं ( 4 और 8) परस्पर यथावत दोहराए गए हैं।

अतः समस्त यथार्थ (1और 3) पर वास्तविक कुल प्रस्तुति संख्या $= 2(8-4) = 2*4 = 8$ ---------(1)

समिका सत्यापन–

$2x+1 = 3$ से $x=1$

समिका– किसी यथार्थ पर कुल प्रस्तुति संख्या $= 4[(!x)(2^x) - 1]$

$= 4[(!1)(2^1) - 1] = 4[2\text{-}1] = 4$

कुल यथार्थ भाजको (1 और 3) की संख्या $m = 2$ से

समिका– सतस्त प्रस्तुतियो की कुल संख्या $= 4m[(!x)(2^x) - 1]$

$= 4*2[(!1)(2^1) - 1] = 8[2\text{-}1] = 8$ ---------(2)

**(1)और(2) से सत्यापित हुआ ।**

**उदाहरण 2■ 5*5 के प्रति समस्त आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग–**

**[A]** 5 के यथार्थ भाजक 1के प्रति – **आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग**

**a- प्रथम आधार–वर्ग का मध्य पंक्ति अवयवों को यथावत रखने पर पंक्तिक युग्मीय स्थानांतरण का नियम**

**[1]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 24 | 1 | 22 | 15 |
| 10 | 18 | 7 | 14 | 16 |
| 21 | 9 | 13 | 17 | 5 |
| 20 | 12 | 19 | 8 | 6 |
| 11 | 2 | 25 | 4 | 23 |

**[2]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 24 | 1 | 22 | 15 |
| 20 | 8 | 17 | 14 | 6 |
| 21 | 19 | 13 | 7 | 5 |
| 10 | 12 | 9 | 18 | 16 |
| 11 | 2 | 25 | 4 | 23 |

**[3]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 19 | 6 | 17 | 15 |
| 5 | 23 | 2 | 14 | 21 |
| 16 | 4 | 13 | 22 | 10 |
| 25 | 12 | 24 | 3 | 1 |
| 11 | 7 | 20 | 9 | 18 |

**[8]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 19 | 6 | 17 | 15 |
| 25 | 3 | 22 | 14 | 1 |
| 16 | 24 | 13 | 2 | 10 |
| 5 | 12 | 4 | 23 | 20 |
| 11 | 7 | 20 | 9 | 18 |

**[5]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 9 | 16 | 7 | 15 |
| 5 | 23 | 2 | 14 | 21 |
| 6 | 4 | 13 | 22 | 20 |
| 25 | 12 | 24 | 3 | 1 |
| 11 | 17 | 10 | 19 | 8 |

**[6]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 9 | 16 | 9 | 15 |
| 25 | 3 | 22 | 14 | 1 |
| 6 | 24 | 13 | 2 | 20 |
| 5 | 12 | 4 | 23 | 21 |
| 11 | 17 | 10 | 19 | 8 |

**[7]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 4 | 21 | 2 | 15 |
| 10 | 18 | 7 | 14 | 16 |
| 1 | 9 | 13 | 17 | 25 |
| 20 | 12 | 19 | 8 | 6 |
| 11 | 22 | 5 | 24 | 3 |

**[8]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 4 | 21 | 2 | 15 |
| 20 | 8 | 17 | 14 | 6 |
| 1 | 19 | 13 | 7 | 25 |
| 10 | 12 | 9 | 18 | 16 |
| 11 | 22 | 5 | 24 | 3 |

**b-** a **से प्राप्त 1 से 8 तक को स्तम्भिक दिशा परिवर्तन देने पर**

**[9]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 22 | 5 | 24 | 11 |
| 6 | 18 | 9 | 12 | 20 |
| 25 | 7 | 13 | 19 | 1 |
| 16 | 14 | 17 | 8 | 10 |
| 15 | 4 | 21 | 2 | 23 |

**[10]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 22 | 5 | 24 | 11 |
| 16 | 8 | 19 | 12 | 10 |
| 25 | 17 | 13 | 7 | 1 |
| 6 | 14 | 7 | 18 | 20 |
| 15 | 4 | 21 | 2 | 23 |

**[11]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 19 | 10 | 19 | 11 |
| 1 | 23 | 4 | 12 | 25 |
| 20 | 2 | 13 | 24 | 6 |
| 21 | 14 | 22 | 3 | 5 |
| 15 | 9 | 16 | 7 | 18 |

**[12]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 5 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 17 | 10 | 19 | 11 |
| 5 | 3 | 24 | 12 | 21 |
| 20 | 22 | 13 | 4 | 6 |
| 1 | 14 | 2 | 23 | 25 |
| 15 | 9 | 16 | 7 | 18 |

[13]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[14]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

[15]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

[16]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 7 | 20 | 9 | 11 |
| 1 | 23 | 4 | 12 | 25 |
| 10 | 2 | 13 | 24 | 16 |
| 21 | 14 | 22 | 3 | 5 |
| 15 | 19 | 6 | 17 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 7 | 20 | 9 | 11 |
| 21 | 3 | 24 | 12 | 5 |
| 10 | 22 | 13 | 4 | 16 |
| 1 | 14 | 2 | 23 | 25 |
| 15 | 19 | 6 | 17 | 8 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 25 | 4 | 11 |
| 6 | 18 | 9 | 12 | 20 |
| 5 | 7 | 13 | 19 | 21 |
| 16 | 14 | 17 | 8 | 10 |
| 15 | 24 | 1 | 22 | 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 25 | 4 | 11 |
| 16 | 8 | 19 | 12 | 10 |
| 5 | 17 | 13 | 9 | 21 |
| 6 | 14 | 7 | 18 | 20s |
| 15 | 24 | 1 | 22 | 3 |

**c- प्रथम आधार–वर्ग का मध्य स्तम्भ अवयवों को यथावत रखने पर स्तम्भिक युग्मीय स्थानांतरण का नियम**

[17] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

[18]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 3 | 2 | 5 |
| 6 | 9 | 8 | 7 | 10 |
| 11 | 14 | 13 | 12 | 15 |
| 16 | 19 | 18 | 17 | 20 |
| 21 | 24 | 23 | 22 | 25 |

[19]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |
| 7 | 6 | 8 | 10 | 9 |
| 12 | 11 | 13 | 15 | 14 |
| 17 | 16 | 18 | 20 | 19 |
| 22 | 21 | 23 | 25 | 24 |

[20]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |
| 7 | 10 | 8 | 6 | 9 |
| 12 | 15 | 13 | 11 | 14 |
| 17 | 20 | 18 | 16 | 19 |
| 22 | 25 | 23 | 21 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 24 | 1 | 22 | 15 |
| 10 | 18 | 7 | 14 | 16 |
| 21 | 9 | 13 | 17 | 5 |
| 20 | 12 | 19 | 8 | 6 |
| 11 | 2 | 25 | 4 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 22 | 1 | 24 | 15 |
| 10 | 18 | 9 | 12 | 16 |
| 21 | 7 | 13 | 19 | 5 |
| 20 | 14 | 17 | 8 | 6 |
| 11 | 4 | 25 | 2 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 25 | 2 | 21 | 14 |
| 9 | 18 | 6 | 15 | 17 |
| 22 | 10 | 13 | 16 | 4 |
| 19 | 11 | 20 | 8 | 9 |
| 12 | 1 | 24 | 5 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 21 | 2 | 25 | 14 |
| 9 | 18 | 10 | 11 | 17 |
| 22 | 6 | 13 | 20 | 4 |
| 19 | 15 | 16 | 8 | 9 |
| 12 | 5 | 24 | 1 | 23 |

[21]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 3 | 5 | 2 |
| 9 | 6 | 8 | 10 | 7 |
| 14 | 11 | 13 | 15 | 12 |
| 19 | 16 | 18 | 20 | 17 |
| 24 | 21 | 23 | 25 | 22 |

[22]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |
| 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 14 | 15 | 13 | 11 | 12 |
| 19 | 20 | 18 | 16 | 17 |
| 24 | 25 | 23 | 21 | 22 |

[23]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 10 | 7 | 8 | 9 | 6 |
| 15 | 12 | 13 | 14 | 11 |
| 20 | 17 | 18 | 19 | 16 |
| 25 | 22 | 23 | 24 | 21 |

[24] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 25 | 4 | 21 | 12 |
| 7 | 18 | 6 | 15 | 19 |
| 24 | 10 | 13 | 16 | 2 |
| 17 | 11 | 20 | 8 | 9 |
| 14 | 1 | 22 | 5 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 21 | 4 | 25 | 12 |
| 7 | 18 | 10 | 11 | 19 |
| 24 | 6 | 13 | 20 | 2 |
| 17 | 15 | 16 | 8 | 9 |
| 14 | 5 | 22 | 1 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 24 | 5 | 22 | 11 |
| 6 | 18 | 7 | 14 | 20 |
| 25 | 9 | 13 | 17 | 1 |
| 16 | 12 | 19 | 8 | 10 |
| 15 | 2 | 21 | 4 | 23 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 22 | 5 | 24 | 11 |
| 6 | 18 | 9 | 12 | 20 |
| 25 | 7 | 13 | 19 | 1 |
| 16 | 14 | 17 | 8 | 10 |
| 15 | 4 | 21 | 2 | 23 |

d- c से प्राप्त 17 से 24 तक को पंक्तिक दिशा परिवर्तन देने पर

[25] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 4 | 21 | 2 | 15 |
| 20 | 8 | 17 | 14 | 6 |
| 1 | 19 | 13 | 7 | 25 |
| 10 | 12 | 9 | 18 | 16 |
| 11 | 22 | 5 | 24 | 3 |

[26]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 24 | 23 | 22 | 25 |
| 16 | 19 | 18 | 17 | 20 |
| 11 | 14 | 13 | 12 | 15 |
| 6 | 9 | 8 | 7 | 10 |
| 1 | 4 | 3 | 2 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 21 | 4 | 15 |
| 20 | 8 | 19 | 12 | 6 |
| 1 | 17 | 13 | 9 | 25 |
| 10 | 14 | 7 | 18 | 16 |
| 11 | 24 | 5 | 22 | 3 |

27]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 21 | 23 | 25 | 24 |
| 17 | 16 | 18 | 20 | 19 |
| 12 | 11 | 13 | 15 | 14 |
| 7 | 6 | 8 | 10 | 9 |
| 2 | 1 | 3 | 5 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 22 | 1 | 14 |
| 19 | 8 | 16 | 15 | 7 |
| 2 | 20 | 13 | 6 | 24 |
| 9 | 11 | 10 | 18 | 17 |
| 12 | 21 | 4 | 25 | 3 |

[28]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 25 | 23 | 21 | 24 |
| 17 | 20 | 18 | 16 | 19 |
| 12 | 15 | 13 | 11 | 14 |
| 7 | 10 | 8 | 6 | 9 |
| 2 | 5 | 3 | 1 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 1 | 22 | 5 | 14 |
| 19 | 8 | 20 | 11 | 7 |
| 2 | 16 | 13 | 10 | 24 |
| 9 | 15 | 6 | 18 | 17 |
| 12 | 25 | 4 | 20 | 3 |

[29]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 21 | 23 | 25 | 22 |
| 19 | 16 | 18 | 20 | 17 |
| 14 | 11 | 13 | 15 | 12 |
| 9 | 6 | 8 | 10 | 7 |
| 4 | 1 | 3 | 5 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 24 | 1 | 12 |
| 17 | 8 | 16 | 15 | 9 |
| 4 | 20 | 13 | 6 | 22 |
| 7 | 11 | 10 | 18 | 19 |
| 14 | 21 | 2 | 25 | 3 |

[30]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 25 | 23 | 21 | 22 |
| 19 | 20 | 18 | 16 | 17 |
| 14 | 15 | 13 | 11 | 12 |
| 9 | 10 | 8 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 3 | 1 | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 1 | 24 | 5 | 12 |
| 17 | 8 | 20 | 11 | 9 |
| 4 | 16 | 13 | 10 | 22 |
| 7 | 15 | 6 | 18 | 19 |
| 14 | 25 | 2 | 21 | 3 |

[31]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 22 | 23 | 24 | 21 |
| 20 | 17 | 18 | 19 | 16 |
| 15 | 12 | 13 | 14 | 11 |
| 10 | 7 | 8 | 9 | 6 |
| 5 | 2 | 3 | 4 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 4 | 25 | 2 | 11 |
| 16 | 8 | 17 | 14 | 10 |
| 5 | 19 | 13 | 7 | 21 |
| 6 | 12 | 9 | 18 | 20 |
| 15 | 22 | 1 | 24 | 3 |

[32] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 2 | 25 | 4 | 11 |
| 16 | 8 | 19 | 12 | 10 |
| 5 | 17 | 13 | 9 | 21 |
| 6 | 14 | 7 | 18 | 20 |
| 15 | 24 | 1 | 22 | 3 |

[B] 5 के यथार्थ भाजक 5 के प्रति– आधार–वर्ग सह जादुई–वर्ग

a- प्रथम आधार–वर्ग का मध्य पंक्ति अवयवों को यथावत रखने पर पंक्तिक युग्मीय स्थानांतरण का नियम

[1] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 20 | 1 | 10 | 23 |
| 22 | 14 | 7 | 18 | 4 |
| 5 | 17 | 13 | 9 | 21 |
| 24 | 8 | 19 | 12 | 2 |
| 3 | 6 | 25 | 16 | 15 |

[2]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 20 | 1 | 10 | 23 |
| 24 | 14 | 9 | 18 | 2 |
| 5 | 19 | 13 | 7 | 21 |
| 22 | 8 | 17 | 12 | 4 |
| 3 | 6 | 25 | 16 | 15 |

[3]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 19 | 2 | 9 | 23 |
| 21 | 15 | 6 | 18 | 5 |
| 4 | 16 | 13 | 10 | 22 |
| 25 | 8 | 20 | 11 | 1 |
| 3 | 7 | 24 | 17 | 14 |

[4]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 19 | 2 | 9 | 23 |
| 25 | 11 | 10 | 18 | 1 |
| 4 | 20 | 13 | 6 | 22 |
| 21 | 8 | 16 | 15 | 5 |
| 3 | 7 | 24 | 17 | 14 |

[5]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[6]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |

[7]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[8] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 17 | 4 | 7 | 23 |
| 21 | 15 | 6 | 18 | 5 |
| 2 | 16 | 13 | 10 | 24 |
| 25 | 8 | 20 | 11 | 1 |
| 3 | 9 | 22 | 19 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 17 | 4 | 7 | 23 |
| 25 | 11 | 10 | 18 | 1 |
| 2 | 20 | 13 | 6 | 24 |
| 21 | 8 | 16 | 15 | 5 |
| 3 | 9 | 22 | 19 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 16 | 5 | 6 | 23 |
| 22 | 14 | 7 | 18 | 4 |
| 1 | 17 | 13 | 9 | 25 |
| 24 | 8 | 19 | 12 | 2 |
| 3 | 10 | 21 | 20 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 16 | 5 | 6 | 23 |
| 24 | 12 | 9 | 18 | 2 |
| 1 | 19 | 13 | 7 | 25 |
| 22 | 8 | 17 | 14 | 4 |
| 3 | 10 | 21 | 20 | 11 |

b- a से प्राप्त 1 से 8 तक को स्तम्भिक दिशा परिवर्तन देने पर

[9]*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

[10]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

[11]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

[12]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 21 | 20 | 3 |
| 2 | 14 | 17 | 8 | 24 |
| 25 | 7 | 13 | 19 | 1 |
| 4 | 18 | 9 | 12 | 22 |
| 23 | 16 | 5 | 6 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 21 | 20 | 3 |
| 4 | 12 | 19 | 8 | 22 |
| 25 | 9 | 13 | 17 | 1 |
| 2 | 18 | 7 | 14 | 24 |
| 23 | 16 | 5 | 6 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 9 | 22 | 19 | 3 |
| 1 | 15 | 16 | 8 | 25 |
| 24 | 6 | 13 | 20 | 2 |
| 5 | 18 | 10 | 11 | 21 |
| 23 | 17 | 4 | 7 | 14 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 9 | 22 | 19 | 3 |
| 5 | 11 | 20 | 8 | 21 |
| 24 | 10 | 13 | 16 | 2 |
| 1 | 18 | 6 | 15 | 25 |
| 23 | 17 | 4 | 7 | 14 |

[13]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[14]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |

[15]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

[16] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 7 | 24 | 17 | 3 |
| 1 | 15 | 16 | 8 | 25 |
| 22 | 6 | 13 | 20 | 4 |
| 5 | 18 | 10 | 11 | 21 |
| 23 | 19 | 2 | 9 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 14 | 7 | 24 | 17 | 3 |
| 5 | 11 | 20 | 8 | 21 |
| 22 | 10 | 13 | 16 | 4 |
| 1 | 18 | 6 | 15 | 25 |
| 23 | 19 | 2 | 9 | 12 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 25 | 16 | 3 |
| 2 | 14 | 17 | 8 | 24 |
| 21 | 7 | 13 | 19 | 5 |
| 4 | 18 | 9 | 12 | 22 |
| 23 | 20 | 1 | 10 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 25 | 16 | 3 |
| 4 | 12 | 19 | 8 | 22 |
| 21 | 9 | 13 | 17 | 5 |
| 2 | 18 | 7 | 14 | 24 |
| 23 | 20 | 1 | 10 | 11 |

c- प्रथम आधार–वर्ग का मध्य स्तम्भ अवयवों को यथावत रखने पर स्तम्भिक युग्मीय स्थानांतरण का नियम

[17] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |

[18]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 16 | 11 | 6 | 21 |
| 2 | 17 | 12 | 7 | 22 |
| 3 | 18 | 13 | 8 | 23 |
| 4 | 19 | 14 | 9 | 24 |
| 5 | 20 | 15 | 10 | 25 |

[19]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 1 | 11 | 21 | 16 |
| 7 | 2 | 12 | 22 | 17 |
| 8 | 3 | 13 | 23 | 18 |
| 9 | 4 | 14 | 24 | 19 |
| 10 | 5 | 15 | 25 | 20 |

[20]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 21 | 11 | 1 | 16 |
| 7 | 22 | 12 | 2 | 17 |
| 8 | 23 | 13 | 3 | 18 |
| 9 | 24 | 14 | 4 | 19 |
| 10 | 25 | 15 | 5 | 20 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 20 | 1 | 10 | 23 |
| 22 | 14 | 7 | 18 | 4 |
| 5 | 17 | 13 | 9 | 21 |
| 24 | 8 | 19 | 12 | 2 |
| 3 | 6 | 25 | 16 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 1 | 20 | 23 |
| 22 | 14 | 17 | 8 | 4 |
| 5 | 7 | 13 | 19 | 21 |
| 24 | 18 | 9 | 12 | 2 |
| 3 | 16 | 25 | 6 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 25 | 6 | 5 | 18 |
| 17 | 14 | 2 | 23 | 9 |
| 10 | 22 | 13 | 4 | 16 |
| 19 | 3 | 24 | 12 | 7 |
| 8 | 1 | 20 | 21 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 5 | 6 | 25 | 18 |
| 17 | 14 | 22 | 3 | 9 |
| 10 | 2 | 13 | 24 | 16 |
| 19 | 23 | 4 | 12 | 7 |
| 8 | 21 | 20 | 1 | 15 |

[21]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 1 | 11 | 21 | 6 |
| 17 | 2 | 12 | 22 | 7 |
| 18 | 3 | 13 | 23 | 8 |
| 19 | 4 | 14 | 24 | 9 |
| 20 | 5 | 15 | 25 | 10 |

[22]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 21 | 11 | 1 | 6 |
| 17 | 22 | 12 | 2 | 7 |
| 18 | 23 | 13 | 3 | 8 |
| 19 | 24 | 14 | 4 | 9 |
| 20 | 25 | 15 | 5 | 10 |

[23]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 6 | 11 | 16 | 1 |
| 22 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 23 | 8 | 13 | 18 | 3 |
| 24 | 9 | 14 | 19 | 4 |
| 25 | 10 | 15 | 20 | 5 |

[24] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 25 | 16 | 5 | 8 |
| 7 | 14 | 2 | 23 | 19 |
| 20 | 22 | 13 | 4 | 6 |
| 9 | 3 | 24 | 12 | 17 |
| 18 | 1 | 10 | 21 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 5 | 16 | 25 | 8 |
| 7 | 14 | 22 | 3 | 19 |
| 20 | 2 | 13 | 24 | 6 |
| 9 | 23 | 4 | 12 | 17 |
| 18 | 21 | 10 | 1 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 20 | 21 | 10 | 3 |
| 2 | 14 | 7 | 18 | 24 |
| 25 | 17 | 13 | 9 | 1 |
| 4 | 8 | 19 | 12 | 22 |
| 23 | 6 | 5 | 16 | 15 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | 21 | 20 | 3 |
| 2 | 14 | 17 | 8 | 24 |
| 25 | 7 | 13 | 19 | 1 |
| 4 | 18 | 9 | 12 | 22 |
| 23 | 16 | 5 | 6 | 15 |

d- c से प्राप्त 17 से 24 तक को पंक्तिक दिशा परिवर्तन देने पर

[25] *

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 |
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 |

[26]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 20 | 15 | 10 | 25 |
| 4 | 19 | 14 | 9 | 24 |
| 3 | 18 | 13 | 8 | 23 |
| 2 | 17 | 12 | 7 | 22 |
| 1 | 16 | 11 | 6 | 21 |

27]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 5 | 15 | 25 | 20 |
| 9 | 4 | 14 | 24 | 19 |
| 8 | 3 | 13 | 23 | 18 |
| 7 | 2 | 12 | 22 | 17 |
| 6 | 1 | 11 | 21 | 16 |

[28]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 25 | 15 | 5 | 20 |
| 9 | 24 | 14 | 4 | 19 |
| 8 | 23 | 13 | 3 | 18 |
| 7 | 22 | 12 | 2 | 17 |
| 6 | 21 | 11 | 1 | 16 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 16 | 5 | 6 | 23 |
| 24 | 12 | 9 | 18 | 2 |
| 1 | 19 | 13 | 7 | 25 |
| 22 | 8 | 17 | 14 | 4 |
| 3 | 10 | 21 | 20 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 5 | 16 | 23 |
| 24 | 12 | 19 | 8 | 2 |
| 1 | 9 | 13 | 17 | 25 |
| 22 | 18 | 7 | 14 | 4 |
| 3 | 20 | 21 | 10 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 21 | 10 | 1 | 18 |
| 19 | 12 | 4 | 23 | 7 |
| 6 | 24 | 13 | 2 | 20 |
| 17 | 3 | 22 | 14 | 9 |
| 8 | 5 | 16 | 25 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 10 | 21 | 18 |
| 19 | 12 | 24 | 3 | 7 |
| 6 | 4 | 13 | 22 | 20 |
| 17 | 23 | 2 | 14 | 9 |
| 8 | 25 | 16 | 5 | 11 |

**[29]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 5 | 15 | 25 | 10 |
| 19 | 4 | 14 | 24 | 9 |
| 18 | 3 | 13 | 23 | 8 |
| 17 | 2 | 12 | 22 | 7 |
| 16 | 1 | 11 | 21 | 6 |

**[30]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 25 | 15 | 5 | 10 |
| 19 | 24 | 14 | 4 | 9 |
| 18 | 23 | 13 | 3 | 8 |
| 17 | 22 | 12 | 2 | 7 |
| 16 | 21 | 11 | 1 | 6 |

**[31]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 10 | 15 | 20 | 5 |
| 24 | 9 | 14 | 19 | 4 |
| 23 | 8 | 13 | 18 | 3 |
| 22 | 7 | 12 | 17 | 2 |
| 21 | 6 | 11 | 16 | 1 |

**[32]**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 20 | 15 | 10 | 5 |
| 24 | 19 | 14 | 9 | 4 |
| 23 | 18 | 13 | 8 | 3 |
| 22 | 17 | 12 | 7 | 2 |
| 21 | 16 | 11 | 6 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 21 | 20 | 1 | 8 |
| 9 | 12 | 4 | 23 | 17 |
| 16 | 24 | 13 | 2 | 10 |
| 7 | 3 | 22 | 14 | 19 |
| 18 | 5 | 6 | 25 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 20 | 21 | 8 |
| 9 | 12 | 24 | 3 | 17 |
| 16 | 4 | 13 | 22 | 10 |
| 7 | 23 | 2 | 14 | 19 |
| 18 | 25 | 6 | 5 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 16 | 25 | 6 | 3 |
| 4 | 12 | 9 | 18 | 22 |
| 21 | 19 | 13 | 7 | 5 |
| 2 | 8 | 17 | 14 | 24 |
| 23 | 10 | 1 | 20 | 11 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15 | 6 | 25 | 16 | 3 |
| 4 | 12 | 19 | 8 | 22 |
| 21 | 9 | 13 | 17 | 5 |
| 2 | 18 | 7 | 14 | 24 |
| 23 | 20 | 1 | 10 | 11 |

उपरोक्त 5*5 के प्रति प्राप्त 5 के यथार्थ भाजक 1और 5 पर अलग–अलग क्रमांक 1 से 32 तक आधार–वर्ग एवं आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुत है, जिनमें ( 1 और 17), ( 8 और 24 ), ( 9 और 25) एवं ( 16 और 32) परस्पर यथावत्दोहराए गए हैं।

अतः समस्त यथार्थ (1और 5) पर वास्तविक कुल प्रस्तुति संख्या $= 2(32-4) = 2*28 = 56$ ---------(1)

समिका सत्यापन– $2x+1=5$ से $x=2$

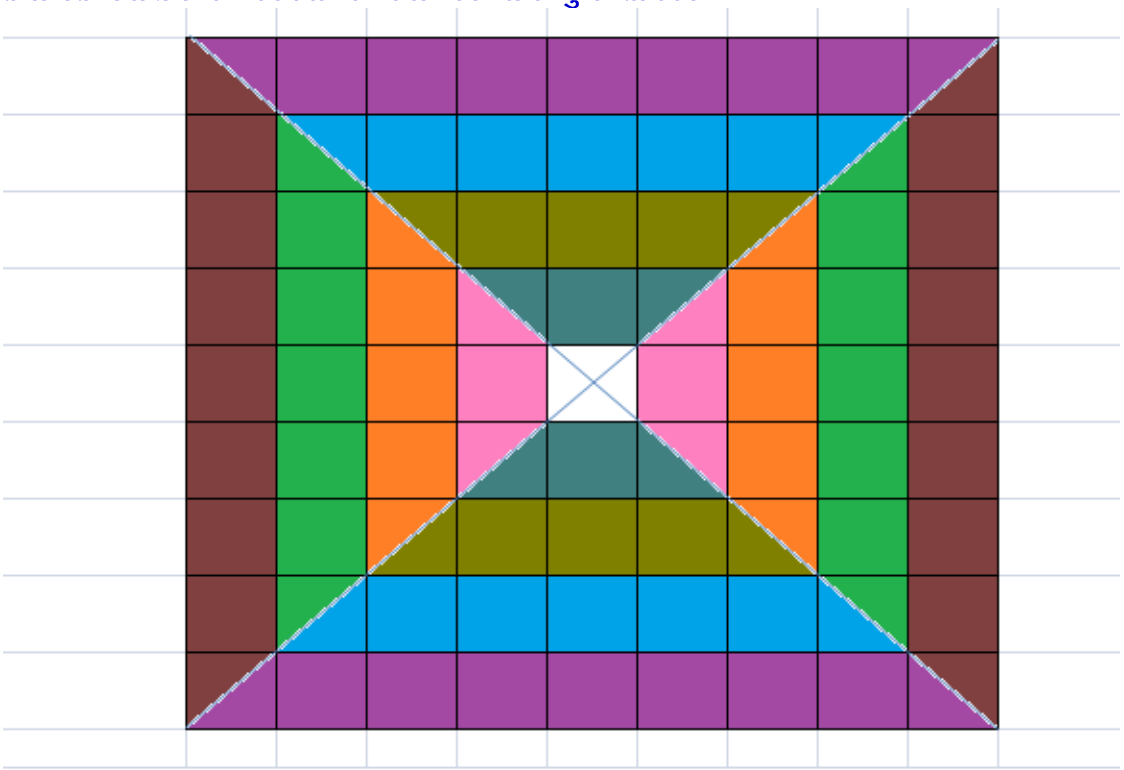
तथा कुल यथार्थ भाजको (1 और 5) की संख्या $m=2$ से

सतस्त प्रस्तुतियो की कुल संख्या $=4m[(!x)(2^x)-1]$

$=4*2[(!2)(2^2)-1] = 8[8-1] = 8*7 = 56$ ---------(2)

(1)**और**(2) **से सत्यापित ।**

**प्रस्तुति 10-4 विषम * विषम रंगीन जादुई–वर्ग के अन्तःनिष्ठ–वर्ग के सम्मुख पक्ति परिधि तथा ातम्भपरिधि के अवयवों के वर्गों का योग गुण समिका –**



किसी भी विषम*विषम [(2x+1)*(2x+1)] आधार–वर्ग के अन्तःनिष्ठ–वर्ग के प्रतिबंधानुसार संगत प्राप्त विषम*विषम [(2x+1)*(2x+1)] रंगीन जादुई–वर्ग के किसी भी विषम*विषम [(2m+1)*(2m+1)] के अन्तःनिष्ठ–वर्ग के परिधि के अवयवों के वर्गों का योग समिका पंक्तिक एवं स्तम्भिक प्रतिबंध पर अलग–अलग निम्नानुसार होगा। आकृति में प्रत्येक अन्तःनिष्ठ– वर्ग के सम्मुख पंक्ति युग्म और सम्मुख स्तम्भ युग्म अलग–अलग समान रंगों में स्पष्ट किया गया है।

**1• पंक्तिक प्रतिबंध पर** ऊपर पंक्ति के सभी [2m+1] अवयवों के वर्गो का योग =
नीचे पंक्ति के सभी [2m+1] अवयवों के वर्गो का योग

**2• स्तम्भिक प्रतिबंध पर**
बाँया स्तम्भ के सभी [2m+1] अवयवों के वर्गो का योग =
दाँया स्तम्भ के सभी [2m+1] अवयवों के वर्गो का योग

**उदाहरण 1■ 3*3 का रंगीन जादुई–वर्ग से –**

अन्तःनिष्ठ–वर्ग 3*3 के

| | | |
|---|---|---|
| 28 | 32 | 15 |
| 12 | 25 | 38 |
| 35 | 18 | 22 |

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**
ऊपर पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग = $28^2 + 32^2 + 15^2$
$= 784 + 1024 + 225 = 2033$
नीचे पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग $= 35^2 + 18^2 + 22^2$
$= 1225 + 324 + 484 = 2033$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग = $28^2 + 12^2 + 35^2 = 784 + 144 + 1225$

दाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग $= 15^2 + 38^2 + 22^2 = 225 + 1444 + 484$

$= 2153$ सत्यापित।

**उदाहरण 2■ 5*5 का रंगीन जादुई–वर्ग से –**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 42 | 4 | **34** | 24 |
| 16 | 30 | **10** | **26** | 28 |
| 36 | **18** | 22 | **26** | 8 |
| 32 | **18** | **34** | 14 | 12 |
| 20 | 2 | 40 | **10** | 38 |

[A] **अन्तःनिष्ठ–वर्ग 3*3 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग = $30^2 + 10^2 + 26^2$

$= 900 + 100 + 676 = 1676$

नीचे पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग $= 18^2 + 34^2 + 14^2$

$= 324 + 1156 + 196 = 1676$ = सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग = $30^2 + 18^2 + 18^2 = 900 + 324 + 324 = 1548$

दाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग $= 26^2 + 26^2 + 14^2 = 676 + 676 + 196 = 1548$

सत्यापित।

[B] **अन्तःनिष्ठ–वर्ग 5*5 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $=6^2 + 42^2 + 4^2 + 34^2 + 24^2$

$= 36 + 1764 + 16 + 1156 + 576 = 3548$

नीचे पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $= 20^2 + 2^2 + 40^2 + 10^2 + 38^2$

$= 400 + 4 + 1600 + 100 + 1444 = 3548$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $=6^2 + 16^2 + 36^2 + 32^2 + 20^2$

$= 36+256+1296+1024+400= 3012$

दाँया स्तम्भ के सभी 5 के अवयवों वर्गो का योग $= 24^2 + 28^2 + 8^2 + 12^2 + 38^2$

$=576 +784 +64 +144 +1444= 3012$ सत्यापित।

**उदाहरण 3■ 7*7 का रंगीन जादुई–वर्ग से**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 48 | 3 | 1 | 5 | 44 | 28 |
| 14 | 11 | 40 | 9 | 38 | 27 | 36 |
| 29 | 20 | 32 | 17 | 26 | 30 | 21 |
| 7 | 37 | 19 | 25 | 31 | 13 | 43 |
| 15 | 34 | 24 | 33 | 18 | 16 | 35 |
| 42 | 23 | 10 | 41 | 12 | 39 | 8 |
| 22 | 2 | 47 | 49 | 45 | 6 | 4 |

[A] **अन्तःनिष्ठ–वर्ग 3*3 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग

$= 32^2 + 17^2 + 26^2$

$= 1024 + 289 + 676 = 1989$

नीचे पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग

$= 24^2 + 33^2 + 18^2$

$= 576 + 1089 + 324 = 1989$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग = $32^2 + 19^2 + 24^2 = 1024 + 361 + 576 = 1961$

दाँया स्तम्भ के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग $= 26^2 + 31^2 + 18^2 = 676 + 961 + 324 = 1961$

सत्यापित।

[B] **अन्तःनिष्ठ–वर्ग 5*5 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $=11^2 + 40^2 + 9^2 + 38^2 + 27^2$

$= 121 + 1600 + 81 + 1444 + 729 = 3975$

नीचे पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $= 23^2 + 10^2 + 41^2 + 12^2 + 39^2$

$= 529 + 100 + 1681 + 144 + 1521 = 3975$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $=11^2 + 20^2 + 37^2 + 34^2 + 23^2$

$=121+400+1369+1156+529= 3575$

दाँया स्तम्भ के सभी 5 के अवयवों वर्गो का योग $= 27^2 + 30^2 + 13^2 + 16^2 + 39^2$

$= 729 +900 +169 + 256 +1521= 3575$ सत्यापित।

**[C] अन्तःनिष्ठ–वर्ग 7*7 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 7 अवयवों के वर्गो का योग $=46^2 +48^2 + 3^2 + 1^2 + 5^2 + 44^2 + 28^2 = 7175$

नीचे पंक्ति के सभी 7 अवयवों के वर्गो का योग $=22^2 +2^2 + 47^2 + 49^2 + 45^2 + 6^2 + 4^2 = 7175$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 7 अवयवों के वर्गो का योग $=46^2 +14^2 + 29^2 + 7^2 + 15^2 + 42^2 + 22^2 = 5675$

दाँया स्तम्भ के सभी 7 के अवयवों वर्गो का योग $= 28^2 +36^2 + 21^2 + 43^2 + 35^2 + 8^2 + 4^2 = 5675$ सत्यापित।

**[D] मध्य स्तम्भ अवयव से** $9^2 + 17^2 +49^2 = 41^2 + 33^2 +1^2 = 2771$

**[E] मध्य . पंक्ति अवयव से** $7^2 + 37^2 +31^2 = 43^2 + 13^2 +19^2 = 2771$

**[F] ऊपर बाएँ शीर्ष से नीचे दाएँ शीर्ष तक के अवयव से**

$46^2 + 11^2 +18^2 = 4^2 + 39^2 +32^2 = 1561$

**[G] नीचे बाएँ शीर्ष सें ऊपर दाएँ शीर्ष तक के अवयव से**

$22^2 + 26^2 +27^2 = 28^2 + 24^2 +23^2 = 1889$

**उदाहरण 4■ 9*9 का रंगीन जादुई–वर्ग से**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 156 | 14 | 144 | 2 | 132 | 38 | 120 | 106 |
| 104 | 84 | 96 | 74 | 62 | 86 | 72 | 100 | 60 |
| 6 | 152 | 134 | 36 | 122 | 24 | 94 | 12 | 158 |
| 52 | 118 | 40 | 136 | 22 | 88 | 124 | 46 | 112 |
| 114 | 98 | 18 | 34 | 82 | 130 | 146 | 66 | 50 |
| 160 | 10 | 148 | 76 | 142 | 28 | 16 | 154 | 4 |
| 110 | 48 | 70 | 128 | 42 | 140 | 30 | 116 | 54 |
| 108 | 64 | 68 | 90 | 102 | 78 | 92 | 80 | 56 |
| 58 | 8 | 150 | 20 | 162 | 32 | 126 | 44 | 138 |

**[A] अन्तःनिष्ठ–वर्ग 3*3 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग

$=136^2 + 22^2 + 88^2 = 26724$

नीचे पंक्ति के सभी 3 अवयवों के वर्गो का योग

$=76^2 + 142^2 + 28^2 = 26724$

सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 3अवयवों के वर्गो का योग $= 136^2 +34^2 + 76^2 = 25428$ दाँया स्तम्भ के सभी 3अवयवों के वर्गो का योग $= 88^2 +130^2 + 28^2 + = 25428$ सत्यापित।

**[B] अन्तःनिष्ठ–वर्ग 5*5 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $=134^2 +36^2 + 122^2 + 24^2 + 94^2 = 43548$

नीचे पंक्ति के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग $= 70^2 +128^2 + 42^2 + 140^2 + 30^2 = 43548$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 5 अवयवों के वर्गो का योग$= 134^2 +40^2 + 18^2 + 148^2 + 70^2 = 46684$

दाँया स्तम्भ के सभी 5 के अवयवों वर्गो का योग $= 94^2 + 124^2 + 146^2 + 16^2 + 30^2 = 46684$ सत्यापित।

**[C] अन्तःनिष्ठ–वर्ग 7*7 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 7अवयवों के वर्गो का योग $=84^2 + 96^2 + 74^2 + 62^2 + 86^2 + 72^2 + 100^2 = 48172$ नीचे पंक्ति के सभी 7अवयवों के वर्गो का योग $= 64^2+ 68^2+ 90^2 + 102^2 + 78^2 + 92^2 + 80^2 = 48172$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 7अवयवों के वर्गो का योग $=84^2+152^2 +118^2 + 98^2 + 10^2 + 48^2 + 64^2 = 60188$

दाँया स्तम्भ के सभी 7के अवयवों वर्गो का योग $= 100^2+12^2 +46^2 +66^2+154^2+116^2 + 80^2 = 60188$ सत्यापित।

**[C] अन्तःनिष्ठ–वर्ग 9*9 के**

**1• पंक्तिक परिधि प्रतिबंध पर**

ऊपर पंक्ति के सभी 9अवयवों के वर्गो का योग =

$$26^2 +156^2 + 14^2 + 144^2 + 2^2 + 132^2 + 38^2 + 120^2 + 106^2 = 90452$$

नीचे पंक्ति के सभी 9अवयवों के वर्गो का योग =

$$58^2 + 8^2 + 150^2 + 20^2 + 162^2 + 32^2 + 126^2 + 44^2 + 138^2 = 90452$$ सत्यापित।

**2• स्तम्भिक परिधि प्रतिबंध पर**

बाँया स्तम्भ के सभी 9अवयवों के वर्गो का योग =

$$26^2 +104^2 + 6^2 + 52^2 + 114^2 + 160^2 + 110^2 + 108^2 + 58^2 = 79956$$

दाँया स्तम्भ के सभी 9के अवयवों वर्गो का योग =

$$26^2 +104^2 + 6^2 + 52^2 + 114^2 + 160^2 + 110^2 + 108^2 + 58^2 = 79956$$ सत्यापित।

**[E] मध्य स्तम्भ के अवयव से** $22^2 + 142^2 +62^2 +2^2 = 42^2 + 22^2 +102^2 + 162^2 = 38896$

**[F] मध्य . पंक्ति के अवयव से** $114^2 + 130^2 +66^2 +18^2 = 50^2 +34^2 +98^2 + 146^2 = 34576$

[G] ऊपर बाएँ **शीर्ष** से नीचे दाएँ **शीर्ष** तक के अवयव से– प्रतिबंध समिका प्राप्त करना सम्भव नहीं है। कारण का स्पश्टीकरण इसी प्रस्तुति के प्रस्तुति बिन्दु पर दिए प्रमेय के अध्ययन उपरांत स्वमेव प्राप्त हो जाएगा।

**[H] नीचे बाएँ शीर्ष ऊपर दाएँ शीर्ष तक के अवयव से**

$$58^2 + 100^2 + 94^2 + 76^2 = 106^2 + 64^2 + 70^2 + 88^2 = 27976$$

**15 के यथार्थ भाजक 5 पर 15*15 के प्रति आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 11 | 16 | 21 | 26 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 |
| 76 | 81 | 86 | 91 | 96 | 101 | 106 | 111 | 116 | 121 | 126 | 131 | 136 | 141 | 146 |
| 151 | 156 | 161 | 166 | 171 | 176 | 181 | 186 | 191 | 196 | 201 | 206 | 211 | 216 | 221 |
| 2 | 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | 42 | 47 | 52 | 57 | 62 | 67 | 72 |
| 77 | 82 | 87 | 92 | 97 | 102 | 107 | 112 | 117 | 122 | 127 | 132 | 137 | 142 | 147 |
| 152 | 157 | 162 | 167 | 172 | 177 | 182 | 187 | 192 | 197 | 202 | 207 | 212 | 217 | 222 |
| 3 | 8 | 13 | 18 | 23 | 28 | 33 | 38 | 43 | 48 | 53 | 58 | 63 | 68 | 73 |
| 78 | 83 | 88 | 93 | 98 | 103 | 108 | 113 | 118 | 123 | 128 | 133 | 138 | 143 | 148 |
| 153 | 158 | 163 | 168 | 173 | 178 | 183 | 188 | 193 | 198 | 203 | 208 | 213 | 218 | 223 |
| 4 | 9 | 14 | 19 | 24 | 29 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 69 | 74 |
| 79 | 84 | 89 | 94 | 99 | 104 | 109 | 114 | 119 | 124 | 129 | 134 | 139 | 144 | 149 |
| 154 | 159 | 164 | 169 | 174 | 179 | 184 | 189 | 194 | 199 | 204 | 209 | 214 | 219 | 224 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 65 | 70 | 75 |
| 80 | 85 | 90 | 95 | 100 | 105 | 110 | 115 | 120 | 125 | 130 | 135 | 140 | 145 | 150 |
| 155 | 160 | 165 | 170 | 175 | 180 | 185 | 190 | 195 | 200 | 205 | 210 | 215 | 220 | 225 |

जादुई–वर्ग

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 190 | 220 | 11 | 210 | 21 | 200 | 31 | 1 | 41 | 180 | 51 | 170 | 61 | 160 | 148 |
| 146 | 111 | 140 | 91 | 130 | 101 | 120 | 81 | 110 | 121 | 100 | 131 | 90 | 143 | 80 |
| s5 | 216 | 40 | 60 | 171 | 50 | 181 | 161 | 191 | 30 | 201 | 20 | 138 | 10 | 221 |
| 72 | 159 | 62 | 37 | 204 | 27 | 194 | 17 | 184 | 47 | 174 | 133 | 164 | 67 | 154 |
| 79 | 142 | 89 | 132 | 114 | 124 | 107 | 97 | 117 | 104 | 128 | 94 | 137 | 84 | 147 |
| 222 | 9 | 212 | 19 | 202 | 187 | 44 | 177 | 34 | 123 | 24 | 207 | 14 | 217 | 4 |
| 153 | 68 | 163 | 58 | 173 | 48 | 188 | 33 | 118 | 178 | 53 | 168 | 63 | 158 | 73 |
| 71 | 85 | 211 | 169 | 127 | 29 | 43 | 113 | 183 | 197 | 99 | 57 | 15 | 141 | 155 |
| 3 | 218 | 13 | 208 | 23 | 198 | 108 | 193 | 38 | 28 | 203 | 18 | 213 | 8 | 223 |
| 74 | 157 | 64 | 167 | 54 | 103 | 182 | 49 | 192 | 39 | 172 | 59 | 162 | 69 | 152 |
| 77 | 144 | 87 | 134 | 98 | 102 | 119 | 129 | 109 | 122 | 112 | 92 | 139 | 82 | 149 |
| 224 | 7 | 214 | 93 | 22 | 199 | 32 | 209 | 42 | 179 | 52 | 189 | 12 | 219 | 2 |
| 151 | 70 | 88 | 166 | 55 | 176 | 45 | 65 | 35 | 196 | 25 | 206 | 186 | 156 | 75 |
| 150 | 83 | 86 | 135 | 96 | 125 | 106 | 145 | 116 | 105 | 126 | 95 | 136 | 115 | 76 |
| 78 | 6 | 215 | 16 | 205 | 26 | 195 | 225 | 185 | 46 | 175 | 56 | 165 | 66 | 36 |

**उपरोक्त 15*15 का रंगीन जादुई–वर्ग के प्रत्येक अन्तःनिष्ठ–वर्ग के पंक्ति परिधि एवं स्तम्भ परिधि के अवयवों के वर्गों का योग समिका प्रतिबंधानुसार प्राप्त योग तालिका प्राप्त कीजिये। •**

**प्रस्तुति 10-5**

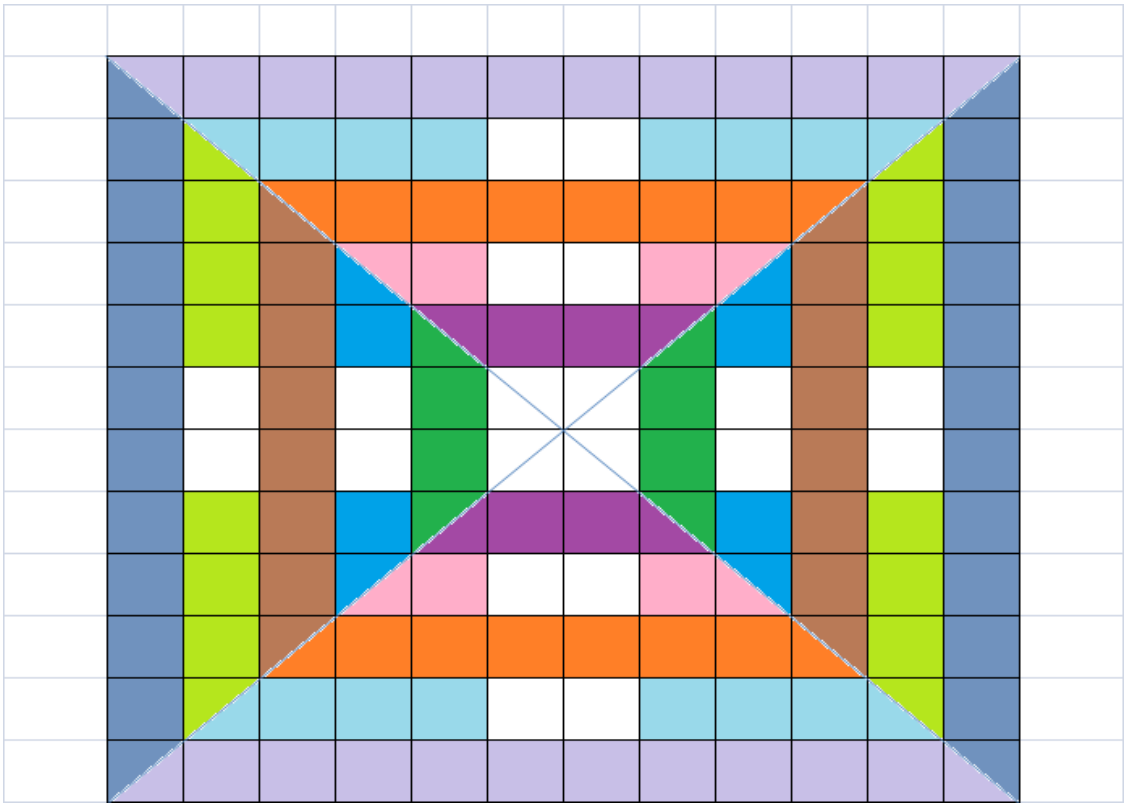
**सम*सम [2N *2N] का अन्तःनिष्ठ–वर्ग या रंगीन जादुई–वर्ग** प्रस्तुति 9-4 में विषम*विषम [(2x+1)×(2x+1)] की सरल प्रस्तुति झण्डा विधि का अनुप्रयोग सम*सम [2N*2N] के प्रति सम्भव नहीं है। जबकि प्रस्तुति 10-2 में दिए विषम*विषम [ (2x+1)×(2x+1)] के रचना के प्रति प्रस्तुत अन्तःनिष्ठ–वर्ग विधि या रंगीन जादुई–वर्ग रचना विधि का अनुप्रयोग कुछ संशोधन उपरांत यथा विविधता के साथ किया जा सकता है। सम*सम रंगीन जादुई–वर्ग की रचना प्रस्तुति के लिए प्रयुक्त आधार–वर्ग [2*2], [4*4 ], [6*6 ], [8*8 ] - - - - - [(4x-2)*(4x-2)] , [4x*4x] , [(4x+2)*(4x+2), के अवयवो का संगत रंगीन जादुई–वर्ग [2*2] ,[4*4 ], [6*6 ], [8*8 ], - - - - - - [(4x-2)*(4x-2)] , [ 4x*4x] , [(4x+2)*(4x+2), में भी वर्ग में स्थित प्रत्येक सम*सम अन्तःनिष्ठ–वर्ग 2*2] ,[4*4 ], [6*6 ], [8*8 ], - - - - - - [(4m-2)*(4m-2)] , [ 4m*4m] , [(4m+2)*(4m+2)] के परिधि स्थित अवयवो को यथा अन्तनिष्ठ–वर्ग परिधि को दृष्टिगत करते हुए नियमानुसार प्रतिबंध के अन्तर्गत स्थानान्तरित किया जाता है। विस्तारित अध्ययन के पूर्व सम*सम आधार–वर्ग, जादुई–वर्ग एवं इनमें स्थित इनके अन्तःनिश्ठ–वर्गो को 2-2 प्रकार में यथा समान शब्दो में बाँट लिया जाए।

**1• 4 द्वारा विभाजित सम×सम आधार–वर्ग /रंगीन जादुई–वर्ग/ अन्तःनिष्ठ–वर्ग**

जैसे – 4*4 , 8*8 , 12*12 , 16*16, - - - - - 4x*4x / 4m*4m

**2• 4 द्वारा अविभाजित सम×सम आधार–वर्ग /रंगीन जादुई–वर्ग/ अन्तःनिष्ठ–वर्ग**

जैसे – 6*6 , 10*10, 14*14 , 18*18, - - - - - (4x+2)*(4x+2) / (4m+2)*(4m+2)



**3• आधार–वर्ग/रंगीन जादुई–वर्ग में स्थित अन्तःनिष्ठ–वर्ग की संख्या –**

**[a]** 4 द्वारा विभाजित सम*सम 4x*4x आधार–वर्ग /रंगीन जादुई–वर्ग में स्थित 4 द्वारा विभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग की संख्या = 4 द्वारा अविभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग की संख्या = x होगा।

**[b]**– 4 द्वारा अविभाजित सम*सम (4x+2)*(4x+2) आधार–वर्ग /रंगीन जादुई–वर्ग में स्थित 4 द्वारा विभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग की संख्या = x तथा 4 द्वारा अविभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग की संख्या = (x+1) होगा।

**4• आधार–वर्ग/रंगीन जादुई–वर्ग का मध्य स्तम्भ –युग्म एवं मध्य पंक्ति–युग्म अवयव**

**[a]** 4 द्वारा विभाजित सम×सम 4x*4x आधार–वर्ग/रंगीन जादुई–वर्ग में 2x एवं (2x+1) स्तम्भ क्रमांक के अवयव मध्य स्तम्भ–युग्म अवयव तथा 2x एवं (2x+1) पंक्ति क्रमांक के अवयव मध्य पंक्ति–युग्म के अवयव होंगे।

**[b]** 4 द्वारा विभाजित सम×सम (4x+2)*(4x+2) आधार–वर्ग/रंगीन जादुई–वर्ग में (2x+1) एवं (2x+2) स्तम्भ क्रमांक के अवयव मध्य स्तम्भ– युग्म अवयव तथा (2x+1) एवं (2x+2) पंक्ति क्रमांक के अवयव मध्य पंक्ति–युग्म के अवयव होंगे।

**5• सम*सम रंगीन जादुई–वर्ग में अवयवों के वर्गों का योग समिका नियम–**

**[a]** 4 द्वारा विभाजित सम*सम अन्तःनिष्ठ–वर्ग के अवयवों के वर्गों का योग नियम विषम*विषम अन्तःनिष्ठ के अवयवो के वर्गों के योग नियम का पूरा–पुरा पालन करता है।

**[b]** 4 द्वारा अविभाजित सम*सम अन्तःनिश्ठ–वर्ग के अवयवों के वर्गों का योग नियम विषम*विषम अन्तःनिश्ठ के अवयवो के वर्गों के का पूरा–पुरा पालन नहीं करता है इसमें स्तम्भ एवं पंक्ति के बीचो–बीच दो खानो (2x+1)एवं (2x+2) के अवयव को छोड़कर शेष अवयवो के वर्गों का योग समिका उपरोक्त नियमानुसार ही होगा। अर्थात 4 द्वारा अविभाजित सम*सम अन्तःनिश्ठ–वर्ग के स्तम्भ एवं पंक्ति के बीचो–बीच दो खानो (2x+1)एवं (2x+2)के अवयव रंग धारण नहीं करते है। उपरोक्त केवल रंग धारित आकृति में प्रत्येक अन्तःनिष्ठ–वर्ग के सम्मुख पंक्ति युग्म और सम्मुख स्तम्भ युग्म अलग समान रंगो धारिता में स्पष्ट किया गया है।

सम*सम अन्तःनिश्ठ–वर्ग के स्तम्भ एवं पंक्ति के बीचो–बीच दो खानो (2x+1)एवं (2x+2) के अवयव रंग धारण नहीं करते है। इनमें भी वर्गों का योग नियम निम्नानुसार विष्लेशित होगा।

| | | | | | | | | | ऊपर मध्य बायाँ स्तम्भ | ऊपर मध्य दायाँ स्तम्भ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 18 | 18 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 16 | 16 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 14 | 14 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 12 | 12 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 10 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 8 | 8 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 6 | 6 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 4 | 4 | | | | | | | | | |
| बा मध्य ऊ. पंक्ति | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | दा. मध्य ऊ. पंक्ति |
| बा. मध्य. नी. पंक्ति | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | दा. मध्य नी. पंक्ति |
| | | | | | | | | | 4 | 4 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 6 | 6 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 8 | 8 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 10 | 10 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 12 | 12 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 14 | 14 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 16 | 19 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 18 | 18 | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | नीचे मध्य बाँयाँ स्तम्भ | नीचे मध्य दायाँ स्तम्भ | | | | | | | | | |

**[A] मध्य ऊपर एवं नीचे पंक्ति से**

1• ऊपर पंक्ति के $(\text{बाँ}.6)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.6)^2 =$

नीचे पंक्ति के $(\text{बाँ}.6)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.6)^2$

2• ऊपर पंक्ति के $(\text{बाँ}.10)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.10)^2 =$

नीचे पंक्ति के $(\text{बाँ}.10)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.10)^2$

3• ऊपर पंक्ति के $(\text{बाँ}.14)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.14)^2 =$

नीचे पंक्ति के $(\text{बाँ}.14)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.14)^2$

4• ऊपर पंक्ति के $(\text{बाँ}.18)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.18)^2 =$

नीचे पंक्ति के $(\text{बाँ}.18)^2 + (\text{बाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.2)^2 + (\text{दाँ}.18)^2$

**[B] मध्य बाया एवं दाया स्तम्भ से**

1• बाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}6)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}6)^2 =$

दाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}6)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}6)^2$

2• बाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}10)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}10)^2 =$

दाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}10)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}10)^2$

3• बाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}14)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}14)^2 =$

दाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}14)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}14)^2$

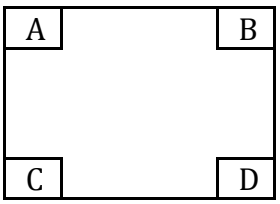
4• बाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}18)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}18)^2 =$

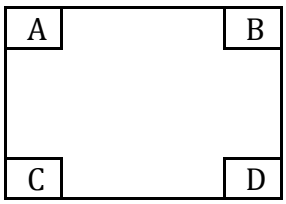
दाया स्तम्भ के $(\text{ऊ}18)^2 + (\text{ऊ}.2)^2 + (\text{नी}.2)^2 + (\text{नी}18)^2$

10-6 रंगीन जादुई–वर्ग रचना विधि–

**[1] चार द्वारा विभाजित एवं अविभाजित दोनों प्रकार के आधार–वर्ग के अन्तःनिष्ठ वर्गों के विकर्णिक शीर्ष अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण का उभयनिष्ठ नियम–**

आधार–वर्ग के अन्तःनिष्ठ वर्गो के तिर्यक शीर्ष अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग में संगत अन्तःनिष्ठ वर्गो में यथावत दर्ज करते हैं।

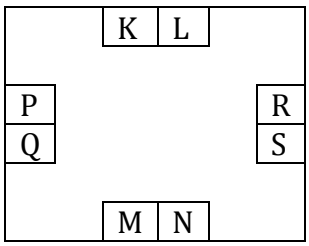


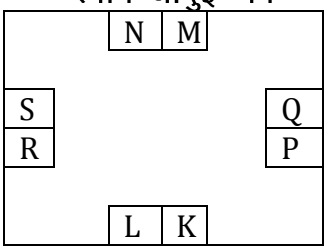

**[2] केवल और केवल 4*4 रंगीन जादुई–वर्ग के रचना के प्रति रचना प्रक्रम**

आधार–वर्ग के अन्तः निष्ठ–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के नीचे मध्य स्तम्भ युग्म में तथा आधार–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग में नीचे मध्य स्तम्भ युग्म में तथा आधार–वर्ग के अन्तः निष्ठ–वर्ग के ऊपर मध्य पंक्ति युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के नीचे मध्य स्तम्भ युग्म में तथा आधार–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग में नीचे मध्य स्तम्भ युग्म में क्रम स्थान अदली–बदली अर्थात तिर्यक [×] रूप में स्थानान्तरित कीजिये। संकेतन निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

**आधार–वर्ग**




**रगीन जादुई–वर्ग**




**उदाहरण**

**आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

**रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

**रंगीन जादुई–वर्ग में अवयव के वर्गों का योग गुण समिका –**

1• **अन्तःनिष्ठ– वर्ग 4*4 से**

a **पंक्ति परिधि से** उच्च पंक्ति परिधि से $1^2 + 15^2 + 14^2 + 4^2 = 438$

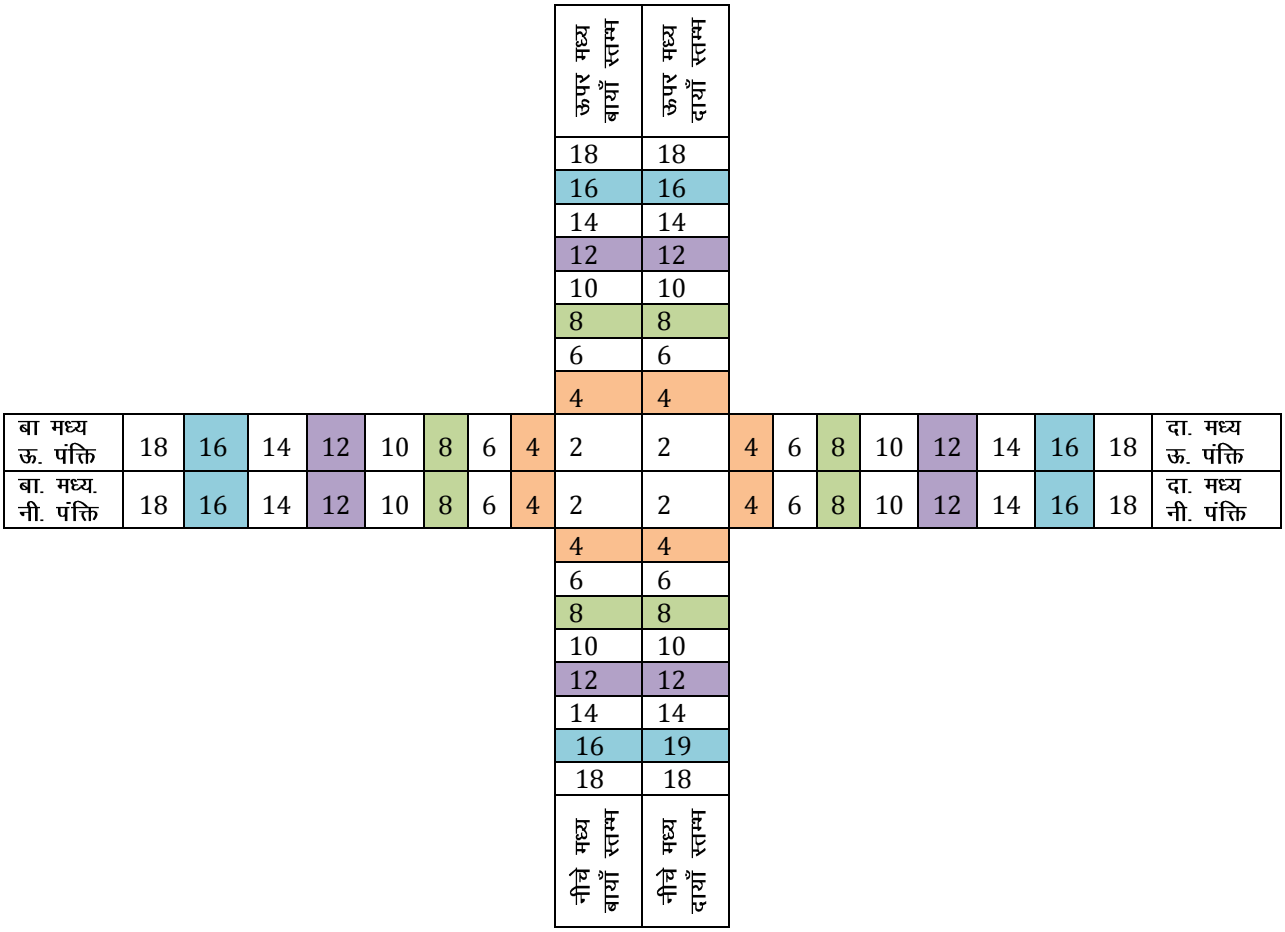
निम्न पंक्ति परिधि से $13^2 + 3^2 + 2^2 + 16^2 = 438$

b स्तम्भ परिधि से बायाँ स्तम्भ परिधि से $1^2 + 12^2 + 8^2 + 13^2 = 378$

दायाँ पंक्ति परिधि से $4^2 + 9^2 + 5^2 + 16^2 = 378$

**[3] 4*4 से बड़े सम*सम के प्रति रंगीन जादुई–वर्ग रचना प्रक्रम**

4*4 से बड़े सम*सम रंगीन जादुई–वर्ग रचना नियमों की व्याख्या 4द्वारा विभाजित एवं 4 द्वारा अविभाजित आधार–वर्ग में स्थित अन्तःनिष्ठ–वर्गों जो 4 द्वारा विभाजित एवं 4 द्वारा अविभाजित दोनों प्रकार के होंगे के अवयवों को दृष्टिगत करते हुए संगत रंगीन जादुई वर्ग में स्थित संगत अन्तःनिष्ठ–वर्गों में ही स्थानान्तरित करने अलग–अलग विश्लेषित होगे। इन विश्लेषण प्रक्रमों में उभयनिष्ठ नियम भी प्राप्त होंते




हैं। अतः उभयनिष्ठ नियमों को सुविधा के दृष्टि से यथा बिन्दु शीर्षक के अन्तर्गत स्पष्ट करना यथेष्ठ होगा। क्रमशः प्रस्तुत है–

**प्रक्रम 1• आधार–वर्ग के अन्तःनिष्ठ वर्गों के शीर्ष अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण का उभयनिष्ठ नियम–** उपरोक्त नियम [A] में उल्लेख किया चुका है।

**प्रक्रम 2• आधार–वर्ग के अन्तःनिष्ठ वर्गों के मध्य स्तम्भ युग्म एवं मध्य पंक्ति युग्म के अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण का नियम–**

उपरोक्त आकृति में रंग धारित स्तम्भ युग्म एवं पंक्ति युग्म 4 द्वारा विभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग के क्रमशः मध्य स्तम्भ एवं पंक्ति युग्म है तथा कोरे (रंगहीन) स्तम्भ युग्म एवं पंक्ति युग्म 4 द्वारा अविभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग के क्रमशः मध्य स्तम्भ युग्म एवं पंक्ति युग्म है। दृष्टिगत करते हुए निम्नानुसार रचना के नियम विश्लेषित होंगे।

**[4A] 4 द्वारा विभाजित 4x*4x** के आधार–वर्ग के 4 द्वारा विभाजित **प्रथम सबसे बड़े दो** अन्तःनिष्ठ–वर्ग (4x*4x) **एवं** (4x-4)*(4x-4)]वाँ युगमीय अवयवों का संगत जादुई–कर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ में स्थानान्तण नियम–

**एवं**

**[4B] 4 द्वारा अविभाजित (4x+2)*(4x+2)** के आधार–वर्ग के **4 द्वारा विभाजित केवल और केवल** प्रथम सबसे बड (4x)*(4x)]वाँ युगमीय अवयवों का संगत जादुई–कर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ में स्थानान्तण नियम–

**[a]** आधार–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के नीचे यथा स्तम्भ में तथा नीचे मध्य स्तम्भ युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म में उल्टे दिशा ( बायाँ का दायाँ तथा दायाँ का बायाँ) में स्थानान्तरित कर दर्ज कीजियें।

**[b]** आधार–वर्ग के दाँया मध्य पंक्ति युग्म अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के बाँये यथा पंक्ति में तथा बाँया पंक्ति युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के दाँये मध्य पंक्ति युग्म में उल्टे दिशा ( ऊपर का नीचे तथा नीचे का ) में स्थानान्तरित कर दर्ज कीजियें।

आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | K | L | |
| P | | | R |
| Q | | | S |
| | M | N | |

रगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | N | M | |
| R | | | Q |
| S | | | P |
| | K | L | |

**[4C]** **[4A]** एवं **[4B]** के उपरांत **शेष सभी 4 द्वारा विभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग के प्रति–**

**[a]** आधार–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के नीचे तथा नीचे मध्य स्तम्भ युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के ऊपर मध्य स्तम्भ युग्म में यथा संगत स्तम्भ में दर्ज कीजिये ।

**[b]** आधार–वर्ग के दाँया मध्य पंक्ति युग्म अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के बाँये तथा यथा पंक्ति में तथा बाँया पंक्ति युग्म के अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग के दाँये मध्य पंक्ति युग्म में यथा संगत पंकित में दर्ज कीजिये।

आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | K | L | |
| P | | | R |
| Q | | | S |
| | M | N | |

रगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | M | N | |
| R | | | P |
| S | | | Q |
| | K | L | |

**[4D] 4 द्वारा विभाजित एवं अविभाजित सम*सम आधार–वर्ग के 4 द्वारा अविभाजित अन्तःनिष्ठ–वर्ग के अवयवों का संगत रंगीन जादुई–वर्ग के संगत अन्तःनिष्ठ–वर्ग में स्थानान्तरण–**

[a] आधार–वर्ग के ऊपर–नीचे दोनों मध्य स्तम्भ युग्म के बायाँ स्तम्भ अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग कें संगत स्तम्भ युग्म के ही दायाँ स्तम्भ में तथा दायाँ स्तम्भ के ऊपर–नीचे अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के बायाँ स्तम्भ में उलट नीचे–ऊपर में स्थानान्तरित कर दर्जकीजिये ।

[b] आधार–वर्ग के बाँया–दाँया दोनों मध्य पंक्ति युग्म के ऊपर स्तम्भ अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के संगत पंक्ति युग्म के ही नीचेपंक्ति में तथा नीचे पंक्ति के बाँया–दाँया अवयव को रंगीन जादुई–वर्ग के ऊपर पंक्ति में उलट दाँया–बाँया में स्थानान्तरित कर दर्ज कीजिये ।

आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | K | L | |
| P | | | R |
| Q | | | S |
| | M | N | |

रगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| | N | K | |
| S | | | Q |
| P | | | R |
| | L | M | |

**[5] रंगीन जादुई–वर्ग रचना हेतू आधार–वर्ग के शीर्ष मध्य स्तम्भ युग्म तथा मध्य पंक्ति युग्म के अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग मे स्थानान्तरित कर दर्ज करने उपरांत आधार–वर्ग के शेष अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग मे स्थानान्तरण–**

उपरोक्त [1],[3],[4] और [5] में दिए रचना प्रक्रमों के द्वारा रंगीन जादुई–वर्ग रचना हेतू आधार–वर्ग के विकर्णिक शीर्ष मध्य स्तम्भ युग्म तथा मध्य पंक्ति युग्म के अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग मे स्थानान्तरित कर दर्ज करने उपरांत आधार–वर्ग के शेष अवयवों का रंगीन जादुई–वर्ग मे स्थानान्तरण नियम प्रक्रम अधो दर्शित वर्ग आकृति का अवलोकित करना यथेश्ठ होगा। जिसमें उपरोक्तानुसार दर्ज अवयवों के प्रति रंगदान किया गया है।

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 |
| 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | | | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | | | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | | | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | | | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 | 2 |
| 1 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | | 1 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |

**(1) आधार–वर्ग के विषम स्थानिक अवयवों को जादुई–वर्ग में भरना या दर्ज करना–:**

**[a] ऊपर एवं नीचे पंक्ति परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर तथा दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

**ऊपर पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – A दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – B

**नीचे पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – C दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – D

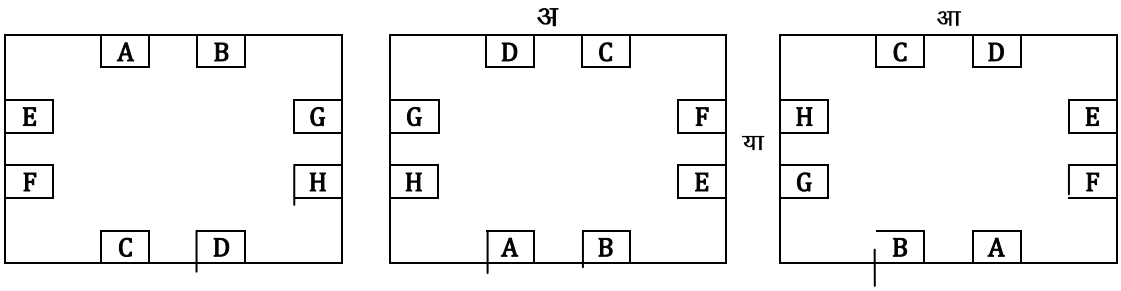
**[b] बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के ऊपर से दाएँ मध्य पंक्ति की ओर तथा नीचे से मध्य पंक्ति की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव – **बाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – E नीचे से मध्य पंक्ति की ओर –F

**दाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव** –

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – G नीचे से मध्य पंक्ति की ओर – H

के प्रति जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण संकेत –यथा दर्ज होगा।




**(2) आधार–वर्ग के सम स्थानिक अवयवों को जादुई–वर्ग में भरना या दर्ज करना–:**

**[a] ऊपर एवं नीचे पंक्ति परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर तथा दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

**ऊपर पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – K दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – L

**नीचे पंक्ति परिधि के अवयव** –

बाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – M दाएँ से मध्य स्तम्भ की ओर – N

**[b] बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ परिधि से** – यदि आधार–वर्ग के किसी अन्तःनिष्ठ वर्ग के परिधि के ऊपर से दाएँ मध्य पंक्ति की ओर तथा नीचे से मध्य पंक्ति की ओर प्रत्येक दिशा में समान दूरी पर स्थित स्तम्भ अवयव –

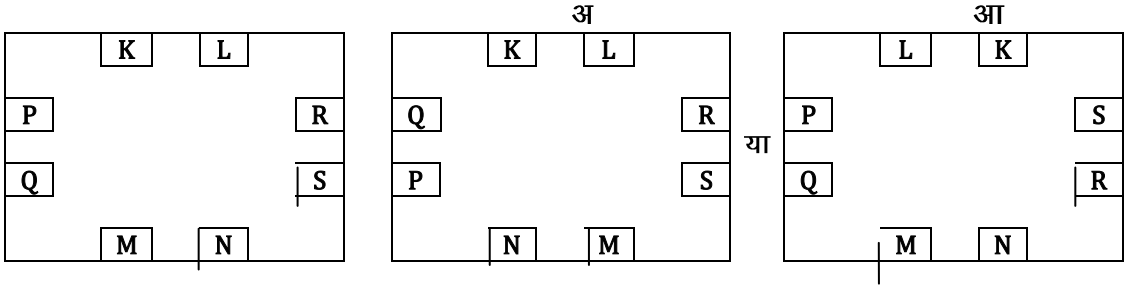
**बाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव –**

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – P नीचे से मध्य पंक्ति की ओर –Q

**दाएँ स्तम्भ परिधि के अवयव –**

ऊपर से मध्य पंक्ति की ओर – R नीचे से मध्य पंक्ति की ओर – S

के प्रति जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण संकेत –यथा दर्ज होगा।




**ध्यान विशेष**– आधार–वर्ग के अवयवों का जादुई–वर्ग में स्थानान्तरण के 2 तरीके (अ) और (आ) सुझाए गए है। इनमें कोई भी एक तरीका (अ) अथवा (आ) से प्रारंभ कर अंत करें।

## प्रस्तुति 10-7 सम *सम (2N)*(2N) रंगीन जादुई–वर्ग के प्रस्तुति संख्या हेतु आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या–

**प्रक्रम 1•** [2N] के सभी यथार्थ भाजक प्राप्त कीजिये।

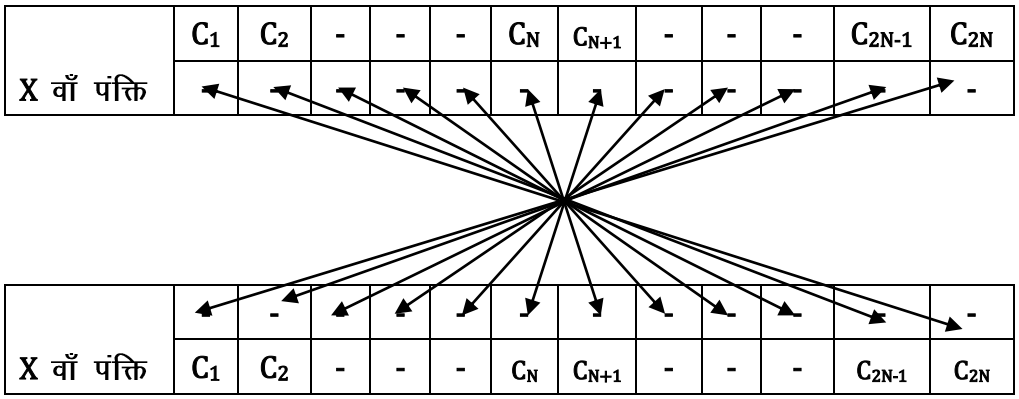
**प्रक्रम 2•** रचना के लिए सामान्य $[2N]^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी जिसका सर्वान्तर d है, के अवयवों द्वारा अथवा व्यापकता में यदि [2N] के किसी यथार्थ भाजक k के द्वारा [2N] को विभाजित करने पर [(2N)÷k= r] भागफल r प्राप्त हो तो r×(2N) पदी अलग–अलग k प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी के अवयव (संख्यात्मक या बीजीय) का चयन प्रतिबंधानुसार करते हैं।अवयवों को क्रमषः बढ़ते क्रम में पंक्तिवार बाएँ से दाएँ दर्ज करने पर यथार्थ भाजक 1 के लिए आधार–वर्ग की प्रथम प्रस्तुति मानी जानी चाहिए,।

**प्रक्रम 3•** किसी यथार्थ भाजक k के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की रचना के लिए यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों को प्रथम पंक्ति के प्रथम अवयव से बाएँ से दाएँ होते हुए अन्तिम पंक्ति के अन्तिम अवयव तक (1 से $[2N]^2$ तक) सरल क्रमांक मन ही मन दो । इस प्रकार दिये सरल क्रमांक 1 के अवयव को यथार्थ भाजक k के प्रति प्रथम अवयव दर्ज कीजिये। आगे के अवयव सुनिश्चित करने k के पदान्तर क्रमांको वाले अवयव चुनते हुए $\frac{(2N)^2}{k}$ क्रमांक तक दर्ज करें जो प्रथम $\frac{2N}{K}$ पंक्ति तक दर्ज होगा। सरल क्रमांक 2 के अवयव को ( $\frac{2N}{K}$+1) क्रमांक अवयव सुनिश्चित कीजिये।तदन्तर पूर्वानुसार आगे k के पदान्तर क्रमांको वाले अवयव चुनते हुए $\frac{2*(2N)^2}{k}$ क्रमांक तक दर्ज करें। जो द्वितीय $\frac{2N}{K}$ पंक्ति तक दर्ज होगा। इसी प्रकार सरल क्रमांक 3,4,5------(k-1) के अवयवों को क्रमशः (2* $\frac{2N}{K}$+1), (3* $\frac{2N}{K}$+1)---------- {(k-1) $\frac{2N}{K}$+1} क्रमांक अवयव सुनिश्चित कीजिये। तदन्तर पूर्वानुसार आगे k के पदान्तर क्रमांको वाले अवयव चुनते हुए यथार्थ भाजक k के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की रचना पूरा करते है। जिसका पंक्तिवार अवयव k ×d के सर्वान्तर पर समान्तर श्रेढ़ी में एवं अलग–अलग $\frac{2N}{K}$ पंक्ति के लिए स्तम्भवार अवयव k*d*[2N], के सर्वान्तर पर होंगें ।

**प्रक्रम4•** इस प्रकार यथार्थ भाजक k के लिए रचित प्रथम आधार–वर्ग के ऊपर–नीचे पंक्ति परिधि से समान दूरी पर स्थित पंक्तियुग्म के अवयव एवं बायाँ–दायाँ स्तम्भ परिधि से समान दूरी पर स्थित स्तम्भ युग्म के अवयव को अलग–अलग स्तर पर स्थिर रखकर आधार–वर्ग की विविध आयामों प्रकारो में रचना प्ररूतुति प्राप्त कर सकते है। इस हेतू व्याख्या निम्नानुसार है।

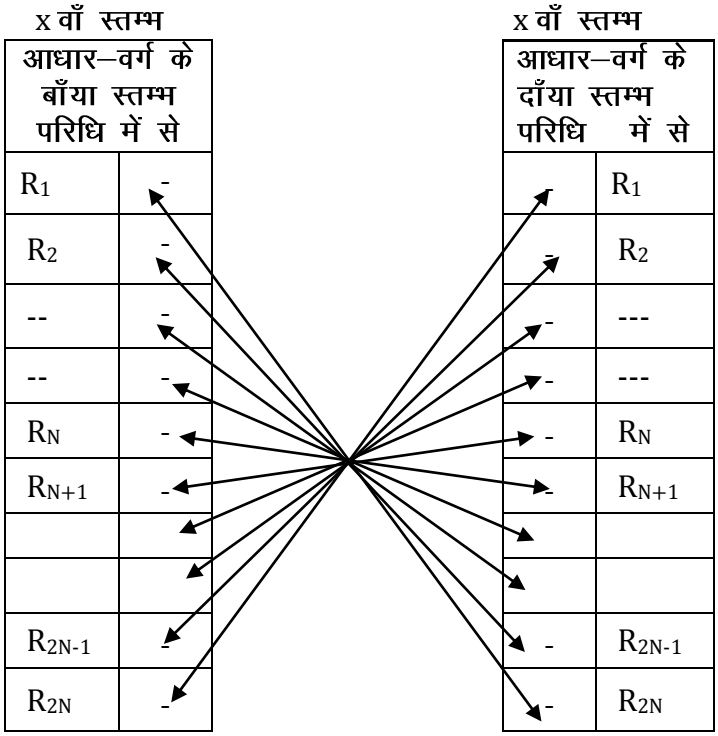
**व्याख्या 1•** 2N पंक्ति के N युग्म बनेंगे। तब सम्मुख पंक्ति परिधि से समान दूरी 2N पंक्ति को ऊपर N पंक्ति और नीचे पर स्थित युग्म (उ.पं$_1$–नी.पं$_1$), (उ.पं$_2$–नीपं$_2$), (उ.पं$_3$–नी.पं$_3$) – – – – (उ.प$_{छ}$–नी.प$_{छ}$) के स्तम्भिक प्रत्येक उर्ध्व तिर्यक युग्मीय अवयव का योग प्रथम एवं अःन्त पद मानों का योगमान होता है। आकृति अवलोकित करे।

आधार–वर्ग के ऊपर पंक्ति परिधि में से




आधार–वर्ग के नीचे पंक्ति परिधि में से

**व्याख्या 2•** 2N स्तम्भ के N युग्म बनेंगे। तब सम्मुख स्तम्भ परिधि से समान दूरी पर स्थित युग्म (बा.स्त$_1$–दा स्त$_1$), (बा.स्त$_2$–दा.स्त$_2$), (बा.स्त$_3$–दा.स्त$_3$ ) – – – –(बा.स्त$_द$–दा.स्त$_द$) के पंक्तिक क्षैतिज तिर्यक युग्मीय अवयव का योग प्रथम एवं अःन्त पद मानों का योगमान का N गुना होता है। आकृति अवलोकित करे।




एक उदाहरण 2, 4, 6, - - - - [$(2N)^2 = (2*4)^2 = 8^2 = 64$ पद तक - - - 124. 128, का 8 के यथार्थ भाजक 1, 2, 4 और 8 के प्रति अलग–अलग प्रथम आधार–वर्ग एवं उनके संगत रंगीन जादुई–वर्ग की रचना प्रस्तुति अवलाकित करते हैं।

**यथाथ भाजक 1 के प्रति प्रथम**

आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 |
| 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 |
| 66 | 68 | 70 | 72 | 74 | 76 | 78 | 80 |
| 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 |
| 98 | 100 | 102 | 104 | 106 | 108 | 110 | 112 |
| 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 |

से

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 126 | 6 | 122 | 120 | 12 | 116 | 16 |
| 32 | 20 | 108 | 106 | 24 | 102 | 30 | 98 |
| 82 | 46 | 38 | 90 | 88 | 44 | 84 | 48 |
| 64 | 78 | 60 | 56 | 58 | 70 | 68 | 66 |
| 80 | 52 | 76 | 72 | 74 | 54 | 62 | 50 |
| 34 | 94 | 86 | 40 | 42 | 92 | 36 | 96 |
| 112 | 100 | 22 | 26 | 104 | 28 | 110 | 18 |
| 114 | 4 | 124 | 8 | 10 | 118 | 14 | 128 |

**यथार्थ भाजक 2 के लिए प्रथम**

आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 |
| 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 |
| 66 | 70 | 74 | 78 | 82 | 86 | 90 | 94 |
| 98 | 102 | 106 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
| 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 | 64 |
| 68 | 72 | 76 | 80 | 84 | 88 | 92 | 96 |
| 100 | 104 | 108 | 112 | 116 | 120 | 124 | 128 |

से

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 124 | 10 | 116 | 112 | 22 | 114 | 30 |
| 62 | 38 | 88 | 84 | 46 | 76 | 58 | 68 |
| 36 | 90 | 74 | 52 | 48 | 86 | 40 | 94 |
| 126 | 28 | 118 | 110 | 114 | 12 | 68 | 4 |
| 32 | 102 | 24 | 16 | 20 | 106 | 62 | 98 |
| 66 | 60 | 44 | 78 | 82 | 56 | 56 | 64 |
| 96 | 72 | 42 | 50 | 80 | 54 | | 40 |
| 100 | 6 | 120 | 14 | 18 | 108 | 16 | 128 |

**रंगीन जादुई–वर्गयथार्थ भाजक 4 के लिए प्रथम**

आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 10 | 18 | 26 | 34 | 42 | 50 | 58 |
| 66 | 74 | 82 | 90 | 98 | 106 | 114 | 122 |
| 4 | 12 | 20 | 28 | 36 | 44 | 52 | 60 |
| 68 | 76 | 84 | 92 | 100 | 108 | 116 | 124 |
| 6 | 14 | 22 | 30 | 38 | 46 | 54 | 62 |
| 70 | 78 | 86 | 94 | 102 | 110 | 118 | 126 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 |
| 72 | 80 | 88 | 96 | 104 | 112 | 120 | 128 |

से

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 120 | 18 | 104 | 96 | 42 | 80 | 58 |
| 122 | 74 | 48 | 40 | 90 | 24 | 114 | 8 |
| 70 | 52 | 20 | 102 | 94 | 44 | 78 | 60 |
| 124 | 54 | 108 | 92 | 100 | 22 | 14 | 6 |
| 62 | 76 | 46 | 30 | 38 | 84 | 116 | 68 |
| 4 | 118 | 86 | 28 | 36 | 110 | 12 | 126 |
| 54 | 16 | 82 | 98 | 32 | | 56 | 76 |
| 72 | 10 | 112 | 26 | 34 | 88 | 50 | 128 |

**यथार्थ भाजक 8 के लिए प्रथम**

आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 18 | 34 | 50 | 66 | 82 | 98 | 114 |
| 4 | 20 | 36 | 52 | 68 | 84 | 100 | 116 |
| 6 | 22 | 38 | 54 | 70 | 86 | 102 | 118 |
| 8 | 24 | 40 | 56 | 72 | 88 | 104 | 120 |
| 10 | 26 | 42 | 58 | 74 | 90 | 106 | 122 |
| 12 | 28 | 44 | 60 | 76 | 92 | 108 | 124 |
| 14 | 30 | 46 | 62 | 78 | 94 | 110 | 126 |
| 16 | 32 | 48 | 64 | 80 | 96 | 112 | 128 |

से

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 112 | 34 | 80 | 64 | 82 | 32 | 116 |
| 116 | 20 | 94 | 78 | 52 | 46 | 100 | 14 |
| 12 | 102 | 38 | 76 | 60 | 86 | 28 | 118 |
| 120 | 104 | 88 | 56 | 72 | 42 | 26 | 10 |
| 122 | 24 | 90 | 58 | 74 | 40 | 106 | 8 |
| 6 | 108 | 44 | 54 | 70 | 92 | 22 | 124 |
| 126 | 30 | 36 | 68 | 62 | 84 | 110 | 4 |
| 16 | 18 | 96 | 50 | 66 | 48 | 98 | 128 |

**प्रक्रम5• [A1]** इस प्रकार प्रत्येक यथार्थ भाजक के लिए प्रथम आधार–वर्ग सुनिष्चित कर इसके मध्य पंक्ति के अवयवों को यथावत खाने (सेल) में ही रखते हुए इस मध्य पंक्ति के समान्तर ऊपर एवं नीचे पंक्ति युग्मों $[R_1—R_{2N}], [R_2—R_{2N-1}]$---------

$[R_N—R_{N+1}]$ अर्थात वे युग्म जिनके सरल क्रमांक योग $[2N+1]$ होगा, के युग्मीय प्रतिबंध पर कुल $[(2N)(2^N)]=N*2^{N+1}$ तरह से स्थानान्तरित कर सकते है। अधो सांकेतिक प्रस्तुति का अवलोकन करें।

**4*4 का रंगीन जादुई–वर्ग की विविध प्रकारों की प्रस्तुति हेतू आधार–वर्ग की रचना संकेतन–**

| रचना | प्रकार1 | प्रकार.2 | प्रकार.3 | प्रकार.4 | प्रकार.5 | प्रकार.6 | प्रकार.7 | प्रकार.8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | R1 | R1 | R2 | R2 | R3 | R3 | R4 | R4 |
| | R2 | R3 | R1 | R4 | R1 | R4 | R2 | R3 |
| | R3 | R2 | R4 | R1 | R4 | R1 | R3 | R2 |
| | R4 | R4 | R3 | R3 | R2 | R2 | R1 | R1 |

**प्रक्रम5• [A2]** उपरोक्त रचना (प्रकार.1 से प्रकार.8 तक) प्रकारों को स्तम्भिक दिशा परिवर्तन ( बाएँ से दाएँ को दाएँ से बाएँ) देकर पुनः $[(2N)(2^N)]=N*2^{N+1}$ प्रकार की रचना प्रस्तुति दे सकते हैं।

**प्रक्रम5• [B1]** इस प्रकार प्रत्येक यथार्थ भाजक के लिए प्रथम आधार–वर्ग सुनिष्चित कर इसके मध्य स्तम्भ के अवयवों को यथावत खाने (सेल) में ही रखते हुए इस मध्य स्तम्भ के समान्तर बाएँ एवं दाएँ स्तम्भ युग्मों $[C_1—C_{2N}]$, $[C_2—C_{2N\ -1}]$ --------$[C_N—C_{N+1}]$ जिनके सरल क्रमांक योग $[2N+1]$ होगा, के युग्मीय प्रतिबंध पर कुल $[(2N)(2^N)] = N*2^{N+1}$ तरह से स्थानान्तरित कर सकते है। अधो सांकेतिक प्रस्तुति का अवलोकन करें।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **प्रकार-1** | C1 | C2 | C3 | C4 |
| **प्रकार-2** | C1 | C3 | C2 | C4 |
| **प्रकार-3** | C2 | C1 | C4 | C3 |
| **प्रकार-4** | C2 | C4 | C1 | C3 |
| **प्रकार-5** | C3 | C1 | C4 | C2 |
| **प्रकार-6** | C3 | C4 | C1 | C2 |
| **प्रकार-7** | C4 | C2 | C3 | C1 |
| **प्रकार-8** | C4 | C3 | C2 | C1 |

**प्रक्रम5• [B2]** उपरोक्त रचना (प्रकार.1 से प्रकार.8 तक) प्रकारों को पंक्तिक दिशा परिवर्तन ( नीचे से ऊपर को ऊपर से नीचे) देकर पुनः $!N*2^N$ प्रकार की रचना प्रस्तुति दे सकते हैं।

इस प्रकार किसी यथार्थ भाजक के प्रति प्राप्त आधार–वर्ग के कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या $=$

$!N*2^N + !N*2^N + !N*2^N + !N*2^N = 4*!N*2^N$ होंगे, जिसमें 4 प्रकार की रचना प्रस्तूति दुहराई गई होंगी।

अतः किसी यथार्थ भाजक के प्रति प्राप्त आधार–वर्गों की वास्तविक संख्या$= 4*!N*2^N - 4$

$= 4(!N*2^N - 1)$ होगा।

पुनः यदि $[2N]$ के कुल यथार्थ भाजको की संख्या $= m$ होने के प्रति–

**प्राप्त समस्त आधार–वर्गों की कुल संख्या** $= 4m(!N*2^N - 1)$ होगा।

**[2N] *[2N] के रंगीन जादुई–वर्गों के प्रकारों की संख्या–**

रंगीन जादुई–वर्ग की संख्या = आधार वर्ग की संख्या ––से

**[1]** किसी यथार्थ भाजक के प्रति प्राप्त जादुई–वर्गों की वास्तविक संख्या$= 4*!N*2^N - 4 = 4[(!N*2^N) - 1)]$

[2] $[2N]$ के कुल यथार्थ भाजको की संख्या $= m$ होने के प्रति–

प्राप्त समस्त जादुई–वर्गों की कुल संख्या $= 4m[\ (!N * 2^N) - 1]$ होगा।

**N= 2x से 4 द्वारा विभाजित सम*सम [4x*4x] की कुल प्रस्तुति संख्या**

$4x$ के किसी यथार्थ भाजकों की संख्या $m$ के प्रति आधार वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या =रंगीन जादुई–वर्ग के प्रकारो की कुल संख्या $=4m[!x*2^{2x+1} - 1]$ होगा।

**N= 2x+1 से 4 द्वारा अविभाजित सम'सम [{2(2x+1)}*{2(2x+1)}]= [(4x+2)*(4x+2)] की कुल प्रस्तुति संख्या –**

$(4x+2)$ के समस्त यथार्थ भाजकों की संख्या $m$ के प्रति आधार वर्ग के प्रकारों की कुलसंख्या =रंगीन जादुई–वर्ग के प्रकारो की कुलसंख्या $=4m[!(2x+1)*2^{2x+1} - 1]$ होगा।

**उदाहरण■** 8 पदी दो समान्तर श्रेढ़ी (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) और (97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104) के अवयवों द्वारा 4 के यथार्थ भाजक (1, 2 तथा 4) की कुल संख्या 3 पर 4*4 का रंगीन–वर्ग रचना हेतू आधार–वर्ग एवं संगत रगीन जादुई–वर्ग पंक्तिक, स्तम्भिक 4- 4एवं विकर्णिक 4- 4 अवयवो का योगमान $2(1+104) = 210$ होगा, के प्रति सम्पूर्ण प्रस्तुति संख्या 84 अवलोकित करे

**यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रस्तुतियाँ–**

**[A] पंक्ति युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग**

**[1] ***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |

**[2]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |

**[3]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |

**[4]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 97 | 6 | 7 | 103 |
| 2 | 98 | 99 | 8 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 2 | 7 | 6 | 8 |

**[5]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |

**[6]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |

**[7]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

**[8]****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 102 | 103 | 104 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |

[B] A से प्राप्त 1 से 8 तक के अवयवों को स्तम्भिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर–

**[9] *****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |

**[10]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |

**[11]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |

**[12]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |

**[13]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |

**[14]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |

**[15]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

**[16]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 6 | 98 | 99 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 6 | 98 | 99 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| | 7 | 6 | 100 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |

## [C] स्तम्भिक युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग

**[17]***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 |

**[18]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 4 |
| 5 | 7 | 6 | 8 |
| 97 | 99 | 98 | 100 |
| 101 | 103 | 102 | 104 |

**[19]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 6 | 5 | 8 | 7 |
| 98 | 97 | 100 | 99 |
| 102 | 101 | 104 | 103 |

**[20]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 1 | 3 |
| 6 | 8 | 5 | 7 |
| 98 | 100 | 97 | 99 |
| 102 | 104 | 101 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 103 | 102 | 4 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 101 | 3 | 2 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 102 | 103 | 4 |
| 100 | 7 | 6 | 97 |
| 8 | 99 | 98 | 5 |
| 101 | 2 | 3 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 104 | 101 | 3 |
| 99 | 5 | 8 | 98 |
| 7 | 97 | 100 | 6 |
| 102 | 4 | 1 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 101 | 104 | 3 |
| 99 | 8 | 5 | 98 |
| 7 | 100 | 97 | 6 |
| 102 | 1 | 4 | 103 |

**[21]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 4 | 2 |
| 7 | 5 | 8 | 6 |
| 99 | 97 | 100 | 98 |
| 103 | 101 | 104 | 102 |

**[22]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 7 | 8 | 5 | 6 |
| 99 | 100 | 97 | 98 |
| 103 | 104 | 101 | 102 |

**[23]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | 3 | 1 |
| 8 | 6 | 7 | 5 |
| 100 | 98 | 99 | 97 |
| 104 | 102 | 103 | 101 |

**[24]****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 104 | 103 | 102 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 104 | 101 | 2 |
| 98 | 5 | 8 | 99 |
| 6 | 97 | 100 | 2 |
| 103 | 4 | 1 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 101 | 104 | 2 |
| 98 | 8 | 5 | 99 |
| 5 | 100 | 97 | 7 |
| 103 | 1 | 4 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 104 | 101 | 3 |
| 97 | 6 | 7 | 100 |
| 5 | 98 | 99 | 8 |
| 102 | 4 | 1 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 102 | 103 | 1 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 104 | 2 | 3 | 101 |

## [D] C से प्राप्त 17 से 24 तक के अवयवों को पंक्तिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर–

**[25]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 192 | 103 | 104 |
| 97 | 98 | 99 | 100 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

**[26]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 193 | 102 | 104 |
| 97 | 99 | 98 | 100 |
| 5 | 7 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |

**[27]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 101 | 104 | 103 |
| 98 | 97 | 100 | 99 |
| 5 | 7 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |

**[28]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 104 | 101 | 103 |
| 98 | 100 | 97 | 99 |
| 5 | 7 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 2 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 3 | 2 | 104 |
| 8 | 98 | 99 | 5 |
| 100 | 6 | 7 | 97 |
| 1 | 103 | 102 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 2 | 3 | 104 |
| 8 | 99 | 98 | 5 |
| 100 | 7 | 6 | 97 |
| 1 | 102 | 103 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1o2 | 4 | 1 | 103 |
| 7 | 97 | 100 | 6 |
| 99 | 5 | 8 | 98 |
| 2 | 104 | 101 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 1 | 4 | 103 |
| 7 | 100 | 97 | 6 |
| 99 | 8 | 5 | 98 |
| 2 | 101 | 104 | 3 |

**[29]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 101 | 104 | 102 |
| 99 | 97 | 100 | 98 |
| 7 | 5 | 8 | 6 |
| 3 | 1 | 4 | 2 |

**[30]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 104 | 101 | 102 |
| 99 | 100 | 97 | 98 |
| 7 | 8 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |

**[31]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 102 | 103 | 101 |
| 100 | 98 | 99 | 97 |
| 8 | 6 | 7 | 5 |
| 4 | 2 | 3 | 1 |

**[32]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 103 | 102 | 101 |
| 100 | 99 | 98 | 97 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 4 | 1 | 102 |
| 6 | 97 | 100 | 7 |
| 98 | 5 | 8 | 99 |
| 3 | 104 | 101 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 1 | 4 | 102 |
| 6 | 100 | 97 | 7 |
| 98 | 8 | 5 | 99 |
| 3 | 101 | 104 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 3 | 2 | 101 |
| 5 | 98 | 99 | 8 |
| 97 | 6 | 7 | 100 |
| 4 | 103 | 102 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 2 | 3 | 101 |
| 5 | 99 | 98 | 8 |
| 97 | 7 | 6 | 100 |
| 4 | 102 | 103 | 1 |

## यथार्थ भाजक 2 के प्रति प्रस्तुतियाँ–

### [A] पंक्ति युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग

**[1] ***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |

**[2]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |

**[3]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |

**[4]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 1o3 | 4 | 6 | 97 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 104 | 3 | 5 | 98 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 104 | 3 | 5 | 98 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |

**[5]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |

**[6]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |

**[7]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |

**[8]****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 104 | 3 | 8 | 98 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 104 | 3 | 6 | 98 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |

### [B] A से प्राप्त 1 से 8 तक के अवयवों को स्तम्भिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर

**[9]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |

**[10]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |

**[11]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |

**[12]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 97 | 6 | 4 | 100 |
| 104 | 3 | 5 | 98 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 100 | 102 | 1 |
| 97 | 6 | 4 | 100 |
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 104 | 3 | 5 | 98 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 4 | 5 | 97 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 4 | 5 | 97 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |

**[13]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |

**[14]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |

**[15]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |

**[16]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 1 | 102 | 199 | 7 |
| 98 | 5 | 397 | 104 |
| 103 | 4 | 6 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 3 | 5 | 98 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 3 | 5 | 98 |
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |

## [C] स्तम्भिक युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग

**[17]***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 98 | 100 | 102 | 104 |

**[18]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 3 | 7 |
| 97 | 101 | 99 | 103 |
| 2 | 6 | 4 | 8 |
| 98 | 102 | 100 | 104 |

**[19]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 7 | 5 |
| 99 | 97 | 103 | 101 |
| 4 | 2 | 8 | 6 |
| 100 | 98 | 104 | 102 |

**[20]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 1 | 5 |
| 99 | 103 | 97 | 101 |
| 4 | 8 | 2 | 6 |
| 100 | 104 | 98 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 102 | 100 | 7 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |
| 98 | 5 | 3 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 102 | 7 |
| 8 | 101 | 99 | 2 |
| 103 | 6 | 4 | 97 |
| 98 | 3 | 5 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 104 | 98 | 5 |
| 6 | 97 | 103 | 4 |
| 101 | 2 | 8 | 99 |
| 100 | 7 | 1 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 98 | 104 | 5 |
| 6 | 103 | 97 | 4 |
| 101 | 8 | 2 | 99 |
| 100 | 1 | 7 | 102 |

**[21]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 7 | 3 |
| 101 | 97 | 103 | 99 |
| 6 | 2 | 8 | 4 |
| 102 | 98 | 104 | 100 |

**[22]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 7 | 1 | 3 |
| 101 | 103 | 97 | 99 |
| 6 | 8 | 2 | 4 |
| 102 | 104 | 98 | 100 |

**[23]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 3 | 5 | 1 |
| 103 | 99 | 101 | 97 |
| 8 | 4 | 6 | 2 |
| 104 | 100 | 102 | 98 |

**[24]****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 104 | 102 | 100 | 98 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 104 | 98 | 3 |
| 4 | 97 | 103 | 6 |
| 99 | 2 | 8 | 101 |
| 102 | 7 | 1 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 98 | 104 | 3 |
| 4 | 103 | 97 | 6 |
| 99 | 8 | 2 | 101 |
| 102 | 1 | 7 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 102 | 100 | 1 |
| 2 | 99 | 101 | 8 |
| 97 | 4 | 6 | 103 |
| 104 | 5 | 3 | 98 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 102 | 100 | 1 |
| 2 | 101 | 99 | 5 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |
| 104 | 3 | 5 | 98 |

## [D] C से प्राप्त 17 से 24 तक के अवयवों को पंक्तिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर–

**[25]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 100 | 102 | 104 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 97 | 99 | 101 | 103 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |

**[26]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 102 | 100 | 104 |
| 2 | 6 | 4 | 8 |
| 97 | 101 | 99 | 103 |
| 1 | 5 | 3 | 7 |

**[27]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 98 | 104 | 102 |
| 4 | 2 | 8 | 6 |
| 99 | 97 | 103 | 101 |
| 3 | 1 | 7 | 5 |

**[28]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 104 | 98 | 102 |
| 4 | 8 | 2 | 6 |
| 99 | 103 | 97 | 101 |
| 3 | 7 | 1 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 5 | 3 | 104 |
| 103 | 4 | 6 | 97 |
| 8 | 99 | 101 | 2 |
| 1 | 102 | 100 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 98 | 3 | 5 | 104 |
| 103 | 6 | 4 | 97 |
| 8 | 101 | 99 | 2 |
| 1 | 100 | 102 | 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 7 | 1 | 102 |
| 101 | 2 | 8 | 99 |
| 6 | 97 | 103 | 4 |
| 3 | 104 | 98 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 1 | 7 | 102 |
| 101 | 8 | 2 | 99 |
| 6 | 103 | 97 | 4 |
| 3 | 98 | 104 | 5 |

**[29]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 98 | 104 | 100 |
| 6 | 2 | 8 | 4 |
| 101 | 97 | 103 | 99 |
| 5 | 1 | 7 | 3 |

**[30]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 104 | 98 | 100 |
| 6 | 8 | 2 | 4 |
| 101 | 103 | 97 | 99 |
| 5 | 7 | 1 | 3 |

**[31]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 100 | 102 | 98 |
| 8 | 4 | 6 | 2 |
| 103 | 99 | 101 | 97 |
| 7 | 3 | 5 | 1 |

**[32]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 102 | 100 | 98 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 103 | 101 | 99 | 97 |
| 7 | 5 | 3 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 7 | 1 | 100 |
| 99 | 2 | 8 | 101 |
| 4 | 97 | 103 | 6 |
| 5 | 104 | 98 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 1 | 7 | 100 |
| 99 | 8 | 2 | 101 |
| 4 | 103 | 97 | 6 |
| 5 | 98 | 104 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 5 | 3 | 98 |
| 97 | 4 | 6 | 103 |
| 2 | 99 | 101 | 8 |
| 9 | 102 | 100 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 3 | 5 | 98 |
| 97 | 6 | 4 | 103 |
| 2 | 101 | 99 | 8 |
| 7 | 100 | 102 | 1 |

**यथार्थ भाजक 4 के प्रति प्रस्तुतिया–**

**[A] पंक्ति युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग**

**[1] ***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |

**[2]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |

**[3]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |

**[4]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 3 | 98 | 6 | 103 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 3 | 98 | 6 | 103 |

**[5]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |

**[6]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |

**[7]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |

**[8]****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 98 | 6 | 103 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 98 | 5 | 101 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 102 | 6 | 98 | 3 |
| 103 | 7 | 99 | 2 |
| 5 | 199 | 8 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |

**[B] A से प्राप्त 1 से 8 तक के अवयवों को स्तम्भिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर**

**[9]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |

**[10]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |

**[11]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |

**[12]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 3 | 98 | 6 | 99 |
| 2 | 99 | 7 | 98 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 3 | 99 | 7 | 102 |
| 2 | 98 | 6 | 103 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |

**[13]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |

**[14]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |

**[15]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |

**[16]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1o4 | 5 | 97 | 4 |
| 3 | 98 | 6 | 109 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 3 | 98 | 6 | 103 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |

## [C] स्तम्भिक युग्मों के स्थानान्तरण से आधार–वर्ग सह जादुई –वर्ग

**[17]***

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 97 | 101 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 4 | 8 | 100 | 104 |

**[18]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 97 | 5 | 101 |
| 2 | 98 | 6 | 102 |
| 3 | 99 | 7 | 103 |
| 4 | 100 | 8 | 104 |

**[19]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 101 | 97 |
| 6 | 2 | 102 | 98 |
| 7 | 3 | 103 | 99 |
| 8 | 4 | 104 | 100 |

**[20]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 101 | 1 | 97 |
| 6 | 102 | 2 | 98 |
| 7 | 103 | 3 | 99 |
| 8 | 104 | 4 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 100 | 8 | 101 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 4 | 97 | 5 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 100 | 101 |
| 103 | 98 | 6 | 3 |
| 102 | 99 | 7 | 2 |
| 4 | 5 | 97 | 104 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 104 | 4 | 97 |
| 99 | 2 | 102 | 7 |
| 98 | 3 | 103 | 6 |
| 8 | 101 | 1 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 4 | 104 | 97 |
| 99 | 102 | 2 | 7 |
| 98 | 103 | 3 | 6 |
| 8 | 1 | 101 | 100 |

**[21]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 1 | 101 | 5 |
| 98 | 2 | 102 | 6 |
| 99 | 3 | 103 | 7 |
| 100 | 4 | 104 | 8 |

**[22]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 101 | 1 | 5 |
| 98 | 102 | 2 | 6 |
| 99 | 103 | 3 | 7 |
| 100 | 104 | 4 | 8 |

**[23]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 5 | 97 | 1 |
| 102 | 6 | 98 | 2 |
| 103 | 7 | 99 | 3 |
| 104 | 8 | 100 | 4 |

**[24]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 97 | 5 | 1 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 104 | 100 | 8 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 104 | 4 | 5 |
| 7 | 2 | 102 | 99 |
| 6 | 3 | 103 | 98 |
| 100 | 101 | 1 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 97 | 4 | 104 | 5 |
| 7 | 102 | 2 | 99 |
| 6 | 103 | 3 | 98 |
| 100 | 1 | 101 | 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 100 | 8 | 1 |
| 3 | 6 | 98 | 103 |
| 2 | 7 | 99 | 102 |
| 104 | 97 | 5 | 4 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 101 | 8 | 100 | 1 |
| 3 | 98 | 6 | 103 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 104 | 5 | 97 | 4 |

## [D] C से प्राप्त 17 से 24 तक के अवयवों को पंक्तिक दिशा में उलटकर दर्ज करने पर

**[25]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 100 | 104 |
| 3 | 7 | 99 | 103 |
| 2 | 6 | 98 | 102 |
| 1 | 5 | 97 | 101 |

**[26]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 100 | 8 | 104 |
| 3 | 99 | 7 | 103 |
| 2 | 98 | 6 | 102 |
| 1 | 97 | 5 | 101 |

**[27]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 4 | 104 | 100 |
| 7 | 3 | 103 | 99 |
| 6 | 2 | 102 | 98 |
| 5 | 1 | 101 | 97 |

**[28]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 104 | 4 | 100 |
| 7 | 103 | 3 | 99 |
| 6 | 102 | 2 | 98 |
| 5 | 101 | 1 | 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 97 | 5 | 104 |
| 102 | 7 | 99 | 2 |
| 103 | 6 | 98 | 3 |
| 1 | 100 | 8 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 | 97 | 104 |
| 102 | 99 | 7 | 2 |
| 103 | 98 | 6 | 3 |
| 1 | 8 | 100 | 101 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 101 | 1 | 100 |
| 98 | 3 | 103 | 6 |
| 99 | 2 | 102 | 7 |
| 5 | 104 | 4 | 97 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 1 | 101 | 100 |
| 98 | 103 | 3 | 6 |
| 99 | 102 | 2 | 7 |
| 5 | 4 | 104 | 97 |

**[29]*****

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 4 | 104 | 8 |
| 99 | 3 | 103 | 7 |
| 98 | 2 | 102 | 6 |
| 97 | 1 | 101 | 5 |

**[30]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 104 | 4 | 8 |
| 99 | 103 | 3 | 7 |
| 98 | 102 | 2 | 6 |
| 97 | 101 | 1 | 5 |

**[31]**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 8 | 100 | 4 |
| 103 | 7 | 99 | 3 |
| 102 | 6 | 98 | 2 |
| 101 | 5 | 97 | 1 |

**[32]******

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 100 | 8 | 4 |
| 103 | 99 | 7 | 3 |
| 102 | 98 | 6 | 2 |
| 101 | 97 | 5 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 101 | 1 | 8 |
| 7 | 3 | 103 | 98 |
| 6 | 2 | 102 | 98 |
| 97 | 104 | 4 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 | 1 | 101 | 8 |
| 6 | 103 | 3 | 98 |
| 798 | 102 | 2 | 99 |
| 97 | 4 | 104 | 5 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 97 | 6 | 4 |
| 2 | 7 | 99 | 102 |
| 3 | 6 | 98 | 103 |
| 101 | 100 | 8 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 104 | 5 | 97 | 4 |
| 2 | 99 | 7 | 102 |
| 3 | 98 | 6 | 103 |
| 101 | 8 | 100 | 1 |

उपरोक्त 4*4 के प्रति प्राप्त 4 के यथार्थ भाजक 1,2और 4 पर अलग–अलग क्रमांक 1 से 32 तक आधार–वर्ग एवं आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुत है, जिनमें ( 1 और 17), ( 8 और 24 ), ( 9 और 25) एवं ( 16 और 32) परस्पर यथावत् दोहराए गए हैं।

अतः समस्त यथार्थ (1,2और 5) पर वास्तविक कुल प्रस्तुति संख्या $= (32-4)+(32-4)+(32-4)$

$= 28+28+28 \quad 84$ ---------(1)

**समिका** $2N*2N = 4*4 = (2*2)*(2*2)$ से $N=2$ ]

$2N=4$ के कुल यथार्थ भाजको (1,2 और 4) की संख्या $m=3$ होने के प्रति

समस्त रंगीन जादुई–वर्ग की संख्या = समस्तआधार वर्ग की संख्या $= 4m(!N * 2^N - 1)$

$= 4 * 3(!2 * 2^2 - 1)$

$= 12(8-1) = 12 * 7 = 84$ होगा।

**अथवा** **4 द्वारा विभाजित सम*सम [4x*4x] की कुल प्रस्तुति संख्या**

4x के किसी यथार्थ भाजकों की संख्या m के प्रति आधार वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या =रंगीन जादुई–वर्ग के प्रकारो की कुल संख्या $=4m[!x*2^{2x+1} - 1]$ होगा।

छत्र 2ग से 4 द्वारा विभाजित सम'सम [4*4] की कुल प्रस्तुति संख्या के प्रति $x=1$ 4 के कुल यथार्थ भाजको (1,2 और 4) की संख्या $m=3$ प्रतिस्थापित करने पर

आधार वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या =रंगीन जादुई–वर्ग के प्रकारो की कुल संख्या $=4*3[!1*2^{2*1+1} - 1]$

$=12[1*2^3 - 1]$

$=12[8-1] = 12*7 = 84$ होगा।

## 10-8 सम*सम रंगीन जादुई–वर्ग में अवयवों के वर्गों का योग समिका नियम–

**उदाहरण 1■** 12 के यथार्थ–भाजक 3 पर 144 पदी समान्तर श्रेढ़ी [1, 2, 3, ---------142, 143, 144] का 12*12 का प्रथम आधार–वर्ग रंगीन जादुई–वर्ग व्यवस्थित कर जादुई–वर्ग में प्रत्येक अन्तःनिश्ठ–वर्ग में व्यवस्थित रंगधारित अवयवों और मध्य पंक्ति युग्म एवं मध्य स्तम्भ युग्म मे उन अवयवों का जो रंगधारित नहीं है के वर्गों का योग समिका नियमानुसार दर्षाइए।

**हल–**

अधोदर्शित 12*12 का रंगीन जादुई–वर्ग के प्रत्येक अन्तःनिष्ठ–वर्ग के पंक्ति परिधि एवं स्तम्भ परिधि के रंग–धारित अवयवों के वर्गों का योग समिका प्रतिबंधानुसार प्राप्त कर नीचे दिए उत्तर तालिका से जाँच करें।

| क्रमांक | अन्तःनिष्ठ–वर्ग | ऊपर पंक्ति परिधि के अवयवों के वर्गों का योग = नीचे पंक्ति परिधि के अवयवों के वर्गों का योग= | बायाँ स्तम्भ परिधि के अवयवों के वर्गों का योग = दायाँ स्तम्भपरिधि के अवयवों के वर्गों का योग = |
|---|---|---|---|
| 1 | 12*12 | 100662 | 85790 |
| 2 | 10*10 | 45676 | 56258 |
| 3 | 8*8 | 44740 | 55608 |
| 4 | 6*6 | 32414 | 32700 |
| 5 | 4*4 | 32734 | 26586 |

**यथार्थ भाजक 3 पर 12*12 का प्रथम आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 |
| 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 | 58 | 61 | 64 | 67 | 70 |
| 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 | 103 | 106 |
| 109 | 112 | 115 | 118 | 121 | 124 | 127 | 130 | 133 | 136 | 139 | 142 |
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 |
| 38 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 | 65 | 68 | 71 |
| 74 | 77 | 80 | 83 | 86 | 89 | 92 | 95 | 98 | 101 | 104 | 107 |
| 110 | 113 | 116 | 119 | 122 | 125 | 128 | 131 | 134 | 137 | 140 | 143 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 |
| 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 | 72 |
| 75 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | 93 | 96 | 99 | 102 | 105 | 108 |
| 111 | 114 | 117 | 120 | 123 | 126 | 129 | 132 | 135 | 138 | 141 | 144 |

**यथार्थ भाजक 3 पर 12*12 का प्रथम आधार–वर्ग के संगत जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 141 | 7 | 135 | 13 | 129 | 126 | 22 | 120 | 28 | 114 | 34 |
| 70 | 40 | 102 | 46 | 96 | 93 | 52 | 87 | 61 | 81 | 67 | 75 |
| 39 | 103 | 79 | 63 | 85 | 57 | 54 | 94 | 48 | 100 | 42 | 106 |
| 142 | 6 | 136 | 118 | 24 | 21 | 124 | 15 | 133 | 9 | 139 | 3 |
| 110 | 32 | 116 | 26 | 14 | 125 | 128 | 23 | 29 | 29 | 113 | 35 |
| 71 | 104 | 65 | 98 | 59 | 53 | 56 | 50 | 83 | 80 | 77 | 74 |
| 107 | 41 | 101 | 47 | 95 | 89 | 92 | 86 | 62 | 44 | 68 | 38 |
| 2 | 140 | 8 | 134 | 122 | 17 | 20 | 131 | 11 | 137 | 5 | 143 |
| 36 | 112 | 30 | 12 | 121 | 127 | 18 | 130 | 27 | 115 | 33 | 109 |
| 73 | 69 | 45 | 82 | 60 | 88 | 91 | 51 | 97 | 66 | 76 | 72 |
| 108 | 78 | 43 | 99 | 49 | 55 | 90 | 58 | 84 | 64 | 105 | 37 |
| 111 | 4 | 138 | 10 | 132 | 16 | 19 | 123 | 25 | 117 | 31 | 144 |

**[A] मध्य ऊपर एवं नीचे पंक्ति से**

**1•** ऊपर पंक्ति के $\{(\text{बा.}6)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}6)^2\} =$

नीचे पंक्ति के $\{(\text{बा.}6)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}6)^2\}$ से

$$98^2 + 53^2 + 56^2 + 83^2 = 47^2 + 89^2 + 92^2 + 62^2 = 22438$$

**2•** ऊपर पंक्ति के $\{(\text{बा.}10)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}10)^2\} =$

नीचे पंक्ति के $\{(\text{बा.}10)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}10)^2\}$

$$104^2 + 53^2 + 56^2 + 77^2 = 41^2 + 89^2 + 92^2 + 68^2 = 22690$$

**[B] मध्य बायाँ एवं दायाँ स्तम्भ से**

**1•** बायाँ स्तम्भ के $\{(\text{ऊ.}6)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}6)^2\} =$

दायाँ स्तम्भ के$\{(\text{ऊ.}6)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}6)^2\}$

$$21^2 + 53^2 + 89^2 + 127^2 = 124^2 + 56^2 + 92^2 + 18^2 = 27300$$

**2•** बायाँ स्तम्भ के $\{(\text{ऊ.}10)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}10)^2\} =$

दायाँ स्तम्भ के $\{(\text{ऊ.}10)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}10)^2\}$

$$93^2 + 53^2 + 89^2 + 55^2 = 52^2 + 56^2 + 92^2 + 90^2 = 22404$$

**उदाहरण 2■** 14 के यथार्थ–भाजक 7 पर 196 पदी समान्तर श्रेढ़ी [1, 2, 3, ----------194, 195, 196] का 14*14 का प्रथम आधार–वर्ग रंगीन जादुई–वर्ग व्यवस्थित कर जादुई–वर्ग में प्रत्येक अन्तःनिश्ठ–वर्ग के में व्यवस्थित रंगधारित अवयवों और मध्य पंक्ति युग्म एवं मध्य स्तम्भ युग्म मे उन अवयवों का जो रंगधारित नहीं है के वर्गों का योग समिका नियमानुसार दर्षाइए।

**हल** अधोदर्शित 14*14 का रंगीन जादुई–वर्ग के प्रत्येक अन्तःनिश्ठ–वर्ग के पंक्तिपरिधि एवं स्तम्भ परिधि के रंग–धारित अवयवों के वर्गों का योग समिका प्रतिबंधानुसार प्राप्त कर नीचे दिए उत्तर तालिका से जाँच करें।

| क्रमांक | अन्तःनिष्ठ–वर्ग | ऊपर पंक्ति परिधि के अवयवों के वर्गों का योग = नीचे पंक्ति परिधि के अवयवों के वर्गों का योग= | बायाँ स्तम्भपरिधि के अवयवों के वर्गों का योग = दायाँ स्तम्भपरिधि के अवयवों के वर्गों का योग = |
|---|---|---|---|
| 1 | 14*14 | 159998 | 170138 |
| 2 | 12*12 | 148826 | 162476 |
| 3 | 10*10 | 102444 | 104784 |
| 4 | 8*8 | 97348 | 101248 |
| 5 | 6*6 | 49642 | 49642 |
| 6 | 4*4 | 48270 | 48660 |

**[A] मध्य ऊपर एवं नीचे पंक्ति से**

**1•** ऊपर पंक्ति के $\{(\text{बा.}6)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}6)^2\} =$

नीचे पंक्ति के $\{(\text{बा.}6)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}6)^2\}$ से

$$165^2 + 46^2 + 53^2 + 130^2 = 32^2 + 144^2 + 151^2 + 67^2 = 49050$$

**2•** ऊपर पंक्ति के $\{(\text{बा.}10)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}10)^2\} =$

नीचे पंक्ति के $\{(\text{बा.}10)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}10)^2\}$

$$179^2 + 46^2 + 53^2 + 116^2 = 18^2 + 144^2 + 151^2 + 81^2 = 50422$$

**3•** ऊपर पंक्ति के $\{(\text{बा.}14)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}14)^2\} =$

नीचे पंक्ति के $\{(\text{बा.}14)^2 + (\text{बा.}2)^2 + (\text{दा.}2)^2 + (\text{दा.}14)^2\}$

**[B] मध्य बायाँ एवं दायाँ स्तम्भ से**

**1•** बायाँ स्तम्भ के $\{(\text{ऊ.}6)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}6)^2\} =$

दायाँ स्तम्भ के$\{(\text{ऊ.}6)^2 + (\text{ऊ..}2)^2 + (\text{नी..}2)^2 + (\text{नी...}6)^2\}$

$$152^2 + 46^2 + 144^2 + 52^2 = 45^2 + 53^2 + 151^2 + 145^2 = 48660$$

2• बायाँ स्तम्भ के $\{(ऊ.10)^2 + (ऊ..2)^2 + (नी..2)^2 + (नी...10)^2\} =$

दायाँ स्तम्भ के $\{(ऊ.10)^2 + (ऊ..2)^2 + (नी..2)^2 + (नी...10)^2\}$

$$153^2 + 46^2 + 144^2 + 51^2 = 44^2 + 53^2 + 144^2 + 146^2 = 48862$$

3• बायाँ स्तम्भ के $\{(ऊ.14)^2 + (ऊ..2)^2 + (नी..2)^2 + (नी...14)^2\} =$

दायाँ स्तम्भ के $\{(ऊ.14)^2 + (ऊ..2)^2 + (नी..2)^2 + (नी...14)^2\}$

$$154^2 + 46^2 + 144^2 + 50^2 = 43^2 + 53^2 + 144^2 + 147^2 = 49068$$

**यथार्थ भाजक 7 पर 14*14 का प्रथम आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 15 | 22 | 29 | 36 | 43 | 50 | 57 | 64 | 71 | 78 | 85 | 92 |
| 99 | 106 | 113 | 120 | 127 | 134 | 141 | 148 | 155 | 162 | 169 | 176 | 183 | 190 |
| 2 | 9 | 16 | 23 | 30 | 37 | 44 | 51 | 58 | 65 | 72 | 79 | 86 | 93 |
| 100 | 107 | 114 | 121 | 128 | 135 | 142 | 149 | 156 | 163 | 170 | 177 | 184 | 191 |
| 3 | 10 | 17 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | 59 | 66 | 73 | 80 | 87 | 94 |
| 101 | 108 | 115 | 122 | 129 | 136 | 143 | 150 | 157 | 164 | 171 | 178 | 185 | 192 |
| 4 | 11 | 18 | 25 | 32 | 39 | 46 | 53 | 60 | 67 | 74 | 81 | 88 | 95 |
| 102 | 109 | 116 | 123 | 130 | 137 | 144 | 151 | 158 | 165 | 172 | 179 | 186 | 193 |
| 5 | 12 | 19 | 26 | 33 | 40 | 47 | 54 | 61 | 68 | 75 | 82 | 89 | 96 |
| 103 | 110 | 117 | 124 | 131 | 138 | 145 | 152 | 159 | 166 | 173 | 180 | 187 | 194 |
| 6 | 13 | 20 | 27 | 34 | 41 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 97 |
| 104 | 111 | 118 | 125 | 132 | 139 | 146 | 153 | 160 | 167 | 174 | 181 | 188 | 195 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 | 77 | 84 | 91 | 98 |
| 105 | 112 | 119 | 126 | 133 | 140 | 147 | 154 | 161 | 168 | 175 | 182 | 189 | 196 |

**यथार्थ भाजक 7 पर 14*14 का प्रथम आधार–वर्ग के संगत जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 189 | 15 | 175 | 29 | 161 | 154 | 43 | 140 | 64 | 126 | 78 | 112 | 92 |
| 190 | 106 | 84 | 120 | 70 | 134 | 56 | 49 | 155 | 35 | 169 | 21 | 183 | 7 |
| 104 | 86 | 16 | 174 | 30 | 160 | 153 | 44 | 139 | 65 | 125 | 79 | 111 | 93 |
| 191 | 13 | 177 | 121 | 69 | 135 | 48 | 55 | 156 | 34 | 170 | 20 | 184 | 6 |
| 103 | 87 | 117 | 73 | 31 | 159 | 152 | 45 | 138 | 66 | 124 | 80 | 110 | 94 |
| 192 | 12 | 178 | 26 | 164 | 136 | 47 | 54 | 157 | 33 | 171 | 19 | 185 | 5 |
| 193 | 88 | 179 | 74 | 165 | 60 | 46 | 53 | 39 | 130 | 25 | 116 | 109 | 102 |
| 4 | 186 | 18 | 172 | 32 | 158 | 144 | 151 | 137 | 67 | 123 | 81 | 11 | 95 |
| 96 | 108 | 82 | 122 | 68 | 40 | 143 | 150 | 61 | 129 | 75 | 115 | 89 | 101 |
| 3 | 187 | 17 | 173 | 131 | 38 | 52 | 145 | 59 | 166 | 24 | 180 | 10 | 194 |
| 97 | 107 | 83 | 27 | 128 | 62 | 142 | 149 | 41 | 163 | 76 | 114 | 90 | 100 |
| 2 | 188 | 118 | 23 | 167 | 37 | 51 | 146 | 58 | 132 | 72 | 181 | 9 | 195 |
| 98 | 14 | 113 | 77 | 127 | 63 | 141 | 148 | 42 | 162 | 28 | 176 | 91 | 99 |
| 105 | 8 | 182 | 22 | 168 | 36 | 50 | 147 | 57 | 133 | 71 | 119 | 85 | 196 |

**2-9 व्यापकता [A]** किसी N*N जादुई–वर्ग रचना के प्रति प्रयुक्त $\frac{N^2}{k} = q$ पदी k प्रकार की समांतर श्रेढ़ी समूह का प्रथम आधार–वर्ग रचना क्रम में प्रत्येक समांतर श्रेढ़ी के पूरे $q - q$ अवयव $\frac{N}{k} = m$ पंक्ति मान दर्ज होते हुये क्रमशः श्रेढ़ीवार $(c_1 r_1$ से $c_N r_m$ तक), $(c_1 r_{m*1}$ से $c_N r_{2m}$ तक), $(c_1 r_{2m+1}$ से $c_N r_{3m}$ तक),---------- $(c_1 r_{(N-3m)+1}$ से $c_N r_{(N-2m)}$ तक), $(c_1 r_{(N-2m)*1}$ से $c_N r_{(n-m)}$ तक), $(c_1 r_{(N-m)+1}$ से $c_N r_N$ तक), दर्ज होंगे। व्यापक दृष्टि में k प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी के अवयव (संख्यात्मक या बीजीय) का चयन निम्न प्रतिबंध के अन्तर्गत करते हैं।

**प्रतिबंध 1•** सभी । प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी का एक उभयनिश्ट सर्वान्तर होगां।

**2•** सभी समानतर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद (प्रथम–प्रथम), (द्वितीय–द्वितीय), (तृतीय–तृतीय) – – – – –(αवाँ–αवाँ)– – – –(q वाँ– qवाँ) से अलग–अलग कुल q प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी बनेंगे, जिनका भी एक उभयनिष्ठ सर्वान्तर होगां।

टीप **[a]** प्रतिबंध 1और 2 के सर्वान्तर बराबर या अलग–अलग हो सकते हैं।

[b] दुहराए, तिहराए – – अवयव भी दृश्टिगत होंगे।

[c] प्रथम आधार–वर्ग की रचना प्रतिबंध 1 के समान्तर श्रेढ़ी को पंक्तिवार अथवा स्तम्भवार अवयवों को घटते या बढ़ते क्रम मे इस तरह दर्ज करते है कि उलट स्तम्भवार अथवा पंक्तिवार यथा धटते या बढ़ते क्रम में हो।

[d] इस प्रकार प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की सहायता से ऊपर 10-6 के अनुसार ही और भी आधार–वर्ग के प्रकारो को विकसित कर जादुई–वर्ग के प्रकारो को यथा नियम विकसित कर यकते हैं। उदाहरणार्थ प्रस्तुति अवलोकित करे।

**(व्यापकता में 9*9 का प्रथम आधार–वर्ग)** दोहराए गए अवयव के खाने रंग दिए है।

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 |
| 50 | 52 | 54 | 56 | 58 | 60 | 62 | 64 | 66 |
| 66 | 68 | 70 | 72 | 76 | 78 | 78 | 80 | 82 |
| 82 | 84 | 86 | 88 | 90 | 92 | 94 | 96 | 98 |
| 98 | 100 | 102 | 104 | 106 | 108 | 110 | 112 | 114 |
| 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 | 126 | 128 | 130 |
| 130 | 132 | 134 | 136 | 138 | 140 | 142 | 144 | |

**(व्यापकता में 9*9 का प्रथम जादुई–वर्ग)**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 86 | 106 | 126 | 146 | 4 | 24 | 44 | 64 | |
| 84 | 104 | 124 | 144 | 2 | 22 | 42 | 62 | 82 | 84 |
| 102 | 122 | 142 | 18 | 20 | 40 | 60 | 80 | 82 | 102 |
| 120 | 140 | 16 | 18 | 38 | 58 | 78 | 98 | 100 | 120 |
| 138 | 14 | 34 | 36 | 56 | 76 | 96 | 98 | 118 | 138 |
| 12 | 32 | 34 | 54 | 74 | 94 | 114 | 116 | 136 | 12 |
| 30 | 50 | 52 | 72 | 92 | 112 | 114 | 134 | 10 | 30 |
| 48 | 50 | 70 | 90 | 110 | 130 | 132 | 8 | 28 | 48 |
| 66 | 68 | 88 | 108 | 128 | 130 | 6 | 26 | 46 | 66 |
| 66 | 86 | 106 | 126 | 146 | 4 | 24 | 44 | 64 | |

आड़ी, खड़ी, एवं विकर्णिक 9-9 खानों के अवयवों का योग = 666 है । स्वयं जाँच करे ।

उदाहरण 9 के यथार्थ भाजक k= 3 से $r = 9 \div 3 = 3$ तब $r*9 = 27$ पदी 3 [k=3] समान्तर श्रेढ़ी के अवयव शर्तानुसार चयन द्वारा (झण्डा विधि) से सरल जादुई–वर्ग रचना।

**आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 |
| 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 |
| 56 | 59 | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 | 77 | 80 |
| 80 | 83 | 86 | 89 | 92 | 95 | 98 | 101 | 104 |
| 107 | 110 | 113 | 116 | 119 | 122 | 125 | 128 | 131 |
| 134 | 137 | 140 | 143 | 146 | 149 | 152 | 155 | 158 |
| 158 | 161 | 164 | 167 | 170 | 173 | 176 | 179 | 182 |
| 185 | 188 | 191 | 194 | 197 | 200 | 203 | 206 | 209 |
| 212 | 215 | 218 | 221 | 224 | 227 | 230 | 233 | 236 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 140 | 170 | 203 | 236 | 5 | 38 | 71 | 101 | |
| 137 | 167 | 200 | 233 | 2 | 35 | 68 | 98 | 131 | 137 |
| 164 | 197 | 230 | 26 | 32 | 65 | 95 | 128 | 134 | 164 |
| 194 | 227 | 23 | 29 | 62 | 92 | 125 | 158 | 161 | 194 |
| 224 | 20 | 53 | 59 | 89 | 122 | 155 | 158 | 191 | 224 |
| 17 | 50 | 56 | 86 | 119 | 152 | 182 | 188 | 221 | 17 |
| 47 | 80 | 83 | 116 | 149 | 179 | 185 | 218 | 14 | 47 |
| 77 | 80 | 113 | 146 | 176 | 209 | 215 | 11 | 44 | 77 |
| 104 | 110 | 143 | 173 | 206 | 212 | 8 | 41 | 74 | 104 |
| 107 | 140 | 170 | 203 | 236 | 5 | 38 | 71 | 101 | |

**उदाहरण** 15 के एक यथार्थ भाजक k = 3 से r = 15 ÷3 = 5 तब प्रतिबंधानुसार r*[2n+1] =5*15 = 75पदी अलग–अलग k= 3 प्रकार की समान्तर श्रेढ़ी [2, 5,----- 221, 224] , [224, 227----- 443, 446] और [446, 449------- 665,668] के अवयवों द्वारा 15*15 का प्रथम आधार–वर्ग एवं इसके संगत रंगीन जादुई–वर्ग अवलोकनार्थ प्रस्तुत है।

**15*15 का आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 |
| 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 | 77 | 80 | 83 | 86 | 89 |
| 92 | 95 | 98 | 101 | 104 | 107 | 110 | 113 | 116 | 119 | 122 | 125 | 128 | 131 | 134 |
| 137 | 140 | 143 | 146 | 149 | 152 | 155 | 158 | 161 | 164 | 167 | 170 | 173 | 176 | 179 |
| 182 | 185 | 188 | 191 | 194 | 197 | 200 | 203 | 206 | 209 | 212 | 215 | 218 | 221 | *224* |
| *224* | 227 | 230 | 233 | 236 | 239 | 242 | 245 | 248 | 251 | 254 | 257 | 260 | 263 | 266 |
| 269 | 272 | 275 | 278 | 281 | 284 | 287 | 290 | 293 | 296 | 299 | 302 | 305 | 308 | 311 |
| 314 | 317 | 320 | 323 | 326 | 329 | 332 | 335 | 338 | 341 | 344 | 347 | 350 | 353 | 356 |
| 359 | 362 | 365 | 368 | 371 | 374 | 377 | 380 | 383 | 386 | 389 | 392 | 395 | 398 | 401 |
| 404 | 407 | 410 | 413 | 416 | 419 | 422 | 425 | 428 | 431 | 434 | 437 | 440 | 443 | *446* |
| *446* | 449 | 269 | 455 | 458 | 461 | 464 | 467 | 470 | 473 | 476 | 479 | 482 | 485 | 488 |
| 491 | 494 | 497 | 500 | 503 | 506 | 509 | 512 | 515 | 518 | 521 | 524 | 527 | 530 | 533 |
| 536 | 539 | 542 | 545 | 548 | 551 | 554 | 557 | 560 | 563 | 566 | 569 | 572 | 575 | 578 |
| 581 | 584 | 587 | 590 | 593 | 596 | 599 | 602 | 605 | 608 | 611 | 614 | 617 | 620 | 623 |
| 626 | 629 | 632 | 635 | 638 | 641 | 644 | 647 | 650 | 653 | 656 | 659 | 662 | 665 | 668 |

**15*15 का रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 647 | 665 | 8 | 659 | 14 | 653 | 20 | 2 | 26 | 641 | 32 | 635 | 38 | 629 | 356 |
| 89 | 68 | 617 | 56 | 611 | 62 | 605 | 50 | 599 | 74 | 593 | 80 | 587 | 353 | 681 |
| 536 | 131 | 557 | 569 | 104 | 563 | 110 | 98 | 116 | 551 | 122 | 545 | 350 | 539 | 134 |
| 179 | 494 | 173 | 158 | 521 | 152 | 515 | 146 | 509 | 164 | 503 | 347 | 493 | 176 | 491 |
| *446* | 221 | 462 | 215 | 467 | 473 | 200 | 194 | 206 | 461 | 344 | 455 | 218 | 449 | *224* |
| 266 | 407 | 260 | 413 | 254 | 245 | 428 | 239 | 422 | 341 | 416 | 257 | 410 | 263 | 404 |
| 359 | 308 | 365 | 302 | 371 | 296 | 380 | 287 | 338 | 374 | 299 | 368 | 305 | 368 | 311 |
| 44 | 584 | 128 | 500 | 212 | 419 | 293 | 335 | 377 | 251 | 458 | 170 | 542 | 86 | 626 |
| 269 | 398 | 305 | 392 | 281 | 386 | 332 | 383 | 290 | 284 | 389 | 278 | 395 | 272 | 401 |
| *446* | 227 | 440 | 233 | 434 | 329 | 242 | 431 | 248 | 425 | 236 | 437 | 230 | 443 | *224* |
| 182 | 485 | 188 | 479 | 326 | 197 | 470 | 476 | 464 | 209 | 203 | 191 | 482 | 185 | 488 |
| 533 | 140 | 527 | 323 | 149 | 518 | 155 | 524 | 161 | 506 | 167 | 512 | 143 | 530 | 137 |
| 92 | 575 | 320 | 101 | 566 | 107 | 560 | 572 | 554 | 119 | 548 | 125 | 113 | 95 | 578 |
| 623 | 317 | 53 | 614 | 59 | 608 | 65 | 620 | 71 | 596 | 87 | 590 | 83 | 602 | 47 |
| 314 | 5 | 662 | 11 | 656 | 17 | 650 | 668 | 644 | 29 | 638 | 35 | 632 | 41 | 23 |

उदाहरण स्वरूप 6*6 का रंगीन जादुई–वर्ग रचना हेतू 6 पदी ɑसमान्तर श्रेढ़ी [1 , 3, 5, 7, 9 , 11], [11, 13, 15, 17, 19, 21], [21, 23, 25, 27, 29,31], [31, 33, 35, 37, 39, 41], [41, 43, 45, 47, 49,5i] और [51, 53, 55, 57, 59, 61] को चुनकर 6 के यथार्थ 1, 2, 3 और 6 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग के संगत रंगीन जादुई–वर्ग की रचना अवलाकित करें।

**यथार्थ–भाजक 1के प्रति आधार–वर्ग से रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 |
| 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
| 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 |
| 41 | 43 | 45 | 47 | 49 | 51 |
| 51 | 53 | 55 | 57 | 59 | 61 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 59 | 57 | 5 | 53 | 11 |
| 21 | 13 | 47 | 45 | 19 | 41 |
| 41 | 29 | 25 | 27 | 33 | 31 |
| 21 | 39 | 35 | 37 | 23 | 31 |
| 51 | 43 | 15 | 17 | 49 | 11 |
| 51 | 3 | 7 | 55 | 9 | 61 |

**यथार्थ–भाजक 2के प्रति आधार–वर्ग से रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 11 | 15 | 19 |
| 21 | 25 | 29 | 31 | 35 | 39 |
| 41 | 45 | 49 | 51 | 55 | 59 |
| 3 | 7 | 11 | 13 | 17 | 21 |
| 23 | 27 | 31 | 33 | 37 | 41 |
| 43 | 47 | 51 | 53 | 57 | 61 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 57 | 53 | 9 | 47 | 19 |
| 39 | 25 | 33 | 31 | 35 | 23 |
| 21 | 55 | 49 | 51 | 7 | 3 |
| 41 | 17 | 11 | 13 | 45 | 59 |
| 41 | 27 | 29 | 31 | 37 | 21 |
| 43 | 5 | 11 | 51 | 15 | 61 |

**यथार्थ–भाजक 3के प्रति आधार–वर्ग से रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 11 | 17 | 21 | 27 |
| 31 | 37 | 41 | 47 | 51 | 57 |
| 3 | 9 | 13 | 19 | 23 | 29 |
| 33 | 39 | 43 | 49 | 53 | 59 |
| 5 | 11 | 15 | 21 | 25 | 31 |
| 35 | 41 | 45 | 51 | 55 | 61 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 55 | 51 | 11 | 41 | 27 |
| 57 | 37 | 21 | 15 | 51 | 5 |
| 59 | 23 | 13 | 19 | 39 | 33 |
| 3 | 53 | 43 | 49 | 9 | 29 |
| 31 | 11 | 41 | 47 | 25 | 31 |
| 35 | 7 | 17 | 45 | 21 | 61 |

**यथार्थ–भाजक 6के प्रति आधार–वर्ग से रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| 7 | 17 | 27 | 37 | 47 | 57 |
| 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 59 |
| 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 41 | 21 | 21 | 51 |
| 53 | 13 | 29 | 39 | 43 | 9 |
| 57 | 47 | 25 | 35 | 15 | 7 |
| 5 | 45 | 27 | 37 | 17 | 55 |
| 59 | 19 | 33 | 23 | 49 | 3 |
| 11 | 11 | 31 | 31 | 41 | 61 |

**व्यापकता [B]** व्यापकता [A] के अनुसार प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग के सापेक्ष रचित जादुई–वर्ग के आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक N खानों के अवयवों का योगमान S के प्रति प्रथम आधार–वर्ग में k प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी के अवयव (संख्यात्मक या बीजीय) का चयन में यदि–

1• स्तम्भिक या पंक्तिक प्रथम अवयव $c_1r_1 = a$

2• सभी k प्रकार के q पदी समान्तर श्रेढ़ी का एक उभयनिष्ट सर्वान्तर $= b$

3• सभी k प्रकार के समानतर श्रेढ़ी के प्रत्येक पद (प्रथम–प्रथम), (द्वितीय–द्वितीय), (तृतीय–तृतीय) – – – – –(αवाँ–αवाँ)– – – –[qवाँ–qवाँ] से अलग–अलग k पदी कुल $[\frac{N^2}{k}=q]$ प्रकार के समान्तर श्रेढ़ी बनेंगे, जिनका भी एक उभयनिश्ठ सर्वान्तर = c हो तो सिद्ध कर सकते हैं।

**प्रमेय 1■** आधार–वर्ग या जादुई–वर्ग के समस्त $N^2$ अवयवो का योगफल $=N*S=\frac{q*k}{2}[2a+(k-1)c+b(q-1)]$

$$=\frac{N^2}{2}[2a+(k-1)c+b(q-1)]$$

**प्रमेय 2■** जादुई–वर्ग के आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक N खानों के अवयवों का योगमान $S==\frac{N}{2}[2a+(k-1)c+b(q-1)]$

**प्रमेय 3■** $(K^2-k)c+(N^2-k)b=2k(\frac{S}{N}-a)$ होगा।

**सत्यापन** प्रमेय 1■

**प्रक्रम 1•** प्रथम $[\frac{N^2}{k}=q]$ पद के $[c_1r_1$ से $c_Nr_m$ तक] अवयवो का योग $s_1 =$

$$[a+(a+b)+(a+2b)+(a+3b)+\text{- - - - - - -}+\{a+(q-1)b\}]$$

$$=\frac{q}{2}[2a+(q-1)b]$$

**प्रक्रम 2•** द्वितीय $[\frac{N^2}{k}=q]$ पद के $[c_1r_{m+1}$ से $c_Nr_{2m}$ तक] अवयवो का योग $s_2 =$

$$[(a+c)+\{(a+c)+b\}+\{(a+c)+2b\}+(a+c)+3b\}+\text{- ---- -}$$

$$+\{(a+c)+(q-1)b\}]=\frac{q}{2}[2(a+c)+(q-1)b]$$

**प्रक्रम 3•** तृतीय $[\frac{N^2}{k}=q]$ पद के $[c_1r_{2m+1}$ से $c_Nr_{3m}$ तक] अवयवो का योग $s_3 =$

$$[(a+2c)+\{(a+2c)+b\}+\{(a+2c)+2b\}+(a+2c)+3b\}+\text{- - ----}$$

$$+\{(a+3c)+(q-1)b\}]=\frac{q}{2}[2(a+2c)+(q-1)b]$$

------ ----- ------ ------ ------ ------ -------- ------ -- ------ ---------- ---------
------ ----- ------ ------ ------ ------ -------- ------ -- ------ ---------- ---------

**प्रक्रम k•** अंतिम $[\frac{N^2}{k}=q]$ पद के [ $(c_1r_{(N-m)+1}$ से $c_Nr_N$ तक) या $(c_1r_{(k-1)m+1}$ से $c_Nr_{km}$ तक)] अवयवो का योग $n_k =$

$[\{a+(k-1)c\} +\{ a+(k-1)c +b\} +\{a + (k-1)c +2b\} +$ ------ - ----

$+ \{ a+(k-1)c + (q -1)b \}] = \frac{q}{2}[2[a + (k - 1)c + (q - 1)b]$

**प्रक्रम (k+1)•** तब आधार–वर्ग या जादुई–वर्ग के समस्त $N^2$ अवयवों का योगफल $=N*S$

$= s_1 + s_2 + s_3 +$ - - - - - - - - - $+ s_k$

$= \frac{q}{2}[ 2a + (q - 1) b] + \frac{q}{2}[ 2( a + c ) + ( q - 1) b] + \frac{q}{2} [ 2( a + 2c ) + ( q - 1) b]$

- - - - - - $+ \frac{q}{2}[ 2\{ a + ( k- 1)c \} + ( q - 1) b]$

$= \frac{q}{2}[ 2\{a + (a+ c) + ( a +2c ) + ( a +3c ) +$ - - - - - - - - $+ \underline{a +( k -1) c}\}+( q - 1) bk]$

$= \frac{q}{2}[ 2\{ak+\frac{k-1}{2}(ck)\} +(q-1)bk] = \frac{q*k}{2}[ 2a+c(k-1) +(q-1)b]$

$= \frac{N^2}{2}[ 2a+c(k-1) +(q-1)b]$ ----- $[q=\frac{N^2}{k}$ के प्रतिस्थापन से ] **सत्यापित।**

**सत्यापन** प्रमेय 2■

चूँकि जादुई–वर्ग के आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक N खानों के अवयवों का योगमान S आपस में बराबर होते है।

∴ जादुई–वर्ग के आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक N खानों के अवयवों का योगमान S=

$\frac{N^2}{2}[ 2a+c(k-1) +(q-1)b] \div N$

$= \frac{N}{2}[ 2a+c(k-1) +(q-1)b]$ **सत्यापित।**

**सत्यापन** प्रमेय 3■ आधार–वर्ग या जादुई–वर्ग के समस्त $N^2$ अवयवो का योगफल NS

$= \frac{N^2}{2}[ 2a+c(k-1) +(q-1)b]$

$= \frac{N^2}{2k}[ 2ak+c(k-1)k +(q-1)b]$ $[q=\frac{N^2}{k}$ के प्रतिस्थापन से ]

अर्थात् $\frac{N^2}{2k}[ 2ak+c(k-1)k +(q-1)b] = NS$

$\Rightarrow \frac{N}{K}[ 2a k+ (k^2- k) c + ( N^2 - k)b ] = S$

$\Rightarrow 2a k+ (k^2- k) c + ( N^2 - k)b = 2k\frac{S}{N}$

$\Rightarrow$ **$(k^2- k) c + ( N^2 - k)b = 2K[\frac{S}{N} - a]$** **सत्यापित।**

**समिका $(k^2- k) c + ( N^2 - k)b = 2K[\frac{S}{N} - a]$ का अनुप्रयोग एवं अनुप्रयोग प्रतिबंध–** एक यह सामिका एक व्यापक समिका है, जिसके अनुप्रयोग से यदि N*N का विस्तारित एवं व्यापक रूप से अधिकाधिक प्रकारों में आधार–वर्ग की रचनाएँ प्रस्तुत कर सकते है जिनके संगत रचित जादुई–वर्ग के आड़ी, खड़ी अथवा तिर्यक N खानों के अवयवों का योगफल S ज्ञात हो। इसके प्रति a, b और c वे सभी प्राकृत संख्या मान स्वीकार होने का प्रतिबंध निम्नानुसार है।

**प्रतिबंध1•** $(k^2- k) c + ( N^2 - k)b = 2k[(\frac{S}{N} - a]$ में यथार्थ भाजक $k=1$ के प्रति–

$(1^2 - 1) c + (N^2- 1) b = 2* 1[\frac{S}{N} -a] \Rightarrow (N^2- 1) b = 2* 1[\frac{S}{N} -a]$

से स्पश्ट है कि यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रथम आधार–वर्ग के सभी $N^2$ अवयव a और b के विभिन्न मानों पर $N^2$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयव होंगे जो यथार्थ भाजक N के तारतम्य में $c = c_Nr_1$ में दर्ज आधार–वर्ग का अवयव दृष्टिगत होगा।

**या**

**आधार–वर्ग के सभी $N^2$अवयव का सर्वान्तर d पर समान्तर संख्या श्रेढ़ी के अवयव होने का प्रतिबंध :–**

[b+c] का मान M के प्रति $b = d$ तथा $c = dN$ होगा।

तब $[b+c] = d[N+1]$ तथा

$c_1r_1 = a = \frac{1}{2}[\frac{2S}{N} - M\{(N-1\}] = \frac{1}{2}[\frac{2S}{N} - M\{(\frac{M}{d} - 2\}]$

होगा।

**प्रतिबंध2• $(k^2-k)c + (N^2-k)b = 2k[\frac{S}{N} - a]$** में k=N के प्रति

$(N^2-N)c + (N^2-N)b = 2N[\frac{S}{N} - a]$

$\Rightarrow (N-1)c + (N-1)b = \frac{2S}{N} - 2a$

$\Rightarrow (N-1)(b+c) = \frac{2S}{N} - 2a \Rightarrow b+c = \frac{\frac{2S}{N} - 2a}{N-1}$

**[b+c] का अधिकतम मान $H = \frac{\frac{2S}{N} - 2a}{N-1}$ तथा [b+c] का न्यूनतम मान $L = (N+1)$ होगा।**

**प्रतिबंध3• आधार–वर्ग के सभी $N^2$अवयव का क्रमागत संख्या श्रेढ़ी के अवयव होने का प्रतिबंध :–**

$(k^2-k)c + (N^2-k)b = 2k[\frac{S}{N} - a]$ में $b=1$ प्रतिस्थापित करने पर–

$(k^2-k)c + (N^2-k)1 = 2k[(\frac{S}{N} - a]$

$\Rightarrow (k^2-k)c + N^2 - k = 2k[(\frac{S}{N} - a]$

$\Rightarrow kc(k-1) + k(\frac{N^2}{K} - 1) = 2k[(\frac{S}{N} - a]$

$\Rightarrow c(k-1) + (\frac{N^2}{K} - 1) = 2[(\frac{S}{N} - a]$

**प्रतिबंध4• आधार–वर्ग के सभी $N^2$अवयव, प्रथमपद a तथा सर्वान्तर b के प्रति $N^2$ पदी समांतर श्रेढ़ी में होने का प्रतिबंध–**

$(k^2-k)c + (N^2-k)b = 2k[\frac{S}{N} - a]$ में $k=1$ प्रतिस्थापित करने पर–

$(1^2-1)c + (N^2-1)b = 2[\frac{S}{N} - a] =$

$\Rightarrow (N^2-1)b = 2[\frac{S}{N} - a] = \frac{2S}{N} - 2a$

**प्रतिबंध5• आधार–वर्ग के सभी $N^2$अवयव, सरल क्रमांक 1 से $N^2$ तक का अवयव होने का प्रतिबंध–** $(k^2-k)c + (N^2-k)b = 2k[\frac{S}{N} - a]$ में $k=1, a=1$ और $b=1$प्रतिस्थापित करने पर–

$(1^2-1)c + (N^2-1)*1 = 2*1[\frac{S}{N} - 1] \Rightarrow N^2 - 1 = \frac{2S}{N} - 2 \Rightarrow N^2 = \frac{2S}{N} - 1$

अतः उपरोक्त महत्वपूर्ण प्रतिबंधों को दृष्टिगत करते हुए सम्पूर्ण विस्तारित प्रस्तुति में यथार्थ भाजक $k=1$ पर अलग से प्रस्तुति देना आवश्यक नहीं है। फिर भी उदाहरणार्थ इबारती प्रश्नों के हल में अवलोकन कीजिए।

**प्रश्न1■** 3*3 का जादुई–वर्ग रचना हेतू वे सभी प्रथम आधार –वर्ग के प्रति प्रयुक्त प्रथम अवयव $c_1r_1$ एवं सर्वान्तर b और c की तालिका रचना कीजिए जिसके आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 3-3 खानों के अवयवों का योगमान 24 हो।

**प्रश्न2■** 4*4 का जादुई–वर्ग रचना हेतू वे सभी प्रथम आधार –वर्ग के प्रति प्रयुक्त प्रथम अवयव $c_1r_1$ एवं सर्वान्तर b और c की तालिका रचना कीजिए जिसके आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 4-4 खानों के अवयवों का योगमान 50 हो।

**प्रश्न3■** 5*5 का जादुई–वर्ग रचना हेतू वे सभी प्रथम आधार –वर्ग के प्रति प्रयुक्त प्रथम अवयव $c_1r_1$ एवं सर्वान्तर b और c की तालिका रचना कीजिए जिसके आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 5-5 खानों के अवयवों का योगमान132 हो।

**हल 1■ (A)** प्रतिबंध1• के तहत् यथार्थ भाजक $k=1$ के प्रति हल समिका $(N^2-1)b = 2(\frac{S}{N} - a)$ में $S=24$ , $N=3$ के प्रतिस्थापन से $(3^2-1)b = 2(\frac{24}{3} - a) \Rightarrow 8b = 2(8-a) \Rightarrow 4b = 8-a$

∴ N*N =3*3 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=1 आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 3-3 खानों के अवयवों का योगमान 24 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$=a | 4b | b | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 3-3 अवयव |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 | 1 | [4,5,6], [7,8,9],[10,11,12] |

**हल 1■ (B)** प्रतिबंध2• के तहत् यथार्थ भाजक k=N=3 के प्रति हल समिका $b + c = \frac{\frac{2S}{N} - 2a}{N-1}$

में S=24 के प्रतिस्थापन से $b + c = \frac{\frac{2*24}{3} - 2a}{3-1} \Rightarrow b+c = \frac{16-2a}{2} \Rightarrow b+c = 8-a$

∴ N*N =3*3 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=3, आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 3-3 खानों के अवयवों का योगमान 24 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$=a | [b+c] | b | c | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 3-3 अवयव |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 7 | 1 | 6 | [1,2,3], [7,8,9],[13,14,15] |
| 2 | 1 | 7 | 2 | 5 | [1,3,5],[6,8,10],[11,13,15] |
| 3 | 1 | 7 | 3 | 4 | [1,4,7] [5,8,11] [9,12,15] |
| 4 | 2 | 6 | 1 | 5 | [2,3,4], [7,8,9],[12,13,14] |
| 5 | 2 | 6 | 2 | 4 | [2,4,6][6,8,10],[10,12,14] |
| 6 | 2 | 6 | 3 | 3 | [2,5,8] [5,8,11] [8,11,14] |
| 7 | 3 | 5 | 1 | 4 | [3,4,5],[7,8,9],[11,12,13] |
| 8 | 3 | 5 | 2 | 3 | [3,5,7] [6,8,10],[9,11,13] |
| 9 | 4 | 4 | 1 | 3 | [4,5,6],[7,8,9] ,[10,11,12] |
| 10 | 4 | 4 | 2 | 2 | [4,6,8], [6,8,10], [8,10,12] |
| 11 | 5 | 3 | 1 | 2 | [5,6,7],[7,8,9] ,[9,10,11] |
| 12 | 6 | 2 | 1 | 1 | [6,7,8],[7,8,9], [8,9,10] |

क्रमांक 9 में प्रथम आधार–वर्ग के सभी $3^2$ अवयव क्रमागत है। प्रतिबंध का सत्यापन स्वयं करें।

**हल 2■ (A)** प्रतिबंध1• के तहत् यथार्थ भाजक k=1 के प्रति हल समिका $(N^2-1)b = 2(\frac{S}{N} - a)$ में S=50 , N=4 के प्रतिस्थापन से $(4^2-1)b = 2(\frac{50}{4} - a) \Rightarrow 15b = 2(\frac{25}{2} - a) \Rightarrow 15b = 25-2a$

∴ N*N =4*4 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=1 आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 4-4 खानों के अवयवों का योगमान 50 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$=a | 15b | b | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 4-4 अवयव |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 15 | 1 | [5,6,7,8],[9,10,11,12],[13,14,15,16],[17,18,19,20] |

**हल 2■ (B)** व्यापक समिका $(k^2-k)c + (N^2-k)b = 2K[\frac{S}{N} - a]$ , में यथार्थ भाजक k=2, N=4 एवं S=50 के प्रति हल समिका $(2^2-2)c + (4^2-2)b = 2*2[\frac{50}{4} - a]$

$\Rightarrow 2c+14b = 50-4a \Rightarrow c+7b = 25-2a$

∴ N*N =4*4 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=2, आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 4-4 खानों के अवयवों का योगमान

50 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1=a$ | [7b+c] | b | c | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 4-4 अवयव |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 23 | 1 | 16 | [1,2,3,4],[5,6,7,8],[17,18,19,20],[21,22,23,24] |
| 2 | 1 | 23 | 2 | 9 | [1,3,5,7],[9,11,13,15],[10,12,14,16],[18,20,22,24] |
| 3 | 1 | 23 | 3 | 2 | [1,4,7,10],[13,16,19,22], [3,6,9,12],[15,18,21,24] |
| 4 | 2 | 21 | 1 | 14 | [2,3,4,5],[6,7,8,9], [16,17,18,19],[20,21,22,23] |
| 5 | 2 | 21 | 2 | 7 | [2,4,6,8] ,[10,12,14,16],[9,11,13,15],[17,19,21,23] |
| 6 | 3 | 19 | 1 | 12 | [3,4,5,6], [7,8,9,10],[15,16,17,18],[19,20,21,22] |
| 7 | 3 | 19 | 2 | 5 | [3,5,7,9],[11,13,15,17] [8,10,12,14],[16,18,20,22] |
| 8 | 4 | 17 | 1 | 10 | [4,5,6,7],[8,9,10,11][14,15,16,17],[18,19,20,21] |
| 9 | 4 | 17 | 2 | 3 | [4,6,8,10],[12,14,16.18],[7,9,11,13],[15,17,19,21] |
| 10 | 5 | 15 | 1 | 8 | [5,6,7,8],[9,10,11,12][13,14,15,16],[17,18,19,20] |
| 11 | 5 | 15 | 2 | 1 | [5,7,9,11],[13,15,17,19],[6,8.10,12],[14,16,18,20] |
| 12 | 6 | 13 | 1 | 6 | [6,7,8,9][10,11,12,13] [12,13,14,15],[16;17,18,19] |
| 13 | 7 | 11 | 1 | 4 | [7,8,9,10], [11,12,13,14],[11,12,13,14],[15,16,17,18] |
| 14 | 8 | 9 | 1 | 2 | [8,9,10,11],[12,13,14,15],[10,11,12,13],[14,15,16,17] |

**हल 2■ (C)** प्रतिबंध2• के तहत् यथार्थ भाजक $k=N=4$ के प्रति हल समिका $b+c = \frac{\frac{2S}{N}-2a}{N-1}$

में $S=50$ के प्रतिस्थापन से $b+c = \frac{\frac{2*50}{4}-2a}{4-1} \Rightarrow b+c = \frac{25-2a}{3}$

∴ N*N =4*4 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक $k=4$, आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 4-4 खानों के अवयवों का योगमान 50 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1=a$ | [b+c] | b | c | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 4-4 अवयव |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 7 | 1 | 6 | [2,3,4,5],[8,9,10,],[14,15,16,17],[20,21,22,23] |
| 2 | 2 | 7 | 2 | 5 | [2,4,6.8],[7,9,11,13], [12,14,16,18],[17,19,21,23] |
| 3 | 2 | 7 | 3 | 4 | [2,5,8,11],[6,9,12,15],[10,13,16,19],[14,17,20,23] |
| 4 | 5 | 5 | 1 | 4 | [5,6,7,8], [9,10,11,12],[13,14,15,16],[17,18,19,20] |
| 5 | 5 | 5 | 2 | 3 | [5,7,9,11],[8,10,12,14],[11,13,15,17],[14,16,18,20] |
| 6 | 8 | 3 | 1 | 2 | [8,9,10,11],[10,11,12,13],[12,13,14,15],[14,15,16,17] |

**हल 3■ (A)** प्रतिबंध1• के तहत् यथार्थ भाजक $k=1$ के प्रति हल समिका $(N^2-1)b = 2(\frac{S}{N}-a)$ में $S=132$ , $N=6$ के प्रतिस्थापन से $(6^2-1)b = 2(\frac{132}{6}-a) \Rightarrow 35b=2(22-a) \Rightarrow 35\ b = 44-2a$ के हल मान a का मान प्राकृत संख्या का अवयव नहीं होगा।

∴ दशमलव संख्यांकन में N*N =6*6 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=1 आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 6-6 खानों के अवयवों का योगमान 132 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$=a | 35b | b | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 6-6 अवयव |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.5 | 35 | 1 | [4.5.5.5,6.5,7.5,8.5 ,9.5],[10.5,11.5, 12.5,13.5, 14.5,15.5]<br>[16.5,17.5,18.5, 19.5,20.5,21.5],[ 22.5,23.5, 24.5,25.5, 26.5,27.5]<br>[28.5,29.5,30.5, 31.5,32.5,33.5],[ 34.5,35.5, 36.5,37.5, 38.5,39.5] |

**हल 3■ (B) हल** यापक समिका $(k^2- k)\ c\ +\ (\ N^2\ -\ k)b\ =\ 2K[\frac{S}{N}-\ a]$ ˛ में यथार्थ भाजक k=2, N=6 एवं S=132 के प्रति हल समिका $(2^2- 2)\ c\ +\ (\ 6^2\ -\ 2)b\ =\ 2*2[\frac{132}{6}-\ a]$

$\Rightarrow$ 2c+ 34 b = 88 -4a $\Rightarrow$ c+17b =44-2a

∴ N*N =6*6 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=2, आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 6-6 खानों के अवयवों का योगमान 132 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$ =a | 17b +c | b | c | **प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 6-6 अवयव** |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 42 | 1 | 25 | [1,2,3,4,5,6],[7,8,9,10,11,12], [13,14,15,16,17,18]<br>[26,27,28,29,30,31],[32,33,34,35,36,37],[38,39,40,41,42,43] |
| 2 | 1 | 42 | 2 | 8 | [1,3,5,7,9,11],[13,15,17,19,21,23],[25,27,29,31,33,35]<br>[9,11,13.15,17,19].[21,23,25,27,29,31],[33,35,37,39,41.43] |
| 3 | 2 | 40 | 1 | 23 | [2,3,4,5,6,7],[8,9,10,11,12,13],[14,15,16,17,18,19]<br>[25,26,27,28,29,30],[31,32,33,34,35,36[,[37,38,39,40,41,42] |
| 4 | 2 | 40 | 2 | 6 | [2,4,6,8,10,12],[14,16.18,20,22,24], [26,28,30,32,34,36]<br>[8,10,12,14,16,18],[20,22,24, 26,28,30], [32,34,36,38,40,42] |
| 5 | 3 | 38 | 1 | 21 | [3,4,5,6,7,8],[9,10,11,12,13,14],[15,16,17,18,19,20]<br>[24,25,26,27,28,29],[30,31,32,33,34,35],[36,37,38,39,40,41] |
| 6 | 3 | 38 | 2 | 4 | [3,5,7,9,11,13], [15,17,19,21,23,25],[27,29,31,33,35,37]<br>[7,9,11,13,15,17],[19,21,23,25, 27,29], [31,33,35,37,39,41] |
| 7 | 4 | 36 | 1 | 19 | [4,5,6,7,8,9,10],[ 11,12,13,14,15,16],[ 17,18,19,20,21,22]<br>[23,4,25,26,27,28],[29,30,31,32,33,34], [35, 36,37,38,39,40] |
| 8 | 5 | 34 | 1 | 17 | [5,6,7,8,9,10[,[11,12,13,14,15],[16,17,18,19,20]<br>[22,23,24,25,26,27],[28.29.30,31,32,33],[34,35,36,37,38,39] |
| 9 | 6 | 32 | 1 | 15 | [6,7,8,9,10,11],[12,13,14,15,16,17],[18,19,20,21,22,23,]<br>[21,22.23.24,25,26],[27,28,29,30,31,32],[33,34,35,36,37,38] |
| 10 | 7 | 30 | 1 | 13 | [7,8,9,10,11,12],[13,14,15,16,17,18],[19,20,21,22,23,24]<br>[20,21,22,23,24,25],[26,27,28,29,30,31],[32,33,34,35,36,37] |
| 11 | 8 | 28 | 1 | 11 | [8,9,10,11,12,13],[14,15,16,17,18,19],[20,21,22,23,24,25]<br>[19,20,21,22,23,24],[25,26,27,28,29,30],[31,32,33,34,35,36] |
| 12 | 9 | 26 | 1 | 9 | [9,10,11,12,13,14],[15,16,17,18,19,20],[21,22,23,24,25,26]<br>[18,19,20,21,22,23],[24,25,26,27,28,29],[30,31,32,33,34,35] |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 10 | 24 | 1 | 7 | [10,11,12,13,14,15],[16,17,18,19,20,21],[22,23,24,25,26,27] [17,18,19,20,21,22],[23,24,25,26,27,28],[29,30,31,32,33,34] |
| 14 | 11 | 22 | 1 | 5 | [11,12,13,14,15,16],[17,18,19,20,21,22],[,23,24,25,26,27,2] [16,17,18,19,20,21],[22,23,24,25,26,27],[28,29,30,31,32,33] |
| 15 | 12 | 20 | 1 | 3 | [12,13,14,15,16,17],[18,19,20,21,22,23],[24,25,26,27,28,29] [15,16,17,18,19,20],[21,22,23,24,25,26,],[27,28,29,30,31,33] |
| 16 | 13 | 18 | 1 | 1 | [13,14,15,16,17,18],[19,20,21,22,23,24],[25,26,27,28,29,30] [14,15,16,17,18,19],[20,21,22,23,24,25],[26,27,28,29,30,31] |

**हल 3■ (C)** व्यापक समिका $(k^2- k)\ c\ +\ (N^2 - k)b\ =\ 2K[\frac{S}{N} - a]$ , में यथार्थ भाजक k=3, N=6 एवं S=132 के प्रति हल समिका $(3^2- 3)\ c\ +\ (6^2 - 3)b\ =\ 2*3[\frac{132}{6} - a]$

$\Rightarrow\ 6c+ 33\ b = 132 -6a\ \Rightarrow\ 2c+11b =44-2a$

∴ N*N =6*6 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=3, आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 6-6 खानों के अवयवों का योगमान 132 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$ =a | [11b +2c] | b | c | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 6-6 अवयव |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 42 | 2 | 10 | [1,3,5,7,9,11,],[13.15,17,19,21,23],[ 11,13.15,17,19,21] [23, 25,27,28,31,33],[21,23, 25,27,28,31],[33,35,37,39,41,43] |
| 2 | 2 | 40 | 2 | 9 | [2,4,6,8,10,12][14,16,18,20,22,24],[11,13,15,17,21,23] [25,27,29,31,33,35],[20,22,24,26,28,30],[32,34,36,38,40,42] |
| 3 | 3 | 38 | 2 | 8 | [3,5,7,9,11,13],[15,17,19,21,23,25],[ 11,13.15,17,19,21] [23, 25,27,28,31,33],[19,21,23, 25,27,29],[31,33,35,37,39,41] |
| 4 | 4 | 36 | 2 | 7 | [4,6,8,10,12,14][16,18,20,22,24,26],[11,13,15,17,21,23] [25,27,29,31,33,35],[18,20,22,24,26,28],[30,32,34,36,38,40] |
| 5 | 5 | 34 | 2 | 6 | [5,7,9,11,13,15],[17,19,21,23,25,27],[ 11,13.15,17,19,21] [23, 25,27,28,31,33],[17,19,21,23, 25,27],[29,31,33,35,37,39] |
| 6 | 6 | 32 | 2 | 5 | [6,8,10,12,14,16][18,20,22,24,26,28],[11,13,15,17,21,23] [25,27,29,31,33,35],[16,18,20,22,24,26,],[28,30,32,34,36,38] |
| 7 | 7 | 30 | 2 | 4 | [7,9,11,13,15,17],[19,21,23,25,27,29],[ 11,13.15,17,19,21] [23, 25,27,28,31,33],[15,17,19,21,23, 25],[27,29,31,33,35,37] |
| 8 | 8 | 28 | 2 | 3 | [8,10,12,14,16,18][20,22,24,26,28,30],[11,13,15,17,21,23] [25,27,29,31,33,35],[14,16,18,20,22,24,],[26,28,30,32,34,36] |
| 9 | 9 | 26 | 2 | 2 | [9,11,13,15,17,19],[21,23,25,27,29,31],[ 11,13.15,17,19,21] [23, 25,27,28,31,33],[13,15,17,19,21,23 ],[25,27,29,31,33,35] |

**हल 3■ (D)** प्रतिबंध2• के तहत् यथार्थ भाजक k=N=6के प्रति हल समिका $b + c\ =\ \frac{\frac{2S}{N} - 2a}{N - 1}$

में S=50 के प्रतिस्थापन से $b + c\ =\ \frac{\frac{2*132}{6} - 2a}{6 - 1} \Rightarrow b+c = \frac{44-2a}{5}$

∴ N*N =6*6 का जादुई–वर्ग रचना हेतू यथार्थ भाजक k=6 के प्रति आड़ी, खड़ी एवं विकर्णिक 4-4 खानों के अवयवों का योगमान 132 के प्रति प्रथम आधार–वर्गों की तालिका।

| क्रमांक | $c_1r_1$ =a | [b+c] | b | c | प्रथम आधार–वर्ग के पंक्तिवार 4-4 अवयव |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 8 | 1 | 7 | [2,3,4,5,6,7], [9,10.11,12,13,14],[16,17,18,19,20,21] [23,24,25,26,27,28].[30,31,32,33,34,35],[37,39,40,41,42] |
| 2 | 2 | 8 | 2 | 6 | [2,4,6,8,10,12],[8,10,12,14,16,18],[14,16,18,20,22,24] [20,22,24,26,28,30] ,[26,28,30,32,34,36],[32,34,36,38,40,42] |
| 3 | 2 | 8 | 3 | 5 | [2,5,8,11,14,17],[7,10,13,16,19,22],[12,15,18,21,24,27] [17,20,23,26,29,32],[22,25,28,31,34,37],[27,30,33,36,39,42] |
| 4 | 2 | 8 | 4 | 4 | [2,6,10,14,18,22],[ 6,10,14,18,22,26],[12,16,20,24,28,32] [16,20,24,28,32,38],[ 20,24,28,32,38,40],[ 24,28,32,38,40,42] |
| 5 | 7 | 6 | 1 | 5 | [7,8,9,10,11,12],[12,13,14,15,16,17],[17,18,19,20,21,22]. [22,23,24,25,26,27],[27,28,29,30,31,32],[32,33,34,35,36,37] |
| 6 | 7 | 6 | 2 | 4 | [7,9,11,13,15,17],[11,13,15,17,19,21],[15,17,19,21,23,25] [19,21,23,25,27,29],[23,25,27,29,31,33],[27,29,31,33,35,37] |
| 7 | 7 | 6 | 3 | 3 | [7,10,13,16,19,22],[ 10,13,16,19,22 25],[ 13,16,19,22 25,28] [16,19,22 25,28,31],[ 19,22 25,28,31,34],[ 22 25,28,31,34,37] |
| 8 | 12 | 4 | 1 | 3 | [12,13,14,15,16,17],[ 15,16,17,18,19,20],[18,19,20,21,22,23] [21,22,23,24,25,26],[ 24,25,26,27,28,29], [27,28,29,30,31,32] |
| 9 | 12 | 4 | 2 | 2 | [12,14,16,18,20.22],[14,16,18,20,22,24],[16,18,20,22,24,26] [18,20,22,24,26,28],[20,22,24,26,28,30],[22,24,26,28,30,32] |
| 10 | 17 | 2 | 1 | 1 | [17,18,19,20,21,22],[18,19,20,21,22,23],[19,20,21,22,23,24] [20,21,22,23,24,25],[21,22,23,24,25,26],[22,23,24,25,26,27] |

**महत्वपूर्ण स्पष्टीकरण–**

**[1] अद्वितीय अवयव होने विषयक** – सभी N*N का जादई–वर्ग की रचना जिनके आड़ी, खड़ी एवं तिर्यक N अवयवों का योग सुनिश्चित होने के तारतम्कय में प्राप्त आधार–वर्ग के अद्वितीय होने का प्रतिबन्ध विश्लेषण उपरोक्त हलों के अध्ययन उपरांत बिन्दुवार निम्नानुसार विश्लेषित होंता है।

यदि b स्तम्भवार (बायाँ से दायाँ) और c पंक्तिवार (ऊपर से नीचे ) सर्वान्तर है। $b \neq c$ के प्रति b : c मानक मान = m : n हो तो मापांक $|m--n| \geq \left(\frac{N^2}{k} - 1\right)$ की स्थिति मे आधार–वर्ग के सभी $N^2$ अवयव अद्वितीय होंगे।

**[2] $\frac{N^2}{k}$ पदी दो या दो से अधिक समान्तर श्रेढ़ी में अवयवों के दोहराये जाने विषयक–**

कवच/यंत्र निर्माण के प्रति अधोदर्शित N*N के आधार–वर्ग रचना के प्रति N के किसी यथार्थ भाजक k के लिये **$\frac{N^2}{k}$ पदी** उभ्यनिष्ठ सर्वान्तर b पर k (k का अधिकतम् मान N होगा।) प्रकार के संमान्तर श्रेढ़ी लिया जाता है जिनके प्रथम पद अवयव स्वयं में सर्वान्तर c पर k पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयव [a ,(a+c),(a+2c) --------{a+(k-1)c}] होंगे। **तब–**

यदि b स्तम्भवार (बायाँ से दायाँ) और c पंक्तिवार (ऊपर से नीचे ) सर्वान्तर है। $b \neq c$ के प्रति b : c मानक मान = m : n हो तो

**1■ $(m \neq n)$ एवं $|m-n| < \left(\frac{N^2}{k} - 1\right)$**

**2■ $[x \leq \left(\frac{N^2}{k} - 1\right)]$ एव $[y \leq (k-1)$**

होने पर– $x*m = y*n$ हो तो – प्रथम $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वपद प्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक तक के $(\frac{N^2}{k} - x] = m$ प्रकार के अवयव [{a+xb},{a+(x+1)b} , {a+(x+2)b +--------{a+$(\frac{N^2}{k} - 1)b$}] **होंगे,** $(y+1)$ **वें** क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद से m वाँ पद तक दोहरायें गये अवश्व के प्रतिरूपण में दर्ज होंगे। इन्हीं शब्दों में–

**क्रमशः N के यथार्थ भाजक k के बढ़ते मानों के प्रति**– दूसरे क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वें पद क्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक होने पर– $x*b = y*c$ हो तो – प्रथम $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वाँ पद क्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक तक के ($\frac{N^2}{k}$ तक के $(\frac{N^2}{k} - x] = m$ प्रकार के अवयव $(y+2)$ वें क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के प्रमम पद से m वाँ पद तक दोहरायें गये अवश्व के प्रतिरूपण में दर्ज होंगे।

तीसरे क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वें पद प्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक तक के $(\frac{N^2}{k} - x] = m$ प्रकार के अवयव $(y+3)$ **वें** क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के प्रथम पद से m वाँ पद तक द
ोहरायें गये अवश्व के प्रतिरूपण में दर्ज होंगे।

---

---

y वें क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वें पद प्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक तक के $(\frac{N^2}{k} - x] = m$ प्रकार के अवयव $(k-1)$ **वें** क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के प्रमम पद से m वाँ पद तक दोहरायें गये अवश्व के प्रतिरूपण में दर्ज होंगे।

$(y+1)$ वें क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के $(x+1)$ वें पद प्रमांक से $\frac{N^2}{k}$ा पद क्रमांक तक के $(\frac{N^2}{k} - x] = m$ प्रकार के अवयव k **वें** क्रम के $\frac{N^2}{k}$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के प्रमम पद से m वाँ पद तक दोहरायें गये अवश्व के प्रतिरूपण में दर्ज होंगे।
उक्त दोहराये गाये क्रमित अवयवों गये अवयवयों के प्रतिरूपण नियम में होगा।

**[3]** ' N के यथार्थ भाजक 1 के तारतम्य में $\mathbf{N^2}$ पदी एक समान्तर श्रेढ़ी के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग श्रृंखला N के शेष यथार्थ भाजकों में किसी भी यथार्थ k के तारतम्य में $\frac{N^2}{k}$ पदी k समान्तर श्रेढ़ी के प्रतिरूपण में यथावत प्राप्त होता है।

## प्रस्तुति 10-10 ■रंगीन जादुई–वर्ग प्रमेय ■

### प्रस्तावना

गुदड़ी के लाल विष्व प्रसिद्ध महान भारतीय गणितज्ञ श्री निवासन् रामानुजन् का जीवन गणित अध्ययन के लिए ही समर्पित रहा है। उनका गणित अध्ययन क्षेत्र मूलतः अंकगणित को अधिकाधिक श्रृंगारित करता है। इसी श्रृंखला में विज्ञान प्रगति प्रत्रिका का रामानुजन जन्म शताब्दी विशेषांक में लेखक श्री गुणाकर मूले एवं श्री गुणाकर मूले का कालजयी कृति संसार के महान गणितज्ञ के अध्याय शीर्षक श्रीनिवासरामानुजन के अध्ययन में श्रीनिवासरामानुजन द्वारा प्रतिपादित 3*3 का जादुई–वर्ग का झलक मात्र से ही छत्तीसगढी में मुखान्तरित गणित पंक्ति को यादकर मेरे आदर्श प्रेरणास्त्रोत गणित भगवान श्रीनिवासरामानुजन के अदृश्य आत्मीय आशीष प्राप्त होने पर ही विषम * विषम का सरल जादुई–वर्ग तथा विषम * विषम एवं सम *सम का रंगीन जादुई–वर्ग का विस्तारित अध्ययन करने का मन बना पाया अतः यह रंगीन जादुई–वर्ग प्रमेय श्री निवासन् रामानुजन का जादुई–वर्ग प्रमेय के रूप में प्रतिपादित है।

### रंगीन जादुई–वर्ग प्रमेय (श्री निवासरामानुजन काजादुई–वर्ग प्रमेय)–:

युग्मीय संख्याए $(a_1\ b_1)$ , $(a_2\ b_2)$, $(a_3\ b_3)$ - - - - [-n ≥ 3] - - - -$(a_{n-2}\ b_{n-2})$, $(a_{n-1}\ b_{n-1})$, $(a_n\ b_n)$ इस प्रकार हो कि

$(a_1 + b_1) = (a_2 + b_2) = (a_3 + b_3) =$ -- - - - - $(a_{n-2} + b_{n-2}) = (a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_n + b_n) = S$

तथा

$[a_1 + a_2 + a_3 - - - -a_{n-2} + a_{n-1} + a_n] = [b_1 + b_2 + b_3 - - - -b_{n-2} + b_{n-1} + b_n] = R = \frac{S*n}{2}$ होने के प्रति $[a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - - - -a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2] = [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - - - -b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2]$ होगा।

**प्रमाण** –:

$(a_1 + b_1) = (a_2 + b_2) = (a_3 + b_3) = -- - - - - (a_{n-2} + b_{n-2}) = (a_{n-1} + b_{n-1}) = (a_n + b_n) = S$

$\therefore$

$a_1 = S - b_1$
$a_2 = S - b_2$
$a_3 = S - b_3$
- - - - - - --
- - - - - - ---
$a_{n-2} = S - b_{n-2}$
$a_{n-1} = S - b_{n-1}$
$a_n = S - b_n$

$\Rightarrow$

$a_1^2 = S^2 - 2Sb_1 + b_1^2$
$a_2^2 = S^2 - 2Sb_2 + b_2^2$
$a_3^2 = S^2 - 2Sb_3 + b_3^2$
- - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - -
$a_{n-2}^2 = S^2 - 2Sb_{n-2} + b_{n--2}^2$
$a_{n-1}^2 = S^2 - 2Sb_{n-1} + b_{n-1}^2$
$a_n^2 = S^2 - 2Sb_1 + b_n^2$

$\Rightarrow [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - - - -a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2]$
$= n S^2 - 2S [b_1 + b_2 + b_3 - - - -b_{n-2} + b_{n-1} + b_n]$
$+ [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - - - -b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2]$

$\Rightarrow [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - - - -a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2] = n S^2 - 2S * \frac{Sn}{2}$
$+ [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - - - -b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2]$

$\{ [b_1 + b_2 + b_3 - - - -b_{n-2} + b_{n-1} + b_n] = \frac{S*n}{2}$ के प्रतिस्थापन से

$\Rightarrow [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - - - a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2]$
$= n S^2 - nS^2 + [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - - - -b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2]$

$\Rightarrow [a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - - - -a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2 + a_n^2]$
$= [b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - - - -b_{n-2}^2 + b_{n-1}^2 + b_n^2]$ **सिद्ध।**

**समुच्चय के शब्दो में** 3 या 3 से अधिक युग्मीय संख्या अवयव $(a_1\ b_1)$, $(a_2\ b_2)$, $(a_3\ b_3)$ - - - - -$(a_{n-2}\ b_{n-2})$, $(a_{n-1}\ b_{n-1})$, $(a_n\ b_n)$ के प्रथम संख्या अवयवों का समुच्चय $A = [a_1\ a_2\ a_3 - - - a_{n-2}\ a_{n-1}\ a_n]$ तथा द्वितीय संख्या अवयवों का समुच्चय $B = \{b_1\ b_2\ b_3 - - - b_{n-2}\ b_{n-1}\ b_n\}$ हो तब यदि प्रत्येक युग्म के प्रथम संख्या(अवयव) और द्वितीय संख्या(अवयव) का अलग–अलग योग बराबर होने तथा समुच्चय A के अवयवों का योग = समुच्चय B के अवयवों का योग होने पर समुच्चय A के अवयवों के वर्गो का योग = समुच्च; B के अवयवों के वर्गो का योग होगा।

**टीप**

**1•** उपरोक्त रंगीन जादुई–वर्ग रचना से स्पष्ट है कि $n \geq 3$ के प्रति $n \neq [4$ द्वारा अविभाजित सम संख्याएँ जैसे 2,6, 10,14 ----- ---] अर्थात $n \geq 3$ के प्रति $n$ = विषम संख्याएँ (3,5,7, - - - -)या 4 द्वारा विभाजित सम संख्याएँ ( 4, 8, 12, 16 - - - - ) ही होगा।

**2•** प्रत्येक युग्म के प्रथम संख्शा(अवयव) और द्वितीय संख्या(अवयव) का अलग–अलग का योग $[a_x+b_x]=S$ का मान समस्त युग्मों में दर्ज सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या के योग के बराबर होगा।

**प्रमेय आधरित अभ्यास उदाहरण**

समस्त $n$ युग्मो में प्रत्येक युग्म के प्रथम संख्या(अवयव) और द्वितीय संख्या(अवयव) का अलग–अलग किसी भी युग्मीय अवयव $[a_n+b_n]=S$ और समुच्चय A के अवयवों का योग = समुच्चय B के अवयवों का योग = $R = \frac{1}{2}$(S* युग्मीय पद संख्या) $= \frac{S*n}{2}$ से $S*n = 2R$ या $S = \frac{2R}{n}$ से समस्त युग्मों का प्रथम पद संख्या का मान ज्ञात होने पर समस्त युग्मों का द्वितीय पद संख्या का मान सरलता ज्ञात किया जा सकता है।

**अभ्यास उदाहरण**

**समुच्चय A के अवयव ज्ञात होने पर समुच्चय B के अवयव ज्ञात करना**

**प्रश्न 1■** समुच्चय A = {7, 8, 3} के संगत समुच्चय B ज्ञात कीजिए कि समुच्चय A के अवयवों के वर्गो का योग = समुच्चय B के अवयवों के वर्गो का योग हो ?

**हल**

$S = (a_1+b_1) = (a_2+b_2) = (a_3+b_3) = \frac{2R}{n}$ से

$S = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{2}{3}(7+8+3) = 12$

$\therefore\ b_1 = 12 - a_1 = 12\text{-}7 = 5$

$b_2 = 12 - a_2 = 12\text{-}8 = 4$

$b_3 = 12 - a_3 = 12\text{-}3 = 9$ से समुच्चय B = { 5 4 9 } उत्तर

**जाँच**

समुच्चय A के अवयवों के वर्गो का योग $= 7^2 + 8^2 + 3^2 = 49 + 64 + 9 = 122$

समुच्चय B के अवयवों के वर्गो का योग $= 5^2 + 4^2 + 9^2 = 25 + 16 + 81 = 122$

**निष्कर्ष** प्राप्त उत्तर सही है।

**प्रश्न 2■** समुच्चय A ={56, 42, 9, 43, 93, 57, a, b } के प्रति a औरं b का मान ज्ञात करते हुए समुच्चय A के संगत समुच्चय B प्राप्त कीजिए । जिससे समुच्चय A के अवयवों का योग = समुच्चय B के अवयवों का योग = 404 तथा समुच्चय A के अवयवों के वर्गो का योग = समुच्चय B के अवयवों के वर्गो का योग = 27664 हो।

**हल**

समुच्चय A के अवयवों का योग = 404

$\Rightarrow\ 56 + 42 + 9 + 43 + 93 + 57 + a + b = 404$

$\Rightarrow\ 300 + + a + b = 4o4$

$\Rightarrow\ a+b = 104$ ------- समीकरण (1)

समुच्चय A के अवयवों के वर्गो का योग = 27664

$\Rightarrow\ 56^2 + 42^2 + 9^2 + 43^2 + 93^2 + 57^2 + a^2 + b^2 = 27664$

$\Rightarrow\ 3136 + 1764 + 81 + 1849 + 8649 + 3249 + a^2 + b^2 = 27664$

$\Rightarrow\ 18728 + a^2 + b^2 = 27664$

$\Rightarrow\ a^2 + b^2 = 8936$

$\Rightarrow\ (a+b)^2 - 2ab = 8936$

$\Rightarrow\ (104)^2 - 2ab = 8936$

$10816 - 2ab = 8936$

$\Rightarrow\ ab = 940$ ---------- समीकरण (2)

समीकरण (1) और (2) के हल से $a = 94$ तथा $b = 10$ होगा।

$\therefore$ समुच्चय $A = \{ 56, 42, 9, 43, 93, 57, 94, 10 \}$

समुच्चय A और समुच्चय B से बने युग्मीय पदों $( a_x\, b_x )$ की संख्या $n = 8$

R =समुच्चय A के अवयवों का योग = समुच्चय B के अवयवों का योग $= 404$

$\therefore \quad S = (a_x + b_x) = \frac{2R}{n}$ से $S = \frac{2*404}{8} = 101$

तब समुच्चय B के अवयव समुच्चय A अवयवों का क्रमशः 101 पूरत होगा। तब

समुच्चय $B = \{ 45, 59, 92, 58, 8, 44, 7, 91 \}$ होगा ।

---------10---------

# अध्याय -11
# सम *सम [2N*2N] जादुई–वर्ग विषयक और विशिष्ट अध्ययन

**11-1 सरल और विशिष्ट आधार–वर्ग–** पूर्वाध्ययन में [2N*2N] जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुति का आधार संगत आधार–वर्ग मात्र ही है। जादुई–वर्ग रचना विषयक और विशिष्ट (गहन) अध्ययन में जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुति का आधार संगत विशिष्ट आधार–वर्ग है।जिसे प्राप्त करने आधार श्रोत माध्यम उक्त पूर्वाध्ययन में प्रस्तुत आधार–वर्ग ही है, इस अध्ययन विस्तार प्रसंग में सामान्य या सरल आधार–वर्ग के नाम से परिभाषित है। उक्त सामान्य या सरल आधार–वर्ग के प्रथम पंक्ति से N वाँ पंक्ति तक के क्रमशः दो–दो स्तम्भिक अवयव को पुनः नवीन आधार–वर्ग के एक–एक पंक्ति में दर्ज कर प्रथम पंक्ति से N वाँ पंक्ति तक पूरा करे। तत्पश्चात सामान्य आधार–वर्ग के (N+1)वाँ पंक्ति से 2N वाँ पंक्ति तक के क्रमशः दो–दो स्तम्भिक अवयव को पुनः नवीन आधार–वर्ग के एक–एक पंक्ति में दर्ज कर (N+1)वाँ पंक्ति से 2N वाँ पंक्ति तक पूरा करे। इस प्रकार प्राप्त नवीन आधार–वर्ग को [2N*2N] जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुति के प्रति विशिष्ट आधार–वर्ग कहलाता है।

**जैसे** 6*6 =(2*3)*(2*3) के प्रति–

**सामान्य या सरल आधार–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 9 | 15 | 4 | 10 | 16 |
| 5 | 11 | 17 | 6 | 12 | 18 |
| 19 | 25 | 31 | 20 | 26 | 32 |
| 21 | 27 | 33 | 22 | 28 | 34 |
| 23 | 29 | 35 | 24 | 30 | 36 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग द्वारा जादुई–वर्ग रचना विधि** अनुच्छेद 10-6 में प्रस्तुत सम *सम का ग्रगीन जादुई–वर्ग रचना विधि विश्लेषण को यथावत लेवें।

**11--2 केवल 4*4 का जादुई–वर्ग रचना विषयक**

(1) **सामान्य जादुई–वर्ग रचना विषयक** – अनुच्छेद 10-6 के अनुसार केवल 4*4 सहित व्यापक रूप में [2N*2N] का सम *सम रचित जादुई–वर्ग में निहित अन्तःनिष्ठ वर्ग के सम्मुख पंक्ति के प्रति–(ऊपर पंक्ति के अवयव के वर्गमानों का योगमान = ऊपर पंक्ति के अवयव के वर्गमानों का योगमान) एवं सम्मुख स्तम्भ के प्रति–(बाँया स्तम्भ के अवयव के वर्गमानों का योगमान = ऊपर पंक्ति दाँया स्तम्भ के अवयव के वर्गमानों का योगमान) का महत्वपूर्ण गुण प्रतिपादित है। जिसे स्पष्ट करने जादुई–वर्ग को नियमानुसार रंगदान कर [2N*2N] का ग्रगीन जादुई–वर्ग नाम दिया गया है।लेकिन सम *सम के जादुई वर्ग रचना प्रसंग में –

(1) नियमानुसार कदापि रंग धारण नहीं करने के नियम के प्रति विशुद्ध रूप में 3 स्थिति में प्रतिपादित होगा। ।

1• मूलतः उभयनिष्ट सर्वान्तर वाले 4 पदी अलग–अलग 4 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद अवयव स्वयं में एक समान्तर का अवयव होने बाध्य नहीं है।

2• उभयनिष्ट श्रेढ़ी वाले 4 पदी 2 समांतर श्रेढ़ी और 8 पदी अलग–अलग 1 समांतर श्रेढ़ी का अवयव होगा।

3• उभयनिष्ट सर्वान्तर वाले 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी और 12 पदी अलग–अलग 1 समांतर श्रेढ़ी का अवयव होगा।

(2) **सामान्य जादुई–वर्ग एवं इनमें निहित रंगीन जादुई–वर्ग रचना विषयक** सामान्य जादुई–वर्ग एवं इनमें निहित रंगीन जादुई–वर्ग रचना विषयक 3 स्थिति में प्रतिपादित होगा।

1• मूलतः उभयनिष्ट श्रेढ़ी वाले 4 पदी अलग–अलग 4 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद अवयव स्वयं में एक समान्तर का अवयव होगा।

2• उभयनिष्ट श्रेढ़ी वाले 8 पदी 2 समांतर श्रेढ़ी होगा।

3• उभयनिष्ट श्रेढ़ी वाले 16 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी होगा।

ज्ञात हो केवल 4*4 का सामान्य जादुई–वर्ग रचना विषयक स्थिति 2 एवं केवल 4*4 का सामान्य जादुई–वर्ग एवं इनमें निहित रंगीन जादुई–वर्ग रचना विषयक तीनीं स्थितियाँ, केवल 4*4 का सामान्य जादुई–वर्ग रचना विषयक स्थिति 1का स्वरूप है। जिनकी

प्रस्तुति के लिए (सामान्य आधार–वर्ग) → (विशिष्ट आधार–वर्ग) → (जादुई–वर्ग) का क्रम मान्य है। विशिष्ट आधार–वर्ग प्राप्त करने का नियम प्रतिपादित होने से ही 4*4 जादुई–वर्ग रचना विषयक और विशिष्ट अध्ययन कहा गया है।यह विशिष्ट आधार–वर्ग प्राप्त करने के नियम का व्यापक विस्तार केवल और केवल 4*4 का जादुई–वर्ग रचना के ही प्रति निहित है। जिसके लिए–

(सामान्य आधार–वर्ग) → (विशिष्ट आधार–वर्ग) → (जादुई–वर्ग) का क्रम मान्य का नियम निम्नानुसार है।

## 1■ सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति सामान्य आधार–वर्ग रचना–

**प्रक्रम 1•** सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति सामान्य आधार–वर्ग रचना हेतू उपरोक्ताानुसार दिये समांतार श्रेढ़ियों के अवयवों को यथा क्रम **4*4** के डब्बों ( खानों) में पंक्तिवार दर्ज कर सामान्य आधार–वर्ग रचना पूरा कीजिये। जो कि 4 के प्रथम यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्रथम सामान्य आधार–वर्ग होगा।

**प्रक्रम 2•** प्रत्येक यथार्थ भाजक के प्रति प्राप्त प्रथम सामान्य आधार–वर्ग के पंक्तिक क्रम बदलते हुये – !4=1*2*3*4 =24 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त करें। पुनःइन्हें स्तम्भिक दिशा में उलटकर 24 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त करें। इसी प्रकार स्तम्भिक दिशा क्रम बदलते हुये 24 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त करें। प पुनःइन्हें पंक्तिक दिशा में उलटकर 24 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त करें। इस प्रकार 4 के प्रथम यथार्थ भाजक 1 के प्रति 24+24+24+24 =96 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त होंगे जिनमें 4 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग दोहराये हुये होंगे। अर्थात कुल 96-4 =92 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त होंगे । इसी प्रकार 4 के प्रथम यथार्थ भाजक 2 और 4 के प्रति अलग–अलग 92-92 प्रकारों में सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त होंगे। तीनों यथार्थ मिलाकर कुल 92+92+92 =276 प्रकार के सामान्य आधार–वर्ग प्राप्त होंगे ।

**2■ विशिष्ट आधार–वर्ग** सामान्य या सरल आधार–वर्ग के प्रथम एवं दूसरे पंक्ति के क्रमशः दो–दो स्तम्भिक अवयव को नवीन आधार–वर्ग के प्रथम एवं दूसरे में दर्ज कर प्रथम एवं दूसरे पंक्ति पूरा करे। तत्पश्चात सामान्य आधार–वर्ग के तीसरे एवं चौथे पंक्ति के क्रमशः दो–दो स्तम्भिक अवयव को नवीन आधार–वर्ग के एक–एक पंक्ति में दर्ज कर तीसरे एवं चौथे पंक्ति पूरा करे। इस प्रकार प्राप्त नवीन आधार–वर्ग को [4*4] जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुति के प्रति विशिष्ट आधार–वर्ग कहलाता है।

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ |
| $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | $d_4$ |

**से विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $b_1$ | $a_2$ | $b_2$ |
| $a_3$ | $b_3$ | $a_4$ | $b_4$ |
| $c_1$ | $d_1$ | $c_2$ | $d_2$ |
| $c_3$ | $d_3$ | $c_4$ | $d_4$ |

## 3■ विशिष्ट आधार–वर्ग से विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना विधि–

अनुच्छ 10-6 के अनुसार केवल 4*4 का रंगीन जादुई–वर्ग विधि यथावत शब्दों में लेवे। जिसके अनुसार उपरोक्त विशिष्ट आधार–वर्ग का विशिष्ट जादुई–वर्ग प्रतिरूपण यथा अवलाकित कीजिये।

## 4■ सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → विशिष्ट जादुई –वर्ग–

**विशिष्ट जादुई–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_4$ | $d_3$ | $b_2$ |
| $d_2$ | $b_3$ | $a_4$ | $c_1$ |
| $b_4$ | $d_1$ | $c_2$ | $a_3$ |
| $c_3$ | $a_2$ | $b_1$ | $d_4$ |

**1•** 4*4 **का केवल सामान्य जादुई–वर्ग रचना विषयक**– स्थिति 1 और स्थिति 2 के प्रति अलग–अलग 4 के तीनों यथार्थ भाजक [1,2,4] में से 1 और 4 के प्रति सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → विशिष्ट जादुई –वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या 92+92 = 184 होगा।

**2•** 4*4 **का सामान्य जादुई–वर्ग में निहित विशिष्ट रंगीन जादुई –वर्ग रचना विषयक**– स्थिति 1 के प्रति अलग–अलग 4 के तीनों यथार्थ भाजक [1,2,4] मे से 1 और 4 के प्रति प्राप्त सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → विशिष्ट जादुई –वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या 92+92 =184 में से 56 के प्रकार के जादुई–वर्ग , विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग के परिपालन2में निहित होंगे।

स्थिति 2 और स्थिति 3 के प्रति अलग–अलग 4 के तीनों यथार्थ भाजक [1,2,4] के प्रति प्राप्त सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → विशिष्ट जादुई –वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या 92+92+92 =276 में से 84 के प्रकार के जादुई–वर्ग , विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग के परिपालन में निहित होंगे ।

## 5■ जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डब्बों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान–

जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डब्बों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = ( जादुई –वर्ग रचना में प्रयुक्त चारों प्रकार के समान्तर के अवयवों का योगमान)÷ 4 होगा।

**उदाहरण 1■** उभयनिष्ट सर्वान्तर वाले 4 पदी अलग–अलग 4 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद अवयव स्वयं में एक समान्तर का अवयव होने बाध्य नहीं है के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) [3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d) [4] e, (e+d),(e+2d), (e+3d) से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डब्बों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = ( जादुई –वर्ग रचना में प्रयुक्त चारों प्रकार के समान्तर के अवयवों का योगमान)÷ 4 = [4a+4b+4c+4d+26e] )÷ 4 = [a + b + c + e + 6d] एवं जादुई–वर्ग के प्रकारों की कुल संख्या 184 होगा। रचना विश्लेषण प्रस्तुत है। –

**यथार्थ भाजक 1 के प्रति आधार–वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग**

**[A] प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का पंक्तिक स्थानान्तरण नियम से–**

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+d | b+d |
| a+2d | b+2d | a+3d | b+3d |
| c | e | c+d | e+d |
| c+2d | e+2d | c+3d | c+7d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+3d | e+2d | b+d |
| e+d | b+2d | a+3d | c |
| b+3d | e | c+d | a+2d |
| c+2d | a+d | b | c+3d |

(2) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+d | b+d |
| a+2d | b+2d | a+3d | b+3d |
| e | c | e+d | c+d |
| e+2d | c+2d | e+3d | c+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | e+3d | c+2d | b+d |
| c+d | b+2d | a+3d | e |
| b+3d | c | e+d | a+2d |
| e+2d | a+d | b | c+3d |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c | a+d | c+d |
| a+2d | c+2d | a+3d | c+3d |
| b | e | b+d | e+d |
| b+2d | e+2d | b+3d | e+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b+3d | e+2d | c+d |
| a+d | c+2d | a+3d | b |
| c+3d | e | b+d | a+2d |
| b+2d | a+d | c | e+3d |

(4) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c | a+d | c+d |
| a+2d | c+2d | a+3d | c+3d |
| e | b | e+d | b+d |
| e+2d | b+2d | e+3d | b+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | e+3d | b+2d | c+d |
| b+d | c+2d | a+3d | e |
| c+3d | b | e+d | a+2d |
| e+2d | a+d | c | b+3d |

(5) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | e | a+d | e+d |
| a+2d | e+2d | a+3d | e+3d |
| b | c | b+d | c+d |
| b+2d | c+2d | b+3d | c+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b+3d | c+2d | e+d |
| c+d | e+2d | a+3d | b |
| e+3d | c | b+d | a+2d |
| b+2d | a+d | e | c+3d |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | e | a+d | e+d |
| a+2d | e+2d | a+3d | e+3d |
| c | b | c+d | b+d |
| c+2d | b+2d | c+3d | b+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+3d | b+2d | e+d |
| b+d | e+2d | a+3d | c |
| e+3d | b | c+d | a+2d |
| c+2d | a+d | e | b+3d |

इसी प्रकार सामान्य आधार–वर्ग के प्रति शेष तीनों पंक्ति के अवयव अलग–अलग प्रथम पंक्ति में दर्ज कर 6-6 प्रकारों में प्राप्त कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। पुनः इन 24 प्रकारों के अवयवों को स्तम्भिक दिशा परिवर्तन दे कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। इस प्रकार कुल 48 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये।

## [B] प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों का स्तम्भिक स्थानान्तरण नियम से–

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+d | b+d |
| a+2d | b+2d | a+3d | b+3d |
| c | e | c+d | e+d |
| c+2d | e+2d | c+3d | e+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+3d | e+2d | b+d |
| e+d | b+2d | a+3d | C |
| b+3d | e | c+d | a+2d |
| c+2d | a+d | b | c+3d |

(2) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+3d | a+2d |
| b | b+d | b+3d | b+2d |
| c | c+d | c+3d | c+2d |
| e | e+d | e+3d | e+2d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+d | b+d |
| a+3d | b+3d | a+2d | b+2d |
| c | e | c+d | e+d |
| c+3d | e+3d | c+2d | e+2d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+2d | e+3d | b+d |
| e+d | b+3d | a+2d | c |
| b+2d | e | c+d | a+3d |
| c+3d | a+d | b | e+2d |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+2d | a+d | a+3d |
| b | b+2d | b+d | b+3d |
| c | c+2d | c+d | c+3d |
| e | e+2d | e+d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | B | a+2d | b+2d |
| a+d | b+d | a+3d | b+3d |
| c | E | c+2d | e+2d |
| c+d | e+d | c+3d | e+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+3d | e+d | b+2d |
| e+2d | b+d | a+3d | c |
| b+3d | e | c+2d | a+d |
| c+d | a+2d | b | e+3d |

(4) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+2d | a+3d | a+d |
| b | b+2d | b+3d | b+d |
| c | c+2d | c+3d | c+d |
| e | e+2d | e+3d | e+d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | B | a+2d | b+2d |
| a+3d | b+3d | a+d | b+d |
| c | e | c+2d | e+2d |
| c+3d | e+3d | c+d | e+d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+d | e+3d | b+2d |
| e+2d | b+3d | a+d | c |
| b+d | e | c+2d | a+3d |
| c+3d | a+2d | b | e+d |

(5] सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+3d | a+d | a+2d |
| b | b+3d | b+d | b+2d |
| c | c+3d | c+d | c+2d |
| e | e+3d | e+d | e+2d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+3d | b+3d |
| a+d | b+d | a+2d | b+2d |
| c | e | c+3d | e+3d |
| c+d | e+d | c+2d | e+2d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+2d | e+d | b+3d |
| e+3d | b+d | a+2d | c |
| b+2d | e | c+3d | a+d |
| c+d | a+3d | b | e+2d |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+3d | a+2d | a+d |
| b | b+3d | b+2d | b+d |
| c | c+3d | c+2d | c+d |
| e | e+3d | e+2d | e+d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | a+3d | b+3d |
| a+2d | b+2d | a+d | b+d |
| c | e | c+3d | e+3d |
| c+2d | e+2d | c+d | e+d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | c+d | e+2d | b+3d |
| e+3d | b+2d | a+d | c |
| b+d | e | c+3d | a+2d |
| c+2d | a+3d | b | e+d |

इसी प्रकार सामान्य आधार–वर्ग के प्रति शेष तीनों स्तम्भ के अवयव अलग–अलग प्रथम स्तम्भ में दर्ज कर 6-6 प्रकारों में प्राप्त कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। पुनः इन 24 प्रकारों के अवयवों को

स्तम्भिक दिशा परिवर्तन दे कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। इस प्रकार कुल 48 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये।

इस प्रकार [A] और[B] मिलाकर यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग प्रकार श्रृंखला में 48+48 =96 प्रकार होंगे, जिनमें से 4 प्रकार दोहराये हुये होंगे। अतः वासतविक प्रकारों की संख्या 96 -4 =92 होंगे।

## यथार्थ भाजक 4 के प्रति आधार–वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग

### [A] प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का पंक्तिक स्थानान्तरण नियम से–

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+d | b+d | c+d | e+d |
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+d | b | b+d |
|---|---|---|---|
| c | c+d | e | e+d |
| a+2d | a+3d | b+2d | b+3d |
| c+2d | c+3d | e+2d | e+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+2d | c+3d | b+d |
|---|---|---|---|
| b+3d | c+d | e | a+2d |
| e+d | a+3d | b+2d | c |
| c+2d | b | a+d | e+3d |

(2) सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+d | b+d | c+d | e+d |
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+d | b | b+d |
|---|---|---|---|
| c | c+d | e | e+d |
| a+3d | a+2d | b+3d | b+2d |
| c+3d | c+2d | e+3d | e+2d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+3d | e+2d | b+d |
|---|---|---|---|
| b+2d | c+d | e | a+3d |
| e+d | a+2d | b+3d | c |
| c+3d | b | a+d | e+2d |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |
| a+d | b+d | c+d | e+d |
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+2d | b | b+2d |
|---|---|---|---|
| c | c+2d | e | e+2d |
| a+d | a+3d | b+d | b+3d |
| c+d | c+3d | e+d | e+3d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+d | c+3d | b+2d |
|---|---|---|---|
| b+3d | c+2d | e | a+d |
| e+2d | a+3d | b+d | c |
| c+d | b | a+2d | e+3d |

(4] सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |
| a+d | b+d | c+d | e+d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+2d | b | b+2d |
|---|---|---|---|
| c | c+2d | e | e+2d |
| a+3d | a+d | b+3d | b+d |
| c+3d | c+d | e+3d | e+d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+3d | c+d | b+2d |
|---|---|---|---|
| b+d | c+2d | e | a+3d |
| e+2d | a+d | b+3d | c |
| c+3d | b | a+2d | e+d |

(5) सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |
| a+d | b+d | c+d | e+d |
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+3d | b | b+3d |
|---|---|---|---|
| c | c+3d | e | e+3d |
| a+d | a+2d | b+d | b+2d |
| c+d | c+2d | e+d | e+2d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+d | c+2d | b+3d |
|---|---|---|---|
| b+2d | c+3d | e | a+d |
| e+3d | a+2d | b+d | c |
| c+d | b | a+3d | e+2d |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |
| a+d | b+d | c+d | e+d |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| a | a+3d | b | b+3d |
|---|---|---|---|
| c | c+3d | e | e+3d |
| a+2d | a+d | b+2d | b+d |
| c+2d | c+d | e+2d | e+d |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| a | e+2d | c+d | b+3d |
|---|---|---|---|
| b+d | c+3d | e | a+2d |
| e+3d | a+d | b+2d | c |
| c+2d | b | a+3d | e+d |

इसी प्रकार सामान्य आधार–वर्ग के प्रति शेष तीनों पंक्ति के अवयव अलग–अलग प्रथम पंक्ति में दर्ज कर 6-6 प्रकारों में प्राप्त कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। पुनः इन 24 प्रकारों के अवयवों को

स्तम्भिक दिशा परिवर्तन दे कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। इस प्रकार कुल 48 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये।

**[B] प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का स्तम्भिक स्थानान्तरण नियम से–**

(1) **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | b | c | e |
|---|---|---|---|
| a+d | b+d | c+d | e+d |
| a+2d | b+2d | c+2d | e+2d |
| a+3d | b+3d | c+3d | e+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | b | b+d |
|---|---|---|---|
| c | c+d | e | e+d |
| a+2d | a+3d | b+2d | b+3d |
| c+2d | c+3d | e+2d | e+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | e+2d | c+3d | b+d |
|---|---|---|---|
| b+3d | c+d | e | a+2d |
| e+d | a+3d | b+2d | c |
| c+2d | b | a+d | e+3d |

(2) **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | b | e | c |
|---|---|---|---|
| a+d | b+d | e+d | c+d |
| a+2d | b+2d | e+2d | c+2d |
| a+3d | b+3d | e+3d | c+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | b | b+d |
|---|---|---|---|
| e | e+d | c | c+d |
| a+2d | a+3d | b+2d | b+3d |
| e+2d | e+3d | c+2d | c+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | c+2d | e+3d | b+d |
|---|---|---|---|
| b+3d | e+d | c | a+2d |
| c+d | a+3d | b+2d | e |
| e+2d | b | a+d | c+3d |

(3) **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | c | b | e |
|---|---|---|---|
| a+d | c+d | b+d | e+d |
| a+2d | c+2d | b+2d | e+2d |
| a+3d | c+3d | b+3d | e+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | c | c+d |
|---|---|---|---|
| b | b+d | e | e+d |
| a+2d | a+3d | c+2d | c+3d |
| b+2d | b+3d | e+2d | e+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | e+2d | b+3d | c+d |
|---|---|---|---|
| c+3d | b+d | e | a+2d |
| e+d | a+3d | c+2d | b |
| b+2d | c | a+d | e+3d |

(4) **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | c | e | b |
|---|---|---|---|
| a+d | c+d | e+d | b+d |
| a+2d | c+2d | e+2d | b+2d |
| a+3d | c+3d | e+3d | b+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | c | c+d |
|---|---|---|---|
| e | e+d | b | b+d |
| a+2d | a+3d | c+2d | c+3d |
| e+2d | e+3d | b+2d | b+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | b+2d | e+3d | c+d |
|---|---|---|---|
| c+3d | e+d | b | a+2d |
| b+d | a+3d | c+2d | e |
| e+2d | c | a+d | b+3d |

(5) **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | e | b | c |
|---|---|---|---|
| a+d | e+d | b+d | c+d |
| a+2d | e+2d | b+2d | c+2d |
| a+3d | e+3d | b+3d | c+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | e | e+d |
|---|---|---|---|
| b | b+d | c | c+d |
| a+2d | a+3d | e+2d | e+3d |
| b+2d | b+3d | c+2d | c+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | c+2d | b+3d | e+d |
|---|---|---|---|
| e+3d | b+d | c | a+2d |
| c+d | a+3d | e+2d | b |
| b+2d | e | a+d | c+3d |

(6 **सामान्य आधार–वर्ग**

| a | e | c | b |
|---|---|---|---|
| a+d | e+d | c+d | b+d |
| a+2d | e+2d | c+2d | b+2d |
| a+3d | e+3d | c+3d | b+3d |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| a | a+d | e | e+d |
|---|---|---|---|
| c | c+d | b | b+d |
| a+2d | a+3d | e+2d | e+3d |
| c+2d | c+3d | b+2d | b+3d |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| a | b+2d | c+3d | e+d |
|---|---|---|---|
| e+3d | c+d | b | a+2d |
| b+d | a+3d | e+2d | c |
| c+2d | e | a+d | b+3d |

इसी प्रकार सामान्य आधार–वर्ग के प्रति शेष तीनों स्तम्भ के अवयव अलग–अलग प्रथम स्तम्भ में दर्ज कर 6-6 प्रकारों में प्राप्त कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रंखला प्राप्त कीजिये। पुनः इन 24 प्रकारों के अवयवों को स्तम्भिक दिशा परिवर्तन दे कर 24 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये। इस प्रकार कुल 48 प्रकारों में सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग श्रृंखला प्राप्त कीजिये।

**अन्तिम गणना** इस प्रकार [A] और[B] मिलाकर यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग प्रकार श्रृंखला में 48+48 =96 प्रकार होंगे, जिनमें से 4 प्रकार दोहराये हुये होंगे। अतः वास्तविक प्रकारों की संख्या 96 -4 =92 होंगे।

यथार्थ भाजक 1 और 4 मिलाकर कुल वास्तविक प्रकारों की संख्या 92 +92= 184 प्राप्त होंगे।

**उदाहरण2 ■** **4** पदी 2 समान्तर और **8** पदी **1** पद समान्तर श्रेढ़ी के अवयव [150,151,152,153], [527,528,529,530] और [739,740,741,742,743,744,745,746] से पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक 4-4 अवयवों का योग मान 2165 के प्रति 4*4 जादुई–वर्ग रचना–

**यथार्थ भाजक 1 के प्रति आधार–वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग**

**[A] प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का पंक्तिक स्थानान्तरण नियम से–**

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 151 | 528 |
| 152 | 529 | 153 | 530 |
| 739 | 743 | 740 | 744 |
| 741 | 745 | 742 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 742 | 745 | 528 |
| 744 | 529 | 153 | 739 |
| 530 | 743 | 740 | 152 |
| 741 | 151 | 527 | 746 |

(2) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 151 | 528 |
| 152 | 529 | 153 | 530 |
| 743 | 739 | 744 | 740 |
| 745 | 741 | 746 | 742 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 746 | 741 | 528 |
| 740 | 529 | 153 | 743 |
| 530 | 739 | 744 | 152 |
| 745 | 151 | 527 | 742 |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 739 | 151 | 740 |
| 152 | 741 | 153 | 742 |
| 527 | 743 | 528 | 744 |
| 529 | 745 | 530 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 530 | 745 | 740 |
| 744 | 741 | 153 | 527 |
| 742 | 743 | 528 | 152 |
| 529 | 151 | 739 | 746 |

(4) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 739 | 151 | 740 |
| 152 | 741 | 153 | 742 |
| 743 | 527 | 744 | 528 |
| 745 | 529 | 746 | 530 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 746 | 529 | 740 |
| 528 | 741 | 153 | 743 |
| 742 | 527 | 744 | 152 |
| 745 | 151 | 739 | 530 |

(5) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 743 | 151 | 744 |
| 152 | 745 | 153 | 746 |
| 527 | 739 | 528 | 740 |
| 529 | 741 | 530 | 742 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 530 | 741 | 744 |
| 740 | 745 | 153 | 527 |
| 746 | 739 | 528 | 152 |
| 529 | 151 | 743 | 742 |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 743 | 151 | 744 |
| 152 | 745 | 153 | 746 |
| 739 | 527 | 740 | 528 |
| 741 | 529 | 742 | 530 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 742 | 529 | 744 |
| 528 | 745 | 153 | 739 |
| 746 | 527 | 740 | 152 |
| 741 | 151 | 743 | 530 |

शेष 42 प्रकार उपरोक्त बीजीय उदाहरण 1 के शब्दों में।

[B] **प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों का स्तम्भिक स्थानान्तरण नियम से–**

(1)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 152 | 153 |
| 527 | 528 | 529 | 530 |
| 739 | 740 | 741 | 742 |
| 743 | 744 | 745 | 746 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 151 | 528 |
| 152 | 529 | 153 | 530 |
| 739 | 743 | 740 | 744 |
| 741 | 745 | 742 | 746 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 742 | 745 | 528 |
| 744 | 529 | 153 | 739 |
| 530 | 743 | 740 | 152 |
| 741 | 151 | 527 | 746 |

(2)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 153 | 152 |
| 527 | 528 | 530 | 529 |
| 739 | 740 | 742 | 741 |
| 743 | 744 | 746 | 745 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 151 | 528 |
| 153 | 530 | 152 | 529 |
| 739 | 743 | 740 | 744 |
| 742 | 746 | 741 | 745 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 741 | 746 | 528 |
| 744 | 530 | 152 | 739 |
| 529 | 743 | 740 | 153 |
| 742 | 151 | 527 | 745 |

(3)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 152 | 151 | 153 |
| 527 | 529 | 528 | 530 |
| 739 | 741 | 740 | 742 |
| 743 | 745 | 744 | 746 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 152 | 529 |
| 151 | 528 | 153 | 530 |
| 739 | 743 | 741 | 745 |
| 740 | 744 | 742 | 746 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 742 | 744 | 529 |
| 745 | 528 | 153 | 739 |
| 530 | 743 | 741 | 151 |
| 740 | 152 | 527 | 746 |

(4)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 152 | 153 | 151 |
| 527 | 529 | 530 | 528 |
| 739 | 741 | 742 | 740 |
| 743 | 745 | 746 | 744 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 152 | 529 |
| 153 | 530 | 151 | 528 |
| 739 | 743 | 741 | 745 |
| 742 | 746 | 740 | 744 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 152 | 529 |
| 153 | 530 | 151 | 528 |
| 739 | 743 | 741 | 745 |
| 742 | 746 | 740 | 744 |

(5)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 151 | 152 |
| 527 | 530 | 528 | 529 |
| 739 | 742 | 740 | 741 |
| 743 | 746 | 744 | 745 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 153 | 530 |
| 151 | 528 | 152 | 529 |
| 739 | 743 | 742 | 746 |
| 740 | 744 | 741 | 745 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 741 | 744 | 530 |
| 746 | 528 | 152 | 739 |
| 529 | 743 | 742 | 151 |
| 740 | 153 | 527 | 745 |

(6)

| सामान्य आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 152 | 151 |
| 527 | 530 | 529 | 528 |
| 739 | 742 | 741 | 740 |
| 743 | 746 | 745 | 744 |

| विशिष्ट आधार–वर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 153 | 530 |
| 152 | 529 | 151 | 528 |
| 739 | 743 | 742 | 746 |
| 741 | 745 | 740 | 744 |

| सामान्य जादुई–व्रर्ग | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 740 | 745 | 530 |
| 746 | 529 | 151 | 739 |
| 528 | 743 | 742 | 152 |
| 741 | 153 | 527 | 744 |

शेष 42 प्रकार उपरोक्त बीजीय उदाहरण 1 के शब्दों में।

**यथार्थ भाजक 4 के प्रति आधार–वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग**

[A] **प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का पंक्तिक स्थानान्तरण नियम से–**

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 527 | 528 |
| 739 | 740 | 743 | 744 |
| 152 | 153 | 529 | 530 |
| 741 | 742 | 745 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 745 | 742 | 528 |
| 530 | 740 | 743 | 152 |
| 744 | 153 | 529 | 739 |
| 741 | 527 | 151 | 746 |

(2) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 527 | 528 |
| 739 | 740 | 743 | 744 |
| 153 | 152 | 530 | 529 |
| 742 | 741 | 746 | 745 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 746 | 741 | 528 |
| 529 | 740 | 743 | 153 |
| 744 | 152 | 530 | 739 |
| 742 | 527 | 151 | 745 |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 152 | 527 | 529 |
| 739 | 741 | 743 | 745 |
| 151 | 153 | 528 | 530 |
| 740 | 742 | 744 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 744 | 742 | 529 |
| 530 | 741 | 743 | 151 |
| 745 | 153 | 528 | 739 |
| 740 | 527 | 152 | 746 |

(4) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 152 | 527 | 529 |
| 739 | 741 | 743 | 745 |
| 153 | 151 | 530 | 528 |
| 742 | 740 | 746 | 744 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 746 | 746 | 529 |
| 528 | 741 | 743 | 153 |
| 745 | 151 | 530 | 739 |
| 742 | 527 | 152 | 744 |

(5) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 527 | 530 |
| 739 | 742 | 743 | 746 |
| 151 | 152 | 528 | 529 |
| 740 | 741 | 744 | 745 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 744 | 741 | 530 |
| 529 | 742 | 743 | 151 |
| 746 | 152 | 528 | 739 |
| 740 | 527 | 153 | 745 |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 153 | 527 | 530 |
| 739 | 742 | 743 | 746 |
| 152 | 151 | 529 | 528 |
| 741 | 740 | 745 | 744 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 745 | 740 | 530 |
| 528 | 742 | 743 | 152 |
| 746 | 151 | 529 | 739 |
| 741 | 527 | 153 | 744 |

शेष 42 प्रकार उपरोक्त बीजीय उदाहरण 1 के शब्दों में।

[B] प्रथम आधार–वर्ग केअवयवों का स्तम्भिक स्थानान्तरण नियम से–

(1) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 739 | 743 |
| 151 | 528 | 740 | 744 |
| 152 | 529 | 741 | 745 |
| 153 | 530 | 742 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 527 | 528 |
| 739 | 740 | 743 | 744 |
| 152 | 153 | 529 | 530 |
| 741 | 742 | 745 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 745 | 742 | 528 |
| 530 | 740 | 743 | 152 |
| 744 | 153 | 529 | 739 |
| 741 | 527 | 151 | 746 |

(2)

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 527 | 743 | 739 |
| 151 | 528 | 744 | 740 |
| 152 | 529 | 745 | 741 |
| 153 | 530 | 746 | 742 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 527 | 528 |
| 743 | 744 | 739 | 740 |
| 152 | 153 | 529 | 530 |
| 745 | 746 | 741 | 742 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 741 | 746 | 528 |
| 530 | 744 | 739 | 152 |
| 740 | 153 | 529 | 743 |
| 745 | 527 | 151 | 742 |

(3) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 739 | 527 | 743 |
| 151 | 740 | 528 | 744 |
| 152 | 741 | 529 | 745 |
| 153 | 742 | 530 | 746 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 739 | 740 |
| 527 | 526 | 743 | 744 |
| 152 | 153 | 741 | 742 |
| 529 | 530 | 745 | 746 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 745 | 530 | 740 |
| 742 | 526 | 743 | 142 |
| 744 | 153 | 741 | 527 |
| 529 | 739 | 151 | 746 |

(4) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 739 | 743 | 527 |
| 151 | 740 | 744 | 528 |
| 152 | 741 | 745 | 529 |
| 153 | 742 | 746 | 530 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 739 | 740 |
| 743 | 744 | 527 | 528 |
| 152 | 153 | 741 | 742 |
| 745 | 746 | 529 | 530 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 529 | 746 | 740 |
| 742 | 744 | 527 | 152 |
| 528 | 153 | 741 | 743 |
| 745 | 739 | 151 | 530 |

(5) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 743 | 527 | 739 |
| 151 | 744 | 528 | 740 |
| 152 | 745 | 529 | 741 |
| 153 | 746 | 530 | 742 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 743 | 744 |
| 527 | 528 | 739 | 740 |
| 152 | 153 | 745 | 746 |
| 529 | 530 | 741 | 742 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 741 | 530 | 744 |
| 746 | 528 | 739 | 152 |
| 740 | 153 | 745 | 527 |
| 529 | 743 | 151 | 742 |

(6) सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 743 | 739 | 527 |
| 151 | 744 | 740 | 528 |
| 152 | 745 | 741 | 529 |
| 153 | 746 | 742 | 530 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 151 | 743 | 744 |
| 739 | 740 | 527 | 528 |
| 152 | 153 | 745 | 746 |
| 741 | 742 | 529 | 530 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 529 | 742 | 744 |
| 746 | 740 | 527 | 152 |
| 528 | 153 | 745 | 739 |
| 741 | 743 | 151 | 530 |

शेष 42 प्रकार उपरोक्त बीजीय उदाहरण 1 के शब्दों में।

**अन्तिम गणना** इस प्रकार [A] और[B] मिलाकर यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग प्रकार श्रृंखला में 48+48 =96 प्रकार होंगे, जिनमें से 4 प्रकार दोहराये हुये होंगे। अतः वास्तविक प्रकारों की संख्या 96 -4 =92 होंगे। यथार्थ भाजक 1 और 4 मिलाकर कुल वास्तविक प्रकारों की संख्या 92 +92= 184 प्राप्त होंगे।

## 11-3 योगमान S के प्रति कोई भी अवयव बिना दोहराये प्राप्त प्रथम सामान्य आधार–वर्ग की व्यापकता में a का विस्तार–

जादुई–वर्ग के योग गुण के अनुसार वर्ग के स्तम्भिक, पंक्तिक एवं विकर्णिक में स्थित 4- 4 का अवयवों का योगमान $S \geq (22+4a)$ के प्रतिबंध पर a का अधिकतम् मान $(S-22) \div 4$ की संक्रिया से प्राप्त भागफल r के प्रति प्रथम आधार –वर्ग की संख्या शून्येतर शेषफल पर $(r-2)$**एवं अशेष पर पर** $(r-3)$ होगा। इन प्राप्त प्रथम आधार –वर्ग के प्रति–

प्रथम 4 पदी क्रमागत संख्या अवयव $\{S-(3a+21)\}, \{S-(3a+20)\}, \{S-(3a+19)\}, \{S-(3a+18)\}$, एवं द्वितीय 12 पदी क्रमागत संख्या अवयव $(a+1),(a+2),(a+3),(a+4), (a+5), (a+6), (a+7), (a+8), (a+9),(a+10), (a+11),(a+12)$ होगा । जहाँ a **का विस्तार–** $(r-3) / (r-2)$ के प्रति –

0, 1, 2, 3, 4,------ $(r-3)$ संख्यांक मान कमश$(r-2)$ :प्रकारों में प्रथम सामान्य आधार–वर्ग रचना प्रस्तुत किया जा सकता है। जिनके अवयव के स्थान बदलने के नियम के तारतम्य में 184 प्रकारों में पाया जा सकता है। कुल प्रकारों की संख्या ,------ $(r-2)*184$ होगा

जिनके प्रथम पद $\{S-(3a+21)\}=x$ और $(a+1)=y$ संकेतन में लिये जाने पर–

प्रथम आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → विशिष्ट जादुई–वर्ग की श्रृंखला प्राप्त होग। प्रथम आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | x+1 | xx+2 | xx+3 |
| y | y+1 | y+2 | y+3 |
| y+4 | y+5 | y+6 | y+7 |
| y+8 | y+9 | y+10 | y+11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | y | x+1 | y+1 |
| x+2 | y+2 | x+3 | y+3 |
| y+4 | y+8 | y+5 | y+9 |
| y+6 | y+10 | y+7 | y+11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | y+7 | y+10 | y+1 |
| y+9 | y+2 | x+3 | y+4 |
| y+3 | y+8 | v+5 | x+2 |
| y+6 | x+1 | y | y+11 |

**उदाहरण1■–** 4*4 में वे समस्त सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुत कीजिये जिनके पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक 4-4 अवयवों का योग मान S=50 है।

**हल** (50-22)÷4= 28÷4 से शून्य शेषफल पर भागफल $r=7$ अतः योगमान S के प्रति प्रथम सामान्य आधार–वर्ग की व्यापकता में a के प्रति 0, 1, 2, 3, 4,------ $(7-3)=4$स्थापित कर (7-2) =5 प्रकारों में प्रथम सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग प्रस्तुति संख्या होगा, निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

प्रथम 4 पदी क्रमागते अवयव $\{S-(3a+21)\}$, $\{S-(3a+20)\}$, $\{S-(3a+19)\}$, $\{S-(3a+18)\}$, द्वितीय 12 पदी क्रमागत अवयव $(a+1),(a+2),(a+3),(a+4),(a+5),(a+6),(a+7),(a+8),(a+9),(a+10),(a+11),(a+12)$ में–

;(1) S=50, a=0 सामान्य आधार–वर्ग विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 31 | 32 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 1 | 30 | 2 |
| 31 | 3 | 32 | 4 |
| 5 | 9 | 6 | 10 |
| 7 | 11 | 8 | 12 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 8 | 11 | 2 |
| 10 | 3 | 32 | 5 |
| 4 | 9 | 6 | 31 |
| 7 | 30 | 1 | 12 |

;(2) S=50, a=1 सामान्य आधार–वर्ग विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 |
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 2 | 27 | 3 |
| 28 | 4 | 29 | 5 |
| 6 | 10 | 7 | 11 |
| 8 | 12 | 9 | 13 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 9 | 12 | 3 |
| 11 | 4 | 29 | 6 |
| 5 | 10 | 7 | 28 |
| 8 | 27 | 2 | 13 |

;

(3) S=50, a=2 सामान्य आधार–वर्ग विशिष्ट आधार–वर्ग सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 24 | 25 | 26 |
| 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 3 | 24 | 4 |
| 25 | 5 | 26 | 6 |
| 7 | 11 | 8 | 12 |
| 9 | 13 | 10 | 14 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 10 | 13 | 4 |
| 12 | 5 | 26 | 7 |
| 6 | 11 | 8 | 25 |
| 9 | 24 | 3 | 14 |

(4) S=50, a=3 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 4 | 21 | 5 |
| 22 | 6 | 23 | 7 |
| 8 | 12 | 9 | 13 |
| 10 | 14 | 11 | 15 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 11 | 14 | 5 |
| 13 | 6 | 23 | 8 |
| 7 | 12 | 9 | 22 |
| 10 | 21 | 4 | 15 |

;(5) S=50, a=4 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 18 | 19 | 20 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 5 | 18 | 6 |
| 19 | 7 | 20 | 8 |
| 9 | 13 | 10 | 14 |
| 11 | 15 | 12 | 16 |

सामान्य जादुई–व्रग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | 12 | 15 | 6 |
| 14 | 7 | 20 | 9 |
| 8 | 13 | 10 | 19 |
| 11 | 18 | 5 | 16 |

**उदाहरण2■–** 4*4 में वे समस्त सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग रचना प्रस्तुत कीजिये जिनके पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक 4-4 अवयवों का योग मान S=56 है।

**हल** (56-22)÷4= 34÷4 से शून्येतर शेषफल पर भागफल r=8 अतः योगमान S के प्रति प्रथम सामान्य आधार–वर्ग की व्यापकता में a के प्रति 0, 1, 2, ------$(r-3) = (8-3) = 5$ स्थापित कर (t-2)=(8-2)=6 प्रकारों में प्रथम सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग प्रस्तुति संख्या होगा, निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

प्रथम 4 पदी क्रमागत अवयव {S-(3a+21)}, {S-(3a+20)}, {S-(3a+19)}, {S-(3a+18)}, द्वितीय 12पदी क्रमागत अवयवऔर तृतीय 8 पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयव (a+1),(a+2),(a+3),(a+4), (a+5), (a+6), (a+7), (a+8) , (a+9),(a+10), (a+11),(a+12) में–

;(1) S=56, a=0 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 35 | 36 | 37 | 38 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 35 | 1 | 36 | 2 |
| 37 | 3 | 38 | 4 |
| 5 | 9 | 6 | 10 |
| 7 | 11 | 8 | 12 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 35 | 8 | 11 | 2 |
| 10 | 3 | 38 | 5 |
| 4 | 9 | 6 | 17 |
| 7 | 36 | 1 | 12 |

(2) S=56, a=1 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 32 | 33 | 34 | 35 |
| 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 32 | 2 | 33 | 3 |
| 34 | 4 | 35 | 5 |
| 6 | 10 | 7 | 11 |
| 8 | 12 | 9 | 13 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 32 | 9 | 12 | 3 |
| 11 | 4 | 35 | 6 |
| 5 | 10 | 7 | 34 |
| 8 | 33 | 7 | 13 |

(3) S=56, a=2 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 31 | 32 |
| 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 3 | 30 | 4 |
| 31 | 5 | 32 | 6 |
| 7 | 11 | 8 | 12 |
| 9 | 13 | 10 | 14 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 29 | 8 | 11 | 4 |
| 12 | 5 | 32 | 7 |
| 6 | 11 | 8 | 31 |
| 9 | 30 | 3 | 14 |

;(4) S=56, a=3 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 27 | 28 | 29 |
| 4 | 5 | 6 | 7 |
| 8 | 9 | 10 | 11 |
| 12 | 13 | 14 | 15 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 4 | 27 | 5 |
| 28 | 6 | 29 | 7 |
| 8 | 12 | 9 | 12 |
| 10 | 14 | 11 | 15 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 11 | 14 | 5 |
| 12 | 6 | 29 | 8 |
| 7 | 12 | 9 | 28 |
| 10 | 27 | 4 | 15 |

;(5) S=56, a=4 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 24 | 25 | 26 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 5 | 24 | 6 |
| 25 | 7 | 26 | 8 |
| 9 | 13 | 10 | 14 |
| 11 | 15 | 12 | 16 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 23 | 12 | 15 | 6 |
| 14 | 7 | 26 | 10 |
| 8 | 13 | 10 | 26 |
| 11 | 24 | 5 | 16 |

;(6) S=56, a=5 सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 21 | 22 | 23 |
| 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 11 | 12 | 13 |
| 14 | 15 | 16 | 17 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 6 | 21 | 7 |
| 22 | 8 | 23 | 9 |
| 10 | 14 | 11 | 15 |
| 12 | 16 | 13 | 17 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 13 | 16 | 7 |
| 15 | 8 | 23 | 10 |
| 9 | 14 | 11 | 22 |
| 12 | 21 | 6 | 17 |

S=505, 786, 750 प्रति बिना कोई अवयव दोहराये सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्गकी समस्त प्रकारों की गणना तालिका

| संख्या | (S-22)÷4 से प्राप्त भागफल m | S≥(22+4a) से समस्त प्रथम सामान्य आधार–वर्ग की संख्या | सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ सामान्य जादुई–वर्ग की समस्त प्रकारों की कुल |
|---|---|---|---|
| **505** | **(505-22)** )÷4 =483 ÷4 से भागफल r=120 | (r-2)= (120-2)=118 | **118 *184 =** 21,712 |
| **786** | **(786-22)** )÷4 =764 ÷4 से भागफल r=191 | (r-2)= (191-2)=189 | **189*184=** 34776 |
| **750** | **(750-22)** )÷4 =728 ÷4 से भागफल r=182 | (r-2)= (182-2)=180 | **180*184=** 33120 |

3-4 **2N** के यथार्थ **1, 2, N , 2N** सहित और अन्य यथार्थ्य भाजकों सहित कुल यथार्थ भाजकों की संख्या n होने क के प्रति सम * सम [2N*2N] का सामान्य आधार –वर्ग→ विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीनजादुई–वर्ग रचना प्रस्तुति के प्रकारों की संख्या–

**1■ N** के निषम संख्या होने के प्रति–

1 । **यथार्थ भाजक 1 औश्र ;2N के प्रति–** आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = 4n

2 । **यथार्थ भाजक N के प्रति–**

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या = 4(n-1)

3 । **यथार्थ भाजक 1, N और 2N के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–**

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(n-3)$ होगा।

**2■ N क `सम संख्या होने के प्रति–**

1 । **यथार्थ भाजक 1,2, x और ;2x के प्रति–** आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4n$

2 । **यथार्थ भाजक 1, 2, x और 2x के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–**

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(n-1)$ होगा।

**केवल और केवल 4*4 के प्रति–**

**1■ रंग धारिता प्रगुण सें मुक्त विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना के प्रति–**
**प्रकारों संख्या**

**4 के तीनों यथार्थ भाजक 1,2 और 4 के प्रति– ।**

**सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या– 276 होगा ।**

**2■ रंग धारिता प्रगुण सें युक्त विशिष्ठ आधार–वर्ग रचना के प्रति–**
**प्रकारों संख्या**

**4 के तीनों यथार्थ भाजक 1,2 और 4 के प्रति–**

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या =12 होगा ।

**उदाहरण 1■** 16 पदी एक समान्तर श्रेढ़ी A = [1, 2, 3, -------,14, 15, 16] से 4 के यथार्थ भाजकों k=1, 2, 4 में से 1, 2, 4 के प्रति $4 * 4$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

1• **यथार्थ भाजक k=1 के प्रति–**

(1) **प्रथमसामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 4 | 8 |
| 9 | 13 | 10 | 14 |
| 11 | 15 | 12 | 16 |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 15 | 6 |
| 14 | 7 | 4 | 9 |
| 8 | 13 | 10 | 3 |
| 11 | 2 | 5 | 16 |

**पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–**

(2)**प्रथमसामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 14 | 15 | 16 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 9 | 14 | 10 |
| 15 | 11 | 16 | 12 |
| 5 | 1 | 6 | 2 |
| 7 | 3 | 8 | 4 |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 8 | 3 | 10 |
| 2 | 11 | 16 | 5 |
| 12 | 1 | 6 | 15 |
| 7 | 14 | 9 | 4 |

(3) **स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (D) से–**

(1) **प्रथमसामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 16 | 15 | 14 | 13 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 3 | 7 |
| 2 | 6 | 1 | 5 |
| 12 | 16 | 11 | 15 |
| 10 | 14 | 9 | 13 |

**सामान्य जादुई–व्रर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 9 | 14 | 7 |
| 15 | 6 | 1 | 12 |
| 5 | 16 | 11 | 2 |
| 10 | 3 | 8 | 13 |

(4) क्रम प्रतिलोम नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 12 | 15 | 11 |
| 14 | 10 | 13 | 9 |
| 8 | 4 | 7 | 3 |
| 6 | 2 | 5 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 5 | 2 | 11 |
| 3 | 10 | 13 | 8 |
| 9 | 4 | 7 | 14 |
| 6 | 15 | 12 | 1 |

2• यथार्थ भाजकं **k=2** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 10 | 12 | 14 | 16 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 3 | 11 |
| 5 | 13 | 7 | 15 |
| 2 | 10 | 4 | 12 |
| 6 | 14 | 8 | 16 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 14 | 11 |
| 12 | 13 | 7 | 2 |
| 15 | 10 | 4 | 5 |
| 6 | 3 | 9 | 16 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

(1) प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 14 | 16 |
| 2 | 4 | 6 | 8 |
| 9 | 11 | 13 | 15 |
| 1 | 3 | 5 | 7 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 12 | 4 |
| 14 | 6 | 16 | 8 |
| 9 | 1 | 11 | 3 |
| 13 | 5 | 15 | 7 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 5 | 4 |
| 3 | 6 | 16 | 9 |
| 8 | 1 | 11 | 14 |
| 13 | 12 | 2 | 7 |

(2) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (D) से–

(2) प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 15 | 13 | 11 | 9 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 16 | 14 | 12 | 10 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 15 | 5 | 13 |
| 3 | 11 | 1 | 9 |
| 8 | 16 | 6 | 14 |
| 4 | 12 | 2 | 10 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 12 | 13 |
| 14 | 11 | 1 | 8 |
| 9 | 16 | 6 | 3 |
| 4 | 5 | 15 | 10 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 12 | 15 | 11 |
| 14 | 10 | 13 | 9 |
| 8 | 4 | 7 | 3 |
| 6 | 2 | 5 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 5 | 2 | 11 |
| 3 | 10 | 13 | 8 |
| 9 | 4 | 7 | 14 |
| 6 | 15 | 12 | 1 |

3• यथार्थ भाजकं **k=4** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | 13 |
| 2 | 6 | 10 | 14 |
| 3 | 7 | 11 | 15 |
| 4 | 8 | 12 | 16 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 5 | 6 |
| 9 | 10 | 13 | 14 |
| 3 | 4 | 7 | 8 |
| 11 | 12 | 15 | 16 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 12 | 6 |
| 8 | 10 | 13 | 3 |
| 14 | 4 | 7 | 9 |
| 11 | 5 | 2 | 16 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 12 | 16 |
| 3 | 7 | 11 | 15 |
| 2 | 6 | 10 | 14 |
| 1 | 5 | 9 | 13 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 8 | 7 |
| 12 | 11 | 16 | 15 |
| 2 | 1 | 6 | 5 |
| 10 | 9 | 14 | 13 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 14 | 9 | 7 |
| 5 | 11 | 16 | 2 |
| 15 | 1 | 6 | 12 |
| 10 | 8 | 3 | 13 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 3 | 1 |
| 15 | 13 | 11 | 9 |
| 8 | 6 | 4 | 2 |
| 16 | 14 | 12 | 10 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 15 | 5 | 13 |
| 3 | 11 | 1 | 9 |
| 8 | 16 | 6 | 14 |
| 4 | 12 | 2 | 10 |

सामान्य जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 2 | 12 | 13 |
| 14 | 11 | 1 | 8 |
| 9 | 16 | 6 | 3 |
| 4 | 5 | 15 | 10 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 12 | 15 | 11 |
| 14 | 10 | 13 | 9 |
| 8 | 4 | 7 | 3 |
| 6 | 2 | 5 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 16 | 5 | 2 | 11 |
| 3 | 10 | 13 | 8 |
| 9 | 4 | 7 | 14 |
| 6 | 15 | 12 | 1 |

**उदाहरण 2■** 4 पदी 4 समान्तर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद $A_1 = [1, 2, 3, 4], A_2 = [11, 12, 13, 14], A_3 = [21, 22, 23, 24], A_4 = [31, 32, 33, 34]$, से 4 के यथार्थ भाजकों 1, 2, 4, में से 1 और 4 के प्रति $4 * 4$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

1• यथार्थ भाजकं **k=1** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |
| 31 | 32 | 33 | 34 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 2 | 12 |
| 3 | 13 | 4 | 14 |
| 21 | 31 | 22 | 32 |
| 23 | 33 | 24 | 34 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 33 | 12 |
| 32 | 13 | 4 | 21 |
| 14 | 31 | 22 | 3 |
| 23 | 2 | 11 | 34 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 32 | 33 | 34 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |
| 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 21 | 32 | 22 |
| 33 | 23 | 34 | 24 |
| 11 | 1 | 12 | 2 |
| 13 | 3 | 14 | 4 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 14 | 3 | 22 |
| 2 | 23 | 34 | 11 |
| 24 | 1 | 12 | 33 |
| 13 | 32 | 21 | 4 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 14 | 13 | 12 | 11 |
| 24 | 23 | 22 | 21 |
| 34 | 33 | 32 | 31 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 14 | 3 | 13 |
| 2 | 12 | 1 | 11 |
| 24 | 34 | 23 | 33 |
| 22 | 32 | 21 | 31 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 21 | 32 | 13 |
| 33 | 12 | 1 | 24 |
| 11 | 34 | 23 | 2 |
| 22 | 3 | 14 | 31 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 33 | 32 | 31 |
| 24 | 23 | 22 | 21 |
| 14 | 13 | 12 | 11 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 24 | 33 | 23 |
| 32 | 22 | 31 | 21 |
| 14 | 4 | 13 | 3 |
| 12 | 2 | 11 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 11 | 2 | 23 |
| 3 | 22 | 31 | 14 |
| 21 | 4 | 13 | 32 |
| 12 | 33 | 24 | 1 |

2• यथार्थ भाजकं **k=4** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 31 |
| 2 | 12 | 22 | 32 |
| 3 | 13 | 23 | 33 |
| 4 | 14 | 24 | 34 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 11 | 12 |
| 21 | 22 | 31 | 32 |
| 3 | 4 | 13 | 14 |
| 23 | 24 | 33 | 34 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 33 | 24 | 12 |
| 14 | 22 | 31 | 3 |
| 32 | 4 | 13 | 21 |
| 23 | 11 | 2 | 34 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 14 | 24 | 34 |
| 3 | 13 | 23 | 33 |
| 2 | 12 | 22 | 32 |
| 1 | 11 | 21 | 31 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 14 | 13 |
| 24 | 23 | 34 | 33 |
| 2 | 1 | 12 | 11 |
| 22 | 21 | 32 | 31 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 32 | 21 | 13 |
| 11 | 23 | 34 | 2 |
| 33 | 1 | 12 | 24 |
| 22 | 14 | 3 | 31 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E) से–

प्रथमसामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 21 | 11 | 1 |
| 32 | 22 | 12 | 2 |
| 33 | 23 | 13 | 3 |
| 34 | 24 | 14 | 4 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 32 | 21 | 22 |
| 11 | 12 | 1 | 2 |
| 33 | 34 | 23 | 24 |
| 13 | 14 | 3 | 4 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 31 | 3 | 14 | 22 |
| 24 | 12 | 1 | 33 |
| 2 | 34 | 23 | 11 |
| 13 | 21 | 32 | 4 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 24 | 14 | 4 |
| 33 | 23 | 13 | 3 |
| 32 | 22 | 12 | 2 |
| 31 | 21 | 11 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 33 | 24 | 23 |
| 14 | 13 | 4 | 3 |
| 32 | 31 | 22 | 21 |
| 12 | 11 | 2 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 34 | 2 | 11 | 23 |
| 21 | 13 | 4 | 32 |
| 3 | 31 | 22 | 14 |
| 12 | 24 | 33 | 1 |

**उदाहरण 3■** 8 पदी 2 समान्तर श्रेढ़ी $A_1 = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$, $A_2 = [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]$,4 के यथार्थ भाजक 1, 2, 4 में से 1 के प्रति $4 * 4$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

**यथार्थ भाजकं k=1 के प्रति–**

(1) **प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग →**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 2 | 6 |
| 3 | 7 | 4 | 8 |
| 21 | 25 | 22 | 26 |
| 23 | 27 | 24 | 28 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 27 | 6 |
| 26 | 7 | 4 | 21 |
| 8 | 25 | 22 | 3 |
| 23 | 2 | 5 | 28 |

(2) **पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–**

**प्रथमसामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25 | 26 | 27 | 28 |
| 21 | 22 | 23 | 24 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25 | 21 | 26 | 22 |
| 27 | 23 | 28 | 24 |
| 5 | 1 | 6 | 2 |
| 7 | 3 | 8 | 4 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 25 | 8 | 3 | 22 |
| 2 | 23 | 28 | 5 |
| 24 | 1 | 6 | 27 |
| 7 | 26 | 21 | 4 |

(3) **स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E) से–**

**प्रथमसामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | 2 | 1 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 24 | 23 | 22 | 21 |
| 28 | 27 | 26 | 25 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 8 | 3 | 7 |
| 2 | 6 | 1 | 5 |
| 24 | 28 | 23 | 27 |
| 22 | 26 | 21 | 25 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–व्रर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 21 | 26 | 7 |
| 27 | 6 | 1 | 24 |
| 5 | 28 | 23 | 2 |
| 22 | 3 | 8 | 25 |

(4) **क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–**

**प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | 27 | 26 | 25 |
| 24 | 23 | 22 | 21 |
| 8 | 7 | 6 | 5 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग →**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | 24 | 27 | 23 |
| 26 | 22 | 25 | 21 |
| 8 | 4 | 7 | 3 |
| 6 | 2 | 5 | 1 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 28 | 5 | 2 | 23 |
| 3 | 22 | 25 | 8 |
| 21 | 4 | 7 | 26 |
| 6 | 27 | 24 | 1 |

**उदाहरण 4■** 36 पदी एक समान्तर श्रेढ़ी $A = [1, 2, 3, -------,34, 35, 36]$ से 6 के यथार्थ भाजकों k=1,2,3,6 में से 1,2, 6 के प्रति $6 * 6$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

1• **यथार्थ भाजकं k=1 के प्रति–**

(1) **प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 5 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग →**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 9 | 15 | 4 | 10 | 16 |
| 5 | 11 | 17 | 6 | 12 | 18 |
| 19 | 25 | 31 | 20 | 26 | 32 |
| 21 | 27 | 33 | 22 | 28 | 34 |
| 23 | 29 | 35 | 24 | 30 | 36 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 24 | 13 | 29 | 14 |
| 34 | 9 | 22 | 33 | 10 | 3 |
| 32 | 12 | 17 | 6 | 25 | 19 |
| 5 | 26 | 31 | 20 | 11 | 18 |
| 16 | 27 | 15 | 4 | 28 | 21 |
| 23 | 7 | 2 | 35 | 8 | 36 |

पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 25 | 19 | 32 | 26 | 20 |
| 33 | 27 | 21 | 34 | 28 | 22 |
| 35 | 29 | 23 | 36 | 30 | 24 |
| 13 | 7 | 1 | 14 | 8 | 2 |
| 15 | 9 | 3 | 16 | 10 | 4 |
| 17 | 11 | 5 | 18 | 12 | 6 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 12 | 18 | 19 | 11 | 20 |
| 4 | 27 | 16 | 3 | 28 | 33 |
| 2 | 30 | 23 | 36 | 7 | 13 |
| 35 | 8 | 1 | 14 | 29 | 24 |
| 22 | 9 | 21 | 34 | 10 | 15 |
| 17 | 25 | 32 | 5 | 26 | 6 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E)से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |
| 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 18 | 5 | 11 | 17 |
| 4 | 10 | 16 | 3 | 9 | 15 |
| 2 | 8 | 14 | 1 | 7 | 13 |
| 24 | 30 | 36 | 23 | 29 | 35 |
| 22 | 28 | 34 | 21 | 27 | 33 |
| 20 | 26 | 32 | 19 | 25 | 31 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 25 | 19 | 18 | 26 | 17 |
| 15 | 10 | 21 | 34 | 9 | 22 |
| 35 | 7 | 14 | 1 | 30 | 24 |
| 2 | 29 | 36 | 23 | 8 | 13 |
| 33 | 28 | 16 | 3 | 27 | 4 |
| 20 | 12 | 5 | 32 | 11 | 31 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |
| 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 |
| 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |
| 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 30 | 24 | 35 | 29 | 23 |
| 34 | 28 | 22 | 33 | 27 | 21 |
| 32 | 26 | 20 | 31 | 25 | 19 |
| 18 | 12 | 6 | 17 | 11 | 5 |
| 16 | 10 | 4 | 15 | 9 | 3 |
| 14 | 8 | 2 | 13 | 7 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 7 | 13 | 24 | 8 | 23 |
| 21 | 28 | 15 | 4 | 27 | 16 |
| 5 | 25 | 20 | 31 | 12 | 18 |
| 32 | 11 | 6 | 17 | 26 | 19 |
| 3 | 10 | 22 | 33 | 9 | 34 |
| 14 | 30 | 35 | 2 | 29 | 1 |

2• यथार्थ भाजक **k=2** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |
| 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 25 | 3 | 15 | 27 |
| 5 | 17 | 29 | 7 | 19 | 31 |
| 9 | 21 | 33 | 11 | 23 | 35 |
| 2 | 14 | 26 | 4 | 16 | 28 |
| 6 | 18 | 30 | 8 | 20 | 32 |
| 10 | 22 | 34 | 12 | 24 | 36 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 12 | 25 | 22 | 27 |
| 32 | 17 | 8 | 30 | 19 | 5 |
| 28 | 23 | 33 | 11 | 14 | 2 |
| 9 | 16 | 26 | 4 | 21 | 35 |
| 31 | 18 | 29 | 7 | 20 | 6 |
| 10 | 13 | 3 | 34 | 15 | 36 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 |
| 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 |
| 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 14 | 2 | 28 | 16 | 4 |
| 30 | 18 | 6 | 32 | 20 | 8 |
| 34 | 22 | 10 | 36 | 24 | 12 |
| 25 | 13 | 1 | 27 | 15 | 3 |
| 29 | 17 | 5 | 31 | 19 | 7 |
| 33 | 21 | 9 | 35 | 23 | 11 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 23 | 35 | 2 | 21 | 4 |
| 7 | 18 | 31 | 5 | 20 | 30 |
| 3 | 24 | 10 | 36 | 13 | 25 |
| 34 | 15 | 1 | 27 | 22 | 12 |
| 8 | 17 | 6 | 32 | 19 | 29 |
| 33 | 14 | 28 | 9 | 16 | 11 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E)से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |
| 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 |
| 35 | 33 | 31 | 29 | 27 | 25 |
| 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 |
| 36 | 34 | 32 | 30 | 28 | 26 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 23 | 35 | 9 | 21 | 33 |
| 7 | 19 | 31 | 5 | 17 | 29 |
| 3 | 15 | 27 | 1 | 13 | 25 |
| 12 | 24 | 36 | 10 | 22 | 34 |
| 8 | 20 | 32 | 6 | 18 | 30 |
| 4 | 16 | 28 | 2 | 14 | 26 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 14 | 2 | 35 | 16 | 33 |
| 30 | 19 | 6 | 32 | 17 | 7 |
| 34 | 13 | 27 | 1 | 24 | 12 |
| 3 | 22 | 36 | 10 | 15 | 25 |
| 29 | 20 | 31 | 5 | 18 | 8 |
| 4 | 23 | 9 | 28 | 21 | 26 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 34 | 32 | 30 | 28 | 26 |
| 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 |
| 12 | 10 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| 35 | 33 | 31 | 29 | 27 | 25 |
| 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 |
| 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 24 | 12 | 34 | 22 | 10 |
| 32 | 20 | 8 | 30 | 18 | 6 |
| 28 | 16 | 4 | 26 | 14 | 2 |
| 35 | 23 | 11 | 33 | 21 | 9 |
| 31 | 19 | 7 | 29 | 17 | 5 |
| 27 | 15 | 3 | 25 | 13 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 13 | 25 | 12 | 15 | 10 |
| 5 | 20 | 29 | 7 | 18 | 32 |
| 9 | 14 | 4 | 26 | 23 | 35 |
| 28 | 21 | 11 | 33 | 16 | 2 |
| 6 | 19 | 8 | 30 | 17 | 31 |
| 27 | 24 | 34 | 3 | 22 | 1 |

3• यथार्थ भाजकं **k=6** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 |
| 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 |
| 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 |
| 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 | 8 | 9 |
| 13 | 14 | 15 | 19 | 20 | 21 |
| 25 | 26 | 27 | 31 | 32 | 33 |
| 4 | 5 | 6 | 10 | 11 | 12 |
| 16 | 17 | 18 | 22 | 23 | 24 |
| 28 | 29 | 30 | 34 | 35 | 36 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 34 | 3 | 29 | 9 |
| 24 | 14 | 22 | 18 | 20 | 13 |
| 12 | 32 | 27 | 31 | 5 | 4 |
| 25 | 11 | 6 | 10 | 26 | 33 |
| 21 | 17 | 15 | 19 | 23 | 16 |
| 28 | 2 | 7 | 30 | 8 | 36 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 |
| 5 | 11 | 17 | 23 | 29 | 35 |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 |
| 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 |
| 2 | 8 | 14 | 20 | 26 | 32 |
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 12 | 11 | 10 |
| 18 | 17 | 16 | 24 | 23 | 22 |
| 30 | 29 | 28 | 36 | 35 | 34 |
| 3 | 2 | 1 | 9 | 8 | 7 |
| 15 | 14 | 13 | 21 | 20 | 19 |
| 27 | 26 | 25 | 33 | 32 | 31 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 32 | 33 | 4 | 26 | 10 |
| 19 | 17 | 21 | 13 | 23 | 18 |
| 7 | 35 | 28 | 36 | 2 | 3 |
| 30 | 8 | 1 | 9 | 29 | 34 |
| 22 | 14 | 16 | 24 | 20 | 15 |
| 27 | 5 | 12 | 25 | 11 | 31 |

(3)स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E)से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 25 | 19 | 13 | 7 | 1 |
| 32 | 26 | 20 | 14 | 8 | 2 |
| 33 | 27 | 21 | 15 | 9 | 3 |
| 34 | 28 | 22 | 16 | 10 | 4 |
| 35 | 29 | 23 | 17 | 11 | 5 |
| 36 | 30 | 24 | 18 | 12 | 6 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 32 | 33 | 25 | 26 | 27 |
| 19 | 20 | 21 | 13 | 14 | 15 |
| 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 |
| 34 | 35 | 36 | 28 | 29 | 30 |
| 22 | 23 | 24 | 16 | 17 | 18 |
| 10 | 11 | 12 | 4 | 5 | 6 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 31 | 5 | 4 | 33 | 11 | 27 |
| 18 | 20 | 16 | 24 | 14 | 19 |
| 30 | 2 | 9 | 1 | 35 | 34 |
| 7 | 29 | 36 | 28 | 8 | 3 |
| 15 | 23 | 21 | 13 | 17 | 22 |
| 10 | 32 | 25 | 12 | 26 | 6 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 30 | 24 | 18 | 12 | 6 |
| 35 | 29 | 23 | 17 | 11 | 5 |
| 34 | 28 | 22 | 16 | 10 | 4 |
| 33 | 27 | 21 | 15 | 9 | 3 |
| 32 | 26 | 20 | 14 | 8 | 2 |
| 31 | 25 | 19 | 13 | 7 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 35 | 34 | 30 | 29 | 28 |
| 24 | 23 | 22 | 18 | 17 | 16 |
| 12 | 11 | 10 | 6 | 5 | 4 |
| 33 | 32 | 31 | 27 | 26 | 25 |
| 21 | 20 | 19 | 15 | 14 | 13 |
| 9 | 8 | 7 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 36 | 2 | 3 | 34 | 8 | 28 |
| 13 | 23 | 15 | 19 | 17 | 24 |
| 25 | 5 | 10 | 6 | 32 | 33 |
| 12 | 26 | 31 | 27 | 11 | 4 |
| 16 | 20 | 22 | 18 | 14 | 21 |
| 9 | 35 | 30 | 7 | 29 | 1 |

**उदाहरण 5■** 6 पदी 6 समान्तर श्रेढ़ी $A_1 = [1, 2, 3, 4, 5, 6], A_2 = [11, 12, 13, 14, 15, 16], A_3 = [21, 22, 23, 24, 25, 26], A_4 = [31, 32, 33, 34, 35, 36], A_5 = [41, 42, 43, 44, 45, 46], A_6 = [51, 52, 53, 54, 55, 56]$ से 6 के यथार्थ भाजकों 1, 2, 3, 6 क में से 1 और 6 के प्रति $6 * 6$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

1• यथार्थ भाजकं **k=1** के प्रति–

(1)प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 2 | 12 | 22 |
| 3 | 13 | 23 | 4 | 14 | 24 |
| 5 | 15 | 25 | 6 | 16 | 26 |
| 31 | 41 | 51 | 32 | 42 | 52 |
| 33 | 43 | 53 | 34 | 44 | 54 |
| 35 | 45 | 55 | 36 | 46 | 56 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 46 | 36 | 21 | 45 | 22 |
| 24 | 13 | 34 | 53 | 14 | 33 |
| 52 | 16 | 25 | 6 | 41 | 31 |
| 5 | 42 | 51 | 32 | 15 | 26 |
| 54 | 43 | 23 | 4 | 44 | 3 |
| 35 | 11 | 2 | 55 | 12 | 56 |

(2)पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 41 | 31 | 52 | 42 | 32 |
| 53 | 43 | 33 | 54 | 44 | 34 |
| 55 | 45 | 36 | 56 | 46 | 36 |
| 21 | 11 | 1 | 22 | 12 | 2 |
| 23 | 13 | 3 | 24 | 14 | 4 |
| 23 | 15 | 5 | 26 | 16 | 6 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 16 | 26 | 31 | 15 | 32 |
| 34 | 43 | 24 | 3 | 44 | 23 |
| 2 | 46 | 36 | 56 | 11 | 21 |
| 55 | 12 | 1 | 22 | 45 | 36 |
| 4 | 13 | 33 | 54 | 14 | 53 |
| 23 | 41 | 52 | 5 | 42 | 6 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E)से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |
| 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 |
| 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 16 | 26 | 5 | 15 | 25 |
| 4 | 14 | 24 | 3 | 13 | 23 |
| 2 | 12 | 22 | 1 | 11 | 21 |
| 36 | 46 | 56 | 35 | 45 | 55 |
| 34 | 44 | 54 | 33 | 43 | 53 |
| 32 | 42 | 52 | 31 | 41 | 51 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 41 | 31 | 26 | 42 | 25 |
| 23 | 14 | 33 | 54 | 13 | 34 |
| 55 | 11 | 22 | 1 | 46 | 36 |
| 2 | 45 | 56 | 35 | 12 | 21 |
| 53 | 44 | 24 | 3 | 43 | 4 |
| 32 | 16 | 5 | 52 | 15 | 51 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 |
| 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 |
| 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |
| 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 46 | 36 | 55 | 45 | 35 |
| 54 | 44 | 34 | 53 | 43 | 33 |
| 52 | 42 | 32 | 51 | 41 | 31 |
| 26 | 16 | 6 | 25 | 15 | 5 |
| 24 | 14 | 4 | 23 | 13 | 3 |
| 22 | 12 | 2 | 21 | 11 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 21 | 21 | 36 | 12 | 35 |
| 33 | 44 | 23 | 4 | 43 | 24 |
| 5 | 41 | 32 | 51 | 16 | 26 |
| 52 | 15 | 6 | 25 | 42 | 31 |
| 3 | 14 | 34 | 53 | 13 | 54 |
| 22 | 46 | 55 | 2 | 45 | 1 |

2• यथार्थ भाजकं **k=6** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 |
| 2 | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 |
| 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 |
| 4 | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| 6 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 11 | 12 | 13 |
| 21 | 22 | 23 | 31 | 32 | 33 |
| 41 | 42 | 43 | 51 | 52 | 53 |
| 4 | 5 | 6 | 14 | 15 | 16 |
| 24 | 25 | 26 | 34 | 35 | 36 |
| 44 | 45 | 46 | 54 | 55 | 56 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 55 | 54 | 3 | 45 | 13 |
| 33 | 12 | 34 | 26 | 32 | 26 |
| 16 | 52 | 23 | 51 | 5 | 4 |
| 41 | 15 | 6 | 34 | 45 | 53 |
| 36 | 25 | 23 | 31 | 45 | 21 |
| 44 | 2 | 11 | 46 | 12 | 56 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 16 | 26 | 36 | 46 | 56 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 55 |
| 4 | 14 | 24 | 34 | 44 | 54 |
| 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 53 |
| 2 | 12 | 22 | 32 | 42 | 52 |
| 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 16 | 15 | 14 |
| 26 | 25 | 24 | 36 | 35 | 34 |
| 46 | 45 | 44 | 56 | 55 | 54 |
| 3 | 2 | 1 | 13 | 12 | 11 |
| 23 | 22 | 21 | 33 | 32 | 31 |
| 43 | 42 | 41 | 53 | 52 | 51 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 52 | 53 | 4 | 42 | 14 |
| 34 | 25 | 33 | 21 | 35 | 23 |
| 11 | 55 | 44 | 56 | 2 | 3 |
| 46 | 12 | 1 | 13 | 45 | 54 |
| 31 | 22 | 24 | 36 | 32 | 26 |
| 43 | 5 | 16 | 41 | 15 | 51 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E)से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 41 | 31 | 21 | 11 | 1 |
| 52 | 42 | 32 | 22 | 12 | 2 |
| 53 | 43 | 33 | 23 | 13 | 3 |
| 54 | 44 | 34 | 24 | 14 | 4 |
| 55 | 45 | 35 | 25 | 15 | 5 |
| 56 | 46 | 36 | 26 | 16 | 6 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 52 | 53 | 41 | 42 | 43 |
| 31 | 32 | 33 | 21 | 22 | 23 |
| 11 | 12 | 13 | 1 | 2 | 3 |
| 54 | 55 | 56 | 44 | 45 | 46 |
| 34 | 35 | 36 | 24 | 25 | 26 |
| 14 | 15 | 16 | 4 | 5 | 6 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 5 | 4 | 53 | 15 | 43 |
| 23 | 32 | 24 | 36 | 22 | 34 |
| 46 | 2 | 13 | 1 | 55 | 54 |
| 11 | 45 | 56 | 44 | 12 | 3 |
| 26 | 35 | 33 | 21 | 25 | 31 |
| 14 | 52 | 41 | 16 | 42 | 6 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 46 | 36 | 26 | 16 | 6 |
| 55 | 45 | 35 | 25 | 15 | 5 |
| 54 | 44 | 34 | 24 | 14 | 4 |
| 53 | 43 | 33 | 23 | 13 | 3 |
| 52 | 42 | 32 | 22 | 12 | 2 |
| 51 | 41 | 31 | 21 | 11 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 55 | 54 | 46 | 45 | 44 |
| 36 | 35 | 34 | 26 | 25 | 24 |
| 16 | 15 | 14 | 6 | 5 | 4 |
| 53 | 52 | 51 | 43 | 42 | 41 |
| 33 | 32 | 31 | 23 | 22 | 21 |
| 13 | 12 | 11 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 56 | 2 | 3 | 54 | 12 | 44 |
| 24 | 35 | 23 | 31 | 25 | 33 |
| 41 | 5 | 14 | 6 | 52 | 53 |
| 16 | 42 | 51 | 43 | 15 | 4 |
| 21 | 32 | 34 | 26 | 22 | 36 |
| 13 | 55 | 46 | 11 | 45 | 1 |

**उदाहरण 6■** 18 पदी 2 समान्तर श्रेढ़ी $A_1 = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18]$, $A_2 = [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38]$, 6 के यथार्थ भाजक 1, 2, 3, 6 क में से 1 के प्रति $6 * 6$ का अलग– अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग की प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।–

1• यथार्थ भाजक **k=1** के प्रति–

(1) प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 2 | 8 | 14 |
| 3 | 9 | 15 | 4 | 10 | 16 |
| 5 | 11 | 17 | 6 | 12 | 18 |
| 21 | 27 | 33 | 22 | 28 | 34 |
| 23 | 29 | 35 | 24 | 30 | 36 |
| 25 | 31 | 37 | 26 | 32 | 38 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 32 | 26 | 13 | 31 | 14 |
| 16 | 9 | 24 | 35 | 10 | 23 |
| 34 | 12 | 17 | 6 | 27 | 21 |
| 5 | 28 | 33 | 22 | 13 | 18 |
| 36 | 29 | 15 | 4 | 30 | 3 |
| 25 | 7 | 2 | 37 | 8 | 38 |

(2) पंक्तिक प्रतिलोम नियम (D) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 27 | 21 | 34 | 28 | 22 |
| 35 | 29 | 23 | 36 | 30 | 24 |
| 37 | 31 | 25 | 38 | 32 | 26 |
| 13 | 7 | 1 | 14 | 8 | 2 |
| 15 | 9 | 3 | 16 | 10 | 4 |
| 17 | 11 | 5 | 18 | 12 | 6 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | 12 | 18 | 21 | 11 | 22 |
| 24 | 29 | 16 | 3 | 30 | 15 |
| 2 | 32 | 25 | 38 | 7 | 13 |
| 37 | 8 | 1 | 14 | 31 | 26 |
| 4 | 9 | 23 | 36 | 10 | 35 |
| 17 | 27 | 34 | 5 | 28 | 61 |

(3) स्तम्भिक प्रतिलोम नियम (E) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |
| 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | 18 | 5 | 11 | 17 |
| 4 | 10 | 16 | 3 | 9 | 15 |
| 2 | 8 | 14 | 1 | 7 | 13 |
| 26 | 32 | 38 | 25 | 31 | 37 |
| 24 | 30 | 36 | 23 | 29 | 35 |
| 22 | 28 | 34 | 21 | 27 | 33 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 27 | 21 | 18 | 28 | 17 |
| 15 | 10 | 23 | 36 | 9 | 24 |
| 47 | 7 | 14 | 1 | 32 | 26 |
| 2 | 31 | 38 | 25 | 8 | 13 |
| 35 | 30 | 16 | 3 | 29 | 4 |
| 22 | 12 | 5 | 34 | 11 | 33 |

(4) क्रम प्रतिलोम–नियम (F) से–

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 |
| 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 |
| 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 |
| 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

विशिष्ट आधार–वर्ग →

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 32 | 26 | 37 | 31 | 25 |
| 36 | 30 | 24 | 35 | 29 | 23 |
| 34 | 28 | 22 | 33 | 27 | 21 |
| 18 | 12 | 6 | 17 | 11 | 5 |
| 16 | 10 | 4 | 15 | 9 | 3 |
| 14 | 8 | 2 | 13 | 7 | 1 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 38 | 7 | 13 | 26 | 8 | 25 |
| 23 | 30 | 15 | 4 | 29 | 16 |
| 5 | 27 | 22 | 33 | 12 | 18 |
| 34 | 11 | 6 | 17 | 28 | 21 |
| 3 | 10 | 24 | 35 | 9 | 36 |
| 14 | 32 | 37 | 2 | 31 | 1 |

**उदाहरण 7■**

64 पदी एक समान्तर श्रेढ़ी $A = [1, 2, 3, \text{-------}, 62, 63, 64]$ से 8 के यथार्थ भाजकों k=1,2,4,8 में से 1,2,6 प्रति $8 * 8$ का अलग–अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→रंगीन जादुई–वर्ग प्रस्तुति की कुल 12 प्रकारों मे यथार्थ भाजकों 1 के प्रति प्रथम प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।

प्रथम सामान्य आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 17 | 25 | 2 | 10 | 18 | 26 |
| 3 | 11 | 19 | 27 | 4 | 12 | 20 | 28 |
| 5 | 13 | 21 | 29 | 6 | 14 | 22 | 30 |
| 7 | 15 | 23 | 31 | 8 | 16 | 24 | 32 |
| 33 | 41 | 49 | 57 | 34 | 42 | 50 | 58 |
| 35 | 43 | 51 | 59 | 36 | 44 | 52 | 60 |
| 37 | 45 | 53 | 61 | 38 | 46 | 54 | 62 |
| 39 | 47 | 55 | 63 | 40 | 48 | 56 | 64 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56 | 17 | 40 | 63 | 10 | 47 | 26 |
| 28 | 11 | 46 | 38 | 27 | 53 | 20 | 37 |
| 35 | 22 | 21 | 36 | 59 | 14 | 43 | 30 |
| 32 | 50 | 16 | 31 | 8 | 49 | 41 | 33 |
| 58 | 15 | 42 | 57 | 34 | 23 | 24 | 7 |
| 5 | 52 | 51 | 29 | 6 | 44 | 13 | 60 |
| 62 | 45 | 19 | 4 | 61 | 12 | 54 | 3 |
| 39 | 9 | 48 | 25 | 2 | 55 | 18 | 64 |

**उदाहरण 8■**

8 पदी 8 समान्तर श्रेढ़ी $A_1 = [1, 2, 3,4, 5, 6,7,8]$, $A_2 = [11, 12, 13,14, 15, 16,17,18]$, $A_3 = [21, 22, 23,24, 25, 26,27,28]$, $A_4 = [31, 32, 3,4, 35, 36,37,38]$, $A_5 = [41, 42, 43,44, 45, 46,47,48]$, $A_6 = [51, 52, 53,54, 55, 56,57,58]$, $A_7 = [61,6\ 2, 63,64, 65, 66,67,68]$, $A_8 = [71, 72, 73,74, 75, 76,77,78]$, से 8 के यथार्थ भाजकों k=1,2,4,8 में से 1और 8 के प्रति $8 * 8$ का अलग–अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→रंगीन जादुई–वर्ग प्रस्तुति की कुल 8 प्रकारों मे यथार्थ भाजकों 1 के प्रति प्रथम प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।

**प्रथम सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 31 | 2 | 12 | 22 | 32 |
| 3 | 13 | 23 | 33 | 4 | 14 | 24 | 34 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 6 | 16 | 26 | 36 |
| 7 | 17 | 27 | 37 | 8 | 18 | 28 | 38 |
| 41 | 51 | 61 | 71 | 42 | 52 | 62 | 72 |
| 43 | 53 | 63 | 73 | 44 | 54 | 64 | 74 |
| 45 | 55 | 65 | 75 | 46 | 56 | 66 | 76 |
| 47 | 57 | 67 | 77 | 48 | 58 | 68 | 78 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 68 | 21 | 48 | 77 | 12 | 57 | 32 |
| 34 | 13 | 56 | 46 | 33 | 65 | 24 | 45 |
| 43 | 26 | 25 | 44 | 73 | 16 | 53 | 36 |
| 38 | 62 | 18 | 37 | 8 | 61 | 51 | 41 |
| 72 | 17 | 52 | 71 | 42 | 27 | 28 | 7 |
| 5 | 64 | 63 | 35 | 6 | 54 | 15 | 74 |
| 76 | 55 | 23 | 4 | 75 | 14 | 66 | 3 |
| 47 | 11 | 58 | 31 | 2 | 67 | 22 | 78 |

**उदाहरण 9■**

32 पदी 2 समान्तर श्रेढ़ी $A_1 = [1, 2, 3, \text{-------}, 30, 31, 32]$ , $A_2 = [41, 42, 43, \text{-------}, 70, 71, 72]$से 8 के यथार्थ भाजकों k=1,2,4,8 में से 1 के प्रति $8 * 8$ का अलग–अलग प्रथम सामान्य आधार–वर्ग→विशिष्ट आधार–वर्ग→रंगीन जादुई–वर्ग प्रस्तुति की कुल 4 प्रकारों मे यथार्थ भाजकों 1 के प्रति प्रथम प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।

**प्रथम सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 |
| 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 57 | 58 | 59 | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 |
| 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 71 | 72 |

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 17 | 25 | 2 | 10 | 18 | 26 |
| 3 | 11 | 19 | 27 | 4 | 12 | 20 | 28 |
| 5 | 13 | 21 | 29 | 6 | 14 | 22 | 30 |
| 7 | 15 | 23 | 31 | 8 | 16 | 24 | 32 |
| 41 | 49 | 57 | 65 | 42 | 50 | 58 | 66 |
| 43 | 51 | 59 | 67 | 44 | 52 | 60 | 68 |
| 45 | 53 | 61 | 69 | 46 | 54 | 62 | 70 |
| 47 | 55 | 63 | 71 | 48 | 56 | 64 | 72 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 64 | 17 | 48 | 71 | 10 | 55 | 26 |
| 28 | 11 | 54 | 46 | 27 | 53 | 20 | 45 |
| 43 | 22 | 21 | 44 | 67 | 14 | 51 | 30 |
| 32 | 58 | 16 | 31 | 8 | 57 | 49 | 41 |
| 66 | 15 | 50 | 65 | 42 | 23 | 24 | 7 |
| 5 | 60 | 59 | 29 | 6 | 52 | 13 | 68 |
| 70 | 53 | 19 | 4 | 69 | 20 | 62 | 3 |
| 47 | 9 | 56 | 25 | 2 | 63 | 18 | 72 |

अध्याय –12

## योगमान =S के प्रति
## प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति के संख्या का आकलन की ओर

**[A]** सामान्य/ सामान्य रंगीन/ विशिष्ट प्रकार के रंगीन जादुई–वर्ग रचना के प्रति–

**N*N** का जादुंइ–वर्ग रचना के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की भूमिका से पूर्णतः परिचित हो चुके है। जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डब्बों (खानों) में स्थित N-N अवयवों का योगमान S –

N के सम एवं विषम मानों के प्रति $S > [N * \frac{N^2+1}{2}]$ होने के प्रति N के यथार्थ भाजकों को दृष्टिगत कर N*N का जादुर्ई–वर्ग रचना के तारतम्य में प्रथम आधार–वर्ग की विस्तारित श्रृंखला प्राप्ति की ओर अलग–अलग सरल समिका आगे अध्ययन क्रम में विस्तारित है।

### जादुई–वर्ग रचना के प्रति प्रथम आधार–वर्ग से विस्तारित आधार–वर्ग के प्रकारों की संख्या–

उपरोक्तानुसार प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की विस्तारित श्रृंखला के किसी भी प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों को नियमानुसार स्थान क्रम बदलकर नवीन आधार–वर्ग श्रृंखला माला पिरोया जा सकता है। निम्नानुसार प्राप्त कीजिये।

[1] विषम ' विषम $(2x+1)*(2x+1)$ के प्रति

1■ सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या

$(2x+1)$ के समस्त यथार्थ भाजक की कुल संख्या m होने के प्रति–

1. यथार्थ भाजक 1 और (2x+1) के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4m[!(2x) - 1]$

2 . यथार्थ भाजक 1 और (2x+1} के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(m-1)[!(2x) - 1]$ होगा।

2■ रंग धारिता प्रगुण के अधीन रंगीन जादुई–वर्ग रचना के प्रति सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या

(1) $(2x+1)$ 3 द्वारा अविभाजित होने के प्रति– समस्त यथार्थ भाजक की कुल संख्या m होने के प्रति–

1. यथार्थ भाजक 1 और (2x+1) के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जार्दु–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4m[(!x * 2^x) - 1]$

2. यथार्थ भाजक 1और (2x+1) के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(m-1)[(!x * 2^x) - 1]$ होगा।

(2) $(2x+1)$ 3 द्वारा विभाजित होने के प्रति– समस्त यथार्थ भाजक की कुल संख्या m होने के प्रति–

1. यथार्थ भाजक 1, 3, $\frac{(2x+1)}{3}$ और (2x+1) के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4m[(!x * 2^x) - 1]$

2. यथार्थ भाजक 1, 3, $\frac{(2x+1)}{3}$ और (2x+1) के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(m-1)[(!x * 2^x) - 1]$ होगा।

[2A] $x \geq 3$ विषम संख्या होने के प्रतिबंध पर 4 से अविभाजित सम*सम 2x* 2x के प्रति

1■ रंग धारिता प्रगुण के अधीन रंगीन जादुई–वर्ग रचना के प्रति सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों कीसंख्या

1. यथार्थ भाजक 1 और 2x के प्रति– आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4m[(!x * 2^x) - 1]$

2. यथार्थ भाजक 1 और 2x के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजकों के प्रति–

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या $= 4(m-1)[(!x * 2^x) - 1]$

**2■ विशिष्ठ आधार–वर्ग की ओर** सामान्य **आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या**

1. **यथार्थ भाजक 1 और 2x के प्रति–** आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4m$
2. **यथार्थ भाजक x के प्रति–**
   आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4(m\text{-}1)$
3. **यथार्थ भाजक 1, x और 2x के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–**
   आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4(m\text{-}3)$ होगा।

[2B] **$x \geq 2$ सम संख्या होने के प्रतिबंध पर 4 से विभाजित सम*सम 2x* 2x के प्रति**

**1■ रंग धारिता प्रगुण के अधीन रंगीन जादुई–वर्ग रचना के प्रति** सामान्य **आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या**

1. **यथार्थ भाजक 1, 2, x और 2x के प्रति–** आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4m[(!x * 2^x) - 1]$
2. **यथार्थ भाजक 1, 2, x और 2x के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजकों के प्रति–**
   आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4(m\text{-}1)[(!x * 2^x) - 1]$

**2■ विशिष्ठ आधार–वर्ग की ओर** सामान्य **आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या**

1. **यथार्थ भाजक 1, 2, x और 2x के प्रति–** आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4m$
2. **यथार्थ भाजक 1, 2, x और 2x के अतिरिक्त शेष यथार्थ भाजक के प्रति–**
   आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या = $4(m\text{-}1)$ होगा।

[3] **केवल और केवल** 4*4 **के प्रति–**

**1■ रंग धारिता प्रगुण सें मुक्त सामाय जादुई–वर्ग रचना के प्रति–**

**4 के तीनों यथार्थ भाजक 1,2 और 4 के प्रति–**

**सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या–** 276 होगा ।

**1■ सामाय रंगीन जादुई–वर्ग रचना के प्रति–**

**4 के तीनों यथार्थ भाजक 1,2 और 4 के प्रति–**

**सामान्य आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या–** 84 होगा ।

**2■ विशिष्ठ आधार–वर्ग की ओर** सामान्य **आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या**

**4 के तीनों यथार्थ भाजक 1,2 और 4 के प्रति–**

आधार–वर्ग के प्रकारों संख्या =जादुई–वर्ग के प्रकारों संख्या =12

**उभयन्ष्ठि सर्वान्तर d=3 पर , 32 पदी 2 समान्तर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद (a और b) क्रमशः (1 और 3) के प्रति S= 388 की जादुई–वर्ग के प्रकारों के विस्तार विषयक जाँच–**

**टीप– स्थान क्रम बदलकर नवीन आधार–वर्ग श्रृंखला माला पिरोने का प्रतिबंध–**

[1] x के विषम मानों के प्रति 2x*2x के जादुई–वगै रचना क्रम म्रें 2x के यथार्थ –भाजक **1 और** 2x के अतिरिक्त किसी यथार्थ–भाजक m के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों का स्थान क्रम बदलकर स्वयं यथार्थ–भाजक m के प्रति नवीन आधार–वर्ग श्रृंखला माला पिरोना जाना यथेष्ठ नहीं होगा।

[2] (2x+1) 3 से अविभाजित होने के प्रति (2x+1)*(2x+1) के जादुई–वगै रचना क्रम म्रें के यथार्थ –भाजक **1 और** (2x+1) के अतिरिक्त किसी यथार्थ–भाजक m के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों का स्थान क्रम बदलकर स्वयं यथार्थ–भाजक m के प्रति नवीन आधार–वर्ग श्रृंखला माला पिरोना जाना यथेष्ठ नहीं होगा।

य. भा. 1 सा.आ. व.

| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 |
| 49 | 52 | 55 | 58 | 61 | 64 | 67 | 70 |
| 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 | 72 |
| 75 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | 93 | 96 |

रं. जा.–व.

| 1 | 93 | 7 | 87 | 84 | 16 | 78 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 46 | 28 | 66 | 63 | 34 | 57 | 43 | 25 |
| 27 | 67 | 55 | 39 | 36 | 64 | 30 | 70 |
| 3 | 21 | 88 | 82 | 85 | 9 | 6 | 94 |
| 73 | 76 | 18 | 12 | 15 | 79 | 91 | 34 |
| 49 | 45 | 33 | 58 | 61 | 42 | 52 | 48 |
| 72 | 54 | 31 | 37 | 60 | 40 | 69 | 25 |
| 5 | 4 | 90 | 10 | 13 | 81 | 19 | 96 |

S= 388 य. भा. 1 वि.आ.. व.

| 1 | 25 | 49 | 73 | 4 | 28 | 52 | 76 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 31 | 55 | 79 | 10 | 34 | 58 | 82 |
| 13 | 37 | 61 | 85 | 16 | 40 | 64 | 88 |
| 19 | 43 | 67 | 91 | 22 | 46 | 70 | 94 |
| 3 | 27 | 51 | 75 | 6 | 30 | 54 | 78 |
| 9 | 33 | 57 | 81 | 12 | 36 | 60 | 84 |
| 15 | 39 | 63 | 87 | 18 | 42 | 66 | 90 |
| 21 | 45 | 69 | 93 | 24 | 48 | 72 | 96 |

वि. रं. जा.–व.

| 1 | 72 | 49 | 24 | 93 | 28 | 45 | 79 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 82 | 31 | 42 | 18 | 79 | 63 | 58 | 15 |
| 9 | 64 | 61 | 12 | 81 | 40 | 33 | 88 |
| 94 | 54 | 46 | 91 | 22 | 51 | 27 | 3 |
| 78 | 43 | 30 | 75 | 6 | 68 | 70 | 19 |
| 13 | 60 | 57 | 85 | 16 | 36 | 37 | 84 |
| 90 | 39 | 55 | 10 | 87 | 34 | 66 | 7 |
| 21 | 25 | 48 | 73 | 4 | 69 | 52 | 96 |

S= 388 य. भा. 2 सा. व.

| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 49 | 55 | 61 | 67 | 73 | 79 | 85 | 91 |
| 3 | 9 | 15 | 21 | 27 | 33 | 39 | 45 |
| 51 | 57 | 63 | 69 | 75 | 81 | 87 | 93 |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 |
| 52 | 58 | 64 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 |
| 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 |

रं. जा.–व.

| 1 | 90 | 13 | 78 | 72 | 31 | 60 | 43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 91 | 55 | 36 | 30 | 67 | 18 | 85 | 6 |
| 52 | 39 | 15 | 76 | 70 | 33 | 58 | 45 |
| 93 | 40 | 81 | 69 | 75 | 16 | 10 | 4 |
| 46 | 57 | 34 | 22 | 28 | 63 | 87 | 51 |
| 3 | 88 | 64 | 21 | 27 | 82 | 9 | 94 |
| 48 | 12 | 61 | 73 | 24 | 79 | 42 | 49 |
| 54 | 7 | 84 | 19 | 25 | 66 | 37 | 96 |

S= 388 य. भा. 2 वि.आ.. व.

| 1 | 49 | 3 | 51 | 7 | 55 | 9 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 13 | 61 | 15 | 63 | 19 | 67 | 21 | 69 |
| 25 | 73 | 27 | 75 | 31 | 79 | 33 | 81 |
| 37 | 85 | 39 | 87 | 43 | 91 | 45 | 93 |
| 4 | 52 | 6 | 54 | 10 | 58 | 12 | 60 |
| 16 | 64 | 18 | 66 | 22 | 70 | 24 | 72 |
| 28 | 76 | 30 | 78 | 34 | 82 | 36 | 84 |
| 40 | 88 | 42 | 90 | 46 | 94 | 48 | 96 |

वि. रं. जा.–व.

| 1 | 48 | 3 | 46 | 90 | 55 | 88 | 57 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 69 | 61 | 82 | 34 | 63 | 30 | 21 | 28 |
| 16 | 33 | 27 | 22 | 66 | 79 | 64 | 81 |
| 93 | 12 | 91 | 87 | 43 | 6 | 52 | 4 |
| 60 | 85 | 58 | 54 | 10 | 39 | 45 | 37 |
| 25 | 24 | 18 | 75 | 31 | 70 | 73 | 72 |
| 84 | 76 | 15 | 19 | 78 | 67 | 36 | 13 |
| 40 | 49 | 94 | 51 | 7 | 42 | 9 | 96 |

S= 388 य. भा. 4 सा. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 25 | 37 | 49 | 61 | 73 | 85 |
| 3 | 15 | 27 | 39 | 51 | 63 | 75 | 87 |
| 4 | 16 | 28 | 40 | 52 | 64 | 76 | 88 |
| 6 | 18 | 30 | 42 | 54 | 66 | 78 | 90 |
| 7 | 19 | 31 | 43 | 55 | 67 | 79 | 91 |
| 9 | 21 | 33 | 45 | 57 | 69 | 81 | 93 |
| 10 | 22 | 34 | 46 | 58 | 70 | 82 | 94 |
| 12 | 24 | 36 | 48 | 60 | 72 | 84 | 96 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 84 | 25 | 60 | 48 | 61 | 24 | 85 |
| 87 | 15 | 70 | 58 | 39 | 34 | 75 | 10 |
| 9 | 76 | 28 | 57 | 45 | 64 | 21 | 88 |
| 90 | 79 | 66 | 42 | 54 | 31 | 19 | 7 |
| 91 | 18 | 67 | 43 | 55 | 30 | 78 | 6 |
| 4 | 81 | 33 | 40 | 52 | 69 | 16 | 93 |
| 94 | 22 | 27 | 51 | 46 | 63 | 82 | 3 |
| 12 | 13 | 72 | 37 | 49 | 36 | 73 | 96 |

S= 388 य. भा. 4 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 4 | 6 | 13 | 15 | 16 | 18 |
| 25 | 27 | 28 | 30 | 37 | 39 | 40 | 42 |
| 49 | 51 | 52 | 54 | 61 | 63 | 64 | 66 |
| 73 | 75 | 76 | 78 | 85 | 87 | 88 | 90 |
| 7 | 9 | 10 | 12 | 19 | 21 | 22 | 24 |
| 31 | 33 | 34 | 36 | 43 | 45 | 46 | 48 |
| 55 | 57 | 58 | 60 | 67 | 69 | 70 | 72 |
| 79 | 81 | 82 | 84 | 91 | 93 | 94 | 96 |

वि. रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 94 | 4 | 91 | 84 | 15 | 81 | 18 |
| 42 | 27 | 69 | 67 | 30 | 58 | 40 | 55 |
| 31 | 64 | 52 | 43 | 36 | 63 | 33 | 66 |
| 90 | 22 | 87 | 78 | 85 | 10 | 9 | 7 |
| 24 | 75 | 21 | 12 | 19 | 76 | 88 | 73 |
| 49 | 46 | 34 | 54 | 61 | 45 | 51 | 48 |
| 72 | 57 | 28 | 37 | 60 | 39 | 70 | 25 |
| 79 | 3 | 93 | 6 | 13 | 82 | 16 | 96 |

S= 388 य. भा. 8 सा.आ. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 49 | 73 | 3 | 27 | 51 | 75 |
| 4 | 28 | 52 | 76 | 6 | 30 | 54 | 78 |
| 7 | 31 | 55 | 79 | 9 | 33 | 57 | 81 |
| 10 | 34 | 58 | 82 | 12 | 36 | 60 | 84 |
| 13 | 37 | 61 | 85 | 15 | 39 | 63 | 87 |
| 16 | 40 | 64 | 88 | 18 | 42 | 66 | 90 |
| 19 | 43 | 67 | 91 | 21 | 45 | 69 | 93 |
| 22 | 46 | 70 | 94 | 24 | 48 | 72 | 96 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 72 | 49 | 24 | 94 | 27 | 46 | 75 |
| 78 | 28 | 45 | 21 | 76 | 67 | 54 | 19 |
| 16 | 57 | 55 | 18 | 88 | 33 | 40 | 81 |
| 84 | 63 | 36 | 82 | 12 | 61 | 37 | 13 |
| 87 | 34 | 39 | 85 | 15 | 58 | 60 | 10 |
| 7 | 66 | 64 | 79 | 9 | 42 | 31 | 90 |
| 93 | 43 | 52 | 6 | 91 | 30 | 69 | 4 |
| 22 | 25 | 48 | 73 | 3 | 70 | 51 | 96 |

S= 388 य. भा. 8 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 25 | 28 | 31 | 34 |
| 49 | 52 | 55 | 58 | 73 | 76 | 79 | 82 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 27 | 30 | 33 | 36 |
| 51 | 54 | 57 | 60 | 75 | 78 | 81 | 84 |
| 13 | 16 | 19 | 22 | 37 | 40 | 43 | 46 |
| 61 | 64 | 67 | 70 | 85 | 88 | 91 | 94 |
| 15 | 18 | 21 | 24 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| 63 | 66 | 69 | 72 | 87 | 90 | 93 | 96 |

वि. रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 93 | 7 | 87 | 72 | 28 | 66 | 34 |
| 82 | 52 | 42 | 39 | 58 | 21 | 79 | 15 |
| 61 | 33 | 9 | 85 | 70 | 30 | 64 | 36 |
| 84 | 43 | 78 | 60 | 75 | 19 | 16 | 13 |
| 46 | 54 | 40 | 22 | 37 | 57 | 81 | 51 |
| 3 | 91 | 67 | 12 | 27 | 88 | 6 | 94 |
| 48 | 38 | 55 | 73 | 24 | 76 | 45 | 49 |
| 63 | 4 | 90 | 10 | 25 | 69 | 31 | 96 |

उभयन्ष्ठि सर्वान्तर d=3 पर , 16 पदी 4 समान्तर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद a,b,c और d समान्तर श्रेढी के अवयव होने के प्रति सर्वान्तर 50 होने के प्रति a,b,c और d क्रमशः (1, 51, 101, और 151) के प्रति S= 788 की जादुई–वर्ग के प्रकारों के विस्तार विषयक जाँच–

य. भा. 1 सा.आ. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 |
| 51 | 54 | 57 | 60 | 63 | 66 | 69 | 72 |
| 75 | 78 | 81 | 84 | 87 | 90 | 93 | 96 |
| 101 | 104 | 107 | 110 | 113 | 116 | 119 | 122 |
| 125 | 128 | 131 | 134 | 137 | 140 | 143 | 146 |
| 151 | 154 | 157 | 160 | 163 | 166 | 169 | 172 |
| 175 | 178 | 181 | 184 | 187 | 190 | 193 | 196 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 193 | 7 | 187 | 164 | 16 | 178 | 22 |
| 46 | 28 | 166 | 163 | 34 | 157 | 43 | 151 |
| 125 | 69 | 57 | 137 | 134 | 66 | 128 | 72 |
| 96 | 119 | 90 | 84 | 87 | 107 | 104 | 101 |
| 122 | 78 | 116 | 110 | 113 | 81 | 93 | 75 |
| 51 | 143 | 131 | 60 | 63 | 140 | 54 | 146 |
| 172 | 154 | 31 | 37 | 160 | 40 | 169 | 25 |
| 175 | 4 | 190 | 10 | 13 | 181 | 19 | 196 |

,

य. भा. 1 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 51 | 75 | 4 | 28 | 54 | 78 |
| 7 | 31 | 57 | 81 | 10 | 34 | 60 | 84 |
| 13 | 37 | 63 | 87 | 16 | 40 | 66 | 90 |
| 19 | 43 | 69 | 93 | 22 | 46 | 72 | 96 |
| 101 | 125 | 151 | 175 | 104 | 128 | 154 | 178 |
| 107 | 131 | 157 | 181 | 110 | 134 | 160 | 184 |
| 113 | 137 | 163 | 187 | 116 | 140 | 166 | 190 |
| 119 | 143 | 169 | 193 | 122 | 146 | 172 | 196 |

वि. रं. जा.–व

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 172 | 51 | 122 | 193 | 28 | 143 | 78 |
| 84 | 31 | 140 | 116 | 81 | 163 | 60 | 113 |
| 107 | 66 | 63 | 110 | 181 | 40 | 131 | 90 |
| 96 | 154 | 46 | 93 | 22 | 151 | 125 | 101 |
| 178 | 43 | 128 | 175 | 104 | 69 | 72 | 19 |
| 13 | 160 | 157 | 87 | 1 6 | 134 | 37 | 184 |
| 190 | 137 | 57 | 10 | 187 | 34 | 166 | 7 |
| 119 | 25 | 146 | 75 | 4 | 169 | 5 4 | 196 |

.य. भा. 2 सा.आ. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | 19 | 25 | 31 | 37 | 43 |
| 51 | 57 | 63 | 69 | 75 | 81 | 87 | 93 |
| 101 | 107 | 113 | 119 | 125 | 131 | 137 | 143 |
| 151 | 157 | 163 | 169 | 175 | 181 | 187 | 193 |
| 4 | 10 | 16 | 22 | 28 | 34 | 40 | 46 |
| 54 | 60 | 66 | 72 | 78 | 84 | 90 | 96 |
| 104 | 110 | 116 | 122 | 128 | 134 | 140 | 146 |
| 154 | 160 | 166 | 172 | 178 | 184 | 190 | 196 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 190 | 13 | 178 | 172 | 31 | 160 | 42 |
| 93 | 57 | 134 | 128 | 69 | 116 | 87 | 104 |
| 54 | 137 | 113 | 28 | 22 | 131 | 60 | 143 |
| 193 | 40 | 181 | 169 | 175 | 16 | 10 | 4 |
| 46 | 157 | 34 | 22 | 28 | 163 | 187 | 151 |
| 101 | 90 | 66 | 119 | 125 | 84 | 107 | 96 |
| 146 | 110 | 63 | 75 | 122 | 81 | 140 | 51 |
| 154 | 7 | 184 | 19 | 25 | 166 | 37 | 198 |

य. भा. 2 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 51 | 101 | 151 | 7 | 57 | 107 | 157 |
| 13 | 63 | 113 | 163 | 19 | 69 | 119 | 169 |
| 25 | 75 | 125 | 175 | 31 | 81 | 131 | 181 |
| 37 | 87 | 137 | 187 | 43 | 93 | 143 | 193 |
| 4 | 54 | 104 | 154 | 10 | 60 | 110 | 160 |
| 16 | 66 | 116 | 166 | 22 | 72 | 122 | 172 |
| 28 | 78 | 128 | 178 | 34 | 84 | 134 | 184 |
| 40 | 90 | 140 | 190 | 46 | 96 | 146 | 196 |

वि. रं. जा.–व

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 146 | 101 | 46 | 190 | 57 | 90 | 157 |
| 169 | 63 | 84 | 34 | 163 | 128 | 119 | 28 |
| 16 | 131 | 125 | 22 | 166 | 81 | 66 | 181 |
| 193 | 110 | 93 | 187 | 43 | 104 | 54 | 4 |
| 160 | 87 | 60 | 154 | 10 | 137 | 143 | 37 |
| 25 | 122 | 116 | 175 | 31 | 72 | 75 | 172 |
| 184 | 78 | 113 | 19 | 178 | 69 | 134 | 13 |
| 40 | 51 | 96 | 151 | 7 | 140 | 107 | 196 |

5.य. भा. 4 सा.आ. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 13 | 25 | 37 | 51 | 63 | 75 | 87 |
| 101 | 113 | 125 | 137 | 151 | 163 | 175 | 187 |
| 4 | 16 | 28 | 40 | 54 | 66 | 78 | 90 |
| 104 | 116 | 128 | 140 | 154 | 166 | 178 | 190 |
| 7 | 19 | 31 | 43 | 57 | 69 | 81 | 93 |
| 107 | 119 | 131 | 143 | 157 | 169 | 181 | 193 |
| 10 | 22 | 34 | 46 | 60 | 72 | 84 | 96 |
| 110 | 122 | 134 | 146 | 160 | 172 | 184 | 196 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 184 | 25 | 160 | 146 | 6 3 | 122 | 87 |
| 187 | 113 | 72 | 60 | 137 | 34 | 175 | 10 |
| 107 | 78 | 28 | 157 | 143 | 66 | 119 | 90 |
| 190 | 81 | 166 | 140 | 154 | 31 | 19 | 7 |
| 93 | 116 | 69 | 43 | 57 | 128 | 178 | 104 |
| 4 | 181 | 131 | 40 | 54 | 169 | 16 | 193 |
| 96 | 22 | 125 | 151 | 46 | 163 | 84 | 101 |
| 110 | 13 | 172 | 37 | 51 | 134 | 75 | 196 |

य. भा. 4 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 101 | 4 | 104 | 13 | 113 | 16 | 116 |
| 25 | 125 | 28 | 128 | 37 | 137 | 40 | 140 |
| 51 | 151 | 54 | 154 | 63 | 163 | 66 | 166 |
| 75 | 175 | 78 | 178 | 87 | 187 | 90 | 190 |
| 7 | 107 | 10 | 110 | 19 | 119 | 22 | 122 |
| 31 | 131 | 34 | 134 | 43 | 143 | 46 | 146 |
| 57 | 157 | 60 | 160 | 69 | 169 | 72 | 172 |
| 81 | 181 | 84 | 184 | 93 | 193 | 96 | 196 |

वि. रं. जा.–व

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 96 | 4 | 93 | 184 | 113 | 181 | 116 |
| 140 | 125 | 169 | 69 | 128 | 60 | 40 | 57 |
| 31 | 66 | 54 | 43 | 134 | 163 | 131 | 166 |
| 190 | 22 | 187 | 178 | 87 | 10 | 107 | 7 |
| 122 | 175 | 119 | 110 | 19 | 78 | 90 | 75 |
| 51 | 46 | 34 | 154 | 63 | 143 | 151 | 146 |
| 172 | 157 | 28 | 37 | 160 | 137 | 72 | 25 |
| 81 | 101 | 193 | 104 | 13 | 84 | 16 | 196 |

.य. भा. 8 सा.आ. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 25 | 51 | 75 | 101 | 125 | 151 | 175 |
| 4 | 28 | 54 | 78 | 104 | 128 | 154 | 178 |
| 7 | 31 | 57 | 81 | 107 | 131 | 157 | 181 |
| 10 | 34 | 60 | 84 | 110 | 134 | 160 | 184 |
| 13 | 37 | 63 | 87 | 113 | 137 | 163 | 187 |
| 16 | 40 | 66 | 90 | 116 | 140 | 166 | 190 |
| 19 | 43 | 69 | 93 | 119 | 143 | 169 | 193 |
| 22 | 46 | 72 | 96 | 122 | 146 | 172 | 196 |

रं. जा.–व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 172 | 51 | 122 | 96 | 125 | 46 | 175 |
| 178 | 28 | 143 | 119 | 78 | 69 | 154 | 19 |
| 16 | 157 | 57 | 116 | 90 | 131 | 40 | 181 |
| 184 | 163 | 134 | 84 | 110 | 63 | 37 | 13 |
| 187 | 34 | 137 | 87 | 113 | 60 | 160 | 10 |
| 7 | 166 | 66 | 81 | 107 | 140 | 31 | 190 |
| 193 | 43 | 54 | 104 | 93 | 128 | 169 | 4 |
| 22 | 25 | 146 | 75 | 101 | 72 | 151 | 196 |

य. भा. 8 वि.आ.. व.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 7 | 10 | 25 | 28 | 31 | 34 |
| 51 | 54 | 57 | 60 | 75 | 78 | 81 | 84 |
| 101 | 104 | 107 | 110 | 125 | 128 | 131 | 134 |
| 151 | 154 | 157 | 160 | 175 | 178 | 181 | 184 |
| 13 | 16 | 19 | 22 | 37 | 40 | 43 | 46 |
| 63 | 66 | 69 | 72 | 87 | 90 | 93 | 96 |
| 113 | 116 | 119 | 122 | 137 | 140 | 143 | 146 |
| 163 | 166 | 169 | 172 | 187 | 190 | 193 | 196 |

वि. रं. जा.–व

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 193 | 7 | 187 | 172 | 28 | 166 | 34 |
| 84 | 54 | 140 | 137 | 60 | 119 | 81 | 113 |
| 63 | 131 | 107 | 87 | 72 | 128 | 66 | 134 |
| 184 | 43 | 178 | 160 | 175 | 19 | 16 | 13 |
| 46 | 154 | 40 | 22 | 37 | 157 | 181 | 151 |
| 101 | 93 | 69 | 110 | 125 | 90 | 104 | 96 |
| 146 | 116 | 57 | 75 | 122 | 78 | 143 | 51 |
| 163 | 4 | 190 | 10 | 25 | 169 | 31 | 198 |

ध्यानाकर्षण–– N *N केजादुई –वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं तिर्यक N अवयवों का योगमान S होने के प्रति–

## जादुई–वर्ग श्रृंखला विस्तार विषयक प्रतिबंध नियम एवं समिका

### [A] N के यथार्थ भाजकों के दृष्टिकोण में–

### [A1] N के यथार्थ भाजक 1 (एक ) के प्रति–

$2S \div N$ की संक्रिया पूर्णतः अशेष विभाजित होने के प्रतिबंध पर– **N*N** का आधार–वर्ग के सभी $N^2$ अचयव का प्रथम पदमान a एवं एक उभय निष्ट सर्वान्तर d पर $N^2$ पदी समांतर श्रेढ़ी के अवयव होंगें ।

**तब** $N*S = N^2 * a + \frac{N^2=1}{2} * N^2 * d \quad \Rightarrow 2S = 2N*a + N*(N^2-1)*d$

$\Rightarrow$ **$2a = \frac{2S}{N} - (N^2-1)*d$** में S और N के ज्ञात मान प्रतिस्थापित कर समिका $2a = \frac{2s}{N} - (N^2-1)*d$ को सरल करें। फिर d के प्राकृत सं,ख्या मानों के प्रति a का मान प्राप्त कीजिये।

**सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति**

$d_m = \frac{2s}{N} \div 2(N^2-1) = \frac{S}{N} \div (N^2-1)$ की संक्रिया से – शून्येतर शेषफल के प्रति प्राप्त भागफल r होगा। जबकि शून्य शेषफल के प्रति प्राप्त भागफल r का उना $(r-1)$ होगा।

**प्रथम आधार–वर्ग के प्रकारों की संख्या n** = [समिका $2a = \frac{2s}{N} - (N^2-1)*d$ को संतुलित करने में प्राप्त सर्वान्तर d के प्रकारों की संख्या]

**N के यथार्थ भाजको की संख्या m होने के प्रति प्रथम आधार–वर्ग से विस्तारित आधार–वर्ग प्रकारों की कुल संख्या** w उपरोक्त नियमानुसार प्राप्त कीजिये।

## [A2] N सम संख्या होने पर यथार्थ भाजक 2 (दो) के प्रति–

$2s \div N$ की भंक्रिया पूर्णतः अशेष विभाजित होने के प्रतिबंध पर उभयनिष्ठ सर्वान्तर d की $\frac{N^2}{2}$ पदी दो समान्तर श्रेढ़ी में विभक्त होंगे।जिनका प्रथम पदमान a और b [$(a \neq b)$ के प्रतिबंध] **लिये** जाने पर

$N*S = (a+b)\frac{N^2}{2} + 2*(\frac{\frac{N^2}{2}-1}{2} * \frac{N^2}{2}) * d \quad \Rightarrow 2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2}-1)*d$

$\Rightarrow (a+b) = \frac{2S}{N} - [(\frac{N^2}{2}-1)*d]$ होगा

**$b = [(\frac{2S}{N} - a) - [(\frac{N^2}{2}-1)*d]$** होगा

$a=x=1$ के प्रति **$b = [(\frac{2S}{N} - 1) - [(\frac{N^2}{2}-1)*d]$** से

$d=1$ के प्रति **$b = [(\frac{2S}{N} - 1) - [(\frac{N^2}{2}-1)]$**

$(b-a)=(b-1) = [(\frac{2S}{N} - 2) - (\frac{N^2}{2}-1)]$ प्राप्त करे

**तब सर्वान्तर d का अधिकतम मान $d_m$ की गणना–** $d_m = [\frac{2S}{N} - 2] \div [(\frac{N^2}{2}-1)]$ की संक्रिया से – शून्येतर शेषफल के प्रति प्राप्त भागफल r होगा। जबकि शून्य शेषफल के प्रति प्राप्त भागफल r का उना $(r-1)$ होगा।

**किसी सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग के प्रकारों की संख्या** $n = [(b-a) \div 2]$ की संक्रिया से–

1• भागफल r और शेषफल 0 की प्राप्ति पर– भागफल r होगा।

2• भागफल r औ शेषफल 1 की प्राप्ति पर– भागफल r का आगर $(r+1)$ होगा।

**पूरे–पूरे अवयव का सर्वान्तर d के प्रति क्रमागत होना–** $b-a = \frac{N^2}{2} * d$ की प्राति पर प्रथम आधार–वर्ग के पूरे–पूरे अवयव का सर्वान्तर d के प्रति क्रमागत होंगे।

**अवयव का सर्वान्तर d के प्रति दोहराया जाना–**

**(b-a) के सम संख्या मानों में** $(b-a) = (\frac{N^2}{2}-1)d, (\frac{N^2}{2}-2)d,$ ----3d, 2d ,d, और 0 की प्राप्ति पर [$\frac{N^2}{2}$ वाँ पद से प्रथम पद की ओर] एवं [$(\frac{N^2}{2}+1)$ वाँ पद से अंन्तिम $N^2$ वाँ पद की ओर] क्रमशः

(1-1),(2-2),(3-3) -----{($\frac{N^2}{2}$-3)_($\frac{N^2}{2}$ -3)} {($\frac{N^2}{2}$-2)_($\frac{N^2}{2}$ -2)},

$\{(\frac{N^2}{2}\text{-}1)_(\frac{N^2}{2}\text{-}1)\}$ और $(\frac{N^2}{2} - \frac{N^2}{2}\text{-})$ के युग्मों में दोहराये हुये होंगे।

**टीप** (b-a) के विषम मानों के प्रति दोहराये जाने का प्रश्न ही नहीं है।

## [A3] N के यथार्थ भाजक N के प्रति–

2S ÷ N की भंक्रिया पूर्णतः अशेष विभाजित होने के प्रतिबंध पर – **N*N** का आधार–वर्ग के $N^2$ अचयव उभयनिष्ठ सर्वान्तर d पर $\frac{N^2}{N} = N$ पदी N समान्तर श्रेढ़ी में विभक्त होंगे ।जिनकै प्रथम पदमान $(a_1, q_2, a_3 - - - -a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ स्वयं में सर्वान्तर k पर समान्तर श्रेढ़ी के प्रतिरूपण $[a, (a+k), (a+2k), - - - - - - - - - - - - - - - - \{a+(N-3)k\}, \{a+(N-2)k\}, \{a+(N-1)k\}]$ में होंगे। [(d≠ k)एवं (d=k) के प्रतिबंध] में लिये जाने पर–

$N*S = a*N^2 + N*(\frac{N-1}{2}*N)*(d+k)$ **$2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k)$** ;

$2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k) \Rightarrow \frac{2S}{N} = 2a + (N-1)(d+k)$

$\Rightarrow$ (N-1) k $= \frac{2S}{N} - 2a - (N-1)d$

$\Rightarrow$ (N-1) k +2a $= \frac{2S}{N} - (N-1)d$ के हल के लिये **d के न्यूनतम् प्राकृत सख्या मान की सुनिश्चिता के प्रति S ,N और m का मान प्रत्स्थापित कर मानक सरल रैखिक समीकरण** uk +2a= w ––––(1) **प्राप्त करें।**

**समीकरण** (1) **के प्रति** a **का न्यूनतम् मान** $a_1$ **सुनिश्चित करें। न्यूनतम् मान** $a_1$ **के संगत** $k = k_1$ **– तद्उपरांत** $a_x = a_1 + (x-1)*u$ **के संगत** $k_x = [w - 2a_x] \div u$ **प्राप्त करें**

d का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना–

$d_m =$ $[(k_1 \div 2]$ **की संक्रिया से –** प्राप्त भागफल r होगा।

**इस प्रकार किसी सर्वान्तर** $d_n$ **की सुनिश्चिता के प्रति प्रथम आधार.वर्ग की विस्तारित संख्या**

[{k–a} ÷ 2 की संक्रिया से–

**1•** शेषफल **q= 0** की प्राप्ति पर प्राप्त भागफल **r** पदों तक

**2•** शेषफल **q= 1** की प्राप्ति पर प्राप्त भागफल **r** का आगर **(r+1)** तक

गणना विस्तार में **k ≠ *d*** **k> *d*** **का प्रतिबंध स्वीकारा जाना यथेष्ठ होगा।**

**प्रथम आधार–वर्ग के प्रकारों की संख्या** n = [d के प्रयुक्त कुल प्रकार के प्रति प्रथम पद a के प्रकारों का योग मान होगा।

## [A4] N यथार्थ भाजक 1, 2 एवं N के अतिरिक्त किसी और अन्य यथार्थ भाजक m के प्रति

2S ÷ *N* की भंक्रिया पूर्णतः अशेष विभाजित होने के प्रतिबंध पर –**N*N** का आधार–वर्ग के $N^2$ अचयव $\frac{N^2}{m}$ पदी m समान्तर श्रेढ़ी कै उभयनिष्ठ सर्वान्तर d पर दर्शित होंगा।।जिनकै प्रथम पदमान $(a_1, q_2, a_3 - - - -a_{m-2}, a_{m-1}, a_m)$ स्वयं में सर्वान्तर k पर समान्तर श्रेढ़ी के प्रतिरूपण में $[a, (a+k), (a+2k), - - - - -\{a+(m-3)k\}, \{a+(m-2)k\}, \{a+(m-1)k\}]$ होंगे। लिये जाने पर–

$N*S = a*N^2 + m*(\frac{\frac{N^2}{m}-1}{2} * \frac{N^2}{m}) * d + (\frac{m-1}{2} * m) * \frac{N^2}{m} * k$

$\Rightarrow 2NS = 2aN^2 + N^2(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1) * N^2 * k$ $\Rightarrow$

$2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1)\ N * k$

$\Rightarrow 2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1)\ N * k$

$\Rightarrow 2a + (m-1) * k = [\frac{2S}{N} - (\frac{N^2}{m} - 1)d]$ के हल के` लिये d के न्यूनतम् प्राकृत सख्या मान की सुनिश्चिता के प्रति S ,N और m का मान प्रतिस्थापित कर मानक सरल रैखिक समीकरण

uk $+2a = w$ $----(1)$ प्राप्त करें।

समीकरण (1) के प्रति–

a का न्यूनतम् मान $a_1$ सुनिश्चित करें। न्यूनतम् मान $a_1$ के संगत $k = k_1$

तदृउपरांत $a_x = a_1 + (x-1) * u$ के संगत $k_x = [w - 2a_x] \div u$ प्राप्त करें

d का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना– $(k_1 \div 2)$ की संक्रिया से – प्राप्त भागफल r होगा।

इस प्रकार किसी सर्वान्तर $d_n$ की सुनिश्चिता के प्रति प्रथम आधार.वर्ग की विस्तारित संख्या [{k–a} ÷ 2 की संक्रिया से–

1• शेषफल **q= 0** की प्राप्ति पर प्राप्त भागफल **r** पदों तक

2• शेषफल **q= 1** की प्राप्ति पर प्राप्त भागफल **r** का आगर **(r+1)** तक

गणना विस्तार में $k \neq d$ $k > d$ का प्रतिबंध स्वीकारा जाना यथेष्ठ होगा।

## [B] केवल और केवल 4*4 विशिष्ट प्रकार सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति–

### [B1] प्रतिबंध और नियम समिका S = (a+b+c+e+6d) के प्रति आकलन

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त 4 पदी अलग–अलग 4 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद क्रमशः a,b,c,e स्वयं में कोई भी तीन अवयव a,b,c/a,b,e/a,c,e/b,c,e समान्तर नहीं है और न ही कोई 4 पदी 2 समांतर श्रेढ़ी के सयुक्तीकरण से 8 पदी समांतर श्रेढ़ी दर्शित होगा।

के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d)

[3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d) [4] e, (e+d),(e+2d), (e+3d) जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान $S = [a + b + c + e + 6d]$ होगा।

**प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |

मेरी कृति ग्रंथ छत्तीसगढ़ गणित दर्शन के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान S और उभयनिष्ट सर्वान्तर d ज्ञात होने पर प्रथम पद क्रमशः a,b,c,e की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक **1** के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार –**[1] d=1 के प्रति– a=x लिये जाने पर b=3d+x+2 , c =6d+x+4 , e =S–(15d+3x+6) (e-c ) = S –[21d – 4x +10]**

**[2] d≥2 के प्रति– a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c =6d+x+2 , e =S–(15d+3x+3) (e-c ) = S –[21d – 4x +5]**

**सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–**

**सर्वान्तर d के प्रति** a = x=1 के लिये सुनिश्चिता पर–

[1] d=1 के प्रति– a=1, b=6, c=11, e=S–24 (e-c)=S-35

[2] d≥2 के प्रति– a=1 b=3d+2, c=6d+3, e=S–(15d+6) =[(S=6)– 15d

(e-c) S–[21d+9] = [(S– 9) – 21d]

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति (e-c) = [(S– 9) – 21d] को दृष्टिगत करने पर–

$d_m = [[S - 9) \div 21]$ की संक्रिया से–शेष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशेष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या $P = [(e-c) \div 4]$ की संक्रिया से प्राप्त भागफल r एवं शेषफल q को दृष्टिगत करते हुये निम्नानुसार सुनिश्चित होगा।

1• शेषफल q= 0 और 1 प्राप्त होने पर – भागफल r

2• शेषफल 2 और 3 प्राप्त होने पर – भागफल r का आगर (r+1) होगा।

विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या =P*184 का गुणनफल होगा।

टीप– सर्वान्तर d के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार में (e-b) एवं(e-c) = 0, d,2d,3d हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः (e और b) एवं (e और b) पंक्ति के क्रमशः (4-4),(3-3),(2-2),(1-1) अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे।

## [B2] प्रतिबंध एवं नियम समिका– 1

### S=(2a+b+c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राथम प्राप्त प्रथम 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा और तीसरा 4 पदी अलग–अलग 2 समांतर श्रेढ़ी है ।

के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d),(a+4d), (a+5d),(a+6d), (a+7d),,

[2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) [3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [2a + b + c + 10d] होगा।

प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

मेरी कृति ग्रंथ छत्तीसगढ़ गणित दर्शन के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान S और उभयनिष्ट सर्वान्तर d ज्ञात होने पर प्रथम पद क्रमशः a,b,c, की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

सर्वान्तर d = 1 के प्रति a=x लिये जाने पर b=7d+x+2, c = [S – (10d + 2a + b)]

= [S – (17d+3x+2)]

(c- b) = [S – (24d+4x+2)]

आगे सर्वान्तर d ≥ 2 के प्रति a=x लिये जाने पर b=7d+x+1,

c =[S – (10d + 2a + b)] = [S – (17d+3x+1 ], (c- b) = [S – (24d+6)]

सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–

a=x=1 लिये जाने पर –

सर्वान्तर d = 1 के प्रति a=1 , b=10 , c =[S – 22], (c- b) = [S – 32]

आगे सर्वान्तर d ≥ 2 के प्रति a=1 , b=7d+2 , c =[S –(17d+4)]

(c- b) = [S – (24d+6)]

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति (c-b) =[(S-6)–24d को दृरिटगत करन पर–

$d_m = [(S-6) \div 24]$ की संक्रिया से–शैष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशैष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

**किसी सर्वान्तर $d_n$ के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या** P = [(c-b)÷ 4 ]से प्राप्त भागफल r एवं शेषफल q को दृष्टिगत करते हुये निम्नानुसार सुनिश्चित होगा।

1• शेषफल q=0 और 1 प्राप्त होने पर – प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = प्राप्त भागफल r होगा।

2• शेषफल q=2 और 3 प्राप्त होने पर – प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = भागफल r का आगर (r+1) होगा।

**विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या =P *184 का गुणनफल होगा।**

पृष्ठ 163 Ψसर्वान्तर d के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार **में (b-a)** एव **(c-b) = 0, d,2d,3d** हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः **(a** और **b)** एवं **(b** और **c)** पंक्ति के क्रमशः **(4-4),(3-3),(2 -2),(1-1)** अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे।

## प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

## S=(a+2b+c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राथम प्राप्त प्रथम 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी और तीसरा 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी है ।

के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) , (b+4d),(b+5d), (b+6d), (b+7d) [3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + 2b + c + 10d] होगा।

**4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| b+4d | b+5d | b+6d | b+7d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

मेरी कृति ग्रंथ **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन** के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान S और उभयनिष्ट सर्वान्तर d ज्ञात होने पर प्रथम पद क्रमशः a,b,c, की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक **1** के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

**सर्वान्तर d = 1 के प्रति a=x लिये जाने पर b=3d+x+2 , c = [$S$ – (10d + a + 2b)]**

**= [$S$ – (16d+3x+4)]**

**[ c-( b+4d)] = [$S$ – (23d+4x+6)] =[S-(29+4x)]**

**आगे सर्वान्तर d ≥ 2 के प्रति a=x लिये जाने पर b=3d+x+1,**

**c =[$S$ – (10d + a + 2b)] = [$S$ – (16d+3x+2 ], [ c- (b+4d) = [$S$ – (23d+4x+3)]**

**सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–**

**a=x=1 लिये जाने पर –**

**सर्वान्तर d = 1 के प्रति a=1 , b=6 , c =[$S$ – 23], [ c- (b+4d)] = [$S$ – 33]**

**आगे सर्वान्तर d ≥ 2 के प्रति a=1 , b=3d+2 , c =[S –(16d+5)]**

**[ c – ( b+4d) = [$S$ – (23d+7)]**

**सर्वान्तर d का अधिकतम् मान की गणना–**

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति [ **c - ( b+4d) =[(S-7) -23d]**को दृष्टिगत करने पर–

$d_m = [(S-7) \div 23]$ की संक्रिया से– शेष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशैष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

**प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या** P = [{c-(b+4d)} ÷ 4 ]की संक्रिया से प्राप्त भागफल r एवं शेषफल q को दृष्टिगत करते हुये निम्नानुसार सुनिश्चित होगा।

1• शेषफल q= 0 और 1 प्राप्त होने पर – भागफल r

2• शेषफल 2 और 3 प्राप्त होने पर – भागफल r का आगर (r+1) होगा।

**विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या =P *184 का गुणनफल होगा।**

पृष्ठ164 Ψसर्वान्तर d के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार **में (b-a)** एवं**(c-b) = 0, d,2d,3d** हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः **(a** और **b)** एवं **(b** और **c)** पंक्ति के क्रमशः **(4-4),(3-3),(2-2),(1-1)** अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे।

## प्रतिबंध एवं नियम समिका– 3

## S=(a+b+2c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त प्राथम एवं दूसरा 4 पदी अलग–अलग 2 समांतर श्रेढ़ी एवं तीसरा 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद क्रमशः a,b,c स्वयं में समान्तर नहीं है ।

के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d)

[3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), (c+4d),(c+5d), (c+6d),(c+7d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + b + 2c + 10d] होगा।

**4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| c+4d | c+5d | c+6d | e+7d |

मेरी कृति ग्रंथ **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन** के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान S और उभयनिष्ट सर्वान्तर d ज्ञात होने पर प्रथम पद क्रमशः a,b,c, की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

2 से पूर्ण विभाज्य संख्या सम संख्या कहलाती है। सम संख्या में से सम संख्या घटाने पर सम संख्या प्राप्त होगा। विषम संख्या में से विषम संख्या घटाने पर सम संख्या प्राप्त होगा। को दृष्टिगत करने पर–

**[1] S सम संख्या होने पर–**

**सर्वान्तर d = 1 के प्रति a=2x लिये जाने पर b=3d+2x+3 ,**

$\mathbf{c = \frac{1}{2}\,[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+4x+3)}$

**पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+3 = 3d+5 =8**

$\mathbf{c = \frac{1}{2}\,[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+4x+3)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+7)] = \frac{1}{2}\,[S = 20]}$

$\mathbf{(c-b) = \frac{1}{2}\,[S - 20] - 8 = \frac{1}{2}[S - 36]}$

**सर्वान्तर d =2 के प्रति a=2x त्र1 लिये जाने पर b=3d+2x+4,**

$\mathbf{c = \frac{1}{2}\,[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+4x+4)]}$

**: x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+4 = 3d+6 = 12**

$\mathbf{c = \frac{1}{2}\,[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+4x+4)] = \frac{1}{2}\,[S - (13d+8)] = \frac{1}{2}\,[S - 34]}$

$\mathbf{(c-b) = \frac{1}{2}\,[S - 34] - 12 = \frac{1}{2}\,[S - 58]}$

आगे सर्वान्तर $d \geq 3$ के प्रति

1. सर्वान्तर d के सम संख्या होने के प्रति a=2x= लिये जाने पर b=3d+2x+2

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+2)]$

पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+2 = 3d+4

$c = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+2)] = \frac{1}{2}[S - (13d+6)]$

$(c-b) = \frac{1}{2}[S - (13d+6)] - (3d+4) = \frac{1}{2}[S - (19d+14)]$

2. सर्वान्तर d के विषम संख्या होने के प्रति– a=2x लिये जाने पर b=3d+2x+1

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)]$

पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+1 = 3d+3

$c = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)] = \frac{1}{2}[S - (13d+5)]$

पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+1 = 3d+3

$c = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)] = \frac{1}{2}[S - (13d+5)]$

$(c-b) = \frac{1}{2}[S - (13d+5)] - (3d+3) = \frac{1}{2}[S - (19d+11)]$

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति $[c-b] = \frac{1}{2}[(S-14) - 19d]$ को दृष्टिगत करने पर–

$d_m = [(S-14) \div 19]$ की संक्रिया से– शैष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशेष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

[2] S विषम संख्या होने पर–

सर्वान्तर $d = 1$ के प्रति a=2x लिये जाने पर b=3d+2x+2,

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+2)$

पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+2 = 3d+4 =7

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+2)] = \frac{1}{2}[S - (13d+6)] = \frac{1}{2}[S = 19]$

$(c-b) = \frac{1}{2}[S - 19] - 7 = \frac{1}{2}[S - 33]$

सर्वान्तर d =2 के प्रति a=2x त्र1 लिये जाने पर b=3d+2x+1,

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)]$

: x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+1 = 3d+3= 9

$c = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)] = \frac{1}{2}[S - (13d+5)] = \frac{1}{2}[S - 31]$

$(c-b) = \frac{1}{2}[S - 31] - 9 = \frac{1}{2}[S - 49]$

आगे सर्वान्तर $d \geq 3$ के प्रति

1. सर्वान्तर d के सम संख्या होने के प्रति a=2x= लिये जाने पर b=3d+2x+1

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)]$

पुनः x=1 लिपे जाने पर a=2x=2 b=3d+2x+1 = 3d+3

$c = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+1)] = \frac{1}{2}[S - (13d+5)]$

$(c-b) = \frac{1}{2}[S - (13d+5)] - (3d+3) = \frac{1}{2}[S - (19d+11)]$

2. सर्वान्तर d के विषम संख्या होने के प्रति– a=2x लिये जाने पर b=3d+2x+2

$c = \frac{1}{2}[S - (10d + a + b)] = \frac{1}{2}[S - (13d+4x+2)]$

पुनः $x=1$ लिपे जाने पर $a=2x=2 \quad b=3d+2x+2 \;=\; 3d+4$

$c=\frac{1}{2}\,[S-(13d+4x+2)] \;=\frac{1}{2}\,[S-(13d+6)]$

$(c-b)=\frac{1}{2}\,[S-(13d+6)]-(3d+4) \;=\frac{1}{2}\,[S-(19d+14)]$

सर्वान्तर $d$ का अधिकतम् मान $d_m$ के प्रति $[c-b]=\frac{1}{2}\,[(S-11)-19d]$ को दृष्टिगत करने पर–

$d_m=[(S-11)\div 19]$ की संक्रिया से– शेष युक्त प्राप्त भागफल $r$ के प्रति $r$ ही होगा। जबकि अशैष प्राप्त भागफल $r$ के प्रति $(r-1)$ होगा।

**ध्यानाकर्षण** $S$ **के सम एवं विषम मानों के प्रति–**

किसी सर्वान्तर $d$ के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्राप्ती क्रम में $x$ वें क्रम का प्रथम पद $a_x=2x$ होगा।

**किसी सर्वान्तर** $d$ **के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या** $P=\{c-b\}\div 2\,]$ की संक्रिया से प्राप्त भागफल $r$ एवं शेषफल $q$ को दृष्टिगत करते हुये निम्नानुसार सुनिश्चित होगा।

1• शेषफल $q=0$ औ प्राप्त होने पर – भागफल $r$

2• शेषफल $1$ प्राप्त होने पर – भागफल $r$ का आगर $(r+1)$ होगा।

**स्तारित आधार–वर्ग की संख्या** $=P*184$ **का गुणनफल होगा।**

प 165 $\Psi$सर्वान्तर $d$ के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार **में** $(b-a)$ एवं$(c-b)=0,d,2d,3d$ हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः $(a$ और $b)$ एवं $(b$ और $c)$ पंक्ति के क्रमशः $(4-4),(3-3),(2-2),(1-1)$ अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे।

## [B3] प्रतिबंध एवं नियम समिका– 1

### $S=(3a+b+18d)$ के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर $d$ पर प्राप्त प्रथम 12 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 4 पदी समांतर श्रेढ़ी है ।

के प्रति

[1] $a,\ (a+d),(a+2d),\ (a+3d),(a+4d),\ (a+5d),(a+6d),\ (a+7d),\ ),(a+8d),\ (a+9d),(a+10d),\ (a+11d),$

[2] $b,\ (b+d),(b+2d),\ (b+3d)$ जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान $S=[3a+b+18d]$ होगा।

4 **के यथार्थ भाजक** 1 **के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| a+8d | a+9d | a+10d | a+11d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |

मेरी कृति ग्रंथ **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन** के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग** $\rightarrow$ **विशिष्ट आधार–वर्ग** $\rightarrow$ **सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान $S$ और उभयनिष्ट सर्वान्तर $d$ ज्ञात होनर प्रथम पद क्रमशः $a,b,$ की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक **1** के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

**सर्वान्तर** $d\geq 1$ **के प्रति** $a=x$ **लिये जाने पर** $b=[S-(18d+3a)]=b=[(S-3x)-18d]$

पुनः $a=x=1$ लिये जाने पर $b=[(S-3x)-18d]=[(S-3)-18d]$

$[b-(a+8d)]=[(S-4)\;-26d]$

**सर्वान्तर** $d$ **का अधिकतम् मान**

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m = [(S-4) \div 26]$ की संक्रिया से– शेष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशैष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

**सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–**

**$[(S-4) - 26d] \div 4$** की संक्रिया से–

1• शेषफल q= 0 और 1 प्राप्त होने पर – भागफल r

2• शेषफल 2 और 3 प्राप्त होने पर – भागफल r का आगर (r+1) होगा।

**विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या =P *184 का गुणनफल होगा।**

पृ 167 सर्वान्तर d के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार **में (b-a)** एवं**(c-b) = 0, d,2d,3d** हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः **(a** और **b)** एवं **(b** और **c)** पंक्ति के क्रमशः **(4-4),(3-3),(2-2),(1-1)** अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे। सर्वान्तर **1** पर **16** पदी एक समान्तर श्रेढ़ी का प्रतिरूपण प्राप्त हो सकता है।

## प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

## S=(a+3b +18d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त प्रथम 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 12 पदी समांतर श्रेढ़ी है ।

के प्रति

[1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d)

[2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d), (b+4d),(b+5d),(b+6d), (b+7d), (b+8d), (b+9d), b+10d),(b+11d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + 3b + 18d] होगा।

**4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| b+4d | b+5d | b+6d | b+7d |
| b+8d | b+9d | b+10b | b+11d |

मेरी कृति ग्रंथ **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन** के अध्याय 11 में उपरोक्त **प्रतिबंधानुसार सामान्य आधार–वर्ग → विशिष्ट आधार–वर्ग → सामान्य जादुई–वर्ग की व्यापक रचना प्रस्तुति प्रस्तुत है। जिसके प्रति** 4-4 अवयवों का योगमान S और उभयनिष्ट सर्वान्तर d ज्ञात होने पर प्रथम पद क्रमशः a,b, की सुनिश्चिता एव यथार्थ भाजक **1** के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या का आकलन समिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिये।

**S=(a+3b +18d) से $b = \frac{1}{3}[(S-a)-18d]$** में किसी सर्वान्तर **d≥ 1 एवं** क्रमांक **x** के प्रति–

**योगमान S को 3 से विभाजित करने पर–**

**1■ शेषफल 0** (शून्य) की प्राप्ति के **प्रति – a=3x, $b = \frac{1}{3}[(S-3x)-18d]$**

**2■ शेषफल 1** (एक) की प्राप्ति के **प्रति – a=3x +1, $b = \frac{1}{3}[\{S-(3x+1)\}-18d]$**

**3■ शेषफल 2** (दो) की प्राप्ति के **प्रति – a=3x +2, $b = \frac{1}{3}[\{S-(3x+2)\}-18d]$**

किसी सर्वान्तर **d≥ 1 एवं** क्रमांक **x =1** के प्रति–

**1■ शेषफल 0** (शून्य) की प्राप्ति के **प्रति – a=3x = 3 $b = \frac{1}{3}[(S-3)-18d]]$**

**$(b=a) = \frac{1}{3}[(S-12)-18d]]$**

**2■ शेषफल 1** (एक) की प्राप्ति के **प्रति – a=3x +1=4 $b = \frac{1}{3}[(S-4)-18d]]$**

**$(b=a) = \frac{1}{3}[(S-16)-18d]]$**

**3■ शेषफल 2** (दो) की प्राप्ति के **प्रति** – $a=3x+2=5$ $b=\frac{1}{3}[(S-5)-18d]]$

$(b=a)=\frac{1}{3}[(S-20)-18d]]$

**सर्वान्तर d का अधिकतम् मान** सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ =

**1■ शेषफल 0** (शून्य) की प्राप्ति के **प्रति** $[(S-12)\div 18]$

**2■ शेषफल 1** (एक) की प्राप्ति के **प्रति** $[(S-16)\div 18]$

**3■ शेषफल 2** (दो) की प्राप्ति के **प्रति** $[(S-20)\div 18]$

} **की संक्रिया से**

शेष युक्त प्राप्त भागफल r के प्रति r ही होगा। जबकि अशेष प्राप्त भागफल r के प्रति (r-1} होगा।

**सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–**

**सर्वान्तर $d\geq 1$ एवं $x=1$ के प्रति**

प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = [**सर्वान्तर $d\geq 1$ एवं $x=1$ के प्रति प्राप्त** (b-a)÷ 2] की संक्रिया से प्राप्त भागफल r एवं शेषफल q को दृष्टिगत करते हुये निम्नानुसार सुनिश्चित होगा।

1• शेषफल q=0 और 1 प्राप्त होने पर – प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = प्राप्त भागफल r

2• शेषफल q= 2 और 3 प्राप्त होने पर – प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = प्राप्त भागफल का आगर (r+1) होगा।

**विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या =P *184 का गुणनफल होगा।**

पृष्ठ 168Ψसर्वान्तर d के प्रति सामान्य आधार–वर्ग विस्तार **में (b-a)** एवं**(c-b) = 0, d,2d,3d** हो सकता है। जिसके जारतम्य में क्रमशः **(a** और **b)** एवं **(b** और **c)** पंक्ति के क्रमशः **(4-4),( 73-3),(2-2),(1-1)** अवयव दोहराये जाने की संगता में होंगे।

## उपरोक्त प्रतिबंध एवं समिका का अनुप्रयोग उदाहरण–

**उदाहरण– S =108 के प्रति**

उपरोक्त प्रतिबंध नियम एवं समिका के परिपालन में S के ज्ञात मान को दृष्टि करते हुये सामान्य,/ सामान्य रंगीन/ विशिष्ट प्रकार के रंगीन जिादुई–वर्ग रचना के प्रति प्रथम सामान्य आधार–वर्ग रचना की कुल प्रस्तुति की व्यापकता में सर्वमान्य नियम प्रतिपादन विषयक समिका निम्नानुसार होगा। जिनके प्रति उदाहरणार्थ हिन्दु एवं जैन धर्म की शुभ एवं पूर्णता सिद्व संख्या स्वरूप आत्मसाती है। जिसके विषयक आष्यात्म विचार मंथन में– 1• 108 का मूलांक (एक अंकीय योग मान) 9 पूर्णता का बोध कराता है।

2• राशि संख्या 12 एवं ग्रह संख्या 9 का गुणनफल 108

3• नक्षत्र संख्या 27 एवं प्रत्येक नक्षत्र के चरण संख्या 4 का गुणनफल 108

के प्रति 3*3. एवं 4*4 का जादुई –वर्ग रचना चिषयक प्रथम आधार–वर्ग = **जादुई–वर्ग के प्रकारों की संख्या विस्तार अवलाकित कीजिये।** रचना में समिका परिपालन विदित कराया गया है।

**1■ N के यथार्थ भाजक 1 (एक ) के प्रति–**

**स11ंख्या S=108 के अनुपालन में–**

**{1} 3*3** के प्रति– **समिका** $2a=\frac{2s}{N}-(N^2-1)*d$ के तारतत्य में–

| | | |
|---|---|---|
| a | a+d | a+2d |
| a+3d | a+4d | a+5d |
| a+6d | a+7d | a+8d |

S =108 , N=3 प्रति स्थापित करने पर–

$2a=\frac{2s}{N}-(3^2-1)*d \Rightarrow a=36-4d$

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $[\frac{2+108}{3}\div(3^2-1)=[72\div 8]$ की संक्रिया से–

शून्य शेषफल पर भागफल r=9 है।

∴ सर्वान्तर d का अशिकतम् मान– भागफल 9 का उना 8 होगा।

प्रतिबंधानुसार हल तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d = | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| a = | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 | 8 | 4 |

सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति –
प्रथम आधार–कर्ग की संख्या 8
प्रथम आधार–कर्ग से विस्तारित आधार–कर्ग की संख्या 8*8 =64

रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति – प्रथम आधार–कर्ग की संख्या 8
प्रथम आधार–कर्ग से विस्तारित आधार–कर्ग की संख्या 8*8 =64

{2} 4*4 के प्रति– समिका $2a = \frac{2s}{N} - (N^2 - 1) * d$ के तारतत्य में–

| a | a+d | a+2d | a+3d |
|---|---|---|---|
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| a+8d | a+9d | a+10d | a+11d |
| a+12d | a+13d | a+14d | a+15d |

S =108 , N=4 प्रति स्थापित करने पर–

$2a = \frac{2*108}{4} - (4^2 - 1) * d$

$\Rightarrow 2a = 54 - 15d$ का प्रतिबंधानुसार हल तालिका

सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $[\frac{2s}{N} \div 2(N^2 - 1)]$

$= [\frac{2*108}{4} \div 2(4^2 - 1)] = [54 \div 30]$ की संक्रिया से– शून्येतर शेषफल पर भागफल 1 है।∴ सर्वान्तर d का अधिकतम् मान– भागफल r=1 होगा।

| s.n. | 1 |
|---|---|
| d = | 2 |
| a = | 12 |

सामान्य रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति प्रथम आधार–कर्ग से –
विस्तारित आधार–कर्ग की संख्या 1*84 = 84
विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति प्रथम आधार–कर्ग से –
विस्तारित आधार–कर्ग की संख्या 1*12 = 12

विर्शिट सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति प्रथम आधार–कर्ग से विस्तारित आधार–कर्ग की संख्या 1*276= 276

## 2■ N सम संख्या होने पर यथार्थ भाजक 2 (दो) के प्रति–

{1} 4*4 के प्रति– समिका $(a+b) = \frac{2s}{N} - (\frac{N^2}{2} - 1) * d$ के तारतत्य में–

| a | a+d | a+2d | a+3d |
|---|---|---|---|
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| b+4d | b+5d | b+6d | b+7d |

S= 108 के प्रति सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–

a=x=1 के प्रति $b = [(\frac{2*108}{N} - 1) - [(\frac{4^2}{2} - 1) * d]$

$= 53 - 7d$

$(b - a) = (b-1) = 52 - 7d$ प्राप्त करे

सर्वान्तर d का अधिकतम मान की गणना–

$[(\frac{2S}{N} - 1) \div (\frac{N^2}{2} - 1) \Rightarrow [53 \div 7]$ की संक्रिया से –

शून्येतर शेषफल पर भागफल 7 है।∴ सर्वान्तर d का अधिकतम् मान– भागफल 7 होगा।

S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2, 3,4,5,6,7 के लिये–

## सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार किसी सर्वान्तर d के प्रति मान्य (b-a)=52-7d | [(b – a) ÷ 2 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | विशिष्ट जादुई..वर्ग के प्रति P*184 | खमान्य रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति P*56 | विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति P*8 |
| 1 | 1 | 52–7*1 =45 | 22 | 1 | 23 | 4,232 | 1288 | 184 |
| 2 | 2 | 52–7*2 = 38 | 19 | 0 | 19 | 3496 | 1,064 | 153 |
| 3 | 3 | 52–7*3 =31 | 15 | 1 | 16 | 2,924 | 896 | 128 |
| 4 | 4 | 52–7*4 = 24 | 12 | 0 | 12 | 2,208 | 672 | `96 |
| 5 | 5 | 52–7*5 = 17 | 8 | 1 | 9 | 1,656 | 504 | 72 |
| 6 | 6 | 52–7*6 = 10 | 5 | 0 | 5 | 920 | 280 | 40 |
| 7 | 7 | 52–7*7 = 3 | 1 | 1 | 2 | 368 | 112 | 16 |
| योग | | | | | 86 | 15,824 | 4,816 | 688 |

### जाँच की ओर

[1] सर्वान्तर d= 1 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53–7*1 =46 (b-a) = (b-1) =45

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

(b-a) = (b-1) =45] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **22** और शेषफल **1** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 22** का आगर **= 23** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| b | 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 |

| s.n. | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 16 | 17 | 18 | 19 | 29 | 21 | 22 | 23 |
| k | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 |

[2] सर्वान्तर d= 2 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53–7*2 =39 (b-a) = (b-1) =38

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =38] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **19** और शेष फल **0** है।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **19** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| b | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 |

| s.n. | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|
| a | 17 | 18 | 19 |
| b | 23 | 22 | 21 |

[3] सर्वान्तर d= 3 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53−7*3 =32 (b-a) = (b-1) =31

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =31] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **15** और शेषफल **1** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **15** का आगर **16** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| b | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 |

[4] सर्वान्तर d= 4 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53−7*4 =25 (b-a) = (b-1) =24

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =24] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **12** और शेषफल **0** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **12** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| b | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 13 |

[5] सर्वान्तर d= 5 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53−7*5 =18 (b-a) = (b-1) =17

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =17] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **8** और शेषफल **1** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **8** का आगर **9** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| b | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

[6] सर्वान्तर d= 6 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53−7*6 =11 (b-a) = (b-1) =10

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =10] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **5** और शेषफल **9** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **5** होगा।

a b के मान तालिका

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| b | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

[7] सर्वान्तर d= 6 के प्रति– a=x=1 के प्रति b = 53−7*7 =4 (b-a) = (b-1) =3

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या**

[(b-a) =3] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **1** और शेषफल **1** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **1** का आगर **2** होगा ।

| s.n. | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a | 1 | 2 |
| b | 4 | 10 |

**3■ N के यथार्थ भाजक N के प्रति–**

**(1) 3*3** के प्रति– **N=3** विषम संख्या ∴**समिका** ,$S = N*a + N*\frac{N-1}{2}(d+k)$

| a | a+d | a+2d |
|---|---|---|
| a+k | (a+k)+d | (a+k)+2d |
| a+2k | (a+2k)+d | (a+2k)+2d |

$\Rightarrow (N-1)k + 2a = \frac{2S}{N} - (N-1)\,d$ में $-\,d=1$ के प्रति **S=108 और N=3** प्रतिस्थापित करने पर $2k + 2a = 72 - 2 \Rightarrow k + a = 35$ से a का न्यूनतम् मान $a_1 = 1$ के संगत $k = k_1 = 34$

**(k–a) =** $[34 - d]$ **=[34-1] = 33**

**सर्वान्तर d का अधिकत मान** $d_m$ **की गणना–**

**सर्वान्तर d का अधिकत मान** . $[(k_1 \div 2] \Rightarrow 34 \div 2$ की संप्रिया सें प्राप्त भागफल 17 होगौ।

तब सर्वान्त $d = 1,2,3$----------$15,16,17$ के प्रति क्रमशः अलग–अलग तालिका अवलोकित कीजिये। **सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।**

| क्रमांक | सर्वान्तर **d** | सर्वान्तर **d** के प्रति **a=1** लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार किसी सर्वान्तर **d** के प्रति मान्य **(k–a)=(34–d)** | [(k-a)÷ 2 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **भागफल** r | शेषफल q | | **सामान्य जादुई–वर्ग P*8** | **रंगीन जादुई–वर्ग P*8** |
| 1 | 1 | 34–1 = 34 - 1 = 33 | 16 | 1 | 17 | 136 | 136 |
| 2 | 2 | 33 -1 = 34 - 2 = 32 | 16 | 0 | 16 | 128 | 128 |
| 3 | 3 | 32–1 = 34 - 3 = 31 | 15 | 1 | 16 | 128 | 128 |
| 4 | 4 | 31–1 = 34 - 4 = 30 | 15 | 0 | 15 | 120 | 120 |
| 5 | 5 | 30–1 = 34 - 5 = 29 | 14 | 1 | 15 | 120 | 120 |
| 6 | 6 | 29–1 = 34-- 6 = 28 | 14 | 0 | 14 | 112 | 112 |
| 7 | 7 | 28–1 = 34-- 7 = 27 | 13 | 1 | 14 | 112 | 112 |
| 8 | 8 | 27–1 = 34 - 8 = 26 | 13 | 0 | 13 | 104 | 104 |
| 9 | 9 | 26–1 = 34 - 9 = 25 | 12 | 1 | 13 | 104 | 104 |
| 10 | 10 | 25–1= 34 --10 = 24 | 12 | 0 | 12 | 96 | 96 |
| 11 | 11 | 24–1 = 34- 11 = 23 | 11 | 1 | 12 | 96 | 96 |
| 12 | 12 | 23–1 = 34 -12 = 22 | 11 | 0 | 11 | 88 | 88 |
| 13 | 13 | 22–1 = 34 -13 = 21 | 10 | 1 | 11 | 88 | 88 |
| 14 | 14 | 21–1 = 34 -14 = 20 | 10 | 0 | 10 | 80 | 80 |
| 15 | 15 | 20–1 = 34 15 = `19 | 9 | 1 | 10 | 80 | 80 |
| 16 | 16 | 19–1 = 34 -16 = `18 | 9 | 8 | 9 | 72 | 72 |
| 17 | 17 | 18–1 = 34 -17 = 17 | 8 | 1 | 9 | 72 | 72 |
| योग | | | | | 217 | 1,736 | 1,736 |

[1] **d=1 के प्रति** [(k-a) =33] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल **16** और शेषफल **1** है ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या =** भागफल **16** का आगर **17** होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| k | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 |

| s.n. | 16 | 17 |
|---|---|---|
| a | 16 | 17 |
| k | 19 | 18 |

[2] d=2 के प्रति [(k-a) =32] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 16 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 16 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| k | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |

| s=n- | 16 |
|---|---|
| a | 16 |
| k | 18 |

[3] d=3 के प्रति [(k-a) =31] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 15 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 15 का आगर 16 होगा ।

| s=n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| k | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 |

| s.n. | 16 |
|---|---|
| a | 16 |
| k | 17 |

[4] d=4 के प्रति [(k-a) =30] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 15 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 15 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| k | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 |

[5] d=5 के प्रति [(k-a) =29] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 14 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 14 का आगर 15 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| k | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

[6] d=6 के प्रति [(k-a) =28] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 14 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 14 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| k | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

[7] d=7 के प्रति [(k-a) =27] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 13 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 13 का आगर 14 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| k | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 |

[8] d=8 के प्रति [(k-a) =26] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 13 और शेषफल 0 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 13 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| k | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 |

[9] d=9 के प्रति [(k-a) =25] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 12 और शेषफल 1 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 12 का आगर 13 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| k | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 |

[10] d=10 के प्रति [(k-a) =24] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 12 और शेषफल 0 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 12 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| k | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 |

[11] d=11 के प्रति [(k-a) =23] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 11 और शेषफल 1 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 11 का आगर 12 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| k | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |

[12] d=12 के प्रति [(k-a) =22] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 11 और शेषफल 0 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 11 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| k | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |

[13] d=13 के प्रति [(k-a) =21] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 10 और शेषफल 1 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 10 का आगर 11 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| k | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

[14] d=14 के प्रति [(k-a) =20] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 10और शेषफल 0है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 10 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| k | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

[15] d=15 के प्रति [(k-a) =19] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 9 और शेषफल 1 है ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 9 का आगर 10 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| k | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

[16] d=16 के प्रति [(k-a) =18] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 9और शेषफल 0है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 9 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| k | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

[17] d=17 के प्रति [(k-a) =17] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 8 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 8 का आगर 9 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| k | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

[

पुनः प्राप्त करें– ;

(1) सरल कमांक x=n के संगत प्राप्त a और k को आपस में बदलकर (k- a ) के लिये (a-k) सेकर उपरोक्तानुसार प्राप्त करें।

(2) (k- a ) के सम संख्या मानों [30,28,26,24,22,20,18} जिनकी कुल संख्या = प्रथम आधार–वर्ग की संख्याp=7 होगा।

त्ब सकल गणन प्रस्तुति में –

1• प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P = 217+217 +7 = 441

2• सामान्य जादुई–वर्ग संख्या P*8 =441 *8 = 3,528

3• रंगीन जादुई–वर्ग संख्या P*8 =441*8 = 3,528

{2} 4*4 के प्रति– समिका $2(S = 2N*a + N*(N-1)(d+k)$ से –

| a | a+d | a+2d | a+3d |
|---|---|---|---|
| (a+k) | (a+k)+d | (a+k)+2d | (a+k)+3d |
| (a+2k) | (a+2k)+d | (a+2k)+2d | (a+2k)+3d |
| (a+3k) | (a+3k)+d | (a+2k)+2d | (a+3k)+3d |

$\Rightarrow (N-1)k + 2a = \frac{2S}{N} - (N-1)\,d$ में – d=1 के प्रति S=108 और N=4 प्रतिस्थापित करने पर

$3k + 2a = 54 - 3$

$\Rightarrow 3k + 2a = 51$ से a का न्यूनतम् मान $a_1 = 3$ के संगत $k = k_1 = 15$

(k–a) = [15--3d] [15 –3 ] –12

सर्वान्तर d का अधिकत मान $d_m$ की गणना–

सर्वान्तर d का अधिकत मान - $[k_1 \div 2] \Rightarrow 18 \div 2$ की संक्रिया सें प्राप्त भागफल 9 होगा।

∴ सर्वान्तर d का अधिकत मान भागफल 9 होगा।

S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2, 3,4,5,6,7 के लिये–

सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a-3 जाने पर– प्रतिबंधानुसार किसी सर्वान्तर d के प्रति मान्य (k–a) =(13–d) | [(k-a)÷ 2 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | विशिष्ट जादुईकृवर्ग के प्रति P* 276 | खमान्य रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति P*84 | विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग के प्रति P*12 |
| 1 | 1 | 15 – 3 = 13–1 = 12 | 6 | 0 | 6 | 1,656 | 504 | 72 |
| 2 | 2 | 14 – 3 = 13–2 = 11 | 5 | 1 | 6 | 1,656 | 504 | 72 |
| 3 | 3 | 13 –3 = 13–3 = 10 | 5 | 0 | 5 | 1,380 | 420 | 60 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 4 | 12 –3 = 13–4 = 9 | 4 | 1 | 5 | 1,380 | 420 | 60 |
| 5 | 5 | 11-–3 = 13–5 = 8 | 4 | 0 | 4 | 1104 | 336 | 48 |
| 6 | 6 | 10– 3 = 13–6 = 7 | 3 | 1 | 4 | 1,104 | 336 | 48 |
| 7 | 7 | 9–3 =13–7 = 6 | 3 | 0 | 3 | 828 | 252 | 36 |
| शेग | | | | | 33 | 9108 | 2772 | 396 |

जाँच की ओर

[1] d=1 के प्रति [(k-a) =12] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 6 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 6 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| k | 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 |

[2] d=2 के प्रति [(k-a) =11] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 5 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 5 का आगर 6 होगा ।

| S.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| k | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 | 4 |

[3] d= 3 के प्रति [(k-a) =10] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 5 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 5 होगा ।

| s=n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| k | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 |

[4] d=4 के प्रति [(k-a) =9] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 4 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 4 का आगर 5 होगा ।

| S.n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| k | 12 | 10 | 8 | 65 | 4 |

[5] d=5 के प्रति [(k-a) =8] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 4 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 4 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 |
| k | 11 | 9 | 7 | 5 |

[6] d=17 के प्रति [(k-a) =7] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 3 और शेषफल 1 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 3 का आगर 4 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 |
| k | 10 | 8 | 6 | 4 |

[7] d=7 के प्रति [(k-a) =6] ÷ 2 की संक्रिया से प्राप्त भागफल 3 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या = भागफल 3 होगा ।

| s.n. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 |
| k | 9 | 7 | 5 |

**a=9, k =5 के प्रति–**

**[1]** यथार्थ भाजक **1** के प्रति

सरल प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 16 | 23 | 30 |
| 14 | 21 | 28 | 35 |
| 19 | 26 | 33 | 40 |
| 24 | 31 | 38 | 45 |

सरल रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 38 | 31 | 30 |
| 40 | 21 | 28 | 19 |
| 35 | 26 | 33 | |
| 24 | 23 | 16 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+ 1444+961+900 =3386
नी.पं. वर्ग– 576 + 529+256+2025 =338 6
बाँ..स्त.. वर्ग– 81+1600+1225+576 =348 2
दाँ..स्त.. वर्ग– 900 +361+ 196 +2025 = 3482

विशिष्ट प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 14 | 16 | 21 |
| 23 | 28 | 30 | 35 |
| 19 | 24 | 26 | 31 |
| 33 | 38 | 40 | 45 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 40 | 38 | 21 |
| 31 | 28 | 30 | 19 |
| 35 | 24 | 26 | 23 |
| 33 | 16 | 14 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+ 1600+1444+441 = 3566
नी.पं. वर्ग– 1089 + 256+196+2025 =356 6
बाँ.स्त.. वर्ग– 81+961+1225+ 1089 =335 6
दाँ..स्त.. वर्ग– 441 +361+ 529 +2025 = 3356

**[2]** यथार्थ भाजक **2** के प्रति

स्रल प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 23 | 14 | 28 |
| 19 | 33 | 24 | 38 |
| 16 | 30 | 21 | 35 |
| 26 | 40 | 31 | 45 |

सरल रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 31 | 40 | 28 |
| 35 | 33 | 24 | 16 |
| 38 | 30 | 21 | 19 |
| 26 | 14 | 23 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+ 961+1600+ 784 = 3426
नी.पं. वर्ग– 676+ 196+529+2025 =34 26
बाँ.स्त. वर्ग– 81+1225 +1444+ 676 =342 6
दाँ... वर्ग– 784 +256+ 361 +2025 = 3426

विशिष्ट प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 19 | 23 | 33 |
| 14 | 24 | 28 | 38 |
| 16 | 26 | 30 | 40 |
| 21 | 31 | 35 | 45 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 35 | 31 | 33 |
| 40 | 24 | 28 | 16 |
| 38 | 26 | 30 | 14 |
| 21 | 23 | 19 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+ 1225+ 961+ 1089 = 3356
नी.पं. वर्ग– 441+ 529+ 361+2025 =33 56
बा..स्त. वर्ग– 81+1600 +1444+ 441 =356 6
दाँ.स.. वर्ग– 1089 +256+ 196 +2025 = 3566

**[3]** यथार्थ भाजक **4** के प्रति

स्रल प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 14 | 19 | 24 |
| 16 | 21 | 26 | 31 |
| 23 | 28 | 33 | 38 |
| 30 | 35 | 40 | 45 |

सरल रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 40 | 35 | 24 |
| 38 | 21 | 26 | 23 |
| 31 | 28 | 33 | 16 |
| 30 | 19 | 14 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+ 1600+1225+576 =3482
नी.पं. वर्ग– 900 + 361+196+2025 =348 2
बाँ.स्त. वर्ग– 81+1444+ 961+ 900 =348 6
दाँ.स.. वर्ग– 576 +529+ 256 +2025 = 3486

विशिष्ट प्रथम आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 16 | 14 | 21 |
| 19 | 26 | 24 | 31 |
| 23 | 30 | 28 | 35 |
| 33 | 40 | 38 | 45 |

विशिष्ट रंगीन जादुई–0र्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 38 | 40 | 21 |
| 35 | 26 | 24 | 23 |
| 31 | 30 | 28 | 19 |
| 33 | 14 | 16 | 45 |

ऊ.पं. वर्ग– 81+1444+ 1600+441 =35 66
नी.पं. वर्ग– 1089 + 196+256+2025 =356 6
बाँ.स्त. वर्ग– 81+1225+ 961+ 1089 =335 6
दा.स्तं. वर्ग– 441 +529+ 361 +2025 = 3356

**[B] केवल और केवल 4*4 विशिष्ट प्रकार सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति–**

**1■ प्रतिबंध और नियम समिका S = (a+b+c+e+6d) के प्रति आकलन**

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त 4 पदी अलग–अलग 4 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद क्रमशः a,b,c,e स्वयं में कोई भी तीन अवयव a,b,c/a,b,e/a,c,e/b,c,e समान्तर नहीं है और न ही कोई 4 पदी 2 समांतर श्रेढ़ी के सयुक्तीकरण से 8 पदी समांतर श्रेढ़ी दर्शित होगा। के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d)

[3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d) [4] e, (e+d),(e+2d), (e+3d) जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान $S = [a + b + c + e + 6d]$ होगा।

**प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| e | e+d | e+2d | e+3d |

**S= 108 के प्रति सर्वान्तर d के प्रति प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति संख्या आकलन गणना–**

**सर्वान्तर d का अधिकतम् मान** $d_m = [[S - 9) \div 21] = [[99 \div 21]$ की संक्रिया से– शून्येतर शेषफल पर भागफल $r = 4$ है। ∴ सर्वान्तर d का अधिकतम् मान $d_m$ = भागफल $r=4$ होगा।

**S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2, 3, 4 के लिये–**

**सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।**

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य (e-c) d=1 के प्रति– S -35 d≥ 2 के प्रति– $(S-9)-21d$ = 99 -21d | [(e-c)÷ 4 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या p*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल Q | | |
| 1 | 1 | (108–35) = 73 | 18 | 1 | 18 | 3312 |
| 2 | 2 | (99– 21*2) = 57 | 14 | 1 | 14 | 2576 |
| 3 | 3 | (99–21*3) = 36 | 9 | 2 | 9 | 1656 |
| 4 | 4 | (99 –-21*4) = 15 | 3 | 3 | 4 | 736 |
| योग | | | | | 45 | 828 0 |

**जाँच की ओर**

**[1] d=1 से (a+b+c+e= 102)**

**d=1 के प्रति– a=x लियेजाने पर b=3d+x+2 , c =6d+x+4 , e =S–(15d+3x+6)**

**a=x , b= x+5 , c =x+10 , e =S–(15d+3x+6) =108–(15 ∗ 1 + 3x + 6) = 87–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 6 , c =11 , e = 84 (e-c)= 73**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| b | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| c | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| e | 84 | 81 | 78 | 75 | 72 | 69 | 66 | 63 | 60 | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 | 42 |

| | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|
| a | 16 | 17 | 18 |
| b | 21 | 22 | 23 |
| c | 26 | 27 | 28 |
| e | 39 | 36 | 33 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 18 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त e=84 और c=11 के अन्तर मान 73 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 18 और शेषफल 1 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 18 । प्रमाणित ।.**

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=18*184 =3312**

**d = 1 , a= 18, b =23 ,c =28 , e = 33 से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 18 | 19 | 20 | 21 |
| b | 23 | 24 | 25 | 26 |
| c | 28 | 29 | 30 | 31 |
| e | 33 | 34 | 35 | 36 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 | 23 | 19 | 24 |
| 20 | 25 | 21 | 26 |
| 28 | 33 | 29 | 34 |
| 30 | 35 | 31 | 36 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 18 | 31 | 35 | 24 |
| 34 | 25 | 21 | 28 |
| 26 | 33 | 29 | 20 |
| 30 | 19 | 23 | 36 |

**[2] d=2 से (a+b+c+e=96)**

**d≥2 के प्रति– a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c =6d+x+2 , e =S–(15d+3x+3)**

**(e-c ) S –[21d – 4x +5]**

**a=x , b= x+7 , c =x+14 , e =S–(15d+3x+3) =108 − (15 ∗ 2 + 3$x$ + 3) = 75–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 8 , c =15 , e = 72 (e-c)= 57**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| b | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| c | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 |
| e | 72 | 69 | 66 | 63 | 60 | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 | 42 | 39 | 36 | 33 |

*प्रथम* आधार–वर्ग की संख्या 14 जो कि

**a=x=1 के प्रति प्राप्त e=72** और **c=15** के अन्तर मान **57** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **14** और शेषफल **1** है । ∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **14** प्रमाण्ति ।

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=14*184 =2,576**

**d = 2 , a= 14, b =21 ,c =28 , e = 33 से S= 108 की जाँच7**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 14 | 16 | 18 | 20 |
| b | 21 | 23 | 25 | 27 |
| c | 28 | 30 | 32 | 34 |
| e | 33 | 35 | 37 | 39 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 21 | 16 | 23 |
| 18 | 25 | 20 | 27 |
| 28 | 33 | 30 | 35 |
| 32 | 37 | 34 | 39 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 34 | 37 | 23 |
| 35 | 25 | 20 | 28 |
| 27 | 33 | 30 | 18 |
| 32 | 16 | 21 | 39 |

**[3] d=3 से (a+b+c+e= 90)**

**d≥2 के प्रति– a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c =6d+x+2 , e =S–(15d+3x+3)**

**(e-c ) S –[21d – 4x +5]**

**a=x , b= x+10 , c =x+20 , e =S–(15d+3x+3) =108 − (15 ∗ 3 + 3$x$ + 3) = 60–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 11 , c =21 , e = 57 (e-c)= 36**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| b | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| c | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| e | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 | 42 | 39 | 36 | 33 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 9 जो कि

**a=x=1 के प्रति प्राप्त e=57** और **c=21** के अन्तर मान **36** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **9** और शेषफल **0** है । ∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **9** प्रमाणित ।

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=9*184 = 1,656**

**d = 3 , a= 9, b =19 ,c =29 , e = 33 से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 9 | 12 | 15 | 18 |
| b | 19 | 22 | 25 | 28 |
| c | 29 | 32 | 35 | 38 |
| e | 33 | 36 | 39 | 42 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 19 | 12 | 22 |
| 15 | 25 | 18 | 28 |
| 29 | 33 | 32 | 36 |
| 35 | 39 | 38 | 42 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 38 | 39 | 22 |
| 36 | 25 | 18 | 29 |
| 28 | 33 | 32 | 15 |
| 35 | 12 | 19 | 42 |

**[4] d=4 से (a+b+c+e= 84)**

**d≥2 के प्रति– a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c =6d+x+2 , e =S–(15d+3x+3)**

**(e-c ) S –[21d – 4x +5]**

**a=x , b= x+13 , c =x+26 , e =S–(15d+3x+3) =108 – (15 ∗ 4 + 3x + 3) = 45–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 14 , c =27 , e = 42 (e-c)= 15**

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 |
| b | 14 | 15 | 16 | 17 |
| c | 27 | 28 | 29 | 30 |
| e | 42 | 39 | 36 | 33 |

*प्रथम* **आधार–वर्ग की संख्या 4 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त e=42** और **c=27** के अन्तर मान **15** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **3** और शेषफल **3** है । ∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **3** का आगर **4** प्रमाणित ।

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=4*184 = 736**

**d = 4, a= 4, b =17 ,c =30 , e = 33 से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 4 | 8 | 12 | 16 |
| b | 17 | 21 | 25 | 29 |
| c | 30 | 34 | 38 | 42 |
| e | 33 | 37 | 41 | 45 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 17 | 8 | 21 |
| 12 | 25 | 16 | 29 |
| 30 | 33 | 34 | 37 |
| 38 | 41 | 42 | 45 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 42 | 41 | 21 |
| 37 | 25 | 16 | 30 |
| 29 | 33 | 34 | 12 |
| 38 | 8 | 17 | 45 |

## 2■ प्रतिबंध एवं नियम समिका– 1

## S=(2a+b+c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राथम प्राप्त प्रथम 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा और तीसरा 4 पदी अलग–अलग 2 समांतर श्रेढ़ी है ।

" के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d),(a+4d), (a+5d),(a+6d), (a+7d),,

[2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) [3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान $S = [2a + b + c + 10d]$ होगा।

**प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–**

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

**S= 108 के प्रति –**

**सर्वान्तर का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना–** $d_m = [(S - 6) \div 24] = [\mathbf{102} \div 24$ की संक्रिया से शून्येतर शेषफल पर भागफल **r =4** है। ∴ $d_m =$ भागफल **r=4** होगा।

तब सर्वान्तर **d = 1, 2, 3, 4 के लिये– S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान**

क्रमशः

## सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य (c-b) d=1 के प्रति– S -32 d≥ 2 के प्रति– S –(24d+6) | [(c-b)÷ 4 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या p*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | |
| 1 | 1 | 108 – 32 = 76 | 19 | 0 | 19 | 3,496 |
| 2 | 2 | 108 – (24*2+6) = 54 | 13 | 2 | 14 | 2,576 |
| 3 | 3 | 108 – (24*3+6) = 30 | 7 | 2 | 8 | 1,472 |
| 4 | 4 | 108 – (24*4+6) = 6 | 1 | 2 | 2 | 368 |
| योग | | | | | 43 | 7012 |

जाँच की ओर

[1] S= 108 d=1 से (2a+b+c=98)

a=x लियेजाने पर b=7d+x+2 , c = [S–(17d+3x+2) ]=[

a=x , b= x+9 , c = [108–(17*1+3x+2) ] = 89–3x

a=x=1 लियेजाने पर b= 10 , c =86 (c-b) =76

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| b | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| c | 86 | 83 | 80 | 77 | 74 | 71 | 68 | 65 | 62 | 59 | 56 | 53 | 50 | 47 | 44 |

‘

| | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|
| a | 16 | 17 | 18 | 19 |
| b | 25 | 26 | 27 | 28 |
| c | 41 | 38 | 35 | 32 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 19 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c =86 और b=10 के अन्तर मान 76 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल =19 और शेषफल 0 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 19 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या =19*184 = 3496

d = 1, a= 19, b =28 , c =32 , से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 19 | 20 | 21 | 22 |
| | 23 | 24 | 25 | 26 |
| b | 28 | 29 | 30 | 31 |
| c | 32 | 33 | 34 | 35 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19 | 23 | 20 | 24 |
| 21 | 25 | 22 | 26 |
| 28 | 32 | 29 | 33 |
| 30 | 34 | 31 | 35 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19 | 31 | 34 | 24 |
| 33 | 25 | 22 | 28 |
| 26 | 32 | 29 | 21 |
| 30 | 20 | 23 | 35 |

[2] S=108 d=2 से (2a+b+c=88)

a=x लिये जाने पर b=7d+x+1 , c = [S–(17d+3x+1) ]

a=x , b= x+15 , c = [108–(17*2+3x+1) ] = 73–3x

a=x=1 लियेजाने पर b= 16 , c =70 (c-b) =54

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| b | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| c | 70 | 67 | 64 | 61 | 58 | 55 | 52 | 49 | 46 | 43 | 40 | 37 | 34 | 31 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 14 जो कि

**a=x=1 के प्रति प्राप्त c =70** और **b=10** के अन्तर मान **54** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **=13** और शेषफल **2**है।
∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **13** का आगर संख्या 14 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=14*184 = 2,576**

**d = 2, a= 14, b =29 , c =31 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 14 | 16 | 18 | 20 |
| | 22 | 24 | 26 | 28 |
| b | 29 | 31 | 33 | 35 |
| c | 31 | 33 | 35 | 37 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 22 | 16 | 24 |
| 18 | 26 | 20 | 28 |
| 29 | 31 | 31 | 33 |
| 33 | 35 | 35 | 37 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 35 | 35 | 24 |
| 33 | 26 | 20 | 29 |
| 28 | 31 | 31 | 18 |
| 33 | 16 | 22 | 37 |

[3] **S= 108 d=3 से (2a+b+c= 78)**

**a=x लिये जाने पर b=7d+x+1 , c = [S–(17d+3x+1) ]**

**a=x , b= x+22 , c = [108–(17*3+3x+1) ] = 56–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 23 , c = 53 (c-b) =30**

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| b | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| c | 53 | 50 | 47 | 44 | 41 | 38 | 35 | 32 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 8 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c =53** और **b=23** के अन्तर मान **30** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **7** 7और शेषफल **2** है । ∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **7** का आगर संख्या **8** प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=8 *184 = 1,472**

**d = 3, a= 8, b =30 , c =32 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 8 | 11 | 14 | 17 |
| | 20 | 23 | 26 | 29 |
| b | 30 | 33 | 36 | 39 |
| c | 32 | 35 | 38 | 41 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 20 | 11 | 23 |
| 14 | 26 | 17 | 29 |
| 30 | 32 | 33 | 35 |
| 36 | 38 | 39 | 41 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 39 | 38 | 23 |
| 35 | 26 | 17 | 30 |
| 29 | 32 | 33 | 14 |
| 36 | 11 | 20 | 41 |

[4] **S= 108 d=4 से (2a+b+c= 78)**

**a=x लियेजाने पर b=7d+x+1 , c = [S–(17d+3x+1) ]**

**a=x , b= x+29 , c = [108–(17*4+3x+1) ] = 39–3x**

**a=x=1 लियेजाने पर , b= 30, c = 36 (c-b) =6**

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a | 1 | 2 |
| b | 30 | 31 |
| c | 36 | 33 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 2 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c =36** और **b=30** के अन्तर मान **6** को **4** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **1** और शेषफल **2** है । ∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **1** का आगर संख्या **2** प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार वर्ग की कुल संख्या **=2 *184 = 368**

**d = 4, a= 2, b =31 , c =33 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 6 | 10 | 14 |
| | 18 | 22 | 26 | 30 |
| b | 31 | 35 | 39 | 43 |
| c | 33 | 37 | 41 | 45 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 18 | 6 | 22 |
| 10 | 26 | 14 | 30 |
| 31 | 33 | 35 | 37 |
| 39 | 41 | 43 | 45 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 43 | 41 | 22 |
| 37 | 26 | 14 | 31 |
| 30 | 33 | 35 | 10 |
| 39 | 6 | 18 | 45 |

## प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

## S=(a+2b+c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राथम प्राप्त प्रथम 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी और तीसरा 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी है ।

" के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) , (b+4d),(b+5d), (b+6d), (b+7d) [3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + 2b + c + 10d] होगा।

4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| b+4d | b+5d | b+6d | b+7d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |

S= 108 के प्रति–

सर्वान्तर का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना– $d_m = [(S-7) \div 23] = [(101 \div 23]$ की सक्रिया से भ्शून्येतर शेषफल पर ागफल **r =4** है।

∴ $d_m$ = भागफल **4** होगा।

तब S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2, 3, 4 के लिये–

### सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य [c-(b+4d)] d=1 के प्रति– S -33 d≥ 2 के प्रति– S –(23d+7) | [c-(b+4d)]÷ 4 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या p*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | |
| 1 | 1 | 108 – 33 = 75 | 18 | 3 | 19 | 3,496 |
| 2 | 2 | 108 – (23*2+7) = 55 | 13 | 3 | 14 | 2,576 |
| 3 | 3 | 108 – (23*3+7) = 32 | 8 | 0 | 8 | 1,472 |
| 4 | 4 | 198–(23 * 4+7) = 9 | 2 | 1 | 2 | 368 |
| योग | | | | | 43 | 7,912 |

जाँच की ओर

'[1] S= 108 d=1 से (a+2b+c=98)

a=x लियेजाने पर b=3d+x+2 , c = [S–(16d+3x+4) ] [c-(b+4d)] =[ S -{23d+4x+6]

a=x , b= x+5 , c = [ 108–(16*1+3x+4) ] = 88–3x

[c-(b+4d)] =[( 88-3x) –{(x+5)+4d}]= 79- 4x

a=x=1 लियेजाने पर , b= 6 , c =85 [c-(b+4d)] = 75

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| b | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| c | 85 | 82 | 79 | 76 | 73 | 70 | 67 | 64 | 61 | 58 | 55 | 52 | 49 | 46 | 43 |

| | 16 | 17 | 18 | 19 |
|---|---|---|---|---|
| a | 16 | 17 | 18 | 19 |
| b | 21 | 22 | 23 | 24 |
| c | 40 | 37 | 34 | 31 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 19 जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c=85 और [b+4d]= 10 के अन्तर मान 75 को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल 18और शेषफल 3 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 18का अदगर 19 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 19*184 = 3496

**d = 1, a= 19, b =24 , c =31 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 19 | 20 | 21 | 22 |
| b | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 |
| c | 31 | 32 | 33 | 34 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19 | 24 | 20 | 25 |
| 21 | 26 | 22 | 27 |
| 28 | 31 | 29 | 32 |
| 30 | 33 | 31 | 34 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 19 | 31 | 33 | 25 |
| 32 | 26 | 22 | 28 |
| 27 | 31 | 29 | 21 |
| 30 | 20 | 24 | 34 |

[2] S= 108 d=2 से (a+2b+c=88)

a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c = [S–(16d+3x+2) ] [c-(b+4d)] =[ S -{23d+4x+3]

a=x , b= x+7, c = [ 108–(16*2+3x+2) ] = 74–3x

[c-(b+4d)] =[( 74-3x) –{(x+7)+4d}]= 59- 4x

a=x=1 लियेजाने पर , b= 8 , c =71 [c-(b+4d)] = 55

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| b | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
| c | 71 | 68 | 65 | 62 | 59 | 56 | 53 | 50 | 47 | 44 | 41 | 38 | 45 | 32 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 14जो कि

a=x=1 के प्रति प्राप्त c=71 और [b+4d]=16 के अन्तर मान 55 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 13 और शेषफल 3 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 18 का आगर 19 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 14*184 = 2576

**d = 2, a= 14, b =21 , c =31 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 14 | 16 | 18 | 20 |
| b | 21 | 23 | 25 | 27 |
| | 29 | 31 | 33 | 35 |
| c | 32 | 34 | 36 | 38 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 21 | 16 | 23 |
| 18 | 25 | 20 | 27 |
| 29 | 32 | 31 | 34 |
| 33 | 36 | 35 | 38 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 14 | 35 | 36 | 23 |
| 34 | 25 | 20 | 29 |
| 27 | 32 | 31 | 18 |
| 33 | 16 | 21 | 38 |

[3] S= 108 d=3 से (a+2b+c=78)

a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c = [S–(16d+3x+2) ] [c-(b+4d)] =[ S -{23d+4x+3]

a=x , b= x+10 , c = [ 108–(16*3+3x+2) ] = 58–3x

[c-(b+4d)] =[( 58-3x) –{(x+10)+4d}]= 36- 4x

a=x=1 लियेजाने पर , b= 11 , c =55 [c-(b+4d)] = 32

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| b | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| c | 55 | 52 | 49 | 46 | 43 | 40 | 37 | 34 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 8जो कि

a=x=1 के प्रति प्राप्त c=55 और [b+4d]=23 के अन्तर मान 32 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 8 और शेषफल o है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 18 क अदगर 19 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 8*184 =147 2

**d = 3, a= 8 , b =18 , c =34 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 8 | 11 | 14 | 17 |
| b | 18 | 21 | 24 | 27 |
| | 30 | 33 | 36 | 39 |
| c | 34 | 37 | 40 | 43 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 18 | 11 | 21 |
| 14 | 24 | 17 | 27 |
| 30 | 34 | 33 | 37 |
| 36 | 40 | 39 | 43 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 39 | 40 | 21 |
| 37 | 24 | 17 | 30 |
| 27 | 34 | 33 | 14 |
| 36 | 11 | 18 | 43 |

[4] S= 108 d=4 से (a+2b+c= 68)

a=x लियेजाने पर b=3d+x+1 , c = [S–(16d+3x+2) ] [c-(b+4d)] =[ S -{23d+4x+3]

a=x , b= x+13 , c = [ 108–(16*4+3x+2) ] = 42–3x

[c-(b+4d)] =[( 42-3x) –{(x+13)+4*4}]= 13- 4x

a=x=1 लियेजाने पर , b= 14 , c =39 [c-(b+4d)] = 9

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a | 1 | 2 |
| b | 14 | 15 |
| c | 39 | 36 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 2जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c=39 और [b+4d]=30 के अन्तर मान 9 को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल 2 और शेषफल 1 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 2 प्रमाणित ।.

विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 2*184 =368

**d = 4, a= 2 , b =15 , c =36 , से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 6 | 10 | 14 |
| b | 15 | 19 | 23 | 27 |
| | 31 | 35 | 39 | 43 |
| c | 36 | 40 | 44 | 48 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 15 | 6 | 19 |
| 10 | 23 | 14 | 27 |
| 21 | 36 | 35 | 40 |
| 39 | 44 | 43 | 48 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 43 | 44 | 19 |
| 40 | 23 | 14 | 21 |
| 27 | 36 | 35 | 10 |
| 39 | 6 | 15 | 48 |

प्रतिबंध एवं नियम समिका– 3

## S=(a+b+2c +10d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त प्राथम एवं दूसरा 4 पदी अलग–अलग 2 समांतर श्रेढ़ी एवं तीसरा 8 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी जिनके प्रथम पद क्रमशः a,b,c स्वयं में समान्तर नहीं है ।

के प्रति [1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d)

[3] c, (c+d),(c+2d), (c+3d), (c+4d),(c+5d), (c+6d),(c+7d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + b + 2c + 10d] होगा।

4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| c | c+d | c+2d | c+3d |
| c+4d | c+5d | c+6d | e+7d |

S= 108 के प्रति– S= 108 सम संख्या है।

सर्वान्तर का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना– $d_m = [(S - 11) \div 19] = [97 \div 19]$ की संक्रिया से– की सक्रिया से भ शून्येतर शेषफल पर ागफल r =5 है। ∴ $d_m$ = भागफल r=5 होगा।

तब S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2,3,4,5 के लिये–

## सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य (c-b) d=1 के प्रति $-\frac{1}{2}[S-36]$ d=2 के प्रति– $\frac{1}{2}[S-58]$ d≥ 3 के सम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[S-(19d+14)]$ d≥ 3 के विषम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[S-(19d+11)]$ | [(c-b)÷ 2से प्राप्त भागफल r | शेषफल q | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या m*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2}[108-36] = 36$ | 18 | 0 | 18 | 3,312 |
| 2 | 2 | $\frac{1}{2}[108-58] = 25$ | 12 | 1 | 13 | 2,392 |
| 3 | 3 | $\frac{1}{2}[108-(19*3+11)] = 20$ | 10 | 0 | 10 | 1,840 |
| 4 | 4 | $\frac{1}{2}[108-(19*4+14)] = 9$ | 4 | 1 | 5 | 920 |
| 3 | 3 | $\frac{1}{2}[108-(19*5+11)] = 1$ | 0 | 1 | 1 | 184 |
| योग | | | | | 47 | 8,648 |

[1] S= 108 सम संख्या d=1 से (a+b+2c=98)

सर्वान्तर d = 1 के प्रति x=1, a=2x=2 लिये जाने पर b=3d+2x+3 =6+2x =8

c = $\frac{1}{2}[S-(13d+4x+3)$ $\frac{1}{2}[108-(16+4x) = 46-2x = 44$ (c–b)= 36

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 |
| b | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 |
| c | 44 | 42 | 40 | 38 | 36 | 34 | 32 | 30 | 28 | 26 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 18 जो कि

a=x=1 के प्रति प्राप्त c=44 और b=8 के अन्तर मान 36 को 2 से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल 18 और शेषफल 0 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 18 प्रमाणित ।

विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 18*184 = 3,312

d = 1 a= 36 , b = 42 , c = 10, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 36 | 37 | 38 | 39 |
| b | 42 | 43 | 44 | 45 |
| c | 10 | 11 | 12 | 13 |
| | 14 | 15 | 16 | 17 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 42 | 17 | 43 |
| 38 | 44 | 39 | 45 |
| 10 | 14 | 11 | 15 |
| 12 | 16 | 13 | 17 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 13 | 16 | 43 |
| 15 | 44 | 39 | 10 |
| 45 | 14 | 11 | 38 |
| 12 | 17 | 42 | 17 |

[2] S= 108 सम संख्या d=2 से (a+b+2c=88)

सर्वान्तर d = 2 के प्रति x=1, a=2x=2 लिये जाने पर b=3d+2x+4 =10+2x =12

c = $\frac{1}{2}[S-(13d+4x+4) = \frac{1}{2}[108-(30+4x)$तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 |
| b | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | 36 |
| c | 37 | 35 | 33 | 31 | 29 | 27 | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 | 15 | 13 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 7 जो कि
a=x=1 के प्रति प्राप्त c=37 और b=12 के अन्तर मान 25 को 2 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 12 और शेषफल 1 है ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 12 का आगर 13 प्रमाणित ।.
विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 13*184 = 2,392
d = 2 a= 26 , b = 36, c =13, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 26 | 28 | 30 | 32 |
| b | 36 | 38 | 40 | 42 |
| c | 13 | 15 | 17 | 19 |
| | 21 | 23 | 25 | 27 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 36 | 28 | 38 |
| 30 | 40 | 32 | 42 |
| 13 | 21 | 15 | 23 |
| 17 | 25 | 19 | 27 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 26 | 19 | 25 | 38 |
| 23 | 40 | 32 | 13 |
| 42 | 21 | 15 | 30 |
| 17 | 28 | 36 | 27 |

[3] S= 108 सम संख्या d=3 से (a+b+2c=78)
सर्वान्तर d = 3 के प्रति x=1, a=2x=2 लिये जाने पर b=3d+2x+1 =10+2x =12
c = $\frac{1}{2}$ [$S$ – (13d+4x+1) $\frac{1}{2}$ [108 – (40+4x) = 34 – 2$x$ =32 (c–b)= 20
को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| b | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 |
| c | 32 | 30 | 28 | 26 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 10 जो कि
a=x=1 के प्रति प्राप्त c=32 और b=12 के अन्तर मान 20 को 2 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 10 और शेषफल 0 है । ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 10 प्रमाणित ।.
विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 10*184 = 1,840
d = 3 a= 20 , b = 30, c =14, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 20 | 23 | 26 | 29 |
| b | 30 | 33 | 36 | 39 |
| c | 14 | 17 | 20 | 23 |
| | 26 | 29 | 32 | 35 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 30 | 23 | 33 |
| 26 | 36 | 29 | 39 |
| 14 | 26 | 17 | 29 |
| 20 | 32 | 23 | 35 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 23 | 32 | 33 |
| 29 | 36 | 29 | 14 |
| 39 | 26 | 17 | 26 |
| 20 | 23 | 32 | 35 |

[4] S= 108 सम संख्या d=4 से (a+b+2c=68)
सर्वान्तर d = 4 के प्रति x=1, a=2x=2 लिये जाने पर b=3d+2x+2 =14+2x =16
c = $\frac{1}{2}$ [$S$ – (13d+4x+2) $\frac{1}{2}$ [108 – (54+4x) = 27 – 2$x$ =25 (c–b)= 9
को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| b | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| c | 25 | 23 | 21 | 19 | 17 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 5 जो कि
a=x=1 के प्रति प्राप्त c=25 और b=16 के अन्तर मान 9 को 2 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 4और शेषफल 1 है । ।
∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 4 का आगर 5 प्रमाणित होगा।.
∴ विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 5*184 = 920 ।

**d = 3 a= 10 , b = 24, c =17,** से **S= 108** की जाँच

प्रथम आधार–0वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 10 | 14 | 18 | 22 |
| b | 24 | 28 | 32 | 36 |
| c | 17 | 21 | 25 | 29 |
| | 33 | 37 | 41 | 45 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 24 | 14 | 28 |
| 18 | 32 | 22 | 36 |
| 17 | 33 | 21 | 37 |
| 25 | 41 | 29 | 45 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | 29 | 41 | 28 |
| 37 | 32 | 22 | 17 |
| 36 | 33 | 21 | 18 |
| 25 | 14 | 24 | 45 |

**[5] S= 108** सम संख्या **d=5 से (a+b+2c=58)**

सर्वान्तर **d ≥ 3** के प्रति **x=1, a=2x=2** लिये जाने पर **b=3d+2x+1 =16+2x =18**

**c =** $\frac{1}{2}$ **[S − (13d+4x+1)** $\frac{1}{2}$ **[108 − (66+4x) = 21 - 2x =19 (c−b)= 1**

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 |
|---|---|
| a | 2 |
| b | 18 |
| c | 19 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 1जो कि a=x=1 के प्रति प्राप्त c=19** और **b=18** के अन्तर मान **1** को **2** से विभजित करने पर प्राप्त भागफल **0** और शेषफल **1** है । ।

∴ **प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल **0** का आगर **1** प्रमाणित ।.

**विस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 1*184 = 1,84**

**d = 5 a= 2 , b = 18, c =19,** से **S= 108** की जाँच

प्रथम आधार–0वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 2 | 7 | 12 | 17 |
| b | 18 | 23 | 28 | 33 |
| c | 19 | 24 | 29 | 34 |
| | 39 | 44 | 49 | 54 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 18 | 7 | 23 |
| 12 | 28 | 17 | 33 |
| 19 | 39 | 24 | 44 |
| 29 | 49 | 34 | 54 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2 | 34 | 49 | 23 |
| 44 | 28 | 17 | 19 |
| 33 | 39 | 24 | 12 |
| 29 | 7 | 18 | 54 |

## 3■ प्रतिबंध एवं नियम समिका – 1

### S=(3a+b +18d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त प्रथम 12 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 4 पदी समांतर श्रेढ़ी है । के प्रति–

[1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d),(a+4d), (a+5d),(a+6d), (a+7d), ),(a+8d), (a+9d),(a+10d), (a+11d) [2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d) जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [3a + b + 18d] होगा।

4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| a+4d | a+5d | a+6d | a+7d |
| a+8d | a+9d | a+10d | a+11d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |

**[1] S= 108** सम संख्या **d=1 से (3a+b+=90)**

**S= 108** के प्रति–

सर्वान्तर का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना– $d_m = [(S-4) \div 26] = [(104 \div 26]$ सक्रिया से शून्य शेषफल पर भागफल **r =4** है।

∴ $d_m =$ भागफल **r=4** के प्रति **(r-12) =3** होगा।

**[ b – (a+8d)] = [(S − 4) − 26d] = [(108 −4) − 26d ] = [104 − 26d) =**

तब **S= 108** के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः **1, 2,3, 3** के लिये–

## सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य [ b – (a+8d]= [104 –26d] | [b- (a+8d)]÷ 4 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या m*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | |
| 1 | 1 | [104 –26*1] = 78 | 19 | 2 | 20 | 3,680 |
| 2 | 2 | [104 –26*2] = 52 | 13 | 0 | 13 | 2,392 |
| 3 | 3 | [104 –26*3] = 26 | 6 | 2 | 7 | 1288 |
| यज्ञैग | | | | | 40 | 7,360 |

सर्वान्तर d = 1 के प्रति (3a+b = 90 )

a=x=1 लिये जाने पर b= [(S–3x) –18$d$] = [(105–3) – 18 * 1] =105–18 =87

[b-(a+8d] =[(S-4)-26d]= [104 -26*1] = 78

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| b | 87 | 84 | 81 | 78 | 75 | 72 | 69 | 66 | 63 | 60 | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 |

| | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| b | 42 | 39 | 36 | 33 | 30 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 20जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 87और (a+8d) =(1+8)=9 के अन्तर मान 78 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 19 और शेषफल 2 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 19 का आगर 20 प्रमाणित ।.

वस्ता1रत आधार–वर्ग की कुल संख्या 20*184 = 3,680

d =1 a= 20 , b = 30, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 |
| b | 30 | 31 | 32 | 33 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 24 | 21 | 25 |
| 22 | 26 | 23 | 27 |
| 28 | 30 | 29 | 31 |
| 30 | 32 | 31 | 33 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 20 | 31 | 32 | 25 |
| 31 | 26 | 23 | 28 |
| 27 | 30 | 29 | 22 |
| 30 | 21 | 24 | 33 |

[2] S= 108 d=2 से (3a+b+=72)

सर्वान्तर d = 2 के प्रति a=x=1 लिये जाने पर

b= [(S–3x) –18$d$] = [(108–3) – 18 * 2] =105–36 = 69

[b-(a+8d] =[(S-4)-26d]= [104 -26*2] = 52

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| b | 69 | 66 | 63 | 60 | 57 | 54 | 51 | 48 | 45 | 42 | 39 | 36 | 33 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 13जो कि x= a=1 के प्रति प्राप्त b= 69और (a+8d) =(1+16)=17के अन्तर मान 52 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 13 और शेषफल 0 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 13 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 13*184 = 2,392

**d =2 a= 13 , b = 33, से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 13 | 15 | 17 | 19 |
| | 21 | 23 | 25 | 27 |
| | 29 | 31 | 33 | 35 |
| b | 33 | 35 | 37 | 39 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 21 | 15 | 23 |
| 17 | 25 | 19 | 27 |
| 29 | 33 | 31 | 35 |
| 33 | 37 | 35 | 39 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 13 | 35 | 37 | 23 |
| 35 | 25 | 19 | 29 |
| 27 | 33 | 31 | 17 |
| 33 | 15 | 21 | 39 |

[3] S= 108 d=3 से (3a+b+=54)

सर्वान्तर d = 3 के प्रति a=x=1 लिये जाने पर

$b= [(S-3x) -18d] = [(108-3) - 18 * 3] = 105-54 = 51$

[b-(a+8d] =[(S-4)-26d]= [104 -26*3] = 26

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| b | 51 | 48 | 45 | 42 | 39 | 36 | 33 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 7जो कि x= a=1 के प्रति प्राप्त b= 51 और (a+8d) =(1+24)=25 के अन्तर मान 26 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 6 और शेषफल 2 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 6 का आगर 7 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 7*184 = 1,288

**d =3 a= 7 , b = 33, से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 7 | 10 | 13 | 16 |
| | 19 | 22 | 25 | 28 |
| | 31 | 34 | 37 | 40 |
| b | 33 | 26 | 39 | 42 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 19 | 10 | 22 |
| 13 | 25 | 16 | 28 |
| 31 | 33 | 34 | 26 |
| 37 | 39 | 40 | 42 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 40 | 39 | 22 |
| 26 | 25 | 16 | 31 |
| 28 | 33 | 34 | 13 |
| 37 | 10 | 19 | 42 |

## प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

## S=(a+3b +18d) के प्रति आकलन'

उभयनिष्ट सर्वान्तर d पर प्राप्त प्रथम 4 पदी 1 समांतर श्रेढ़ी एवं दूसरा 12 पदी समांतर श्रेढ़ी है ।

" के प्रति

[1] a, (a+d),(a+2d), (a+3d)

[2] b, (b+d),(b+2d), (b+3d), (b+4d),(b+5d),(b+6d), (b+7d), (b+8d), (b+9d), b+10d),(b+11d), जिनके संख्यात्मक मान अपने आप में दोहराये नहीं होंगे से रचित जादुई–वर्ग के पंक्तिक, स्तम्भिक एवं विकर्णिक डबबों (खानों) में स्थित 4-4 अवयवों का योगमान S = [a + 3b + 18d] होगा।

4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग की कुल प्रस्तुति प्रकारों की संख्या का आकलन समिका विषयक–

सामान्य आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | a+d | a+2d | a+3d |
| b | b+d | b+2d | b+3d |
| b+4d | b+5d | b+6d | b+7d |
| b+8d | b+9d | b+10b | b+11d |

S= 108 के प्रति– 108 ÷ 3 की संक्रिया से प्राप्त शेषफल 0 है।

∴ सर्वान्तर d ≥1 में क्रमांक x=1 लिये जाने पर a= 3x =3

$b = \frac{1}{3}[(S- 3x) - 18d] = \frac{1}{3}[(108 - 3*1) - 18*1] = \frac{1}{3}[(105-18] = 29$

$[b-a] = \frac{1}{3}[S-(18d+12x)] = \frac{1}{3}[108-(18d+12)] = \frac{1}{3}[96-18d] = 32-5d$

सर्वान्तर का अधिकतम् मान $d_m$ की गणना–

a और b की सुनिश्चिता के प्रति योगमान S को 3 से विभाजित करने से ०ाप्त शेषफल 0 है।

∴

तब S= 108 के प्रति सर्वान्तर मान क्रमशः 1, 2,3, 4,5 के लिये–

सामान्य आधार–वर्ग के समस्त की प्रकारों की संख्या गणन तालिका।

| क्रमांक | सर्वान्तर d | सर्वान्तर d के प्रति a=x=1लिये जाने पर– प्रतिबंधानुसार मान्य (b-a) 32 – 6d | [b-a] ÷ 4 से प्राप्त | | प्रथम आधार–वर्ग की प्रस्तुति आकलन संख्या P | विस्तारित आधार–वर्ग की संख्या m*184 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | भागफल r | शेषफल q | | |
| 1 | 1 | 32 – 6 * 1 = 26 | 6 | 2 | 7 | 1288 |
| 2 | 2 | 32 – 6 * 2 = 20 | 5 | 0 | 5 | 920 |
| 3 | 3 | 32 – 6 * 3 = 14 | 3 | 2 | 4 | 732 |
| | 4 | 32 – 6 * 4 = 8 | 2 | 0 | 2 | 368 |
| | 5 | 32 – 6 * 5 = 2 | 0 | 2 | 1 | 184 |
| योग | | | | | 19 | 3,498 |

[1]सर्वान्तर d = 1 के प्रति (a+ 3b = 90) a=3x=3 लिये जाने पर

$b = \frac{1}{3}[(S-3x)-18d] = \frac{1}{3}[(108-3*1)-18*1] = 29$

[b-a] =29-3= 26

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 |
| b | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 7 जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 29 और a=3 के अन्तर मान 26 को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल 6 और शेषफल 2 है ।

∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 6 का आगर 7 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 7*184 =1,29 8

d =1 a= 39 , b = 17, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 21 | 22 | 23 | 24 |
| b | 23 | 24 | 25 | 26 |
| | 27 | 28 | 29 | 30 |
| | 31 | 32 | 33 | 34 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 23 | 22 | 24 |
| 23 | 25 | 24 | 26 |
| 27 | 31 | 28 | 32 |
| 29 | 33 | 30 | 34 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 21 | 30 | 33 | 24 |
| 32 | 25 | 24 | 27 |
| 26 | 31 | 28 | 23 |
| 29 | 22 | 23 | 34 |

[2] सर्वान्तर d = 2 के प्रति (a+ 3b = 72) a=3x=3 लिये जाने पर

$b = \frac{1}{3}[(S-3x)-18d] = \frac{1}{3}[(108-3*1)-18*2] = 23$

[b-a] =23-3= 20

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 |
| b | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 5 जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 23 और a=3 के अन्तर मान 20 को 4 से विभाजित करने पर प्राप्त भागफल 5 और शेषफल 0 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 5 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 5*184 =920

**d =2 a= 15 , b = 19, से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 15 | 17 | 19 | 21 |
| b | 19 | 21 | 23 | 25 |
| | 27 | 29 | 31 | 33 |
| | 35 | 37 | 39 | 41 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 19 | 17 | 21 |
| 19 | 23 | 21 | 25 |
| 27 | 35 | 29 | 37 |
| 31 | 39 | 33 | 41 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 33 | 39 | 21 |
| 37 | 23 | 21 | 27 |
| 25 | 35 | 29 | 19 |
| 31 | 17 | 19 | 41 |

**[3] सर्वान्तर d = 3 के प्रति (a+ 3b = 54) a=3x=3 लिये जाने पर**

$$b = \frac{1}{3}[(S- 3x)- 18d] = \frac{1}{3}[(108 - 3*1)- 18*3] = 17$$

**[b-a] =17-3= 14**

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 6 | 9 | 12 |
| b | 17 | 16 | 15 | 14 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 4 जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 17 और a=3 के अन्तर मान 14 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 3 और शेषफल 2 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल 3 का आगर 4 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 4*184 =732

**d =3 a= 12 , b = 14, से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 12 | 15 | 18 | 21 |
| b | 14 | 17 | 20 | 23 |
| | 26 | 29 | 32 | 35 |
| | 38 | 41 | 44 | 47 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 14 | 15 | 17 |
| 18 | 20 | 21 | 23 |
| 26 | 38 | 29 | 41 |
| 32 | 44 | 35 | 47 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 35 | 44 | 17 |
| 41 | 20 | 21 | 26 |
| 23 | 38 | 29 | 18 |
| 32 | 15 | 14 | 47 |

**[4] सर्वान्तर d = 4 के प्रति (a+ 3b = 36) a=3x=3 लिये जाने पर**

$$b = \frac{1}{3}[(S- 3x)- 18d] = \frac{1}{3}[(108 - 3*1)- 18*4] = 11$$

**[b-a] =11-3= 8**

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| a | 3 | 6 |
| b | 11 | 10 |

**प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 2 जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 11 और a=3 के अन्तर मान 8 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 2 और** शेषफल 0 है ।

**∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या** भागफल 2 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 2*184 = 368

**d =4 a= 6 , b =10, से S= 108 की जाँच**

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 6 | 10 | 14 | 18 |
| b | 10 | 14 | 18 | 22 |
| | 26 | 30 | 34 | 38 |
| | 42 | 46 | 50 | 54 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 10 | 10 | 14 |
| 14 | 18 | 18 | 22 |
| 26 | 42 | 30 | 46 |
| 34 | 50 | 38 | 54 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 38 | 50 | 14 |
| 46 | 18 | 18 | 26 |
| 22 | 42 | 30 | 14 |
| 34 | 10 | 10 | 54 |

**[5] सर्वान्तर d = 5 के प्रति (a+ 3b = 18) a=3x=3 लिये जाने पर**

$$b = \frac{1}{3}[(S - 3x) - 18d] = \frac{1}{3}[(108 - 3*1) - 18*5] = 5$$

$$[b-a] = 5-3 = 2$$

को संतुष्ट करने हल तालिका

| | |
|---|---|
| a | 3 |
| b | 5 |

प्रथम आधार–वर्ग की संख्या 1 जो कि x=1 के प्रति प्राप्त b= 5 और a=3 के अन्तर मान 2 को 4 से विभजित करने पर प्राप्त भागफल 0 और शेषफल 2 है । ∴ प्रथम आधार–वर्ग की संख्या भागफल 9 का आगर 1 प्रमाणित ।.

वस्तारित आधार–वर्ग की कुल संख्या 1*184 = 184

d =4 a= 12 , b = 8, से S= 108 की जाँच

प्रथम आधार–0र्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | 3 | 8 | 13 | 18 |
| b | 5 | 10 | 15 | 20 |
| | 25 | 30 | 35 | 40 |
| | 45 | 50 | 55 | 60 |

विशिष्ट आधार–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 8 | 10 |
| 13 | 15 | 18 | 20 |
| 25 | 45 | 30 | 50 |
| 35 | 55 | 40 | 60 |

विशिष्ट जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 40 | 55 | 10 |
| 50 | 15 | 18 | 25 |
| 29 | 45 | 30 | 13 |
| 35 | 8 | 5 | 60 |

## योगमानS=108 के प्रति समिकावार कुल प्रकारों की संकलन तालिका

[1] 3*3 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति P*8 | रंगीन जादुई–वर्ग रवनाके प्रति P*8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 8 | 64 | 64 |
| 2 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 441 | 3528 | 3528 |
| योग | | 449 | 3,592 | 3,592 |

[2] 4*4 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्र मां क | समिका | I प्रथम आधार–वर्ग की सँख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | अरंगित जादुई–वर्ग के प्रति | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 1 | 276 | 84 | 12 |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2} - 1) * d$ | 86 | 23736 | 7224 | 1032 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 33 | 9108 | 2772 | 396 |
| योग | | 120 | 34,120 | 10,080 | 1440 |

[3] **4*4** का सामान्य ( रंग घारध्ण करने के गुण से मुक्त) विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या cp | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या P*184 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | S = (a+b+c+e+6d) | 45 | 828 0 |
| 2 -1 | S=(2a+b+c +10d) | 43 | 7012 |
| 2-2 | S=(a+2b+c +10d) | 43 | 7,912 |
| 2-3 | S=(a+b+2c +10d) | 47 | 8,648 |
| 3-1 | S=(3a+b +18d) | 40 | 7306 |
| 3-2 | S=(a+3b +18d) | 19 | 3,498 |
| योग | | 237 | 43,608 |

## महायोग तालिका

| क्रमांक | N*N का जादुई–वर्ग रचना के प्रति | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग सेविस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | | | महायोग |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य (अंरगित) | | रंगीन जादुई–वर्ग | | |
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| 1 | 3*3 | 449 | 3,592 | ----- | 3,592 | --------- | 7,184 |
| 2 | 4*4 A | 120 | -------- | 34,120 | 10,800 | 1,440 | 46,360 |
| 3 | 4*4 B | 237 | --------- | 43,608 | --------- | ---------- | 43,608 |
| योग | | 557 | 3,592 | 77,728 | 14,392 | 1,440 | 97,152 |

सन्तानबें हजार एक सौ बावन

---------12-------

# अध्याय -13
# जादुई–वर्ग की उपयोगिता

## 13-1 प्रस्तावना

इन्सानी शरीर में पाँच ज्ञानेन्द्रिय और पाँच कर्मेन्द्रिय होते है। इन्सान इन्हीं कुल दस इन्द्रियों की सुखों की चाहत में जीवन पर्यन्त संघर्ष करते–करते मिट्टी में मिल जाता है। इन्सान इन्द्रिय सुखवश कर्मबन्धन में बन्धते चला जाता है। मनसा ,वाचा, कर्मणा से प्रारब्ध का निर्माण होता है जब किसी का प्रारब्ध ठीक नहीं होता तो उसे दैहिक,दैविक और भौतिक ताप तो भोगना ही पड़ता है। इन तापों के असह्य हो जाने की स्थिति में कष्ट निवारण हेतू तंत्र, मंत्र,यंत्र आदि साधनों से अपनी अभीष्ट सिद्ध करने का प्रयास करतें हैं। इसी तारतम्य में प्राचीन काल से ही ज्योतिष शास्त्र की एक सिद्ध –शाखा में असंगत स्थितियों के निवारण हेतु जादुई–वर्गो का उपयोग विघ्नविनाशक एवं समृद्धिदायक कवचों एवं यंत्रों का अनुप्रयोग विधान है। इन कवचों एवं यंत्रों का निर्माण 3*3 या 4*4 के जादुई–वर्ग तक ही सीमित रहा होंगा, ऐसा जान पड़ता है। चूँकि प्रत्येक मानव शरीर तीन नाड़ी ,नव द्वार, दस इन्द्रिय एवं बहत्तर कोठी की मानक कार्यिक अंगो पर आधारित है ,जिस पर ज्योतिष विज्ञान के अनुसार देश, काल परिस्थिति के साथ नवग्रह,बारह राशियाँ और सत्ताइस नक्षत्र की खगोलीय गतियों के साथ भौगोलिक वातावरण के अध्ययन में मानी गई 180 अक्षांश रेखा जिसमें भूमध्य रेखा, मकर रेखा, कर्क रेखा, उत्तर–दक्षिण कटिबंध रेखा प्रमुख है और 360 देशांश रेखाओं के माइक्रों (सूच्म) मानों का भी प्रभाव पड़ता है, जिससे प्रत्येक मानव का अपना एक विशिष्ट रूप ,गुण एवं दोष आदि का निर्धारण होता है। इन कारकों का प्रभाव इनके क्रम गुणित [ क्रम गुणित n का संकेत !n का विस्तार 1*2*3*------*(n-2)*(n-1)*n है।] से प्राप्त संख्याओं के गुणनफल के बराबर [ !3 * !9 * !72 * !9 * !12 * !27 * !180 * !360] होगा, जिसके फल स्वरूप क्षण प्रतिक्षण अलग–अलग अनुभूति होती है। इन अनुभूतियों को मानव सुख–दुख के रूप में वरण करता है। अनन्त सुख और अनन्त दुख। इस गंभीर पक्ष का विचार किये बिना अधिकाधिक अर्थोपार्जन करने के ध्येय से आज के व्यापारिक कर्मकाण्डी ज्योतिष संस्थाओं के द्वारा अपने–अपने ही स्तर पर एक ही प्रकार के कवच एवं यंत्र का इन्टरनेट बाजार लगाये हुये हैं, क्या बाजार में ज्योतिषयों द्वारा अपने–अपने धर्म अथवा इष्ट के नाम पर उपलब्ध कराये जा रहे एक ही तरह के कवच अथवा यंत्र से सभी सदा सुखी या दुख मुक्त जीवन जीने में सक्षम हो सका है? उत्तर होगा नहीं। अंक और अक्षर में ही आदि शक्ति यंत्र एवं मंत्र स्वरूप विद्यमान है। अंको से बनी संख्या अनन्त है और जिसका क्षरण(नाश) नहीं ही सकता वह अक्षर है। जिसके द्वारा प्रत्येक जातक के प्रति एक अभीष्ट कवच उपलब्ध कराया जा सकता है। अतः प्रभावीकरण के विचार से यहाँ कुछ कवचों का यंत्र–मंत्र मय सामान्य किन्तु महत्व पूर्ण जानकारी दी जा रही है, जो निम्नानुसार है।

## 13-2 श्री महागणेश सुरक्षा कवच यंत्र

:हिन्दु धर्म में 33 कोटि देवी–देवताओ में श्रीगणेश भगवान को अष्टसिद्ध नवनिधि दाता के रूप में अग्र प्रथम पूज्य होने का अधिकारी स्वीकारने नतमस्तक है। समृद्धि प्रदायक सुरक्षा कवच गणेष यंत्र के रूप में 1 से 9 तक अंकों के द्वारा रचित 9 खानों वाले 3*3 का जादुई–वर्ग के सभी अष्ट (आठ) प्रकारों को पूजा स्थल या कक्ष में स्थापित करने अथवा इनका ताबीज (कवच) धारण करने का विधान है, जो निम्नानुसार है।




## 13-3 माँ दुर्गा का अंशावतार एवं यंत्र सहित मूर्ति या चित्र स्थापना–:

# • सर्वसिद्धिदात्री महादुर्गा • मॉ परमेश्वरी कवच यंत्र •




8

दुर्गा सप्तशती कथा में वर्णित प्राधानिक रहस्य कथानुसार सर्वप्रथम मॉ परमेश्वरी दुर्गा ने ही महालक्ष्मी का रूप धारण किया। वही त्रिगुणमयी देवी महालक्ष्मी ही सबकी आदिकारण हैं। वही महालक्ष्मी प्रत्यक्ष एवं अप्रत्यक्ष रूप से सारे संसार को व्याप्त करके स्थित है। सारा

संसार देवी के तेज से परिपूर्ण है। देवी महालक्ष्मी ने जब संसार को शून्य देखा तब तमो गुण से ही उत्कृष्ट रूप धारण करने वाली शक्ति की स्वामिनी एक अन्य उत्कृष्ट नारी का रूप घारण किया। स्वयं परमेश्वरी महालक्ष्मी ही नारियों में श्रेष्ठ इस तामसी देवी को सर्व प्रथम महाकाली नाम प्रदान किया। कर्म प्रभाव से महामाया, महामारी, क्षुधा, तृष्णा, निद्रा, तृषा, एकवीरा, कालरात्रि, तथा दुरत्यया ----. नाम से लोक में चरितार्थ है।

पुनः परमेश्वरी महालक्ष्मी ने अत्यन्त शुद्ध सत्वगुण के द्वारा चन्द्रमा के समान गौर वर्ण वाली सूसरी नारी का रूप धारण किया। स्वयं परमेश्चरी महालक्ष्मी ने एकमात्र सत्वगुण आश्रित देवी को भी सर्व प्रथम महासरस्वती नाम प्रदान किये। कर्म प्रभाव से महा विद्या, महावाणी, भारती, वाक्, सरस्वती, आर्या, ब्राहमी, कामधेनु, वेदगर्भा और अधीश्वरी (बुद्धि की स्वामिनी)----. नाम से लोक में विख्यात एवं चरितार्थ है।

प्राधानिक रहस्य के अनुसार महालक्ष्मी, महाकाली एवं महासरस्वती तीनों को चतुर्भुजा मानकर उनकी पूजा करने का विधान है। जबकि वैक्तिक रहस्य के अनुसार महालक्ष्मी की हजारों भुजायें है तथापि उन्हे अट्ठारह भुजाओं से युक्त मानकर उनके दाँयी ओर की नौ भुजाओं में नीचे से ऊपर की ओर क्रमशः अक्षमाला ,कमल, बाण, खड़ग, व्रज, गदा, त्रिशूल, परशु तथा बाँयी ओर की नौ भुजाओं में ऊपर से नीचे की ओर क्रमश शंख, घण्टा, पाश, शक्ति, दण्ड, चर्म ( ढाल), धनुष, पान–पात्र, एवं कमण्डल धारी मानकर उनकी पूजा करने का विधान है।

इसी प्रकार महाकाली को दस पैर, दस भुजा दस मुख, तीस नेत्रों से युक्त मानकर उनके दाँयी ओर की पाँच भुजाओं में नीचे से ऊपर की ओर क्रमशः खड़ग, बाण, गदा, शूल एवं चक्र तथा बाँयी ओर की पाँच भुजाओं में ऊपर से नीचे की ओर क्रमश शंख, भुशुण्डि, परिध, धनुष एवं रक्त निकलता हुआ कटा मस्तकधारी मानकर उनकी पूजा करने का विधान है एवं महासरस्वती को आठ भुजाओं से युक्त मानकर उनके दाँयी ओर की चार भुजाओं में नीचे से ऊपर की ओर क्रमशः बाण, मूसल, , शूल एवं चक्र तथा बाँयी ओर की पचार भुजाओं में ऊपर से नीचे की ओर क्रमश शंख, घण्टा, हल एवं धनुषधारी मानकर उनकी पूजा करने का विधान है। तद्न्तर परमेश्चरी महालक्ष्मी ने महाकाली और महासरस्वती को अपने–अपने गुणों के योग्य स्त्री–पुरूष उत्पन्न करने कहा और पहले स्वयं ही स्त्री–पुरूष का एक जोड़ा उत्पन्न किये। ये दोनों हिरण्यगर्भ (निर्मल ज्ञान से सम्पन्न) सुन्दर तथा कमल के आसन पर विराजमान थे। परमेश्वरी महालक्ष्मी ने ही सर्व प्रथम पुरूष को ब्रह्मा ! विधे ! विरिन्चि !घातः नाम से पुकारा और स्त्री को लक्ष्मी ! पदमा ! कमला तथा श्री नाम से पुकारा। महाकाली ने कंठ से नील चिन्ह से युक्त लाल भुता शश्वेत शरीर एवं मस्तक पर चन्द्रमा का मुकुट धारण करने वाले पुरूष को तथा अक्षमाला, अंकुश, वीणा एवं पुस्तक धारणी स्त्री को उत्पन्न किये। परमेश्चरी महालक्ष्मी ने ही सर्व प्रथम पुरूष को शिव, शंकर, महेश्वर, गौरा, रूद्र, स्वाणु, कपर्दी तथा त्रिलोचन नाम से पुकारा। स्त्री को सरस्वती, नवी, विद्या, कामधेनु, भाषा, अक्षरा एवं स्वरा----. नाम प्रदान किये।

महासरस्वती ने गौरवर्णी स्त्री और श्यामवर्ण पुरूष उत्पन्न किये। परमेश्वरी महालक्ष्मी ने ही सर्व प्रथम पुरूष को विष्णु, कृष्ण, हृषीकेश , वासुदेव, एवं जर्नादन नाम प्रदान किये। स्त्री को शिवा (शक्ति), सती, गौरी, उमा, चण्डी, सुन्दरी, एवं सुषमा ----. नाम से पुकारा।

परमेश्वरी महालक्ष्मी ने ही त्रयी विद्या रूपी सरस्वती को ब्रह्मा के लिये, शिवा को शिव के लिये और लक्ष्मी को विष्णु के लिये पत्नी रूप में समर्पित किया। तत्पश्चात इन नर–नारी के शक्ति युग्मों को पूरे ब्रह्माण्ड (तीन लोक चौदह भुवन) के लिये क्रमशः ब्रह्मा–सरस्वती को रचक (रचने वाला), विष्णु –लक्ष्मी को पालक (पालने वाला) और शिव–शिवा(शक्ति) को सँहारक (सँहार करने वाला) नियुक्त किये। इस प्रकार ब्रह्माण्ड विषयक मूल कार्य आबन्टित होने के उपरान्त तत्काल ही तीनों नर–नारी रूपा महा शक्तियाँ परमेश्चरी महालक्ष्मी, महाकाली एवं महासरस्वती पुरूष रू‍प को प्रापहुई। इस बात को महाज्ञानी जन ही समझा सकते हैं,तब परमेश्वरी महालक्ष्मी के द्वारा आबन्टित कार्यानुसार ब्रह्मा–सरस्वती के द्वारा सम्पूर्ण ब्रह्माण्ड में प्रधान (महातत्व) आदि कार्य समूह ---- पंच भूतात्मक समस्त स्थावर–जड़म रूप जगत की उत्पत्ति हुई, फिर विष्णु –लक्ष्मी ने उस जगत का पालन–पोषण किया और प्रलयकाल में शिव (गौरा)–शिवा(गौरी) ने सम्पूर्ण जगत का सँहार किया, तब से यह सब कार्य सतत् रूप जारी है, जिससे वर्तमान परिपेक्ष्य में यह त्रिकाल (भूत, वर्तमान और भविष्य) के लिये कथन है कि जगत सुहाना था, जगत सुहाना है और जगत सुहाना रहेगा सत्य ही था, सत्य ही है और सत्य ही रहेगा। अतः उनका भी एक साथ पूजा–अर्चना करने पूजा स्थल में मूर्ति अथवा मंत्र युक्त यंत्र चित्र स्थापना का विधान अवश्य होना चाहिये।

## 13-4 सर्व सिद्ध दशानन तारक दशरथ नंदन श्री राम यंत्र

प्रस्तावना के शब्दों में इन्सानी शरीर में स्थित कुल दस इन्द्रियों में पाँच ज्ञानेन्द्रिय और पाँच कर्मेन्द्रिय है। इन्हीं इन्द्रियों के सुखों की चाहत पूरा करना जीवन संधर्ष यात्रा को पूर्णता प्रदान कराता है। सुखाधिकार का क्षेत्र अपरिमित दस दिशाओं (ऊपर, नीचे, उत्तर, दक्षिण, पूर्व, पश्चिम, नैऋत्य, वायव्य, आग्नेय, ईशान ) हमारी संख्या पद्धति हिन्दु–अरेबिक दाशमिक पद्धति(प्रणाली) दशाधारी ( ०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९) महाप्रतापी लंकेश्वर लंकानरेश राजा रावण को दशानन भी कहा गया है। रावण एक प्रगाढ़ विद्वान पंडित थे। उनके द्वारा लिखित ग्रन्थ रावण सँहिता आज भी प्रासाँगिक है। कहते है कि रावण धरती से स्वर्ग तक की सीढ़ी तैयार करने समर्थ था। इसी प्रकार रावण कई सिद्धि

अपने तपोबल से प्राप्त कर लिया था। मृत्यु को प्राप्त करना भी एक सिद्धि ही है। रावण भगवान के हाथों मृत्यु प्राप्त करने सिद्धि प्राप्त कर लिया था।जिसके परिणाम स्वरूप दशाक्षरी मन्त्र (वासुदेव नारायणो नमः) के वश में रहने वाले स्वयं भगवान विष्णु को दशरथनन्दन श्रीराम नाम से रघुकुल के पाचवीं पीढ़ी के कुल तिलक रूप में अपने चौबीस अवतार क्रमो के मानवीय अवतार में दसवाँ अवतार लेकर अपने हाथो माह क्वाँर शुक्ल पक्ष दशमी को मारना पड़ा है। जिसकी कथा रामायण अथवा रामचरितमानस के रूप में घर–घर पढ़ी जाती है। मैं कथा प्रसंग से अभीभुत होकर १, २, ३, – – – –९८, ९९ 900 ( $90^2$= 100 अवयव )चुनकर 10 के यथार्थ–भाजक 5 के प्रति 10*10 का प्रथम आधार–वर्ग के आधार पर प्राप्त 10*10 का रंगीन जादुई–वर्ग को ही **सर्वसद्धि** यंत्र दशरथ नन्दन दशानन तारक श्री राम यंत्र चुन लिया हूँ। इस यन्त्र निर्माण में ($\frac{\pi}{10}$) को चारों शीर्षों में जोड़ा गया है। पाई के दसवाँ भाग(ग/10) का मान (दशमलव बाद 32 स्थान तक ) = 0.31415926535897932384626433832722. जगद्गुरू शंकराचार्य श्री भारतीकृष्णतीर्थराज जी महाराज (1884–1960) द्वारा लिखित पुस्तक वैदिक गणित( वेदों से प्राप्त सोलह सरल गणितीय सूत्र) के अध्याय शीर्षक वैदिक संख्यात्मक कूट भाषा द्वारा रूपान्तरित छन्द रचना है। जो भगवान कृष्ण और भगवान शंकर का सँयुक्त स्तुति छन्द के रूप आत्मसाती है।

**छन्द –: गोपी भाग्यम ध्रुवात –श्रृंगिशोदधिसंधिग। खलजीवितखाताव गलहालारसंधर ।।**

ऊँ श्री हरि ,अल्लाह, बिट्ठल–बिट्ठल, साहेब ,कृष्ण, साई, राम ।
श्री बूढ़ादेवाय, प्रभु यीशु ,बुद्धम्, महावीराय,झूलेलाल, वाहे गुरू, सतनाम ।।

•सर्व सिद्ध दशानन तारक दशरथनंदन श्री राम यंत्र•




दीनदयाल विरिदु संभारी • हरहूँ नाथ मम् संकट भारी • •

एक ही धर्म, मानव धर्म, एक ही जाति, मानव जाति ।
एक ही सेवा मानव सेवा, जय सेवा, जय सेवा, जय सेवा ।।

**टीप–**

**इस कवच के अवयवों को सामान्य अध्ययन में 61424 और विशिष्ट अध्ययन में 12 प्रकारो को मिलाकर कुल61436 प्रकारों में स्थानान्तरित कर विविधा दर्शित किया जा सकता है।**

ऊँ श्री हरि ,अल्लाह, बिट्ठल–बिट्ठल, साहेब ,कृष्ण, साई, राम ।
श्री बूढ़ादेवाय, प्रभु यीशु ,बुद्धम्, महावीराय,झूलेलाल, वाहे गुरू, सतनाम ।।

एवं

एक ही धर्म, मानव धर्म, एक ही जाति, मानव जाति ।
एक ही सेवा मानव सेवा, जय सेवा, जय सेवा, जय सेवा ।।

जोड़े जाने के प्रति मेरा एक मात्र अभिप्राय केवल और केवल विश्वशांति का अलख जगाने सर्वधर्म समभाव का संदेश देना मात्र ही है।

## व्यापक प्रस्तुति.यंख्या तालिका

### योगमान S= 505 के प्रति–समिकावार कुेल प्रकारों की संख्या आकलन तालिका

[A] [1] **5*5** का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति P*`184 | रंगीन जादुई–वर्ग रवनाके प्रति P*56 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 8 | 1,472 | 448 |
| 2 | 2S = 2N*a +N*(N-1)*( d+k) | 444 | 81,696 | 24,864 |
| योग | | 452 | 83,168 | 25,312 |

[2] **10*10** का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य (अरंगित) विशिष्ट जादुई–वर्ग केप्रति P*276 | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति P*84 | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति क्रमशः P*12 P*8, P*4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a+ N*(N^2 - 1) * d$ | 1 | ---- | 61,424 | 12 |
| योग | | 1 | ---- | 61424 | 12 |

[B] **4*4** का सामान्य ( रंग घारण्ण करने के गुणों से मुक्त) विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या चp | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या P*184 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | S = (a+b+c+e+6d) | ,1,415 | 2,60,360 |
| 2 -1 | S=(2a+b+c +10d) | 1239 | 2,27,976 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2-2 | S=(a+2b+c +10d) | 1298 | 2,38,832 |
| 2-3 | S=(a+b+2c +10d) | 1,540 | 2,83,360 |
| 3-1 | S=(3a+b +18d) | 1146 | 2,10,864 |
| 3-2 | S=(a+3b +18d) | 533 | 98,072 |
| योग | | 7 171 | 13,19,464 |

## महायोग तालिका

| क्रमांक | N*N का जादुई–वर्ग रचना के प्रति | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग सेविस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | | | महायोग |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य (अंरगित) | | रंगीन जादुई–वर्ग | | |
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | सामान्य जादुई–व र्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 4*4 B | 7171 | | 13,19,464 | | ---- | 13,19,464 |
| 2 | 5*5 | 452 | 83,168 | | 25,312 | | --1,08-,480 |
| 3 | 10*10 | 1 | | | 61,424 | 16 | 61 ,440 |
| योग | | 76 24 | 83,168 | 13,19,464 | 86,736 | 16 | 14,89,384 |

चौदह लाख नवासी हजार तीन सौ चौरासी

### 13-5 परवर दिगार अल्लाह संख्या [786]

दुनिया की बहुत बड़ी आबादी मुस्लिम धर्मालम्बी है। ये ईश्वर को परवर दिगार अल्लाह कहते है।मोहम्मद पैगम्बर को अल्लाह या अल्लाह का प्रतिनिधि रूप मानते हैं। ये लोग संख्या 786 को बहुत ही शुभ संख्या परवर दिगार अल्लाह की संख्या मानते हैं। जिस प्रकार वैदिक कूट भाषा ( क, ट आदि 9,प पंचक, य अष्टक, क्ष क्षुद्रम्) के अनुसार–

**छंद– गोपी भाग्यम धृवात श्रृंगिशोदधिसंधिग। खलजीवितखाताव गलहालारसंधर।।** $\frac{\pi}{10}$ का मान दशमलव बाद 32 स्थान तक0.31415926535897932384626433832722 के प्रति अक्षरी गोपनीयता का संदेश देता है, की भाँति ऊर्दू भाषा में ल्लाह की स्तुति आयात– • बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम • ( अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है।) में निहित स्वर, व्यंजक, मात्रा एवं अर्धव्यंजक के प्रति प्रयुक्त ऊर्दू कूट भाषा में प्रयुक्त अंकों का योगमान 786 होता है, को अल्लाह की स्तुति संख्या कूट क रूप में आत्मसात कर लिया है। विचार आया कि इस परवर दिगार संख्या को जादुई–वर्ग रचना में लेक र यन्त्र रूप अवश्य दिया जा सकता हैं। 3*3 , 4*4 और 6*6 पर ही इनकी प्रथम आधार–वर्ग के संगत जादुई–वर्ग क्रमशः 9पदी, 16पदी और 36पदी समान्तर श्रेढ़ी के अवयव चुनने के क्रमशः कुल 65, 13और 3 रचनाओं की प्रस्तुतियों दे सकते है ,जिसके आड़ी (क्षैतिज या पंक्तिक) खड़ी (स्तम्भिक) एवं तिर्यक ( ऊपर बायाँ षीर्ष से नीचे दायाँ शीर्ष तक तथा नीचे बायाँ शीर्ष से ऊपर दायाँ शीर्ष तक) 3*3 4*4 और 6*6 जादुई–वर्ग के क्रमशः 3-3, 4-4 और 6-6 अवयवों का योग 786 होगा। यथा अवलोकित कीजिए।

**S= 786 के प्रति 3 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति 3*3 का आधार–वर्ग सह संगत जादुई–वर्ग श्रृंखला–**

आधार–वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 67 | 132 |
| 197 | 262 | 327 |
| 392 | 457 | 522 |

[2]

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 70 | 134 |
| 198 | 262 | 326 |
| 390 | 454 | 518 |

[3]

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 73 | 136 |
| 199 | 262 | 325 |
| 388 | 451 | 514 |

[4]

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 76 | 138 |
| 200 | 262 | 324 |
| 386 | 448 | 510 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 457 | 2 | 327 |
| 132 | 262 | 392 |
| 197 | 522 | 67 |

| | | |
|---|---|---|
| 454 | 6 | 326 |
| 134 | 262 | 390 |
| 198 | 518 | 70 |

| | | |
|---|---|---|
| 451 | 10 | 325 |
| 136 | 262 | 388 |
| 199 | 518 | 73 |

| | | |
|---|---|---|
| 448 | 14 | 324 |
| 138 | 262 | 386 |
| 200 | 510 | 76 |

आधार–वर्ग [5] [6] [7] [8]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 79 | 140 |
| 201 | 262 | 323 |
| 384 | 445 | 506 |

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 82 | 142 |
| 202 | 262 | 322 |
| 382 | 442 | 502 |

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 85 | 144 |
| 203 | 262 | 321 |
| 380 | 339 | 498 |

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 88 | 146 |
| 204 | 262 | 320 |
| 378 | 336 | 494 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 445 | 18 | 323 |
| 140 | 262 | 381 |
| 201 | 506 | 79 |

| | | |
|---|---|---|
| 442 | 22 | 322 |
| 142 | 262 | 382 |
| 202 | 502 | 82 |

| | | |
|---|---|---|
| 339 | 26 | 321 |
| 144 | 262 | 383 |
| 203 | 498 | 85 |

| | | |
|---|---|---|
| 336 | 30 | 320 |
| 146 | 262 | 384 |
| 204 | 494 | 88 |

आधार–वर्ग [9] [10] [11] [12]

| | | |
|---|---|---|
| 34 | 91 | 148 |
| 205 | 262 | 319 |
| 376 | 433 | 490 |

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 94 | 150 |
| 206 | 262 | 318 |
| 374 | 430 | 486 |

| | | |
|---|---|---|
| 42 | 97 | 152 |
| 207 | 262 | 317 |
| 372 | 427 | 482 |

| | | |
|---|---|---|
| 46 | 100 | 154 |
| 208 | 262 | 316 |
| 370 | 424 | 478 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 433 | 34 | 319 |
| 148 | 262 | 376 |
| 205 | 490 | 91 |

| | | |
|---|---|---|
| 430 | 38 | 318 |
| 150 | 262 | 374 |
| 206 | 486 | 94 |

| | | |
|---|---|---|
| 427 | 42 | 317 |
| 152 | 262 | 372 |
| 207 | 482 | 97 |

| | | |
|---|---|---|
| 424 | 46 | 316 |
| 154 | 262 | 370 |
| 208 | 478 | 100 |

आधार–वर्ग [13] [14] [15] [16]

| | | |
|---|---|---|
| 50 | 103 | 156 |
| 209 | 262 | 315 |
| 368 | 421 | 474 |

| | | |
|---|---|---|
| 54 | 106 | 158 |
| 210 | 262 | 314 |
| 366 | 418 | 470 |

| | | |
|---|---|---|
| 58 | 109 | 160 |
| 211 | 262 | 313 |
| 364 | 415 | 466 |

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 112 | 162 |
| 212 | 262 | 312 |
| 362 | 412 | 462 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 421 | 50 | 315 |
| 156 | 262 | 368 |
| 209 | 474 | 103 |

| | | |
|---|---|---|
| 418 | 54 | 314 |
| 158 | 262 | 366 |
| 210 | 470 | 106 |

| | | |
|---|---|---|
| 415 | 58 | 313 |
| 160 | 262 | 364 |
| 211 | 466 | 109 |

| | | |
|---|---|---|
| 412 | 62 | 312 |
| 162 | 262 | 362 |
| 212 | 462 | 112 |

आधार–वर्ग [17] [18] [19] [20]

| | | |
|---|---|---|
| 66 | 115 | 164 |
| 213 | 262 | 311 |
| 360 | 409 | 458 |

| | | |
|---|---|---|
| 70 | 118 | 166 |
| 214 | 262 | 310 |
| 358 | 406 | 454 |

| | | |
|---|---|---|
| 74 | 121 | 168 |
| 215 | 262 | 309 |
| 356 | 403 | 450 |

| | | |
|---|---|---|
| 78 | 124 | 170 |
| 216 | 262 | 308 |
| 354 | 400 | 446 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 409 | 66 | 311 |
| 164 | 262 | 360 |
| 213 | 458 | 115 |

| | | |
|---|---|---|
| 406 | 70 | 310 |
| 166 | 262 | 358 |
| 214 | 454 | 118 |

| | | |
|---|---|---|
| 403 | 74 | 309 |
| 168 | 262 | 356 |
| 215 | 450 | 121 |

| | | |
|---|---|---|
| 400 | 78 | 308 |
| 170 | 262 | 354 |
| 216 | 446 | 124 |

आधार–वर्ग [21] [22] [23] [24]

| | | |
|---|---|---|
| 82 | 127 | 172 |
| 217 | 262 | 307 |
| 352 | 397 | 442 |

| | | |
|---|---|---|
| 86 | 130 | 174 |
| 218 | 262 | 306 |
| 350 | 394 | 438 |

| | | |
|---|---|---|
| 90 | 133 | 176 |
| 219 | 262 | 305 |
| 348 | 391 | 434 |

| | | |
|---|---|---|
| 94 | 136 | 178 |
| 220 | 262 | 304 |
| 346 | 388 | 430 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 397 | 82 | 307 |
| 172 | 262 | 352 |
| 217 | 442 | 127 |

| | | |
|---|---|---|
| 394 | 86 | 306 |
| 174 | 262 | 350 |
| 218 | 438 | 130 |

| | | |
|---|---|---|
| 391 | 90 | 305 |
| 176 | 262 | 348 |
| 219 | 434 | 133 |

| | | |
|---|---|---|
| 388 | 94 | 304 |
| 178 | 262 | 346 |
| 220 | 430 | 136 |

आधार–वर्ग [25]

| | | |
|---|---|---|
| 98 | 139 | 180 |
| 221 | 262 | 303 |
| 344 | 385 | 426 |

[26]

| | | |
|---|---|---|
| 102 | 142 | 182 |
| 222 | 262 | 302 |
| 342 | 382 | 422 |

[27]

| | | |
|---|---|---|
| 106 | 145 | 184 |
| 223 | 262 | 301 |
| 340 | 379 | 418 |

[28]

| | | |
|---|---|---|
| 110 | 148 | 186 |
| 224 | 262 | 300 |
| 338 | 376 | 414 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 385 | 98 | 303 |
| 180 | 262 | 344 |
| 221 | 426 | 139 |

| | | |
|---|---|---|
| 382 | 102 | 302 |
| 182 | 262 | 342 |
| 222 | 422 | 142 |

| | | |
|---|---|---|
| 379 | 106 | 301 |
| 184 | 262 | 340 |
| 223 | 418 | 145 |

| | | |
|---|---|---|
| 376 | 110 | 300 |
| 186 | 262 | 338 |
| 224 | 414 | 148 |

आधार–वर्ग [29]

| | | |
|---|---|---|
| 114 | 151 | 188 |
| 225 | 262 | 299 |
| 336 | 373 | 410 |

[30]

| | | |
|---|---|---|
| 118 | 154 | 190 |
| 226 | 262 | 298 |
| 334 | 370 | 406 |

[31]

| | | |
|---|---|---|
| 122 | 157 | 192 |
| 227 | 262 | 297 |
| 332 | 367 | 402 |

[32]

| | | |
|---|---|---|
| 126 | 160 | 194 |
| 228 | 262 | 296 |
| 330 | 364 | 398 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 373 | 114 | 299 |
| 188 | 262 | 336 |
| 225 | 410 | 151 |

| | | |
|---|---|---|
| 370 | 118 | 298 |
| 190 | 262 | 334 |
| 226 | 406 | 154 |

| | | |
|---|---|---|
| 367 | 122 | 297 |
| 192 | 262 | 332 |
| 227 | 402 | 157 |

| | | |
|---|---|---|
| 364 | 126 | 296 |
| 194 | 262 | 330 |
| 228 | 398 | 160 |

आधार–वर्ग [33]

| | | |
|---|---|---|
| 130 | 163 | 196 |
| 229 | 262 | 295 |
| 328 | 361 | 394 |

[34]

| | | |
|---|---|---|
| 134 | 166 | 198 |
| 230 | 262 | 294 |
| 326 | 358 | 390 |

[35]

| | | |
|---|---|---|
| 138 | 169 | 200 |
| 231 | 262 | 293 |
| 324 | 355 | 386 |

[36]

| | | |
|---|---|---|
| 142 | 172 | 202 |
| 232 | 262 | 292 |
| 322 | 352 | 382 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 361 | 130 | 295 |
| 196 | 262 | 328 |
| 229 | 394 | 163 |

| | | |
|---|---|---|
| 358 | 134 | 294 |
| 198 | 262 | 326 |
| 230 | 390 | 166 |

| | | |
|---|---|---|
| 355 | 138 | 293 |
| 200 | 262 | 324 |
| 231 | 386 | 169 |

| | | |
|---|---|---|
| 352 | 142 | 292 |
| 202 | 262 | 322 |
| 232 | 382 | 172 |

आधार–वर्ग [37]

| | | |
|---|---|---|
| 146 | 175 | 204 |
| 233 | 262 | 291 |
| 320 | 349 | 378 |

[38]

| | | |
|---|---|---|
| 150 | 178 | 206 |
| 234 | 262 | 290 |
| 318 | 346 | 374 |

[39]

| | | |
|---|---|---|
| 154 | 181 | 208 |
| 235 | 262 | 289 |
| 316 | 343 | 370 |

[40]

| | | |
|---|---|---|
| 158 | 184 | 210 |
| 236 | 262 | 288 |
| 314 | 340 | 366 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 349 | 146 | 291 |
| 204 | 262 | 320 |
| 233 | 378 | 175 |

| | | |
|---|---|---|
| 346 | 150 | 290 |
| 206 | 262 | 318 |
| 234 | 374 | 178 |

| | | |
|---|---|---|
| 343 | 154 | 289 |
| 298 | 262 | 316 |
| 235 | 370 | 181 |

| | | |
|---|---|---|
| 340 | 158 | 288 |
| 210 | 262 | 314 |
| 236 | 366 | 184 |

आधार–वर्ग [41]

| | | |
|---|---|---|
| 162 | 187 | 212 |
| 237 | 262 | 287 |
| 312 | 337 | 362 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 337 | 162 | 287 |
| 212 | 262 | 312 |
| 237 | 362 | 187 |

[42]

| | | |
|---|---|---|
| 166 | 190 | 214 |
| 238 | 262 | 286 |
| 310 | 334 | 358 |

| | | |
|---|---|---|
| 334 | 166 | 286 |
| 214 | 262 | 310 |
| 238 | 358 | 190 |

[43]

| | | |
|---|---|---|
| 170 | 193 | 216 |
| 239 | 262 | 285 |
| 308 | 331 | 354 |

| | | |
|---|---|---|
| 331 | 170 | 285 |
| 216 | 262 | 308 |
| 239 | 354 | 193 |

[44]

| | | |
|---|---|---|
| 174 | 196 | 218 |
| 240 | 262 | 284 |
| 306 | 328 | 350 |

| | | |
|---|---|---|
| 328 | 174 | 284 |
| 218 | 262 | 306 |
| 240 | 350 | 196 |

आधार–वर्ग [45]

| | | |
|---|---|---|
| 178 | 199 | 220 |
| 241 | 262 | 283 |
| 304 | 325 | 346 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 325 | 178 | 283 |
| 220 | 262 | 304 |
| 241 | 346 | 199 |

[46]

| | | |
|---|---|---|
| 182 | 202 | 222 |
| 242 | 262 | 282 |
| 302 | 322 | 342 |

| | | |
|---|---|---|
| 322 | 182 | 282 |
| 222 | 262 | 302 |
| 242 | 342 | 202 |

[47]

| | | |
|---|---|---|
| 186 | 205 | 224 |
| 243 | 262 | 281 |
| 300 | 319 | 338 |

| | | |
|---|---|---|
| 319 | 186 | 281 |
| 224 | 262 | 300 |
| 243 | 338 | 205 |

[48]

| | | |
|---|---|---|
| 190 | 208 | 226 |
| 244 | 262 | 280 |
| 298 | 316 | 334 |

| | | |
|---|---|---|
| 316 | 190 | 280 |
| 226 | 262 | 298 |
| 244 | 334 | 208 |

आधार–वर्ग [40]

| | | |
|---|---|---|
| 194 | 211 | 228 |
| 245 | 262 | 279 |
| 296 | 313 | 330 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 313 | 194 | 279 |
| 228 | 262 | 296 |
| 245 | 330 | 211 |

[50]

| | | |
|---|---|---|
| 198 | 214 | 230 |
| 246 | 262 | 278 |
| 294 | 310 | 326 |

| | | |
|---|---|---|
| 310 | 198 | 378 |
| 230 | 262 | 294 |
| 246 | 326 | 214 |

[51]

| | | |
|---|---|---|
| 202 | 217 | 232 |
| 247 | 262 | 277 |
| 292 | 307 | 322 |

| | | |
|---|---|---|
| 307 | 202 | 277 |
| 232 | 262 | 292 |
| 247 | 322 | 217 |

[52]

| | | |
|---|---|---|
| 206 | 220 | 234 |
| 248 | 262 | 276 |
| 290 | 304 | 318 |

| | | |
|---|---|---|
| 334 | 206 | 298 |
| 280 | 262 | 244 |
| 226 | 208 | 220 |

आधार–वर्ग [53]

| | | |
|---|---|---|
| 210 | 223 | 236 |
| 249 | 262 | 275 |
| 288 | 301 | 314 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 301 | 210 | 275 |
| 236 | 262 | 288 |
| 249 | 314 | 223 |

[54]

| | | |
|---|---|---|
| 214 | 226 | 238 |
| 250 | 262 | 274 |
| 286 | 298 | 310 |

| | | |
|---|---|---|
| 298 | 214 | 274 |
| 238 | 262 | 286 |
| 250 | 310 | 226 |

[55]

| | | |
|---|---|---|
| 218 | 229 | 240 |
| 251 | 262 | 273 |
| 284 | 295 | 306 |

| | | |
|---|---|---|
| 295 | 218 | 273 |
| 240 | 262 | 284 |
| 251 | 306 | 229 |

[56]

| | | |
|---|---|---|
| 222 | 232 | 242 |
| 252 | 262 | 272 |
| 282 | 292 | 302 |

| | | |
|---|---|---|
| 292 | 222 | 272 |
| 242 | 262 | 282 |
| 252 | 302 | 232 |

आधार–वर्ग [57]

| | | |
|---|---|---|
| 226 | 235 | 244 |
| 253 | 262 | 271 |
| 280 | 289 | 298 |

[58]

| | | |
|---|---|---|
| 230 | 238 | 246 |
| 254 | 262 | 270 |
| 278 | 286 | 294 |

[59]

| | | |
|---|---|---|
| 234 | 241 | 248 |
| 255 | 262 | 269 |
| 276 | 283 | 290 |

[60]

| | | |
|---|---|---|
| 238 | 244 | 250 |
| 256 | 262 | 268 |
| 274 | 280 | 286 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 289 | 226 | 271 |
| 244 | 262 | 280 |
| 253 | 298 | 235 |

| | | |
|---|---|---|
| 286 | 230 | 270 |
| 246 | 262 | 278 |
| 254 | 294 | 238 |

| | | |
|---|---|---|
| 283 | 234 | 269 |
| 248 | 262 | 276 |
| 255 | 290 | 241 |

| | | |
|---|---|---|
| 280 | 238 | 268 |
| 250 | 262 | 274 |
| 256 | 286 | 244 |

आधार–वर्ग [61]

| | | |
|---|---|---|
| 242 | 247 | 252 |
| 257 | 262 | 267 |
| 272 | 277 | 282 |

आधार–वर्ग [62]

| | | |
|---|---|---|
| 246 | 250 | 254 |
| 258 | 262 | 266 |
| 270 | 274 | 278 |

आधार–वर्ग [63]

| | | |
|---|---|---|
| 250 | 253 | 256 |
| 259 | 262 | 265 |
| 268 | 271 | 274 |

आधार–वर्ग [64]

| | | |
|---|---|---|
| 254 | 256 | 258 |
| 260 | 262 | 264 |
| 266 | 268 | 270 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 277 | 242 | 267 |
| 252 | 262 | 272 |
| 257 | 282 | 247 |

| | | |
|---|---|---|
| 274 | 246 | 266 |
| 254 | 262 | 270 |
| 258 | 278 | 250 |

| | | |
|---|---|---|
| 271 | 250 | 265 |
| 256 | 262 | 268 |
| 259 | 272 | 253 |

| | | |
|---|---|---|
| 268 | 254 | 264 |
| 258 | 262 | 266 |
| 260 | 270 | 256 |

आधार–वर्ग [65]

| | | |
|---|---|---|
| 258 | 259 | 260 |
| 261 | 262 | 263 |
| 264 | 265 | 266 |

जादुई–वर्ग [65]

| | | |
|---|---|---|
| 265 | 258 | 263 |
| 260 | 262 | 264 |
| 261 | 266 | 259 |

**S= 786 के प्रति 4 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति 4*4 का आधार–वर्ग सह संगत जादुई–वर्ग श्रृंखला–**

आधार–वर्ग [1]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 189 | 190 | 191 | 192 |
| 193 | 194 | 195 | 196 |
| 197 | 198 | 199 | 200 |
| 201 | 202 | 203 | 204 |

आधार–वर्ग [2]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 174 | 177 | 180 | 183 |
| 186 | 189 | 192 | 195 |
| 198 | 201 | 204 | 207 |
| 210 | 213 | 216 | 219 |

आधार–वर्ग [3]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 159 | 164 | 169 | 174 |
| 179 | 184 | 189 | 194 |
| 199 | 204 | 209 | 214 |
| 219 | 224 | 229 | 234 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 189 | 203 | 202 | 192 |
| 200 | 194 | 195 | 197 |
| 196 | 198 | 199 | 193 |
| 201 | 191 | 190 | 204 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 174 | 216 | 213 | 183 |
| 207 | 189 | 192 | 198 |
| 195 | 201 | 204 | 186 |
| 210 | 180 | 177 | 219 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 159 | 229 | 224 | 174 |
| 214 | 184 | 189 | 199 |
| 194 | 204 | 209 | 179 |
| 219 | 169 | 164 | 234 |

आधार–वर्ग [4]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 144 | 151 | 158 | 165 |
| 172 | 179 | 186 | 193 |
| 200 | 207 | 214 | 221 |
| 228 | 235 | 242 | 249 |

आधार–वर्ग [5]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 129 | 138 | 147 | 156 |
| 165 | 174 | 183 | 192 |
| 201 | 210 | 219 | 228 |
| 237 | 246 | 255 | 264 |

आधार–वर्ग [6]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 114 | 125 | 136 | 147 |
| 158 | 169 | 180 | 191 |
| 202 | 213 | 224 | 235 |
| 246 | 257 | 268 | 278 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 144 | 242 | 235 | 165 |
| 221 | 179 | 186 | 200 |
| 193 | 207 | 214 | 172 |
| 228 | 158 | 151 | 249 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 129 | 255 | 246 | 156 |
| 228 | 174 | 183 | 201 |
| 192 | 210 | 218 | 165 |
| 237 | 147 | 138 | 264 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 114 | 268 | 257 | 147 |
| 235 | 169 | 180 | 202 |
| 191 | 213 | 224 | 158 |
| 246 | 136 | 125 | 278 |

आधार–वर्ग [7]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 99 | 112 | 125 | 138 |
| 151 | 164 | 177 | 190 |
| 203 | 216 | 229 | 242 |
| 255 | 268 | 281 | 294 |

[8]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 84 | 99 | 114 | 129 |
| 144 | 159 | 174 | 189 |
| 204 | 219 | 234 | 249 |
| 264 | 279 | 294 | 309 |

[9]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 69 | 86 | 103 | 120 |
| 137 | 154 | 171 | 188 |
| 205 | 222 | 239 | 256 |
| 273 | 290 | 307 | 324 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 99 | 281 | 268 | 138 |
| 242 | 164 | 177 | 203 |
| 190 | 216 | 229 | 151 |
| 255 | 125 | 112 | 294 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 84 | 294 | 279 | 129 |
| 249 | 159 | 174 | 204 |
| 189 | 219 | 234 | 144 |
| 264 | 114 | 99 | 309 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 69 | 307 | 290 | 120 |
| 256 | 154 | 171 | 205 |
| 188 | 222 | 239 | 137 |
| 273 | 103 | 86 | 324 |

आधार–वर्ग [10]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54 | 73 | 92 | 111 |
| 130 | 149 | 168 | 187 |
| 206 | 225 | 244 | 263 |
| 282 | 301 | 320 | 339 |

[11]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 39 | 60 | 81 | 102 |
| 123 | 144 | 165 | 186 |
| 207 | 228 | 249 | 270 |
| 291 | 312 | 333 | 354 |

[12]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | 47 | 70 | 93 |
| 116 | 139 | 162 | 185 |
| 208 | 231 | 254 | 277 |
| 300 | 323 | 346 | 369 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 54 | 320 | 301 | 111 |
| 263 | 149 | 168 | 206 |
| 187 | 225 | 244 | 130 |
| 282 | 92 | 73 | 339 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 39 | 333 | 312 | 102 |
| 270 | 144 | 165 | 207 |
| 186 | 228 | 249 | 123 |
| 291 | 81 | 60 | 354 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 | 346 | 323 | 93 |
| 277 | 139 | 162 | 208 |
| 185 | 231 | 254 | 116 |
| 300 | 70 | 47 | 369 |

आधार–वर्ग [13]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 34 | 59 | 84 |
| 109 | 134 | 159 | 184 |
| 209 | 234 | 259 | 284 |
| 309 | 334 | 359 | 384 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | 359 | 334 | 84 |
| 284 | 134 | 159 | 209 |
| 184 | 234 | 259 | 109 |
| 309 | 59 | 34 | 384 |

**S= 786 के प्रति 6 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति 6*6 का आधार–वर्ग सह संगत जादुई–वर्ग श्रृंखला–**

आधार–वर्ग

**[1]**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 96 | 98 | 100 | 102 | 104 | 106 |
| 108 | 110 | 112 | 114 | 116 | 118 |
| 120 | 122 | 124 | 126 | 128 | 130 |
| 132 | 134 | 136 | 138 | 140 | 142 |
| 144 | 146 | 148 | 150 | 152 | 154 |
| 156 | 158 | 160 | 162 | 164 | 166 |

जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **96** | **164** | **162** | **100** | **158** | **106** |
| **118** | **110** | **150** | **148** | **116** | **144** |
| **142** | **128** | **124** | **126** | **134** | **132** |
| **120** | **140** | **136** | **138** | **122** | **130** |
| **154** | **146** | **112** | **114** | **152** | **108** |
| **156** | **98** | **102** | **160** | **104** | **166** |

आधार–वर्ग

[2]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 65 | 69 | 73 | 77 | 81 |
| 85 | 89 | 93 | 97 | 101 | 105 |
| 109 | 113 | 117 | 121 | 125 | 129 |
| 133 | 137 | 141 | 145 | 149 | 153 |
| 157 | 161 | 165 | 169 | 173 | 177 |
| 181 | 185 | 189 | 193 | 197 | 201 |

जादुई–वर्ग

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 61 | 197 | 183 | 69 | 185 | 81 |
| 105 | 89 | 169 | 165 | 101 | 157 |
| 153 | 125 | 117 | 121 | 137 | 133 |
| 109 | 149 | 141 | 145 | 117 | 129 |
| 177 | 161 | 93 | 97 | 173 | 85 |
| 181 | 65 | 73 | 189 | 77 | 201 |

[3]

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 32 | 38 | 44 | 50 | 56 |
| 62 | 68 | 74 | 80 | 86 | 92 |
| 98 | 104 | 110 | 116 | 122 | 128 |
| 134 | 140 | 146 | 152 | 158 | 164 |
| 170 | 176 | 182 | 188 | 194 | 200 |
| 206 | 212 | 218 | 224 | 230 | 236 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | 230 | 224 | 38 | 212 | 56 |
| 92 | 68 | 182 | 188 | 86 | 170 |
| 164 | 122 | 110 | 116 | 140 | 134 |
| 98 | 158 | 146 | 152 | 104 | 128 |
| 200 | 176 | 74 | 80 | 194 | 62 |
| 206 | 32 | 44 | 218 | 50 | 236 |

ऊँ श्री हरि ,अल्लाह, बिट्ठल–बिट्ठल, साहेब ,कृष्ण, साई, राम ।
श्री बूढ़ादेवाय, प्रभु यीशु ,बुद्धम्, महावीराय,झूलेलाल, वाहे गुरू, सतनाम ।।

।। बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम।।
।। अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है ।।

786 786




786 • मेहनत मेरी• रहमत तेरी • 786

एक ही धर्म, मानव धर्म, एक ही जाति, मानव जाति ।
एक ही सेवा मानव सेवा, जय सेवा, जय सेवा, जय सेवा ।।

## ोगमान S=786 के प्रति समिकावार कुल प्रकारों की संख्या आकलन तालिका

[1] 3*3 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति P*8 | रंगीन जादुई–वर्ग रवनाके प्रति P*8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a+ \quad N*(N^2-1)*d$ | 65 | ,520 | 520 |
| 2 | $2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k)$ | 25,415 | 2,03,320 | 2,03,320 |
| योग | | 25,480 | 2,03,840 | 2,03,840 |

[2A] 4*4 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | I प्रथम आधार–वर्ग की र्संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | अरंगित विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a+ \quad N*(N^2-1)*d$ | 13 | 3588 | 1, 092 | 156 |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2}-1)*d$ | 5,376 | 14,83,776 | 4,51,584, | 43,008 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k)$ | 3,008 | 8,30,208 | 2,52, 672 | 36,096 |
| योग | | 8,397 | 23,13,984 | 7,05358 | 79 ,260 |

[2B] 4*4 का सामान्य ( रंग धारध्ण करने के गुण से मुक्त) विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या चp | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या P*184 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | S = (a+b+c+e+6d) | 3,597 | 6,61,848 |
| 2 -1 | S=(2a+b+c +10d) | 3072 | 5,65,248 |
| 2-2 | S=(a+2b+c +10d) | 3113 | 5,72,792 |
| 2-3 | S=(a+b+2c +10d) | 3857 | 7,09,688 |
| 3-1 | S=(3a+b +18d) | 2,850 | 5,24, 400 |
| 3-2 | S=(a+3b +18d) | 1365 | 2,51,160 |
| योगमान | | 17,854 | 32,85,136 |

[4] 6*6 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | I प्रथम आधार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 3 | 2,256 | 48 |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2} - 1) * d$ | 934 | 4,89,416 | 3,736 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 481 | 3,61,712 | 7,696 |
| 4 | $2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m - 1)\ N * k$ | 704 | 3,97,056 | 8448 |
| योगमान | | 2122 | 12,50,440 | 19,928 |

## महायोग तालिका

| क्रमांक | N*N का जादुई–वर्ग रचना के प्रति | प्रथम आधार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | | | महायोग |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य (अंरगित) | | रंगीन जादुई–वर्ग | | |
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 3*3 | 25,480 | 2,03,840 | | 2,03,840 | | 4,07680 |
| 2 | 4*4 A | 8,397 | | 23,17,572 | 5,54,820 | 79,260 | 29,51,652 |
| 3 | 4*4 B | 17,854 | | 32,85,136 | | | 32,85,136 |
| 4 | 6*6 | 2,122 | | | 12,50,440 | 19,928 | 12,70,368 |
| ;यांग | | 53,853 | 2,03,840 | 56,,02,708 | 20,09,100 | 99,188 | 79,14,836 |

उन्यासी लाख, चौदह हजार,आठ सौ छत्तीस

### 13-6 जय सेवा संख्या (750)

लोकमान्यता के अनुसार पूरी धरा (भू–लोक) में मानवीय सभ्यता के विकास यात्रा में प्रथम पाँव (छत्तीसगढ़ी शब्दावली में गोड़) धरने या रखने वाली सभ्यता को गोड़वाना संस्कृति के नाम से जाना जाता है। कालान्तर में विकास यात्रा में पूरे विश्व में 750 समुदाय (गोत्र) में विकसित माना जाने लगा है। भौगोलिक स्थिति, भाषायी विभिन्नता एवं रहन–सहन में अपने और अपने इष्ट (आदिदेव) को एक ही भावार्थ में अलग–अलग नाम दिये है। छत्तीसगढ़ एवं उनके सीमान्चल में **आदिशक्ति जयसेवा** के नाम से आत्मसात करते हैं।शब्द **सेवा** ही **शिवा** (जगत जननी जगदम्बा पार्वती) के साथ **आदिदेव (शिवा का शिव)** (गोंड़ी बोली–भाषा में बूढ़ादेव/बढ़ादेव/सियान (मुखिया) देवता देवों के देव **महादेव** को मिलाकर जयशिवा–शंकर के लिये जयशिव–शंकर को नाम जप–तप में लिया गया है। अतः इस संख्या को भी परवर दिगार अल्लाह की संख्या **786** की भाँति सुरक्षा कवच यंत्र के रूप में 3*3, 4*4, 5*5, 6*6 एवं 10*10 के वर्ग यंत्र रचित किए जा सकते हैं। अति विस्तार में ग्रंथाकार होगा । 786 की भाँति 3, 4, 5, 6,और 10 के यथार्थ –भाजक 1 पर क्रमशः 9, 16, 25, 36एवं 100 पदी समान्तर श्रेढ़ी अवयवों द्वारा प्रथम आधार–वर्ग सह भाग्यषाली सुरक्षा कवच जादुई–वर्ग अवलोकित कीजिए।

**S= 750 के प्रति 3 के यथार्थ भाजक 1 के प्रति 3*3 का आधार–वर्ग सह संगत जादुई–वर्ग श्रृंखला–**

आधार–वर्ग [1]

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 64 | 126 |
| 188 | 250 | 312 |
| 374 | 436 | 498 |

[2]

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 67 | 128 |
| 189 | 250 | 311 |
| 372 | 433 | 494 |

[3]

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 70 | 130 |
| 190 | 250 | 310 |
| 370 | 430 | 490 |

[4]

| | | |
|---|---|---|
| 14 | 73 | 132 |
| 191 | 250 | 309 |
| 368 | 427 | 486 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 436 | 2 | 312 |
| 126 | 250 | 374 |
| 188 | 498 | 64 |

| | | |
|---|---|---|
| 433 | 6 | 311 |
| 128 | 250 | 372 |
| 189 | 494 | 67 |

| | | |
|---|---|---|
| 430 | 10 | 310 |
| 130 | 250 | 370 |
| 190 | 490 | 70 |

| | | |
|---|---|---|
| 427 | 14 | 309 |
| 132 | 250 | 368 |
| 191 | 486 | 73 |

आधार–वर्ग [5]

| | | |
|---|---|---|
| 18 | 76 | 134 |
| 192 | 250 | 308 |
| 366 | 424 | 482 |

[6]

| | | |
|---|---|---|
| 22 | 79 | 136 |
| 193 | 250 | 307 |
| 364 | 421 | 478 |

[7]

| | | |
|---|---|---|
| 26 | 82 | 138 |
| 194 | 250 | 306 |
| 362 | 418 | 474 |

[8]

| | | |
|---|---|---|
| 30 | 85 | 140 |
| 195 | 250 | 305 |
| 360 | 415 | 470 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 424 | 18 | 308 |
| 134 | 250 | 366 |
| 192 | 482 | 76 |

| | | |
|---|---|---|
| 421 | 22 | 307 |
| 136 | 250 | 364 |
| 193 | 478 | 79 |

| | | |
|---|---|---|
| 418 | 26 | 306 |
| 138 | 250 | 362 |
| 194 | 474 | 82 |

| | | |
|---|---|---|
| 415 | 30 | 305 |
| 140 | 250 | 360 |
| 195 | 470 | 85 |

आधार–वर्ग [9]

| | | |
|---|---|---|
| 34 | 88 | 142 |
| 196 | 250 | 304 |
| 358 | 412 | 466 |

[10]

| | | |
|---|---|---|
| 38 | 91 | 144 |
| 197 | 250 | 303 |
| 356 | 409 | 462 |

[11]

| | | |
|---|---|---|
| 42 | 94 | 146 |
| 198 | 250 | 302 |
| 354 | 406 | 458 |

[12]

| | | |
|---|---|---|
| 46 | 97 | 148 |
| 199 | 250 | 301 |
| 352 | 403 | 454 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 412 | 34 | 304 |
| 142 | 250 | 356 |
| 196 | 466 | 88 |

| | | |
|---|---|---|
| 409 | 38 | 303 |
| 144 | 250 | 356 |
| 197 | 462 | 91 |

| | | |
|---|---|---|
| 406 | 42 | 302 |
| 146 | 250 | 354 |
| 198 | 450 | 94 |

| | | |
|---|---|---|
| 403 | 46 | 301 |
| 148 | 250 | 352 |
| 199 | 454 | 97 |

आधार–वर्ग [13]

| | | |
|---|---|---|
| 50 | 100 | 150 |
| 200 | 250 | 300 |
| 350 | 400 | 450 |

[14]

| | | |
|---|---|---|
| 54 | 103 | 152 |
| 201 | 250 | 299 |
| 348 | 397 | 446 |

[15]

| | | |
|---|---|---|
| 58 | 106 | 154 |
| 202 | 250 | 298 |
| 346 | 394 | 442 |

[16]

| | | |
|---|---|---|
| 62 | 109 | 156 |
| 203 | 250 | 297 |
| 344 | 391 | 438 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 400 | 50 | 300 |
| 150 | 250 | 350 |
| 200 | 450 | 100 |

| | | |
|---|---|---|
| 397 | 54 | 299 |
| 152 | 250 | 348 |
| 201 | 446 | 103 |

| | | |
|---|---|---|
| 394 | 58 | 298 |
| 154 | 250 | 346 |
| 202 | 442 | 106 |

| | | |
|---|---|---|
| 391 | 62 | 297 |
| 156 | 250 | 344 |
| 203 | 438 | 109 |

आधार–वर्ग [17]

| | | |
|---|---|---|
| 66 | 112 | 158 |
| 204 | 250 | 296 |
| 342 | 388 | 434 |

[18]

| | | |
|---|---|---|
| 70 | 115 | 160 |
| 205 | 250 | 295 |
| 340 | 385 | 430 |

[19]

| | | |
|---|---|---|
| 74 | 118 | 162 |
| 206 | 250 | 294 |
| 338 | 382 | 426 |

[20]

| | | |
|---|---|---|
| 78 | 121 | 164 |
| 207 | 250 | 293 |
| 336 | 379 | 422 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 388 | 66 | 296 |
| 158 | 250 | 342 |
| 204 | 434 | 112 |

| | | |
|---|---|---|
| 385 | 70 | 295 |
| 160 | 250 | 340 |
| 205 | 430 | 115 |

| | | |
|---|---|---|
| 382 | 74 | 294 |
| 162 | 250 | 338 |
| 338 | 426 | 118 |

| | | |
|---|---|---|
| 379 | 78 | 293 |
| 164 | 250 | 336 |
| 207 | 422 | 121 |

आधार–वर्ग [21]

| | | |
|---|---|---|
| 82 | 124 | 166 |
| 208 | 250 | 292 |
| 334 | 376 | 418 |

[22]

| | | |
|---|---|---|
| 86 | 127 | 168 |
| 209 | 250 | 291 |
| 332 | 373 | 414 |

[23]

| | | |
|---|---|---|
| 90 | 130 | 170 |
| 210 | 250 | 290 |
| 330 | 370 | 410 |

[24]

| | | |
|---|---|---|
| 94 | 133 | 172 |
| 211 | 250 | 289 |
| 328 | 367 | 406 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 376 | 82 | 292 |
| 166 | 250 | 334 |
| 208 | 418 | 124 |

| | | |
|---|---|---|
| 373 | 86 | 291 |
| 168 | 250 | 332 |
| 209 | 414 | 127 |

| | | |
|---|---|---|
| 370 | 90 | 290 |
| 170 | 250 | 330 |
| 210 | 410 | 130 |

| | | |
|---|---|---|
| 367 | 94 | 289 |
| 172 | 250 | 328 |
| 211 | 406 | 133 |

आधार–वर्ग [25]

| | | |
|---|---|---|
| 98 | 136 | 174 |
| 212 | 250 | 288 |
| 326 | 364 | 402 |

[26]

| | | |
|---|---|---|
| 102 | 139 | 176 |
| 213 | 250 | 287 |
| 324 | 36i | 398 |

[27]

| | | |
|---|---|---|
| 106 | 142 | 178 |
| 214 | 250 | 286 |
| 322 | 358 | 394 |

[28]

| | | |
|---|---|---|
| 110 | 145 | 180 |
| 215 | 250 | 285 |
| 320 | 355 | 390 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 364 | 98 | 288 |
| 174 | 250 | 326 |
| 212 | 402 | 136 |

| | | |
|---|---|---|
| 361 | 102 | 287 |
| 176 | 250 | 324 |
| 213 | 398 | 139 |

| | | |
|---|---|---|
| 358 | 106 | 286 |
| 178 | 250 | 322 |
| 214 | 394 | 142 |

| | | |
|---|---|---|
| 355 | 110 | 285 |
| 180 | 250 | 320 |
| 215 | 390 | 145 |

आधार–वर्ग [29]

| | | |
|---|---|---|
| 114 | 148 | 182 |
| 216 | 250 | 284 |
| 318 | 352 | 386 |

[30]

| | | |
|---|---|---|
| 118 | 151 | 184 |
| 217 | 250 | 283 |
| 316 | 349 | 382 |

[31]

| | | |
|---|---|---|
| 122 | 154 | 186 |
| 218 | 250 | 282 |
| 314 | 346 | 378 |

[32]

| | | |
|---|---|---|
| 126 | 157 | 188 |
| 219 | 250 | 281 |
| 312 | 343 | 374 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 352 | 114 | 284 |
| 182 | 250 | 318 |
| 216 | 386 | 148 |

| | | |
|---|---|---|
| 349 | 118 | 283 |
| 184 | 250 | 316 |
| 217 | 382 | 151 |

| | | |
|---|---|---|
| 346 | 122 | 282 |
| 186 | 250 | 314 |
| 218 | 378 | 154 |

| | | |
|---|---|---|
| 343 | 126 | 281 |
| 188 | 250 | 312 |
| 219 | 374 | 157 |

आधार–वर्ग [33]

| | | |
|---|---|---|
| 130 | 160 | 190 |
| 220 | 250 | 280 |
| 310 | 340 | 370 |

[34]

| | | |
|---|---|---|
| 134 | 163 | 192 |
| 221 | 250 | 279 |
| 308 | 337 | 366 |

[35]

| | | |
|---|---|---|
| 138 | 166 | 194 |
| 222 | 250 | 278 |
| 306 | 334 | 362 |

[36]

| | | |
|---|---|---|
| 142 | 169 | 196 |
| 223 | 250 | 277 |
| 304 | 331 | 358 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 340 | 130 | 280 |
| 190 | 250 | 310 |
| 220 | 370 | 160 |

| | | |
|---|---|---|
| 337 | 134 | 279 |
| 192 | 250 | 308 |
| 221 | 366 | 163 |

| | | |
|---|---|---|
| 334 | 138 | 278 |
| 194 | 250 | 306 |
| 222 | 362 | 166 |

| | | |
|---|---|---|
| 331 | 142 | 277 |
| 196 | 250 | 304 |
| 223 | 358 | 169 |

आधार–वर्ग [37]

| | | |
|---|---|---|
| 146 | 172 | 198 |
| 224 | 250 | 276 |
| 302 | 328 | 354 |

[38]

| | | |
|---|---|---|
| 150 | 175 | 200 |
| 225 | 250 | 275 |
| 300 | 325 | 350 |

[39]

| | | |
|---|---|---|
| 154 | 178 | 202 |
| 226 | 250 | 274 |
| 298 | 322 | 346 |

[40]

| | | |
|---|---|---|
| 158 | 181 | 204 |
| 227 | 250 | 273 |
| 296 | 319 | 342 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 328 | 146 | 276 |
| 198 | 250 | 302 |
| 224 | 354 | 172 |

| | | |
|---|---|---|
| 325 | 150 | 275 |
| 200 | 250 | 300 |
| 225 | 350 | 175 |

| | | |
|---|---|---|
| 322 | 154 | 274 |
| 202 | 250 | 286 |
| 226 | 345 | 178 |

| | | |
|---|---|---|
| 319 | 158 | 273 |
| 204 | 250 | 296 |
| 227 | 342 | 181 |

आधार–वर्ग [41]

| | | |
|---|---|---|
| 162 | 184 | 206 |
| 228 | 250 | 272 |
| 294 | 316 | 338 |

[42]

| | | |
|---|---|---|
| 166 | 187 | 208 |
| 229 | 250 | 271 |
| 292 | 313 | 334 |

[43]

| | | |
|---|---|---|
| 170 | 190 | 210 |
| 230 | 250 | 270 |
| 290 | 310 | 330 |

[44]

| | | |
|---|---|---|
| 174 | 193 | 212 |
| 231 | 250 | 269 |
| 288 | 307 | 326 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 316 | 162 | 272 |
| 206 | 250 | 284 |
| 228 | 338 | 184 |

| | | |
|---|---|---|
| 323 | 166 | 271 |
| 208 | 250 | 292 |
| 229 | 334 | 187 |

| | | |
|---|---|---|
| 310 | 179 | 270 |
| 210 | 250 | 290 |
| 230 | 330 | 190 |

| | | |
|---|---|---|
| 307 | 174 | 269 |
| 212 | 250 | 288 |
| 231 | 326 | 193 |

आधार–वर्ग [45]

| | | |
|---|---|---|
| 178 | 196 | 214 |
| 232 | 250 | 268 |
| 286 | 304 | 322 |

[46]

| | | |
|---|---|---|
| 182 | 199 | 216 |
| 233 | 250 | 267 |
| 284 | 301 | 318 |

[47]

| | | |
|---|---|---|
| 186 | 202 | 218 |
| 234 | 250 | 266 |
| 282 | 298 | 314 |

[48]

| | | |
|---|---|---|
| 190 | 205 | 220 |
| 235 | 250 | 265 |
| 280 | 295 | 310 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 304 | 178 | 268 |
| 214 | 250 | 286 |
| 232 | 322 | 196 |

| | | |
|---|---|---|
| 301 | 182 | 267 |
| 216 | 250 | 284 |
| 233 | 318 | 199 |

| | | |
|---|---|---|
| 298 | 186 | 266 |
| 218 | 250 | 282 |
| 234 | 314 | 202 |

| | | |
|---|---|---|
| 295 | 190 | 265 |
| 220 | 250 | 280 |
| 235 | 310 | 205 |

आधार–वर्ग [49]

| | | |
|---|---|---|
| 194 | 208 | 222 |
| 236 | 250 | 264 |
| 278 | 292 | 306 |

[50]

| | | |
|---|---|---|
| 198 | 211 | 224 |
| 237 | 250 | 263 |
| 276 | 289 | 302 |

[51]

| | | |
|---|---|---|
| 202 | 214 | 226 |
| 238 | 250 | 262 |
| 274 | 286 | 298 |

[52]

| | | |
|---|---|---|
| 206 | 217 | 228 |
| 239 | 250 | 261 |
| 272 | 283 | 294 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 292 | 194 | 264 |
| 222 | 250 | 278 |
| 236 | 306 | 208 |

| | | |
|---|---|---|
| 289 | 198 | 267 |
| 224 | 250 | 276 |
| 237 | 302 | 211 |

| | | |
|---|---|---|
| 286 | 202 | 262 |
| 226 | 250 | 274 |
| 238 | 298 | 214 |

| | | |
|---|---|---|
| 283 | 206 | 261 |
| 228 | 250 | 272 |
| 239 | 294 | 217 |

आधार–वर्ग [53]

| | | |
|---|---|---|
| 210 | 220 | 230 |
| 240 | 250 | 260 |
| 270 | 280 | 290 |

[54]

| | | |
|---|---|---|
| 214 | 223 | 232 |
| 241 | 250 | 259 |
| 268 | 277 | 286 |

[55]

| | | |
|---|---|---|
| 218 | 226 | 234 |
| 242 | 250 | 258 |
| 266 | 274 | 282 |

[56]

| | | |
|---|---|---|
| 222 | 229 | 236 |
| 243 | 250 | 257 |
| 264 | 271 | 278 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 280 | 210 | 260 |
| 230 | 250 | 270 |
| 240 | 290 | 220 |

| | | |
|---|---|---|
| 277 | 214 | 259 |
| 232 | 250 | 268 |
| 241 | 286 | 223 |

| | | |
|---|---|---|
| 274 | 218 | 258 |
| 234 | 250 | 266 |
| 242 | 282 | 226 |

| | | |
|---|---|---|
| 271 | 222 | 257 |
| 236 | 250 | 264 |
| 243 | 278 | 229 |

आधार–वर्ग [57]

| | | |
|---|---|---|
| 226 | 232 | 238 |
| 244 | 250 | 256 |
| 262 | 268 | 274 |

[58]

| | | |
|---|---|---|
| 230 | 235 | 240 |
| 245 | 250 | 255 |
| 260 | 265 | 270 |

[59]

| | | |
|---|---|---|
| 234 | 238 | 242 |
| 246 | 250 | 254 |
| 258 | 262 | 266 |

[60]

| | | |
|---|---|---|
| 238 | 241 | 244 |
| 247 | 250 | 253 |
| 256 | 259 | 262 |

जादुई–वर्ग

| | | |
|---|---|---|
| 268 | 226 | 256 |
| 238 | 250 | 262 |
| 244 | 272 | 232 |

| | | |
|---|---|---|
| 256 | 230 | 255 |
| 240 | 250 | 260 |
| 245 | 270 | 255 |

| | | |
|---|---|---|
| 262 | 234 | 254 |
| 242 | 250 | 258 |
| 246 | 366 | 238 |

| | | |
|---|---|---|
| 259 | 238 | 253 |
| 244 | 250 | 256 |
| 24 | 262 | 241 |

आधार–वर्ग [61]

| | | |
|---|---|---|
| 242 | 244 | 246 |
| 248 | 250 | 252 |
| 254 | 256 | 258 |

जादुई–वर्ग [61]

| | | |
|---|---|---|
| 256 | 242 | 252 |
| 246 | 250 | 254 |
| 248 | 258 | 244 |

आधार–वर्ग [62]

| | | |
|---|---|---|
| 246 | 247 | 248 |
| 249 | 250 | 251 |
| 252 | 253 | 254 |

जादुई–वर्ग [62]

| | | |
|---|---|---|
| 253 | 246 | 251 |
| 251 | 250 | 252 |
| 249 | 251 | 247 |

**S= 750 के प्रति 4 के यथार्थ भाजक 1के प्रति 4*4 का प्रथम आधार–वर्ग सह संगत जादुई–वर्ग श्रृंखला–**

आधार–वर्ग [1]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 38 | 61 | 84 |
| 107 | 130 | 153 | 176 |
| 199 | 222 | 245 | 268 |
| 291 | 314 | 337 | 360 |

[2]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | 51 | 72 | 93 |
| 114 | 135 | 156 | 177 |
| 198 | 219 | 240 | 261 |
| 282 | 303 | 324 | 345 |

[3]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 45 | 64 | 83 | 102 |
| 121 | 140 | 159 | 178 |
| 197 | 216 | 235 | 254 |
| 273 | 292 | 311 | 330 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | 337 | 314 | 84 |
| 176 | 130 | 153 | 199 |
| 268 | 222 | 245 | 107 |
| 291 | 38 | 61 | 360 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 30 | 324 | 303 | 93 |
| 177 | 135 | 156 | 198 |
| 261 | 219 | 240 | 114 |
| 282 | 51 | 72 | 345 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 45 | 311 | 292 | 102 |
| 178 | 140 | 159 | 197 |
| 254 | 216 | 235 | 121 |
| 273 | 64 | 83 | 330 |

आधार–वर्ग [4]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 | 77 | 94 | 111 |
| 128 | 145 | 162 | 179 |
| 196 | 213 | 230 | 247 |
| 264 | 281 | 298 | 315 |

[5]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 75 | 90 | 105 | 120 |
| 135 | 150 | 165 | 180 |
| 195 | 210 | 225 | 240 |
| 255 | 270 | 285 | 300 |

[6]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90 | 103 | 116 | 129 |
| 142 | 155 | 168 | 181 |
| 194 | 207 | 220 | 233 |
| 246 | 259 | 272 | 285 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 | 298 | 281 | 111 |
| 179 | 145 | 162 | 196 |
| 247 | 213 | 230 | 128 |
| 264 | 77 | 94 | 315 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 75 | 285 | 270 | 120 |
| 180 | 150 | 165 | 195 |
| 240 | 210 | 225 | 135 |
| 255 | 90 | 105 | 300 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90 | 272 | 259 | 129 |
| 181 | 155 | 168 | 194 |
| 233 | 207 | 220 | 142 |
| 246 | 103 | 116 | 285 |

आधार–वर्ग [7]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 105 | 116 | 127 | 138 |
| 149 | 160 | 171 | 182 |
| 193 | 204 | 215 | 226 |
| 237 | 248 | 259 | 270 |

[8]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | 129 | 138 | 147 |
| 156 | 165 | 174 | 183 |
| 192 | 201 | 210 | 219 |
| 228 | 237 | 246 | 255 |

[9]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 135 | 142 | 149 | 156 |
| 163 | 170 | 177 | 184 |
| 191 | 198 | 205 | 212 |
| 219 | 226 | 233 | 240 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 105 | 259 | 248 | 138 |
| 182 | 160 | 171 | 193 |
| 226 | 204 | 215 | 149 |
| 237 | 116 | 127 | 270 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 120 | 246 | 237 | 147 |
| 183 | 165 | 174 | 192 |
| 218 | 201 | 210 | 156 |
| 228 | 129 | 138 | 255 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 135 | 233 | 226 | 156 |
| 163 | 170 | 177 | 184 |
| 191 | 198 | 205 | 212 |
| 219 | 142 | 149 | 240 |

आधार–वर्ग [10]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 155 | 160 | 165 |
| 170 | 175 | 180 | 185 |
| 190 | 195 | 200 | 205 |
| 210 | 215 | 220 | 225 |

[11]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 165 | 168 | 171 | 174 |
| 177 | 180 | 183 | 186 |
| 189 | 192 | 195 | 198 |
| 201 | 204 | 207 | 210 |

[12]

| | | | |
|---|---|---|---|
| 180 | 181 | 182 | 183 |
| 184 | 185 | 186 | 187 |
| 188 | 189 | 190 | 191 |
| 192 | 193 | 194 | 195 |

जादुई–वर्ग

| | | | |
|---|---|---|---|
| 191 | 220 | 215 | 212 |
| 185 | 226 | 233 | 190 |
| 205 | 195 | 200 | 170 |
| 210 | 155 | 160 | 225 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 165 | 207 | 204 | 174 |
| 186 | 180 | 183 | 189 |
| 198 | 192 | 195 | 177 |
| 201 | 168 | 171 | 210 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 180 | 194 | 193 | 183 |
| 187 | 185 | 186 | 188 |
| 191 | 189 | 190 | 184 |
| 192 | 181 | 182 | 195 |

**5*5 के प्रति [1] आधार–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 18 | 30 | 42 | 54 |
| 66 | 78 | 90 | 102 | 114 |
| 126 | 138 | 150 | 162 | 174 |
| 186 | 198 | 210 | 222 | 234 |
| 246 | 258 | 270 | 282 | 294 |

**सरल जादुई–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 198 | 282 | 6 | 90 | 174 |
| 270 | 54 | 78 | 162 | 186 |
| 42 | 66 | 150 | 234 | 258 |
| 114 | 138 | 222 | 246 | 30 |
| 126 | 210 | 294 | 18 | 102 |

**रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 30 | 282 | 6 | 258 | 174 |
| 114 | 210 | 78 | 162 | 186 |
| 246 | 102 | 150 | 198 | 54 |
| 234 | 138 | 222 | 90 | 66 |
| 126 | 18 | 295 | 42 | 270 |

**[2] आधार–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 18 | 29 | 40 | 51 | 62 |
| 73 | 84 | 95 | 106 | 117 |
| 128 | 139 | 150 | 161 | 172 |
| 183 | 194 | 205 | 216 | 227 |
| 238 | 249 | 260 | 271 | 282 |

**सरल जादुई–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 194 | 271 | 18 | 95 | 172 |
| 260 | 62 | 84 | 161 | 183 |
| 51 | 73 | 150 | 227 | 247 |
| 117 | 139 | 216 | 238 | 40 |
| 128 | 205 | 282 | 29 | 106 |

**रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 40 | 271 | 18 | 249 | 172 |
| 117 | 205 | 84 | 161 | 183 |
| 238 | 106 | 150 | 194 | 62 |
| 227 | 139 | 216 | 95 | 73 |
| 128 | 29 | 282 | 51 | 260 |

[3] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 40 | 50 | 60 | 70 |
| 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
| 130 | 140 | 150 | 160 | 170 |
| 180 | 190 | 200 | 210 | 220 |
| 230 | 240 | 250 | 260 | 270 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 190 | 260 | 30 | 100 | 170 |
| 250 | 70 | 90 | 160 | 180 |
| 60 | 80 | 150 | 220 | 240 |
| 120 | 140 | 210 | 230 | 50 |
| 130 | 200 | 270 | 40 | 110 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 260 | 30 | 240 | 170 |
| 120 | 200 | 90 | 160 | 180 |
| 230 | 110 | 150 | 190 | 70 |
| 220 | 140 | 210 | 100 | 80 |
| 130 | 40 | 270 | 60 | 250 |

[4] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 42 | 51 | 60 | 69 | 78 |
| 87 | 96 | 105 | 114 | 123 |
| 132 | 141 | 150 | 159 | 168 |
| 177 | 186 | 195 | 204 | 213 |
| 222 | 231 | 240 | 249 | 258 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 186 | 249 | 42 | 105 | 168 |
| 240 | 78 | 96 | 159 | 177 |
| 69 | 87 | 150 | 213 | 231 |
| 123 | 141 | 204 | 222 | 60 |
| 132 | 195 | 258 | 51 | 114 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 60 | 249 | 42 | 231 | 168 |
| 123 | 195 | 96 | 159 | 177 |
| 222 | 114 | 150 | 186 | 78 |
| 213 | 141 | 204 | 105 | 87 |
| 132 | 51 | 258 | 69 | 240 |

[5] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 54 | 62 | 70 | 78 | 86 |
| 94 | 102 | 110 | 118 | 126 |
| 134 | 142 | 150 | 158 | 166 |
| 174 | 182 | 190 | 198 | 206 |
| 214 | 222 | 230 | 238 | 246 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 182 | 238 | 54 | 110 | 166 |
| 230 | 86 | 102 | 158 | 174 |
| 78 | 94 | 150 | 206 | 222 |
| 126 | 142 | 198 | 214 | 70 |
| 134 | 190 | 246 | 62 | 118 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 70 | 238 | 54 | 222 | 166 |
| 126 | 190 | 102 | 158 | 174 |
| 214 | 118 | 150 | 182 | 86 |
| 206 | 142 | 198 | 110 | 94 |
| 134 | 62 | 246 | 78 | 230 |

[6] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 66 | 73 | 80 | 87 | 94 |
| 101 | 108 | 115 | 122 | 129 |
| 136 | 143 | 150 | 157 | 164 |
| 171 | 178 | 185 | 192 | 199 |
| 206 | 213 | 220 | 227 | 234 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 178 | 227 | 66 | 115 | 164 |
| 220 | 94 | 108 | 157 | 171 |
| 87 | 101 | 150 | 199 | 213 |
| 129 | 143 | 192 | 206 | 80 |
| 136 | 185 | 234 | 73 | 122 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 80 | 227 | 66 | 213 | 164 |
| 129 | 185 | 108 | 157 | 171 |
| 206 | 122 | 150 | 178 | 94 |
| 199 | 143 | 192 | 115 | 101 |
| 136 | 73 | 234 | 87 | 220 |

[7] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 78 | 84 | 90 | 96 | 102 |
| 108 | 114 | 120 | 126 | 132 |
| 138 | 144 | 150 | 156 | 162 |
| 168 | 174 | 180 | 186 | 192 |
| 198 | 204 | 210 | 216 | 222 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 174 | 216 | 78 | 120 | 162 |
| 210 | 102 | 114 | 156 | 168 |
| 96 | 108 | 150 | 192 | 204 |
| 132 | 144 | 186 | 198 | 90 |
| 138 | 180 | 222 | 84 | 126 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 216 | 78 | 204 | 162 |
| 132 | 180 | 114 | 156 | 168 |
| 198 | 126 | 150 | 174 | 102 |
| 192 | 144 | 186 | 120 | 108 |
| 138 | 84 | 222 | 96 | 210 |

[8] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 90 | 95 | 100 | 105 | 110 |
| 115 | 120 | 125 | 130 | 135 |
| 140 | 145 | 150 | 155 | 160 |
| 165 | 170 | 175 | 180 | 185 |
| 190 | 195 | 200 | 205 | 210 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 170 | 205 | 90 | 125 | 160 |
| 200 | 110 | 120 | 155 | 165 |
| 105 | 115 | 150 | 185 | 195 |
| 135 | 145 | 180 | 190 | 100 |
| 140 | 175 | 210 | 95 | 130 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 100 | 205 | 90 | 195 | 160 |
| 135 | 175 | 120 | 155 | 165 |
| 190 | 130 | 150 | 170 | 110 |
| 185 | 145 | 180 | 125 | 115 |
| 140 | 95 | 210 | 105 | 200 |

[9] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 102 | 106 | 110 | 114 | 118 |
| 122 | 126 | 130 | 134 | 138 |
| 142 | 146 | 150 | 154 | 158 |
| 162 | 166 | 170 | 174 | 178 |
| 182 | 186 | 190 | 194 | 198 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 116 | 194 | 102 | 130 | 158 |
| 190 | 118 | 126 | 154 | 162 |
| 114 | 122 | 150 | 178 | 186 |
| 138 | 146 | 174 | 182 | 110 |
| 142 | 170 | 198 | 106 | 134 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 110 | 194 | 102 | 186 | 158 |
| 138 | 170 | 126 | 154 | 162 |
| 182 | 154 | 150 | 146 | 118 |
| 178 | 146 | 174 | 130 | 122 |
| 142 | 106 | 198 | 114 | 190 |

[10] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 114 | 117 | 120 | 123 | 126 |
| 129 | 132 | 135 | 138 | 141 |
| 144 | 147 | 150 | 153 | 156 |
| 159 | 162 | 165 | 168 | 171 |
| 174 | 177 | 180 | 183 | 186 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 162 | 183 | 114 | 135 | 156 |
| 180 | 126 | 132 | 153 | 159 |
| 123 | 129 | 150 | 171 | 177 |
| 141 | 147 | 168 | 174 | 120 |
| 144 | 165 | 186 | 117 | 138 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 120 | 183 | 114 | 177 | 156 |
| 141 | 165 | 132 | 153 | 159 |
| 174 | 138 | 150 | 162 | 120 |
| 171 | 147 | 168 | 135 | 129 |
| 144 | 117 | 186 | 123 | 180 |

[11] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 126 | 128 | 130 | 132 | 134 |
| 136 | 138 | 140 | 142 | 144 |
| 146 | 148 | 150 | 152 | 154 |
| 156 | 158 | 160 | 162 | 164 |
| 166 | 168 | 170 | 172 | 174 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 158 | 172 | 126 | 140 | 154 |
| 170 | 134 | 138 | 152 | 156 |
| 132 | 136 | 150 | 164 | 168 |
| 144 | 148 | 162 | 166 | 130 |
| 146 | 160 | 174 | 128 | 142 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 130 | 172 | 126 | 168 | 154 |
| 144 | 160 | 138 | 152 | 156 |
| 166 | 142 | 150 | 158 | 134 |
| 164 | 148 | 162 | 140 | 136 |
| 146 | 128 | 174 | 132 | 170 |

[12] आधार–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 138 | 139 | 140 | 141 | 142 |
| 143 | 144 | 145 | 146 | 147 |
| 148 | 149 | 150 | 151 | 152 |
| 153 | 154 | 155 | 156 | 157 |
| 158 | 159 | 160 | 161 | 162 |

सरल जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 154 | 161 | 138 | 145 | 152 |
| 160 | 142 | 144 | 151 | 153 |
| 141 | 143 | 150 | 157 | 159 |
| 147 | 149 | 156 | 158 | 140 |
| 148 | 155 | 162 | 139 | 146 |

रंगीन जादुई–वर्ग

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 140 | 161 | 138 | 149 | 152 |
| 147 | 155 | 144 | 151 | 153 |
| 158 | 146 | 150 | 154 | 142 |
| 157 | 149 | 156 | 145 | 143 |
| 148 | 139 | 162 | 141 | 160 |

**6*6 के प्रति [1] आधार–वर्ग रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 26 | 32 | 38 | 44 | 50 |
| 56 | 62 | 68 | 74 | 80 | 86 |
| 92 | 98 | 104 | 110 | 116 | 122 |
| 128 | 134 | 140 | 146 | 152 | 158 |
| 164 | 170 | 176 | 182 | 188 | 194 |
| 200 | 206 | 212 | 218 | 224 | 230 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 224 | 218 | 32 | 206 | 50 |
| 86 | 62 | 182 | 176 | 80 | 164 |
| 158 | 116 | 104 | 110 | 134 | 128 |
| 92 | 152 | 140 | 146 | 98 | 122 |
| 194 | 170 | 68 | 74 | 188 | 56 |
| 200 | 26 | 38 | 212 | 44 | 230 |

**[2] आधार–वर्ग रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 59 | 63 | 67 | 71 | 75 |
| 79 | 83 | 87 | 91 | 95 | 99 |
| 103 | 107 | 111 | 115 | 119 | 123 |
| 127 | 131 | 135 | 139 | 143 | 147 |
| 151 | 155 | 159 | 163 | 167 | 171 |
| 175 | 179 | 183 | 187 | 191 | 195 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 191 | 187 | 63 | 179 | 75 |
| 99 | 83 | 163 | 159 | 95 | 151 |
| 147 | 119 | 111 | 115 | 131 | 127 |
| 103 | 143 | 135 | 139 | 107 | 123 |
| 171 | 155 | 87 | 91 | 167 | 79 |
| 175 | 59 | 67 | 183 | 71 | 195 |

**[2] आधार–वर्ग रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 92 | 94 | 96 | 98 | 100 |
| 102 | 104 | 106 | 108 | 110 | 112 |
| 114 | 116 | 118 | 120 | 122 | 124 |
| 126 | 128 | 130 | 132 | 134 | 136 |
| 138 | 140 | 142 | 144 | 146 | 148 |
| 150 | 152 | 154 | 156 | 158 | 160 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 90 | 158 | 156 | 94 | 152 | 100 |
| 112 | 104 | 144 | 142 | 110 | 138 |
| 136 | 122 | 118 | 120 | 128 | 126 |
| 114 | 134 | 130 | 132 | 116 | 124 |
| 148 | 140 | 106 | 108 | 146 | 102 |
| 159 | 92 | 96 | 154 | 98 | 160 |

**10*10 के प्रति**

**[A]** यथार्थ भाजक **10** के यथार्थ भाजक 1 के प्रति $10^2 = 100$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्राप्त समिका $99b = 150 - 2a$ के लिए $b = 1$ तथा $a = 25.5$ होगा।

**[B]** $k = 2$ के प्रति $\frac{10^2}{2} = 50$ पदी समान्तर श्रेढ़ी के लिए प्राप्त समिका $c + 49b = 150 - 2a$ को संतुष्ट करने $= 1, 2, 3, - - - - - 23, 24,$ एवं $25$ के संगत $b$ का उभयनिष्ठ मान $= 1$ तथा $c =$ संगत क्रमशः $99, 97, 95 - - - - - -55, 53$, एवं $51$ द्वारा प्राप्त $25$ प्रथम आधार–वर्ग में से केवल $a = 1, b = 1$ तथा $c = 99$ के लिए प्रथम आधार–वर्ग और संगत जादुई–वर्ग अवलोकित कीजिए।

**सामान्य आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 100 | 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 |
| 110 | 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 |
| 120 | 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 |
| 130 | 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 |
| 140 | 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 |

**टीप**– उक्त यंत्र में सामान्य आधार–वर्ग के सामान्य रंगीन जादुई–वर्ग दर्ज है। जिसके विकल्प सामान्य आधार–वर्ग के प्रति विशिष्ट आधार–वर्ग→ विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग दर्ज किया कर विशिष्ट यंत्र के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है।

**विशिष्ट आधार–वर्ग**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 11 | 21 | 31 | 41 | 2 | 12 | 22 | 32 | 42 |
| 3 | 13 | 23 | 33 | 43 | 4 | 14 | 24 | 34 | 44 |
| 5 | 15 | 25 | 35 | 45 | 6 | 16 | 26 | 36 | 46 |
| 7 | 17 | 27 | 37 | 47 | 8 | 18 | 28 | 38 | 48 |
| 9 | 19 | 29 | 39 | 49 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 100 | 110 | 120 | 130 | 140 | 101 | 111 | 121 | 131 | 141 |
| 102 | 112 | 122 | 132 | 142 | 103 | 113 | 123 | 133 | 143 |
| 104 | 114 | 124 | 134 | 144 | 105 | 115 | 125 | 135 | 145 |
| 106 | 116 | 126 | 136 | 146 | 107 | 117 | 127 | 137 | 147 |
| 108 | 118 | 128 | 138 | 148 | 109 | 119 | 129 | 139 | 149 |

**विशिष्ट रंगीन जादुई–वर्ग**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 44 | 13 | 127 | 33 | 107 | 146 | 14 | 126 | 34 | 106 |
| 104 | 36 | 25 | 115 | 105 | 45 | 134 | 26 | 114 | 46 |
| 48 | 112 | 28 | 37 | 142 | 103 | 18 | 122 | 38 | 102 |
| 141 | 40 | 121 | 20 | 49 | 10 | 39 | 120 | 110 | 100 |
| 9 | 131 | 29 | 111 | 140 | 101 | 130 | 30 | 19 | 50 |
| 143 | 133 | 123 | 132 | 47 | 8 | 113 | 27 | 17 | 7 |
| 5 | 135 | 124 | 35 | 6 | 144 | 16 | 125 | 15 | 145 |
| 147 | 116 | 23 | 117 | 43 | 4 | 136 | 24 | 137 | 3 |
| 108 | 11 | 129 | 31 | 2 | 148 | 12 | 128 | 32 | 149 |

ऊँ श्री हरि ,अल्लाह, बिट्ठल–बिट्ठल, साहेब ,कृष्ण, साई, राम ।
श्री बूढ़ादेवाय, प्रभु यीशु ,बुद्धम्, महावीराय,झूलेलाल, वाहे गुरू, सतनाम ।।

## •श्री बूढ़ादेव जयसेवा यंत्र•




जयपरमापेन• जय सगापेन• सल्लेर गांगेर लिंगो मोद वेरची• जयसेवा जय सेवा•

एक ही धर्म, मानव धर्म, एक ही जाति, मानव जाति ।
एक ही सेवा मानव सेवा, जय सेवा, जय सेवा, जय सेवा ।।

## योगमान S=750 के प्रतिसमिकावार कुेल प्रकारों की संकलन ातालिका

[1] 3*3 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति P*8 | रंगीन जादुई–वर्ग रवनाके प्रति P*8 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 62 | 496 | 496 |
| 2 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 23,126 | 1,85,008 | 1,85,008 |
| योग | | 23,188 | 1,85,504 | 1,85,504 |

[2A] 4*4 का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | ा प्रथम आधार–वर्ग की र्संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | विशिष्टअरंगित जादुई–वर्ग के प्रति | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 13 | 3588 | 1092 | 156 |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2} - 1) * d$ | 4,779 | 13,19,004 | 4,01,436 | 57,348 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 2730 | 7,53,480 | 2,29,320 | 32,760 |
| योग | | 7 522 | 20,76,072 | 6,31,848 | 90,264 |

[2B] 4*4 का सामान्य ( रंग घारध्ण करने के गुण से मुक्त) विशिष्ट जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या चp | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या P*184 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | S = (a+b+c+e+6d) | 3,218 | 5,92,112 |
| 2 -1 | S=(2a+b+c +10d) | 2789 | 5,13,176 |
| 2-2 | S=(a+2b+c +10d) | 2912 | 5,35,808 |
| 2-3 | S=(a+b+2c +10d) | 3593 | 6,61,112 |
| 3-1 | S=(3a+b +18d) | 2590 | 4,76,560 |
| 3-2 | S=(a+3b +18d) | 1240 | 2,28,160 |
| योगमान | | 16,342 | 30,06,928 |

[3]

**5*5** का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आएार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग रचना के प्रति P*`184 | रंगीन जादुई–वर्ग रवनाके प्रति P*56 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 12 | 2,208 | 672 |
| 2 | $2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k)$ | 972 | 1,78,848 | 56,376 |
| योग | | 984 | 1,81,056 | 57,058 |

**[4]** **6*6** का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आधार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | 3 | 2,256 | 48 |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2} - 1) * d$ | 847 | 4,77,708 | 3388 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 362 | 2,72,224 | 5,792 |
| 4 | $2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m - 1)\ N * k$ | 658 | 3,71,112 | 7,896 |
| योगमान | | 1870 | 11,23,300 | 17,124 |

**[5]** **10*10** का जादुई–वर्ग रचना के प्रति

| क्रमांक | समिका | प्रथम आधार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग से विस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | |
|---|---|---|---|---|
| | | | रंगीन जादुई–वर्ग | |
| | | | सामान्य में जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट में जादुई–वर्ग के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 1 | $2S = 2N*a + N*(N^2 - 1) * d$ | --------- | ------- | ------ |
| 2 | $2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2} - 1) * d$ | 75 | 34,55,100 | 300 |
| 3 | $2S = 2N*a + N*(N - 1) * (d + k)$ | 33 | 20,26,992 | 528 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1)\ N * k$ | 25 | 11,51,700 | 300 |
| योगमान | | 133 | 66,33,792 | 1128 |

## महायोग तालिका

| क्रमांक | N*N का जादुई–वर्ग रचना के प्रति | प्रथम आधार–वर्ग की संख्या p | प्रथम आधार–नर्ग सेविस्तारित आधार–नर्ग की संख्या | | | | महायोग |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | सामान्य (अंरगित) | | रंगीन जादुई–वर्ग | | |
| | | | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | सामान्य जादुई–वर्ग के प्रति | विशिष्ट जादुई–वर्ग के प्रति | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 3*3 | 23,188 | 1,85,504 | --------- | 1,85,504 | | 3,71,008 |
| 2 | 4*4 A | 7, 522 | | 20,76,072 | 6,31,848 | 90,264 | 27,98,184 |
| 3 | 4*4 B | 16,342 | | 30,06,928 | | | 30,06928 |
| 4 | 5*5 | 984 | 1,81,056 | | 57,058 | | 2,38,114 |
| 5 | 6*6 | 1,870 | | | 11,23,300 | 17,124 | 11,40,42 4 |
| 6 | 10*10 | 133 | | | 66,33,792 | 1,128 | 66,34,920 |
| योग | | | 3, 66,560 | 50,83,000 | 86,31,502 | 1,08,516 | 1,41,89,578 |

## एक करोड़, इक्चालीस लाख, नवासीं हजार, पाँच सौ अठहत्तर

----------0000----------

**ध्यानाकर्षण** – उपरोक्त संख्या ;(505,786एवं 750) के प्रति यंत्र निर्माण के संदर्भ में अलग–अलग दिग्दर्शिका तैयार है।

**विवेचना** – प्रत्येक मानव–शरीर में स्थित तीन नाड़ी, नव द्वार , दस इन्द्रिय 72 कोठी की मानक कार्यषीलता एवं गति मान सँरचना पर टिका ह। जिस पर ज्योतिष विज्ञान के अनुसार देश, काल ,परिस्थिति के साथ नवग्रह, बारह राशि, सत्ताइस नक्षत्र,काल्पनिक एक सौ अस्सी अक्षांश, और तीन सौ साठ देशान्तर रेखाओं के खगोलीय गति का भी प्रभाव पड़ता है जिसके फलस्वरूप प्रत्येक मानव का अपना एक विषिश्ट रूप गुण एवं दोष होता है। इन प्रभावी कारकों के प्रभावो का प्रकार इनके क्रम गुणित से प्राप्त संख्याओं के गुणनफल के बराबर [!3*!9*!72*!9*!12*!27*!180*!360] होगा, जिसके फलस्वरूप क्षण प्रति क्षण अलग–अलग अनुभूति प्राप्त करता है। इन्हीं अनुभूतियों को मानव अनन्त सुख–दुख के रूप वरण करता है। सुख–दुख के इस पारावार में मनुष्य अपने लिये अधिकाधिक केवल सुख ढूढता है, जो दुख से पूर्ण मुक्त हो। ऐसी परिस्थिति में लोग तंत्र, मंत्र एवं यंत्र पर निर्भरता आस्था आत्मसात करते है और इनके विशेषज्ञ माने जाने वाले ओझा, बैगा एवं ज्योतिषाचार्य के शरणागत होने लगते है, ये विशेषज्ञ..... प्रायः अपने ज्ञान साम्यर्थ अनुसार एक ही प्रकार के यंत्र /कवच का अनुप्रयोग करते हैं। आधुनिक स्वार्थ–युग में इस प्रकार का यंत्र निर्माण का अन्तराष्ट्रीय व्यापार बाजार कुछ–एक धार्मिक प्रतिष्ठान इस ओर अपनी प्रसिद्धता सिद्ध करने विज्ञापन का नेटवर्किंग चला भी रहें है।। क्या यह एक ही प्रकार के यंत्र/ कवच अनन्त सुख–दुख के विशाल कारकों के प्रति ही फलीभूत होने समर्थ होगा? प्रति उत्तर में आदि ज्ञान सागर ग्रंथ संग्रह **वेद** के अनुसार तैतीस कोटि (करोड़) देवताओं की स्वीकृति है। जिनके पूजा में अपना अलग यंत्र मंत्र एवं तंत्र अपनाये गये हैं। इस विविधता क्रम की विशालता को पूरा करने में जादुई–वर्ग की प्रस्तुति विशालता की उपयोगिता अंकीय यंत्र स्वीकारने के क्रम में 3*3, 4*4, एवं 5*5 का जादुंई–वर्ग एकाकी प्रस्तुति दृष्टिगत हो रहा है, जो कि उपरोक्तानुसार अनन्त सुख–दुख के विशाल कारकों के प्रति ही फलीभूत होने समर्थ होने संदेहास्पद ही होगा। अध्ययन विस्तार ग्रन्थाकार होने की सम्भावना को नकारना यथेष्ठ नहीं होगा। जो कि मेरे वर्तमान अध्ययन सामर्थ्य में कदापि सम्भव नहीं है। फिर भी जादुई–वर्ग की उपयोगिता प्रसंग के प्रति विविधताओं का अलग–अलग सांकेतिक मार्गदर्शक पुस्तिका तैयार करने का प्रयास क्रम जारी है।

अति सारांश में यदि आप अपने या अपने घर–परिवार के लिये अपने विशिष्ठ वर्ग पर आड़ी–खड़ी–विकर्णिक संख्याओं का अपना विशिष्ट योगमान चाहते है तो निम्न प्रतिबंधों का ध्यान रखना होगा।

## व्यक्ति विशेष के लिए भाग्यशाली सुरक्षा कवच निर्धारित करना –

हमारा पर्यावरण विविध प्रकारों के भौतिक एवं अभौतिक तरंगों के आच्छादन में परिवर्तनशील ह। जो हमारे जीवन चक्र को परिवर्तन की अनुभूति कराता है।

अनकुल तरंगें सुखों की पुष्प वर्षा करती है। जबकि प्रतिकूल तरंगे दुखों का पहाड़ खड़ा करते नहीं थकती है। मानव सभ्यता विकास क्रम में उनकें ज्ञान कौशल का विकास होता आ रहा है। यह विकास क्रम उनके द्वारा लिये संकल्प एवं आदिशक्ति के स्वरूप/स्वरूपा की स्तुति युक्त क्रियाशीलता का परिणाम ही है। अतः भाग्यशाली सुरक्षा कवच निर्धारित करने में आदिशक्ति के स्वरूप/स्वरूपा की स्तुति युक्त क्रियाशीलता को परिपालन में लेवे। तद् उपरांत मेरी कृति छत्तीसगढ़ गणित दर्शन अे अध्याय 12 के अध्ययन क्रम के अनुपालन में अपने विवेकानुसार कीजिए।

स्व विवेकानुसार

[1] केवल और केवल 4*4 का आधार–वर्ग प्राप्त करने–

;{a] 2S 4 द्वारा विभाजित होने पर प्रतिबंध A और B में A अथवा B सुनिश्चित करे।

;{b] 2S 4 द्वारा अविभाजित होने पर प्रतिअंध B सुनिश्चित करे।

[2] 4*4 के अतिरिक्त किसी N*N आधार–वर्ग प्राप्त करने–
2S N द्वारा विभाजित होने पर प्रतिअंध A सुनिश्चित करे।

[3] प्रतिअंध A और B में A अथवा B की सुनिश्चिता उपरांत–

प्रतिअंध A के प्रति प्रयुक्त समिका–

[A1] N के यथार्थ भाजक 1 (एक ) के प्रति–

तब $N*S = N^2 * a + \frac{N^2=1}{2} * N^2 * d \quad \Rightarrow 2S = 2N*a + N*(N^2-1)*d$

$\Rightarrow 2a = \frac{2S}{N} - (N^2-1)*d$ में S और N के ज्ञात मान प्रतिस्मापित कर समिका $2a = \frac{2s}{N} - (N^2-1)*d$ को सरल करें। फिर d के प्राकृत सं,ख्या मानों के प्रति a का मान प्रापप्त कीजिये।

[A2] N सम संख्या होने पर यथार्थ भाजक 2 (दो) के प्रति–

$N*S = (a+b)\frac{N^2}{2} + 2*(\frac{\frac{N^2}{2}-1}{2} * \frac{N^2}{2}) * d \quad \Rightarrow 2S = N*(a+b) + N*(\frac{N^2}{2}-1)*d$

$\Rightarrow (a+b) = \frac{2S}{N} - [(\frac{N^2}{2}-1)*d]$ होगा

$b = [(\frac{2S}{N} - a) - [(\frac{N^2}{2}-1)*d]$

[A3[ N के यथार्थ भाजक N के प्रति–

$N*S = a*N^2 + N*(\frac{N-1}{2} * N)*(d+k) \quad 2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k)$ ;

$2S = 2N*a + N*(N-1)*(d+k) \Rightarrow \frac{2S}{N} = 2a + (N-1)(d+k)$

$\Rightarrow (N-1)\,k = \frac{2S}{N} - 2a - (N-1)d$

$\Rightarrow (N-1)\,k + 2a = \frac{2S}{N} - (N-1)d$ के हल के लिये d के न्यूनतम् प्राकृत सख्या मान की सुनिश्चिता के प्रति S ,N और m का मान प्रत्स्थापित कर मानक सरल रैखिक समीकरण uk $+2a = w \quad ----(1)$ प्राप्त करें।

समीकरण (1) के प्रति a का न्यूनतम् मान $a_1$ सुनिश्चित करें। न्यूनतम् मान $a_1$ के संगत $k = k_1$ – तदृउपरांत $a_x = a_1 + (x-1) * u$ के संगत $k_x = [w - 2a_x] \div u$ प्राप्त करें

[A4] N यथार्थ भाजक 1, 2 एवं N के अतिरिक्त किसी और अन्य यथार्थ भाजक m के प्रति

$N*S = a*N^2 + m*(\frac{\frac{N^2}{m}-1}{2} * \frac{N^2}{m}) * d + (\frac{m-1}{2} * m) * \frac{N^2}{m} * k$

$\Rightarrow 2NS = 2aN^2 + N^2(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1) * N^2 * k$

$\Rightarrow 2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1)\ N * k$

$\Rightarrow 2S = 2aN + N(\frac{N^2}{m} - 1)d + (m-1)\ N * k$

$\Rightarrow 2a + (m-1) * k = [\frac{2S}{N} - (\frac{N^2}{m} - 1)d]$ के हल के` लिये d के न्यूनतम् प्राकृत सख्या मान की सुनिश्चिता के प्रति S ,N और m का मान प्रत्स्थापित कर मानक सरल रैखिक समीकरण uk $+2a = w$ $----(1)$ प्राप्त करें।

समीकरण (1) के प्रति–

a का न्यूनतम् मान $a_1$ सुनिश्चित करें। न्यूनतम् मान $a_1$ के संगत $k = k_1$

तदृउपरांत $a_x = a_1 + (x-1) * u$ के संगत $k_x = [w - 2a_x] \div u$ प्राप्त करें

प्रतिअंध B के प्रति प्रयुक्त समिका–

[$B1$] प्रतिबंध और नियम समिका S = (a+b+c+e+6d)

[$B2$] प्रतिबंध एवं नियम समिका– 1

S=(2a+b+c +10d) के प्रति आकलन

प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

S=(a+2b+c +10d) के प्रति आकलन'

प्रतिबंध एवं नियम समिका– 3

S=(a+b+2c +10d) के प्रति आकलन

[$B3$] प्रतिबंध एवं नियम समिका– 1

S=(3a+b +18d) के प्रति आकलन'

प्रतिबंध एवं नियम समिका – 2

S=(a+3b +18d) के प्रति आकलन है।

में से कोई एक समिका सुनिश्चित करें।

[4] समिका सुनिश्चिता उपरांत – समिका के प्रति सर्वान्तर d सुनिश्चित करें।

[5] समिका के प्रति सर्वान्तर d सुनिश्चिता पर प्रथम आधार–वर्ग का क्रमांक सुनिश्चित करे।

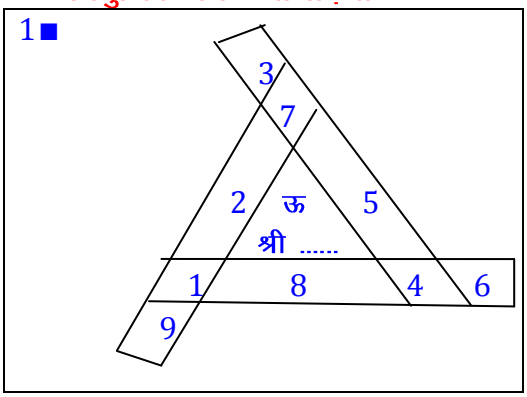
[6a] सुनिश्चिता पर प्रथम आधार–वर्ग का क्रमांक सुनिश्चिता पर प्राप्त प्रथम आधार–वर्ग के अवयवों का स्थान परिवतन क्रमांक पंक्तिक, स्तम्भिक उलट स्तम्भिक ,पंक्तिक उलट नियम क्रमांक पर आवश्यक आधार–वर्ग प्राप्त कीजिये।

[6b] N*N के प्रति N के सम मानों के प्रति आधार–वर्ग →विशिष्ठ आधार–वर्ग →विशिष्ठ रंगीन जादुई–वर्ग प्राप्त करने विशिष्ट नियम के बिन्दु [5] से प्राप्त आधार–वर्ग के अवयवों का स्थानान्तरण नियम मेरी कृति छत्तीसगढ़ गणित दर्शन अे अध्याय 11 में प्रतिपादित है। गोपनीयता बनाये रखने न्यनतम साधित संकेतन का लनुप्रयोग करें।

---------13-------

# अध्याय 14 A
## r बहुभुजिक बंध–चौघड़ियॉ

### 14-1 त्रिभुजिक बंध– चौघड़ियॉ–




अध्याय 12 "**जादुई–वर्ग की उपयोगिता** के प्रस्तावना के शब्दों में ही अंक ज्योतिष विज्ञान की शाखा **यंत्र एवं कवच** ' अध्ययन में **त्रिभुजिक बंध–चौघड़ियॉ** के प्रतिरूपण में अपने इष्ट देवी देवता के नाम मंत्र स्तवन /आकृति छाया चित्र को भोजपत्र में मानक पात् रस का मस् (स्याही) से लिखकर अथवा मानक धातु (लोहा,ताँबा,पीतल, चाँदी, सोना, प्लेटिनियम् .....) पट्टिका में खुदवाकर कर **यंत्र एवं कवच** पूजा या धारण करने का विधान है। जिसमें आकृति अनुसार तीन फलक होते है। प्रत्येक फलक में चार खाने(डब्बे) कोणिक,अन्तः.भुजिक,कोणिक और बाह्य.भुजिक की रचना बनती है। इन प्रत्येक फलक में निहित संख्यांक मानों का योगमान आपस में बराबर होते है।" त्रिभुजिक बंध– चौघड़ियॉ से परिभाषित है।

जैसा कि–1 से 9 तक की क्रमागत 9 संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित उक्त प्रस्तुत यंत्र एवं कवच में चौघड़ियाँ योगमान S= [1+8+4+6]=[4+5+7+3]=[7+2+1+9]= 19 **है।**

### 142 व्यापक अध्ययन में r बहुभुजिक बंध– चौघड़ियॉ की रचना––

**1■** n=3r पदी समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद =a और पदान्तर या सर्वान्तर=b से प्राप्त श्रेढ़ी $[a_1, a_2, a_3$---- $(a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r}]$ के अवयवों से r बहुभुजिक बंध– चौघड़ियॉ की रचना के प्रति चौघड़ियाँ योगमान S के तीन अभिगृहीत प्रतिबंध समिका प्राप्त होते हैं।

प्रतिबंधं A $S=2*[a_{3r}+a_1]-b=2*$ [**अंतिम पद**+प्रथम पद]$-b=4a+6rb-3b=4a+3b(2r-1)$

प्रतिबंधं B $S=2*[a_{3r}+a_1] = 2*$ [**अंतिम पद**+प्रथम पद] $=4a+6rb-2b=4a+2b(3r-1)$

प्रतिबंधं C $S=2*[a_{3r}+a_1]+b=2*$ [**अंतिम पद**+प्रथम पद]$+b=4a+6rb-b=4a+b(6r-1)$

उक्त अभिगृहीत प्रतिबंधों की अलग–अलग प्रस्तुती देने के प्रति प्राप्त श्रेढ़ी $[a_1, a_2, a_3$ ------- $a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r}]$ से सर्वप्रथम ' क्रमशः तीन–तीन अवयवों का r त्रिगुट बनाइये।

**यथा**– $(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), (a_7, a_8, a_9)$,- - - - - - - -,

$---------(a_{3r-8}, a_{3r-7}, a_{3r-6}), (a_{3r-5}, a_{3r-4}, a_{3r-3}), (a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r})$

**प्रतिबंध क्रम में चौघड़ियॉ रचना ––**

[1] प्रतिबंध A

$S=2*[a_{3r}+a_1]-b=2*$ [**अंतिम पद**+प्रथम पद]$-b=4a+3b(2r-1)$ **के तारतम्य में –**

**प्रस्तुती नियम 1■**

**कोणिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

किसी भी कोणिक स्थान को प्रथम कोणिक स्थान $k_1$ चिन्हित कर इसमें त्रिगुटों के प्रथम अवयवों $[a_1, a_4, a_7, ----$ $a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$में से– $a_1$ को दर्ज करें । आगे के शेष अवयव $[a_4, a_7, ----a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ को घड़ी के विपरीत दिशा की ओर से क्रमशः कोणिक स्थान क्रम$[k_2, k_3, k_4 ----k_{r-2}, k_{r-1}, k_r]$ में दर्ज कीजिये।

**अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

1• त्रिगुटों के द्वितीय अवयवों $[a_2, a_5, a_8, ----a_{3r-7},, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$में से–

$a_2$को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_5, a_8, ----a_{3r-7},, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः–भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

2• त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_3, a_6, a_9, ----a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ में से–

$a_3$को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव आगे के शेष अवयव $[a_6, a_9, ----a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः–भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

**बाह्य– भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

**1• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण1• के प्रति**

त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_3, a_6, a_9, - - - - a_{3r-6}, , a_{3r-3}, a_{3r}]$में से–

$a_3$को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_6, a_9, - - - - a_{3r-6}, , a_{3r-3}, a_{3r}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'–भुजिक तकें दर्ज कीजिये।

**2• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण2• के प्रति**

त्रिगुटों के द्वितीय अवयवों $[a_2, a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, , a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ में से–

$a_2$ को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, , a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'–भुजिक तकें दर्ज कीजिये।

**और नवीन प्रस्तुती**

और नवीन प्रस्तुती देने के क्रम में $a_1$ का क्रमिक कोणिक स्थान परिवर्तन घड़ी के विपरीत दिशा की ओर कोणिक स्थान क्रम$[k_2, k_3, k_4 - - - -k_{r-2}, k_{r-1}, k_r]$ कीजिये।

**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

**प्रस्तुती नियम 2■**

त्रिगुटों के अवयव क्रम यथावत रखते त्रिगुटों उल्टे क्रम में दर्ज करे।

**यथा**–$(a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r})$, $(a_{3r-5}, a_{3r-4}, a_{3r-3})$, $(a_{3r111111111000000-8}, a_{3r-7}, a_{3r-6})$, - - - - - - -, $- - - - - - - - (a_7, a_8, a_9)$, $(a_4, a_5, a_6)$, $(a_1, a_2, a_3)$,

उपरोक्त त्रिगुटों का प्रथम अवयव – $[a_{3r-2}, a_{3r-5}, a_{3r-8}, - - - - -a_7, a_4, a_1]$

द्वितीय अवयव – $[a_{3r-1}, a_{3r-4}, a_{3r-7}, - - - - -a_8, a_5, a_2]$

तृतीय अवयव– $[a_{3r}, a_{3r-3}, a_{3r-6}, - - - - -a_9, a_6, a_3]$

का अनुप्रयोग प्रस्तुती 1■ के शब्दों में कीजिये। जहाँ $(a_1$ के प्रति $a_{3r-2})$, $(a_2$ के प्रति $a_{3r-1})$, $(a_3$ के प्रति $a_{3r})$, .- - - - - - - - - - - - --, --, $(a_{3r-2}$ के प्रति $a_1)$, $(a_{3r-1}$ के प्रति $a_2)$, $(a_{3r}$ के प्रति $a_3)$, .होगा।

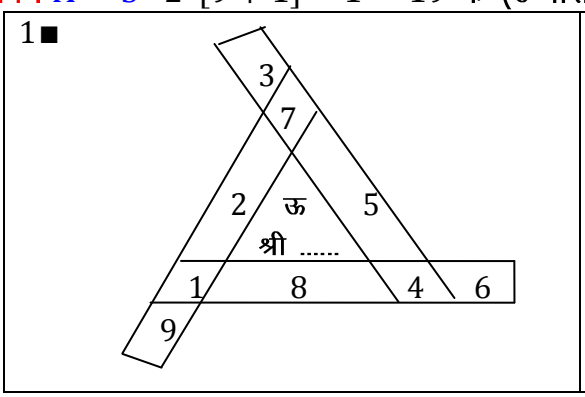
तद्उपरांत प्रस्तुती क्रम देने प्रथमोत्तर कोणिक अवयव $a_1$का विकल्प क्रमश :त्रिगुटों के प्रथम अवयव $[a_{3r-2}, a_{3r-5}, a_{3r-8} - - - -a_7, a_4, a_1]$ में से $a_{3r-2}$ को प्रतिस्थापित कीजिये। नियमानुसार संगत उल्लेखित नियमों का परिपालन कर कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित कीजिये।

**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

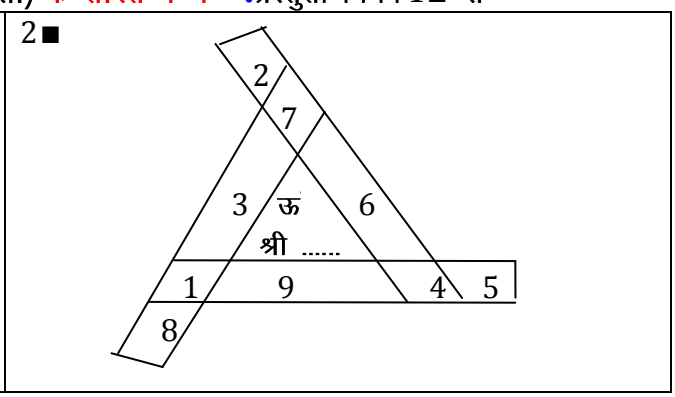
**प्रतिरूपणों की कुल संख्या** $2r+2r=4r$ होगा।

**1 से 9 तक की क्रमागत 9 संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित त्रिकोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक तिबंध A** $S=2*[9+1]-1=19$ **के (उन्नीसा) क तारतम्य में –τप्रस्तुती नियम 1■ से**

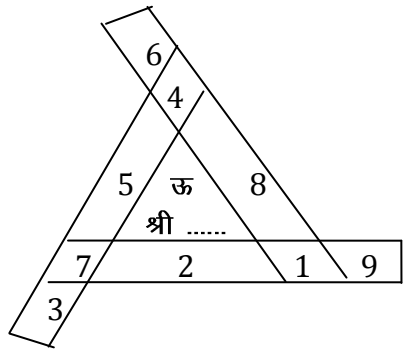
1■



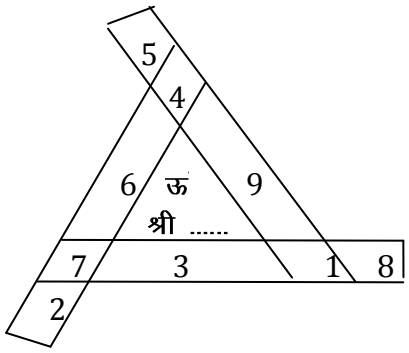

2■



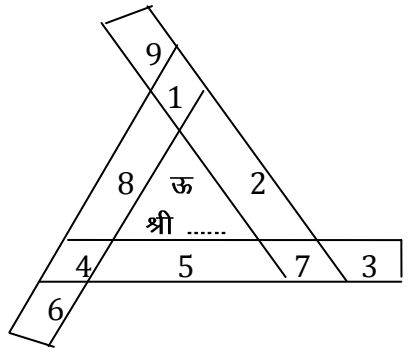
3■



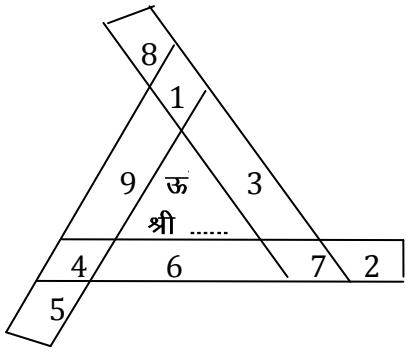

4■




5■

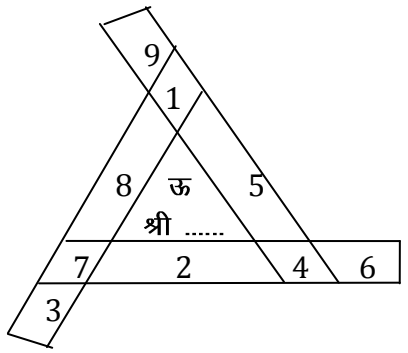



6■

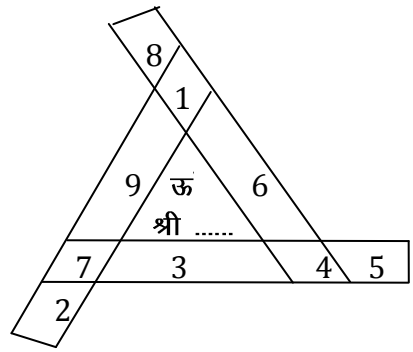



प्रस्तुती नियम 2■ से

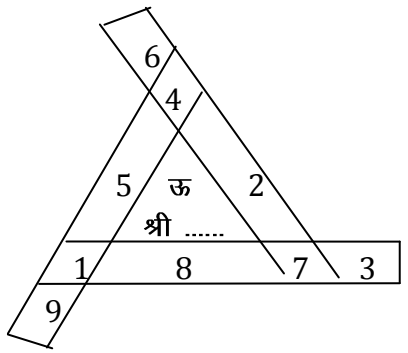
1■



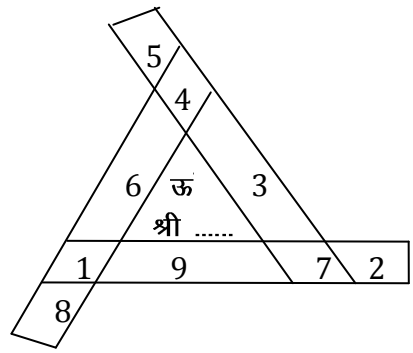

2■

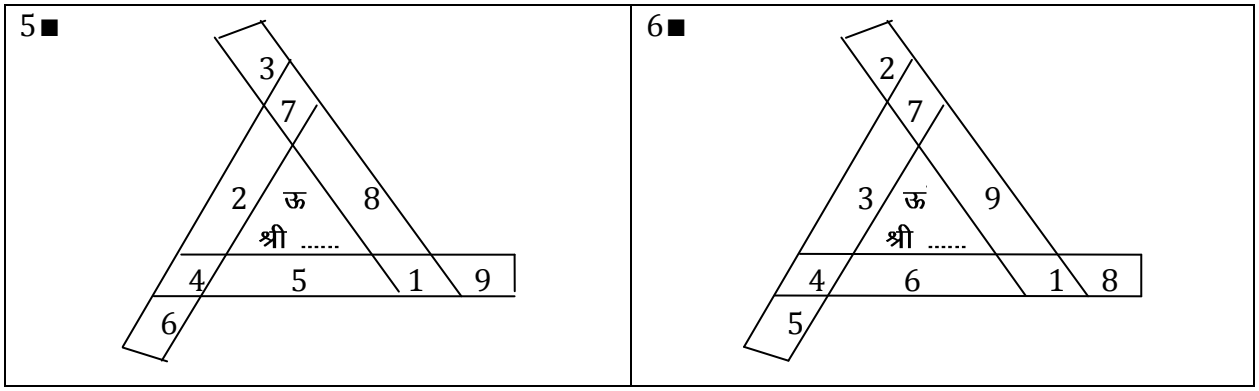



3■




4■






[2] प्रतिबंध B

S=2*[$a_{3r}+a_1$] = 2 * [**अंतिम पद+**प्रथम पद] =4a+6rb− 2b= $4a+2b(3r-1)$**के तारतम्य में** −

**प्रस्तुती नियम 1■**

**कोणिक अवयव के प्रतिरूपण में−**

किसी भी कोणिक स्थान को प्रथम कोणिक स्थान $k_1$ चिन्हित कर इसमें त्रिगुटों के द्वितीय अवयवों $[a_2, a_5, a_8, - - - - a_{3r-7},, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ में से− $a_2$ को दर्ज करें । आगे के शेष अवयव $[a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ को घड़ी के विपरीत दिशा की ओर से क्रमशः कोणिक स्थान क्रम $[k_2, k_3, k_4 - - - - kr-2, k_{r-1}, k_r]$ में दर्ज कीजिये।

**अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में−**

1• त्रिगुटों के प्रथम अवयवों $[a_1, a_4, a_7, - - - - a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ में से−

$a_1$ को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'−भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_4, a_7, - - - - a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः−भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

2• त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_3, a_6, a_9, - - - - a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ में से−

$a_3$ को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'−भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव आगे के शेष अवयव $[a_6, a_9, - - - - a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः−भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

**बाह्य− भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में−**

**1• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण1• के प्रति**

त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_3, a_6, a_9, - - - - a_{3r-6}, a_{3r-3}, a_{3r}]$ में से−

$a_3$ को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'−भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_6, a_9, - - - - a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'−भुजिक तकें दर्ज कीजिये।

**2• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण2• के प्रति**

त्रिगुटों के प्रथम अवयवों $[a_1, a_4, a_7, - - - - a_{3r-8}, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ में से−

$a_1$ को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'−भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_4, a_7, - - - - a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'−भुजिक तक दर्ज कीजिये।

**और नवीन प्रस्तुती**

और नवीन प्रस्तुती देने के क्रम में $a_2$ का क्रमिक कोणिक स्थान परिवर्तन घड़ी के विपरीत दिशा की ओर कोणिक स्थान क्रम $[k_2, k_3, k_4 - - - -k_{r-2}, k_{r-1}, k_r]$ कीजिये।

**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः−भुजिक और बाह्य−भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

**प्रस्तुती नियम 2■**

त्रिगुटों के अवयव क्रम यथावत रखते त्रिगुटों उल्टे क्रम में दर्ज करे।

**यथा**−$(a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r})$, $(a_{3r-5}, a_{3r-4}, a_{3r-3})$, $(a_{3r-8}, a_{3r-7}, a_{3r-6})$, - - - - - - -,

$- - - - - - - - (a_7, a_8, a_9)$, $(a_4, a_5, a_6)$, $(a_1, a_2, a_3)$,

उपरोक्त त्रिगुटों का प्रथम अवयव − $[a_{3r-2}, a_{3r-5}, a_{3r-8}, - - - - a_7, a_4, a_1]$

द्वितीय अवयव – $[a_{3r-1}, a_{3r-4}, a_{3r-7}, - - - - - a_8, a_5, a_2]$

तृतीय अवयव– $[a_{3r}, a_{3r-3}, a_{3r-6}, - - - - - a_9, a_6, a_3]$

का अनुप्रयोग प्रस्तुती 1■ के शब्दों में कीजिये। जहाँ $(a_1$ के प्रति $a_{3r-2})$, $(a_2$ के प्रति $a_{3r-1})$, $(a_3$ के प्रति $a_{3r})$, .- - - - - - - - - - - - --, --, $(a_{3r-2}$ के प्रति $a_1)$, $(a_{3r-1}$ के प्रति $a_2)$, $(a_{3r}$ के प्रति $a_3)$, .होगा।

तद्उपरांत प्रस्तुती क्रम देने प्रथमोत्तर कोणिक अवयव $a_2$ का विकल्प क्रमशःत्रिगुटों के द्वितीय अवयव$[a_{3r-1}, a_{3r-4}, a_{3r-7} - - - - a_8, a_5, a_2]$ में से $a_{3r-1}$को प्रतिस्थापित कीजिये। नियमानुसार संगत उल्लेखित नियमों का परिपालन कर कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित कीजिये।

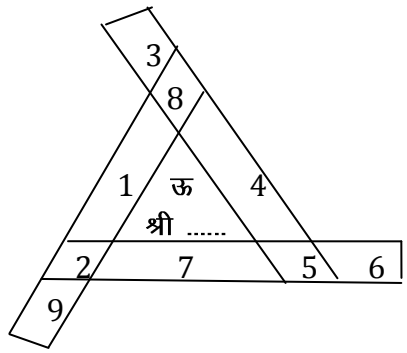
**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

**प्रतिरूपणों की कुल संख्या** $2r+2r=4r$ होगा।

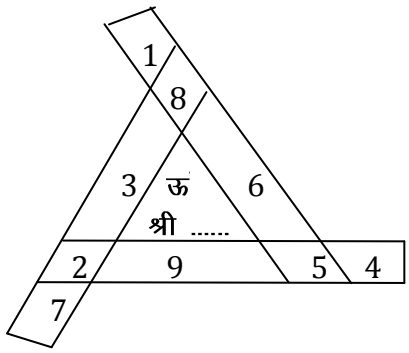
**1 से 9 तक की क्रमागत 9 संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित त्रिकोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक प्रतिबंध B $S=2*[9+1]=20$ के (बीसा) कतारतम्य में –**

**प्रस्तुती नियम 1■ से**

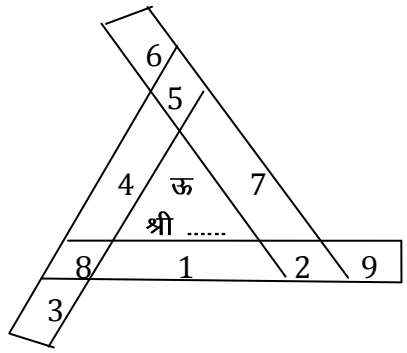
1■



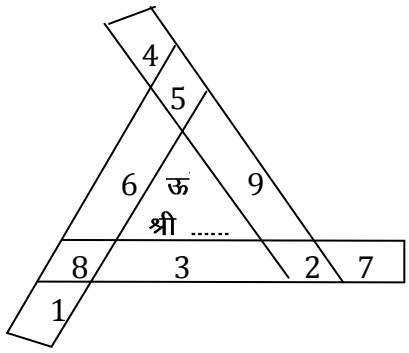

2■



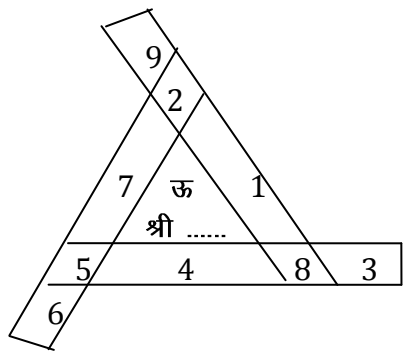

3■



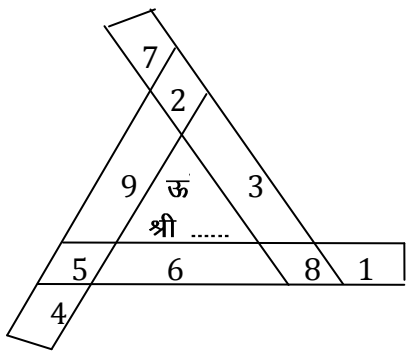

4■



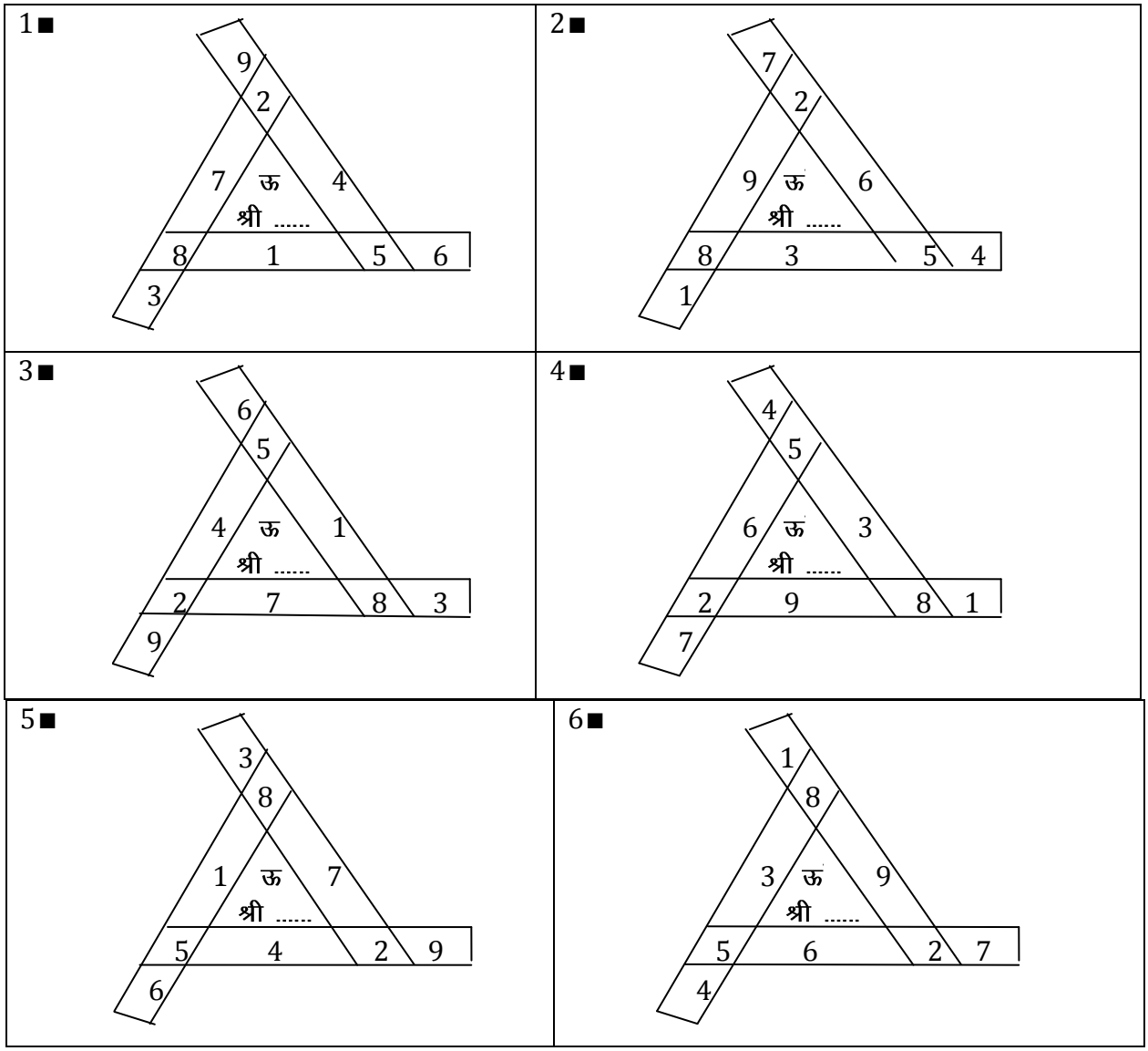

5■




6■



प्रस्तुती नियम 2■ से




[3] प्रतिबंध C

$S=2*[a_{3r}+a_1]+b=2*$ [अंतिम पद+प्रथम पद]+b =4a+6rb $-b=4a+b(6r-1)$ के तारतम्य में –

प्रस्तुती नियम 1■

**कोणिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

किसी भी कोणिक स्थान को प्रथम कोणिक स्थान $k_1$ चिन्हित कर इसमें त्रिगुटों क तृतीय अवयवों $[a_3, a_6, a_9, - - - - a_{3r-6},, a_{3r-3}, a_{3r}]$ में से– $a_3$ को दर्ज करें । आगे के शेष अवयव $[a_6, a_9, - - - - a_{3r-6}, a_{3r-3}, a_{3r}]$ को घड़ी के विपरीत दिशा की ओर से क्रमशः कोणिक स्थान क्रम $[k_2, k_3, k_4 - - - -kr-2, k_{r-1}, k_r]$ में दर्ज कीजिये।

**अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

1• त्रिगुटों के प्रथम अवयवों $[a_1, a_4, a_7, - - - - a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ में से–

$a_1$ को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_4, a_7, - - - - a_{3r-8},, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः–भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

2• त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_2, a_5, a_8, - - - - a_{3r-7},, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ में से–

$a_2$को प्रथम और अन्तिम कोणिक स्थान क्रमशः $k_1$ और $k_r$ के मध्य स्थित अन्त'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, , a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम अन्तः–भुजिक तकं दर्ज कीजिये।

**बाह्य– भुजिक अवयव के प्रतिरूपण में–**

**1• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण1• के प्रति**

त्रिगुटों के तृतीय अवयवों $[a_2, a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$में से–

$a_2$को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_5, a_8, - - - - a_{3r-7}, a_{3r-4}, a_{3r-1}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'–भुजिक तक दर्ज कीजिये।

**2• अन्तः भुजिक अवयव के प्रतिरूपण2• के प्रति**

त्रिगुटों के प्रथम अवयवों $[a_1, a_4, a_7, - - - - a_{3r-8}, a_{3r-5}, a_{3r-2}]$में से–

$a_1$ को अतिम कोणिक $k_r$ से संलग्न स्थित बाह्य'–भुजिक में दर्ज कर आगे के शेष अवयव $[a_4, a_7, - - - - a_{3r-8}, , a_{3r-5}, a_{3r-2}]$ को घड़ी की दिशा की ओर से क्रमशः अन्तिम बाह्य'–भुजिक तक दर्ज कीजिये।

**और नवीन प्रस्तुती**

और नवीन प्रस्तुती देने के क्रम में $a_3$ का क्रमिक कोणिक स्थान परिवर्तन घड़ी के विपरीत दिशा की ओर कोणिक स्थान क्रम$[k_2, k_3, k_4 - - - -k_{r-2}, k_{r-1}, k_r]$ में दर्ज कीजिये।

**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

**प्रस्तुती नियम 2■**

त्रिगुटों के अवयव क्रम यथावत रखते त्रिगुटों उल्टे क्रम में दर्ज करे।

**यथा**–$(a_{3r-2}, a_{3r-1}, a_{3r})$, $(a_{3r-5}, a_{3r-4}, a_{3r-3})$, $(a_{3r-8}, a_{3r-7}, a_{3r-6})$, - - - - - - -,
$- - - - - - - - - (a_7, a_8, a_9)$, $(a_4, a_5, a_6)$, $(a_1, a_2, a_3)$,

उपरोक्त त्रिगुटों का प्रथम अवयव – $[a_{3r-2}, a_{3r-5}, a_{3r-8}, - - - - - a_7, a_4, a_1]$

द्वितीय अवयव – $[a_{3r-1}, a_{3r-4}, a_{3r-7}, - - - - - a_8, a_5, a_2]$

तृतीय अवयव– $[a_{3r}, a_{3r-3}, a_{3r-6}, - - - - - a_9, a_6, a_3]$

का अनुप्रयोग प्रस्तुती 1■ के शब्दों में कीजिये। जहाँ $(a_1$ के प्रति $a_{3r-2})$, $(a_2$ के प्रति $a_{3r-1})$, $(a_3$ के प्रति $a_{3r})$, .- - - - - - - - - - - - --, --, $(a_{3r-2}$ के प्रति $a_1)$, $(a_{3r-1}$ के प्रति $a_2)$, $(a_{3r}$ के प्रति $a_3)$, .होगा।

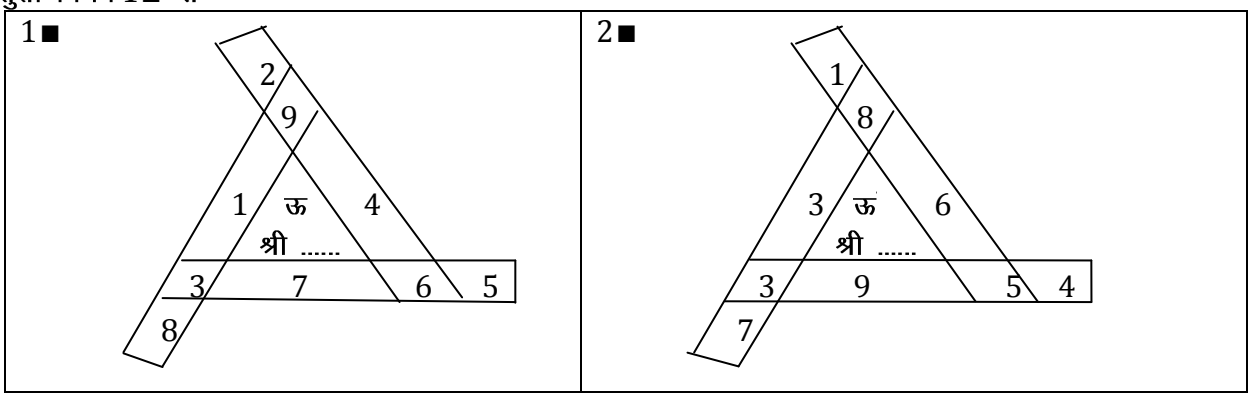
तद्उपरांत प्रस्तुती क्रम देने प्रथमोत्तर कोणिक अवयव $a_3$का विकल्प क्रमशःत्रिगुटों के तृतीय अवयव$[a_{3r}, a_{3r-3}, a_{3r-6} - - - -a_9, a_6, a_3]$ में से $a_{3r}$को प्रतिस्थापित कीजिये। नियमानुसार संगत उल्लेखित नियमों का परिपालन कर कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित कीजिये।

**प्रतिरूपणों की संख्या** उपरोक्तानुसार कोणिक,अन्तः–भुजिक और बाह्य–भुजिक अवयव सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त प्रतिरूपण के प्रकारों की संख्या $2r$ होगा।

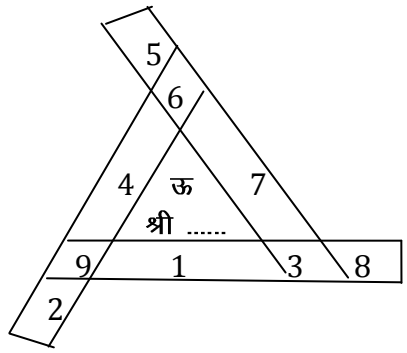
**प्रतिरूपणों की कुल संख्या** $2r+2r=4r$ होगा।

**1 से 9 तक की क्रमागत 9 संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित त्रिकोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक प्रतिबंध C $S=2*9+3=21$ (इक्कीसा) क तारतम्य में –**

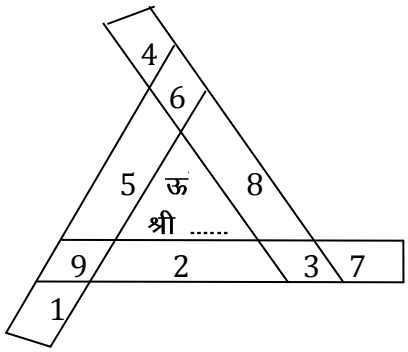
**प्रस्तुती नियम 1■ से**



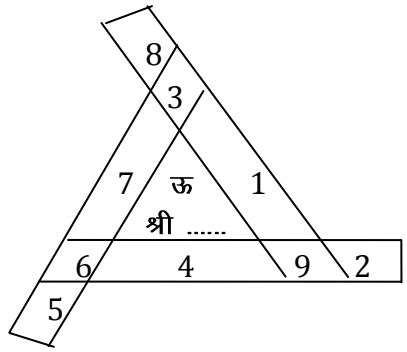
3■



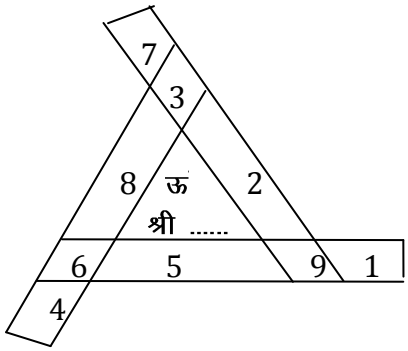

4■




5■

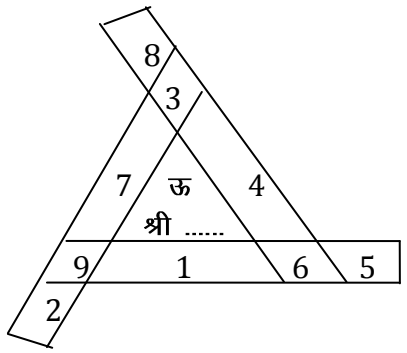



6■

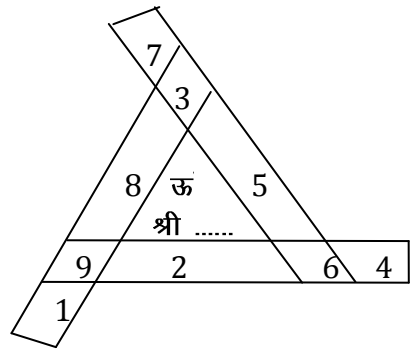



प्रस्तुती नियम 2■ से

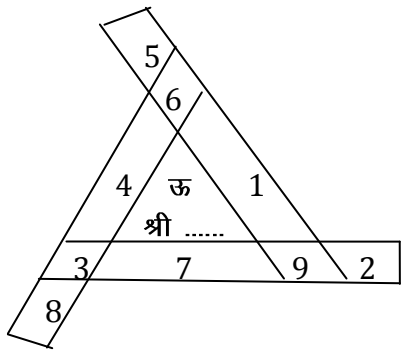
1■



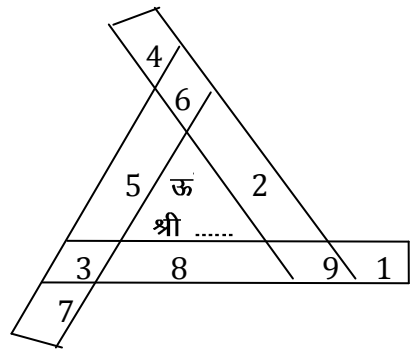

2■

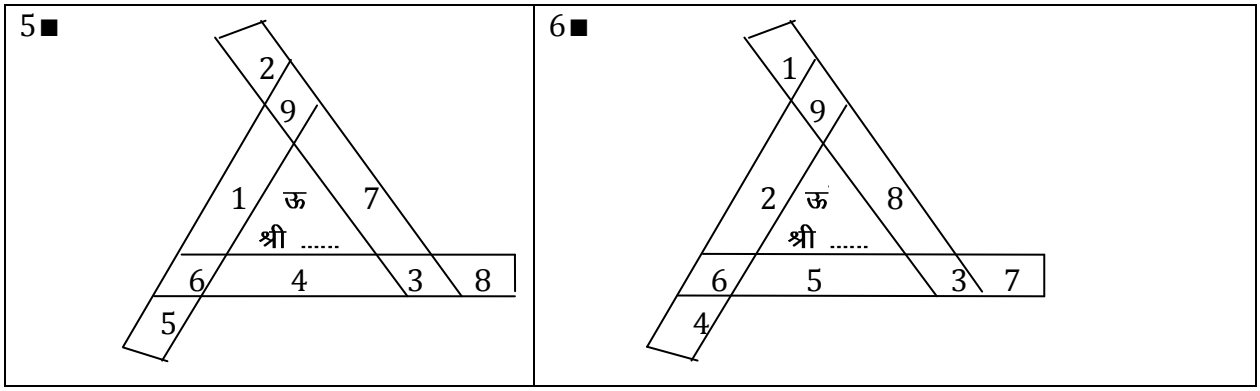



3■




4■






तब–**उदाहरण** [1] परवर दिगार अल्लाह की स्तुति • **बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम** • **( अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है।)** संख्या [786] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+15b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=189$ और् सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [189, 191, 193,195, 197, 199, 201, 203,205] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[205+189]-2=786$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=9$ और सर्वान्तर $b=50$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [9, 59, 109,159, 209, , 259, 309,359 ,309 ] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[309+9]-50=786$ सा

2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+16b=786$ के प्रति

प्रथम पद aऔर् सर्वान्तर b का हल मान प्राकृत संख्या नहीं होगा।

3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+17b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=188$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [188,190,192,194,196,198,200,202,204] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[204+188]+2=786$ सा

2 . न्यूनतम् प्रथम पद $a=1$ और सर्वान्तर $b=46$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [1, 47,93,139,185,231, 277,323,369 ] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[369+1]+46=786$ सा

**उदाहरण** [2] **श्री बूढ़ादेव जयसेचा संख्या** [750] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+15b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पदमान $a=180$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [180,182,184,186, 188,190,192,194,196] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[196+180]-2=750$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद मान $a=15$ के प्रति सर्वान्तर $b=46$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [15,61,107,153,199,245,291,337,383] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[383+15]-46=750$ सा

.2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+16b=750$ के प्रति

प्रथम पद aऔर् सर्वान्तर b का हल मान प्राकृत संख्या नहीं होगा।

3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+17b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=179$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [179,181,183,185,187,189,191,193,195] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[195+179]+2=750$

2. न्यूनतम् प्रथम पद a= 9 और सर्वान्तर b= 42 की प्रयुक्ता पर
9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [9,51,93,135,177,219,261,303,345] होगा।
**जाँच** 2 * [अंतिम पद+प्रथम पद]+b =2*[345+9]+42=750

## 14-3 1 से 12 तक की क्रमागत12संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित चतुष्कोणिक ,अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ

**प्रतिबंध A** S=2*[12 + 1] − 1 = 25 (पच्चीसा) के तारतम्य में –

**प्रस्तुती नियम 1■ से**

−1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 6 |
| 3 | 10 | 5 | 7 |
| | 2 | ॐ श्री..... | 8 |
| | 1 | 11 | 4 | 9 |
| | 12 | | |

2■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| 2 | 10 | 6 | 7 |
| | 3 | ॐ श्री..... | 9 |
| | 1 | 12 | 4 | 8 |
| | 11 | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 9 |
| 6 | 7 | 8 | 4 |
| | 5 | ॐ श्री..... | 11 |
| | 10 | 2 | 1 | 12 |
| | 3 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 8 |
| 5 | 7 | 9 | 4 |
| | 6 | ॐ श्री..... | 12 |
| | 10 | 3 | 1 | 11 |
| | 2 | | |

5■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 12 |
| 9 | 4 | 11 | 1 |
| | 8 | ॐ श्री..... | 2 |
| | 7 | 5 | 10 | 3 |
| | 6 | | |

6■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 11 |
| 8 | 4 | 12 | 1 |
| | 9 | ॐ श्री..... | 3 |
| | 7 | 6 | 10 | 2 |
| | 5 | | |

7■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 3 |
| 12 | 1 | 2 | 10 |
| | 11 | ॐ श्री..... | 5 |
| | 4 | 8 | 7 | 6 |
| | 9 | | |

8■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| 11 | 1 | 3 | 10 |
| | 12 | ॐ श्री..... | 6 |
| | 4 | 9 | 7 | 5 |
| | 8 | | |

**प्रस्तुती नियम 2■ से**

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 9 |
| 12 | 1 | 8 | 4 |
| | 11 | ॐ श्री..... | 5 |
| | 10 | 2 | 7 | 6 |
| | 3 | | |

2■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 8 |
| 11 | 1 | 9 | 4 |
| | 12 | ॐ श्री..... | 6 |
| | 10 | 3 | 7 | 5 |
| | 2 | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 6 |
| 9 | 4 | 5 | 7 |
| | 8 | ॐ श्री..... | 2 |
| | 1 | 11 | 10 | 3 |
| | 12 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| 8 | 4 | 6 | 7 |
| | 9 | ॐ श्री..... | 3 |
| | 1 | 12 | 10 | 2 |
| | 11 | | |

5■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 3 |
| 6 | 7 | 2 | 10 |
| | 5 | ॐ श्री.... | 11 |
| | 4 | 8 | 1 | 12 |
| | 9 | | |

6■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| 5 | 7 | 3 | 10 |
| | 6 | ॐ श्री..... | 12 |
| | 4 | 9 | 1 | 11 |
| | 8 | | |

7■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 12 |
| 3 | 10 | 11 | 1 |
| | 2 | ॐ श्री..... | 8 |
| | 7 | 5 | 4 | 9 |
| | 6 | | |

8■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 11 |
| 2 | 10 | 12 | 1 |
| | 3 | ॐ श्री..... | 9 |
| | 7 | 6 | 4 | 8 |
| | 5 | | |

**प्रतिबंध B** S=2*[12 + 1] = 26 (छब्बीसा) के तारतम्य में –

**प्रस्तुती नियम 1■ से**

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 6 |
| 3 | 11 | 4 | 8 |
| | 1 | ॐ श्री..... | 7 |
| | 2 | 10 | 5 | 9 |
| | 12 | | |

2■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 1 | 11 | 6 | 8 |
| | 3 | ॐ श्री..... | 9 |
| | 2 | 12 | 5 | 7 |
| | 10 | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 9 |
| 6 | 8 | 7 | 5 |
| | 4 | ॐ श्री..... | 10 |
| | 11 | 1 | 2 | 12 |
| | 3 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 7 |
| 4 | 8 | 9 | 5 |
| | 6 | ॐ श्री..... | 12 |
| | 11 | 3 | 2 | 10 |
| | 1 | | |

5■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 12 |
| 0 | 5 | 10 | 2 |
| | 7 | ॐ श्री..... | 1 |
| | 8 | 4 | 11 | 3 |
| | 6 | | |

6■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 10 |
| 7 | 5 | 12 | 2 |
| | 9 | ॐ श्री..... | 3 |
| | 8 | 6 | 11 | 1 |
| | 4 | | |

7■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 3 |
| 12 | 2 | 1 | 11 |
| | 10 | ॐ श्री..... | 4 |
| | 5 | 7 | 8 | 6 |
| | 9 | | |

8■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| 10 | 2 | 3 | 11 |
| | 12 | ॐ श्री..... | 6 |
| | 5 | 9 | 8 | 4 |
| | 7 | | |

प्रस्तुती नियम 2■ से

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 9 |
| 12 | 2 | 7 | 5 |
| | 10 | ॐ श्री..... | 4 |
| | 11 | 1 | 8 | 6 |
| | 3 | | |

2■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 7 |
| 10 | 2 | 9 | 5 |
| | 12 | ॐ श्री..... | 6 |
| | 11 | 3 | 8 | 4 |
| | 1 | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 6 |
| 9 | 5 | 4 | 8 |
| | 7 | ॐ श्री..... | 1 |
| | 2 | 10 | 11 | 3 |
| | 12 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 7 | 5 | 6 | 8 |
| | 9 | ॐ श्री..... | 3 |
| | 2 | 12 | 11 | 1 |
| | 10 | | |

5■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 3 |
| 6 | 8 | 1 | 11 |
| | 4 | ॐ श्री.... | 10 |
| | 5 | 7 | 2 | 12 |
| | 9 | | |

6■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| 4 | 8 | 3 | 11 |
| | 6 | ॐ श्री..... | 12 |
| | 5 | 9 | 2 | 10 |
| | 7 | | |

7■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 12 |
| 3 | 11 | 10 | 2 |
| | 1 | ॐ श्री..... | 7 |
| | 8 | 4 | 5 | 9 |
| | 6 | | |

8■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 10 |
| 1 | 11 | 12 | 2 |
| | 3 | ॐ श्री..... | 9 |
| | 8 | 6 | 5 | 7 |
| | 4 | | |

प्रतिबंध C $S=2*[12+1]+1=27$ (सत्ताइसा) के तारतम्य में –

प्रस्तुती नियम 1■ से

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| 2 | 12 | 4 | 9 |
| | 1 | ॐ श्री..... | 7 |
| | 3 | 10 | 6 | 8 |
| | 11 | | |

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 1 | 12 | 5 | 9 |
| | 2 | ॐ श्री..... | 8 |
| | 3 | 11 | 6 | 7 |
| | 1o | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 8 |
| 5 | 9 | 7 | 6 |
| | 4 | ॐ श्री..... | 10 |
| | 12 | 1 | 3 | 11 |
| | 2 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 7 |
| 4 | 9 | 8 | 6 |
| | 5 | ॐ श्री..... | 11 |
| | 12 | 2 | 3 | 10 |
| | 1 | | |

5■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 11 |
| 8 | 6 | 10 | 3 |
| 5 | 7 | ॐ श्री..... | 1 |
| | 9 | 4 | 12 | 2 |
| | 5 | | |

6■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 10 |
| 7 | 6 | 11 | 3 |
| | 8 | ॐ श्री..... | 2 |
| | 9 | 5 | 12 | 1 |
| | 4 | | |

7■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 2 |
| 11 | 3 | 1 | 12 |
| | 10 | ॐ श्री..... | 4 |
| | 6 | 7 | 9 | 5 |
| | 8 | | |

8■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| 10 | 3 | 2 | 12 |
| | 11 | ॐ श्री..... | 5 |
| | 6 | 8 | 9 | 4 |
| | 7 | | |

प्रस्तुती नियम 2■ से

1■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 7 |
| 10 | 3 | 8 | 6 |
| | 11 | ॐ श्री..... | 5 |
| | 12 | 2 | 9 | 4 |
| | 1 | | |

2■

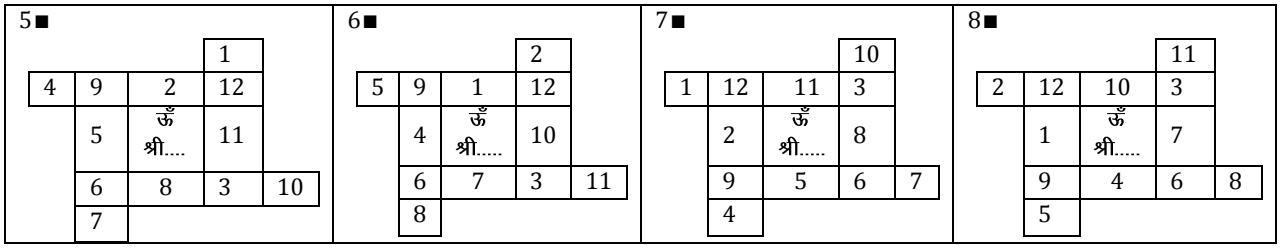
| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 8 |
| 11 | 3 | 7 | 6 |
| | 10 | ॐ श्री..... | 4 |
| | 12 | 1 | 9 | 5 |
| | 2 | | |

3■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| 7 | 6 | 5 | 9 |
| | 8 | ॐ श्री..... | 2 |
| | 3 | 11 | 12 | 1 |
| | 10 | | |

4■

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 5 |
| 8 | 6 | 4 | 9 |
| | 7 | ॐ श्री..... | 1 |
| | 3 | 10 | 12 | 2 |
| | 11 | | |




तब–**उदाहरण** [1] परवर दिगार अल्लाह की स्तुति • **बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम** • **( अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है।)** संख्या [786] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+21b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=186$ और् सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

12पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [186,188,190,192,194,196,198,200,202,204,206,208] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[208+186]-2=786$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=18$ और सर्वान्तर $b=34$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [18,52,86,120,154,188,222,256,290,324,358,392] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[392+18]-34=786$ सा

2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+22b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=191$और् सर्वान्तर $b=1$ की प्रयुक्ता पर

12पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–[191,192,193,194,195,196,197,198,199,200,201,202] होगा।

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=4$ और सर्वान्तर $b=35$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [4,39,64,99,134,169,204,239,274,309,344,,389] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]=2*[389+4]=786$ सा

3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+23b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=185$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [185,187,189,191,193,195,197,199,201,203,205,207] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[207+185]+2=786$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=1$ और सर्वान्तर $b=34$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [1,35,69,103,137,171,205,239,273.307,341,375] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[375+1]+34=786$ सा

**उदाहरण** [2] **श्री बूढ़ादेव जयसेचा संख्या** [750] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+21b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पदमान $a=177$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [177,179,181,183,185,187,189,191,193,195,197,199] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[199+177]-2=750$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद मान $a=9$ के प्रति सर्वान्तर $b=34$ की प्रयुक्ता पर

12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [9,43,77,111,145,179,213,247,281,315,349,383] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[383+9]-34=750$ सा

.2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+22b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पदमान $a=182$ और सर्वान्तर $b=1$ की प्रयुक्ता पर

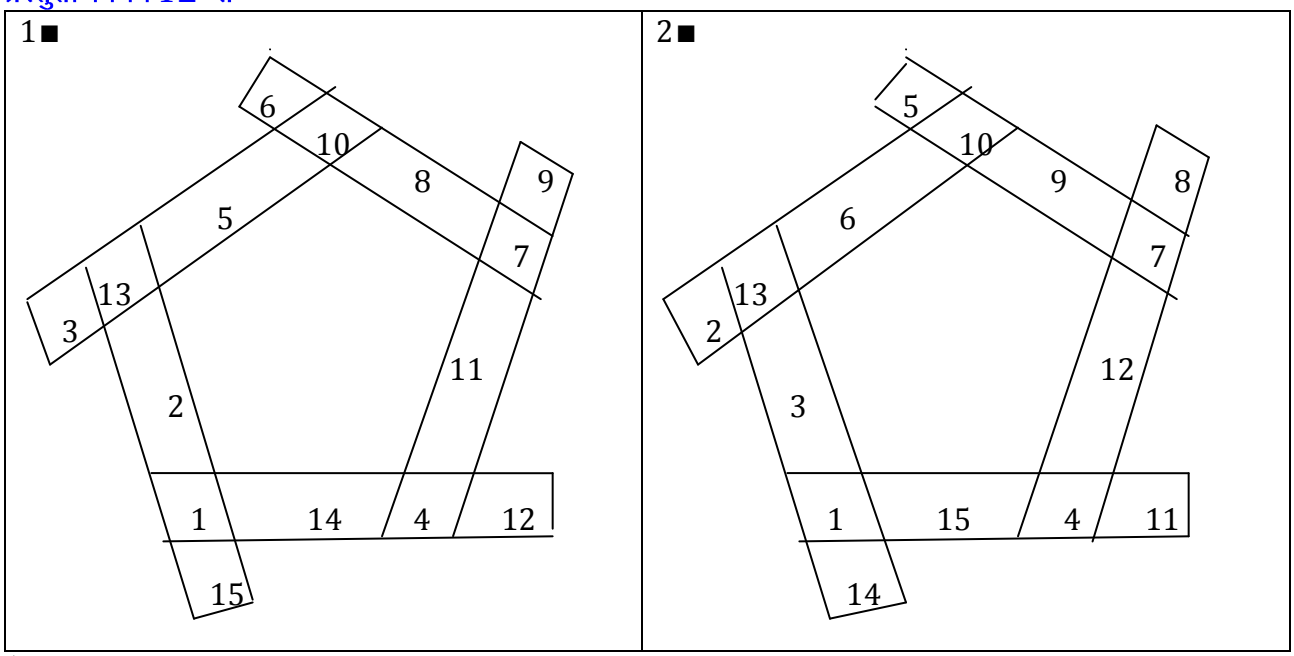
12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [182,183,184,185,186,187,188,189,190,191,192,193] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[193+182]=750$ सा

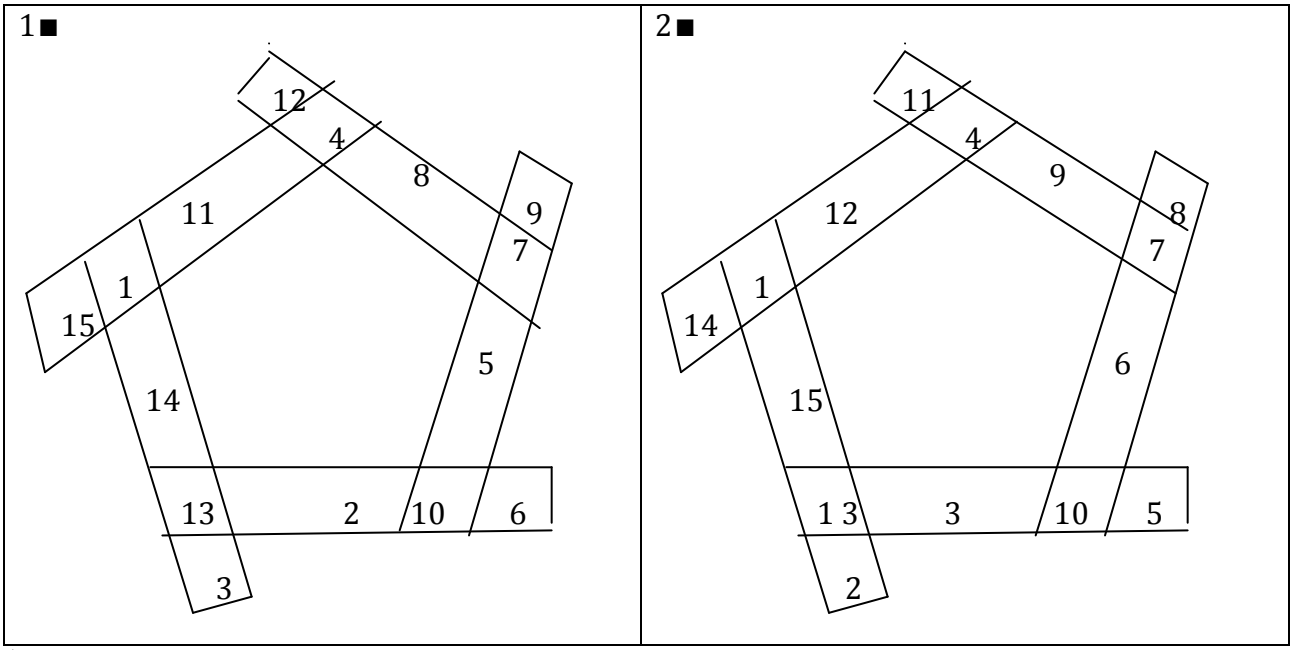
2. न्यूनतम् प्रथम पद मान a=6 और सर्वान्तर b=33 की प्रयुक्ता पर
12 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [6,39,72,105,138,171,204,237,270,303,336,369] होगा।
**जाँच** 2 * [अंतिम पद+प्रथम पद] =2*[369+6 ] =750 सा
3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – 4a+23b =750 के प्रति
1. अधिकतम प्रथम पद a= 176 और सर्वान्तर b= 2 की प्रयुक्ता पर
9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [176,178,180,182,184,186,188,190,192,194,196,198] होगा।
**जाँच** 2 * [अंतिम पद+प्रथम पद]+b =2*[198+176]+2=750
746,742,738,734,730,726,722,718,714,710,706,702,698,694,690,
2. न्यूनतम् प्रथम पद a= 15 और सर्वान्तर b= 30 की प्रयुक्ता पर
9 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [15,45, ,75, 105,135,165,195,225,255,285 315,345] होगा।
**जाँच** 2 * [अंतिम पद+प्रथम पद]+b =2*[345+15]+30=750

## 144 1 से 15 तक की क्रमागत 15 संख्यांक का अनुप्रयोग कर रचित पंच कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ

प्रतिबंध A $S=2*[15+1]-1=31$ (इक्तीसा) क तारतम्य में –
प्रस्तुती नियम 1■ से



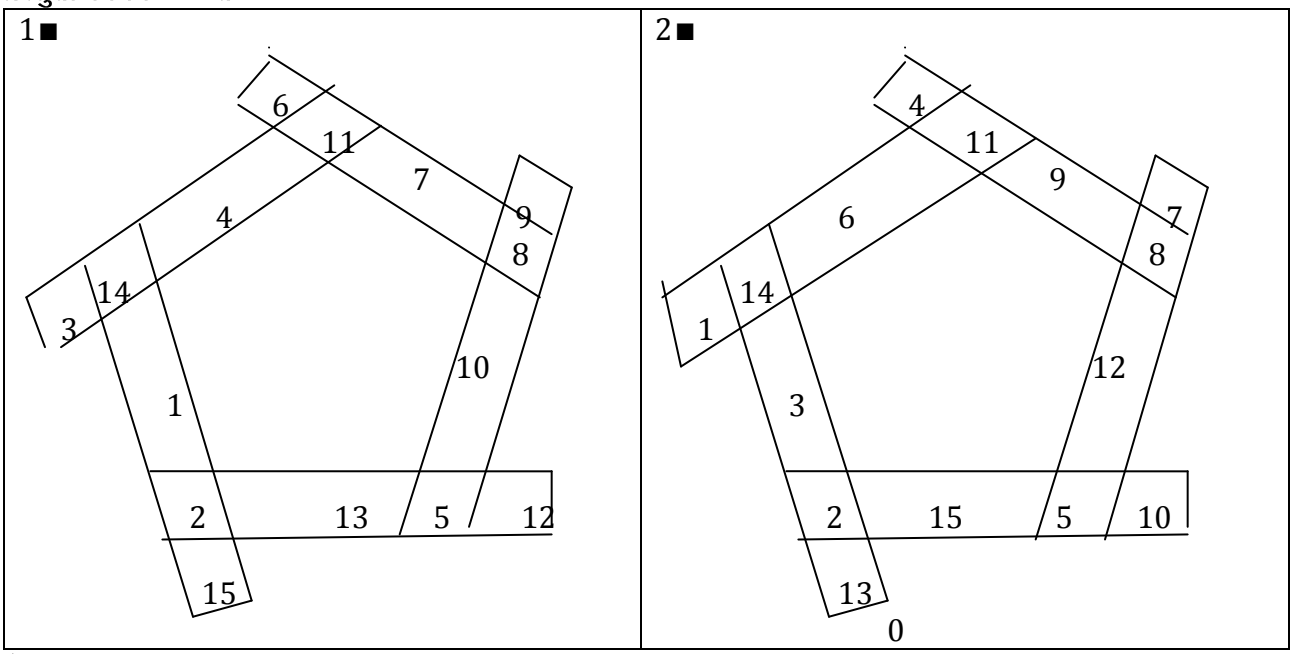

शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्वयं करें।
**प्रस्तुती नियम 2■ से**




शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्चयं करें।

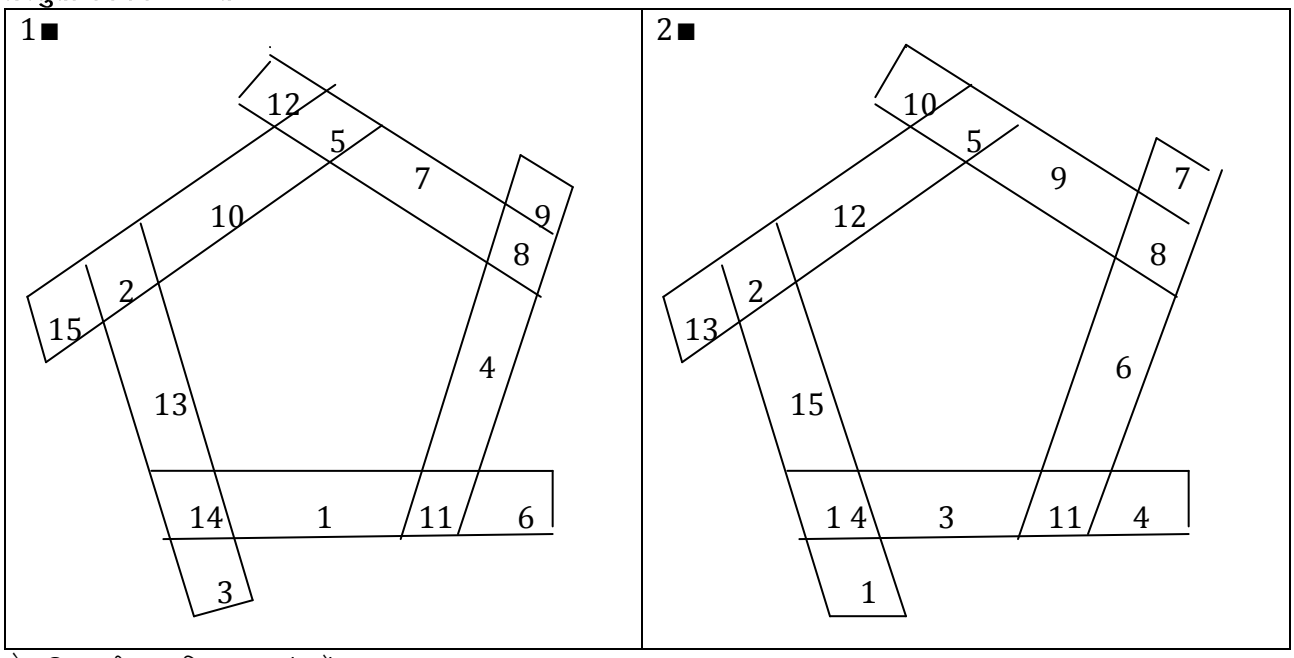
**प्रतिबंध** B $S=2*[15+1]=32$ **(बत्तीसा) के तारतम्य में –**

**प्रस्तुती नियम 1■ से**




शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्चयं करें।

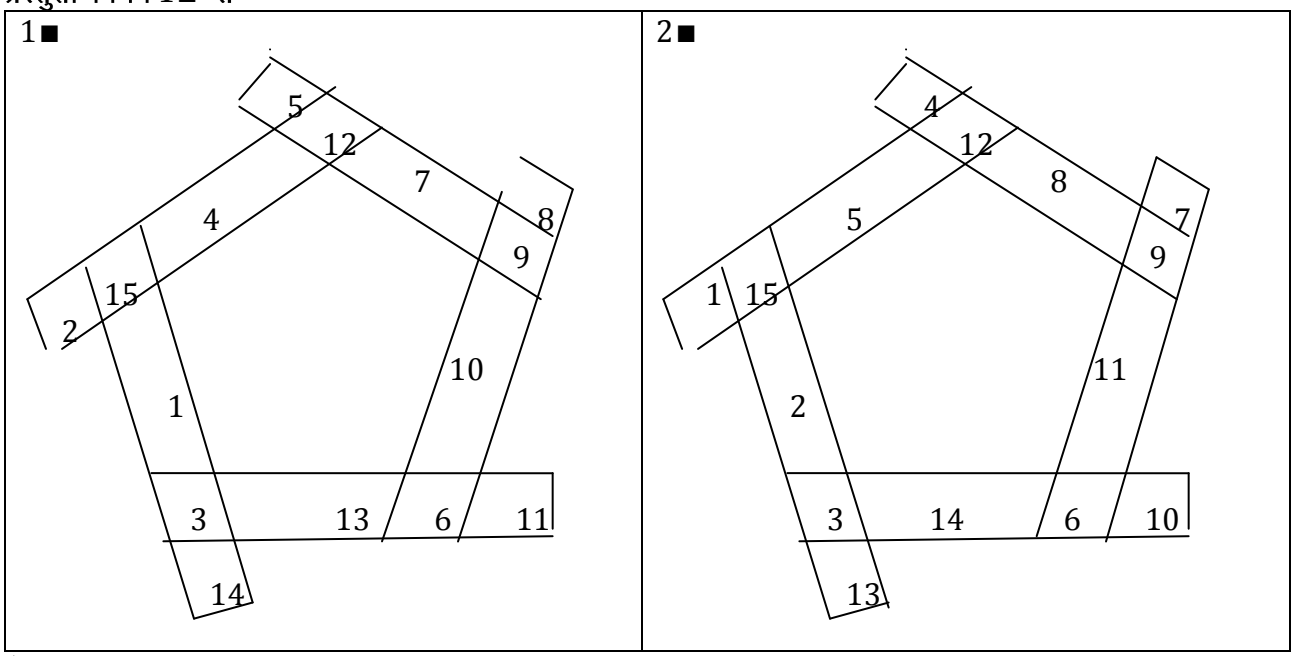
**प्रस्तुती नियम 2■ से**




शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्वयं करें।

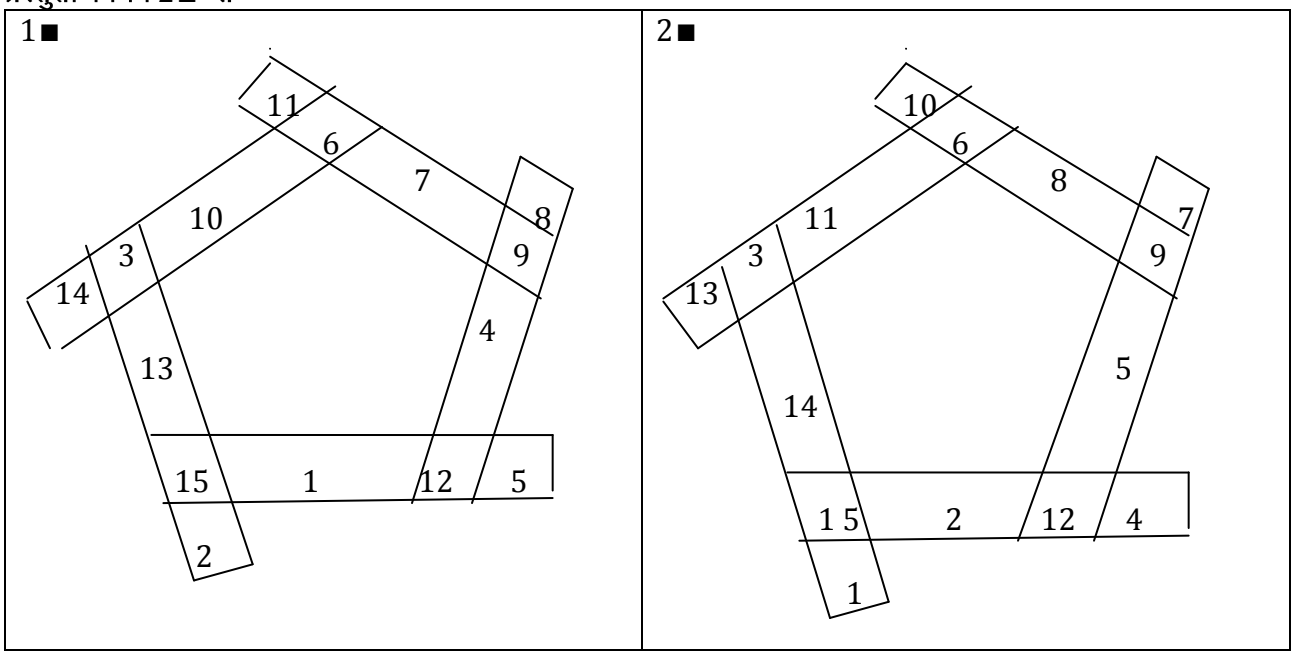
**प्रतिबंध C** $S=2*[15+1]+1=33$ **(तैतीसा) के तारतम्य में –**

**प्रस्तुती नियम 1■ से**




शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्वयं करें।

प्रस्तुती नियम 2■ से




शेष 8 प्रस्तुती का प्रतिरूपण स्वयं करें।

तब–**उदाहरण** [1] परवर दिगार अल्लाह की स्तुति • **बिस्मील्ला हिर्रम्हमा निर्रहीम** • **( अल्लाह के नाम से शुरू जो बहुत मेहरबान और रहम करने वाला है।)** संख्या [786] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+27b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=183$ और् सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

15पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–

[183,185,187,189,191,193,195,197,199,201,203,205,207,209,211] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[211+183]-2=786$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=21$ और सर्वान्तर $b=26$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [21,47.73,99,125,151,177,203,229,255,281.307,333,359,385] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[385+21]-26=786$ सा

2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+28b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद a और सर्वान्तर b का हलमान प्राकृत संख्या में नहीं होगा।

3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[786] सा प्राप्त करने – $4a+29b=786$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=182$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–

[182,184,186,188,190,192,194,196,198,200,202,204,2o6,208,210] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[210+182]+2=786$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=8$ और सर्वान्तर $b=26$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– [8,34,60,86,112,138,164,190,216,242,268,294,320,346,372] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[372+8]+26=786$ सा

उदाहरण [2] **श्री बूढ़ादेव जयसेवा संख्या** [750] सा के प्रति–

1■ नियम A के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+27b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=174$ और् सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

15पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव– ,

[174,176,178,180,182,184, 186,188,190,192,194,196,198,200,202] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[202+174\ ]-2=750$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=12$ और सर्वान्तर $b=26$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–

[12,38,64,90,116,142,168,194,220,246,272,298.324,350,376] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]-b=2*[376+12]-26=750$ सा

2■ नियम B के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+28b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद a और सर्वान्तर b का हलमान प्राकृत संख्या में नहीं होगा।

3■ नियम C के अनुसार चौघड़ियॉ योगमान =[750] सा प्राप्त करने – $4a+29b=750$ के प्रति

1. अधिकतम प्रथम पद $a=173$ और सर्वान्तर $b=2$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–

[173,175,177,179,181,183,185,187,189,191,193,195,197,199,201] होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[201+173\ ]+2=750$ सा

2. न्यूनतम् प्रथम पद $a=28$ और सर्वान्तर $b=22$ की प्रयुक्ता पर

15 पदी समांतर श्रेढ़िक अवयव–

[28,50,72,94,116,138,160,182,204,226,248,270,292,314,336]होगा।

**जाँच** $2*[\text{अंतिम पद}+\text{प्रथम पद}]+b=2*[336+28\ ]+22=750$ सा

13-5 उपरोक्त विस्तारित च्याख्या से स्पष्टतः विदित कराया जा सकता है कि– किसी $n=3r$ पदों वाली समान्तर श्रेढ़ी का प्रथम पदमान a और सर्वान्तर b के प्रति चौघड़ियाँ का अर्थ⇒ (कोणिक,अन्तः–भुजिक ,कोणिक,बाह्य–भुजिक दर्ज अवयव की दृष्टि से ) **r** चौघड़ियॉ रचित होगा। प्रत्येक चौघड़िया में दर्ज अवयव का योगमान $S\geq 19$ सा लिये जाने पर

[1] नियम A के तारतम्य में $S=4a+2b(n-1)-b=4a+2bn-3b$ से $n=\frac{S+3b-4a}{2b}$ $\Rightarrow r=\frac{S+3b-4a}{6b}$

[2] नियम B के तारतम्य में $S=4a+2b(n-1)=4a+2bn-2b$ से $n=\frac{S+2b-4a}{2b}$ $\Rightarrow r=\frac{S+2b-4a}{6b}$

[3] नियम Cके तारतम्य में $S=4a+2b(n-1)+b=4a+2bn-b$ से $n=\frac{S+b-4a}{2b}$ $\Rightarrow r=\frac{S+b-4a}{6b}$ संतुष्ट होंगे।

उदाहरण 1■ **प्रत्येक चौघड़िया में दर्ज अवयव का योगमान S=786 के प्रति प्रयुक्त समान्तर श्रेढ़ी के पदों का अधिकतम् मान , प्रथम पदमान एवं सर्वान्तर –**

[1] नियम A के तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान $n=195$, प्रथम पदमान $a=3$, सर्वान्तर $b=2$ होगा। जिसके प्रति **$195\div 3=65$** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ $4*65=260$ प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।

[2] नियम B के तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान $n=390$, प्रथम पदमान$a=2$, सर्वान्तर $b=1$ होगा। जिसके प्रति **$390\div 3=130$** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ $4*130=520$ प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।

[3] नियम Cके तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान $n=195$,प्रथम पदमान $a=2$ सर्वान्तर $b=2$ होगा। जिसके प्रति **$195\div 3=65$** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ $4*65=260$ प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।

उदाहरण 2■ **प्रत्येक चौघड़िया में दर्ज अवयव का योगमान S=750 के प्रति प्रयुक्त समान्तर श्रेढो के पदों का अधिकतम् मान , प्रथम पदमान एवं सर्वान्तर –**

[1] नियम A के तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान $n=186$, प्रथम पदमान $a=3$, सर्वान्तर $b=2$ होगा। जिसके प्रति **$186\div 3=62$** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ $4*62=248$ प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।

[2] नियम B के तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान $n=372$, प्रथम पदमान$a=2$, सर्वान्तर $b=1$ होगा। जिसके प्रति

**372÷ 3 = 124** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ 4*124=496 प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।
[3] नियम C के तारतम्य में पदों का अधिकतम् मान n=186, प्रथम पदमान a=2 सर्वान्तर b=2 होगा। जिसके प्रति
**186÷ 3 = 62** कोणिक , अन्तः एवं बाह्य भुजिक चौघड़ियॉ 4*62=248 प्रतिरूपण में दर्शित कराया जा सकता है।

----14-A----

अध्याय 14 B

# 2n कोणिक तारांकित त्रिघरिया यंत्रम्–कवचम

2n कोणिक तारांकित आकृति– $(n \geq 3)$ के प्रति 2n सम बहु भुज के भुजाओं को दोनों ओर परस्पर उनके प्रतिच्छेद बिन्दु तक बढ़ाने से रचित प्राप्त आकृति 2n कोणिक तारांकित आकृति कइलाता है। जिसमें 2n सम बहुभुज के सभी 2n भुजाओं पर बाह्य सर्वांगसम त्रिभुज रवित होता है। इन सर्वांगसम त्रिभुज का आधार भुजा उक्त 2n सम बहुभुज की भुजा ही होगा। इस प्रकार प्राप्त 2n कोणिक तारांकित आकृति में एक 2n सम बहुभुज के अन्तःभाग प्राप्त होगा।

2n कोणिक तारांकित त्रिघरिया यंत्रम्–कवचम–

1• 2n कोणिक तारांकित आकृति के 2n सम बहुभुज के अन्तःभाग में कोई प्राकृत संख्या राशि x प्रतिस्थापिप कीजिये।

2•2n कोणिक तारांकित आकृति के 2n सम बहुभुज के सभी 2n भुजाओं पर बाह्य रचित सर्वांगसम त्रिभुज को चक्रीय क्रम में 1,2,3,4----------(2n-3),(2n-2), (2n-1), 2n का क्रमांक दीजिये। इन क्रम स्थित त्रिभुजों में प्राकृत संख्या के अद्वितीय नियम के परिपालन में क्रमशः $x_1, x_2, x_3, x_3 \; - \; - \; - \; - \; - \; - x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}$ ऐसा हो कि– समरेख नियम में–
$[x_1 + x + x_{n+1}] = [x_2 + x + x_{n+2}] = [x_3 + x + x_{n*3}] = [x_4 + x + x_{n44}]$ =- - - -

$[x_1 + x_{n+1} + x_{2n+1}] = [x_2 + x_{n+1} + x_{2n}] = [x_3 + x_{n+1} + x_{2n-1}] = [x_4 + x_{n+1} + x_{2n-2}]$ =- - - - - - - - - - - - ---= $[x_{n-3} + x_{n+1} + x_{n+5}] = [x_{n-2} + x_{n+1} + x_{n+4}] = [x_{n-1} + x_{n+1} + x_{n*3}] = [x_n + x_{n+1} + x_{n+2}]$=S=3$x_{n+1}$ =3[a+nd] =3[मध्यपद] होगा।

**3•** x = (2n+1) पदी समान्तर संख्या ज्ञेढ़ी का अंत्य पद $x_{2n+1}$ प्रतिस्थापित किये जाने के प्रति समरेख नियम में–

$[x_1 + x_{2n+1} + x_{2n}] = [x_2 + x_{2n+1} + x_{2n-1}] = [x_3 + x_{2n+1} + x_{2n-2}] = [x_4 + x_{n+1} + x_{2n-3}]$ =- - - - - - - - - - - $[x_{n-3} + x_{2n+1} + x_{n+4}] = [x_{n-2} + x_{2n+1} + x_{n+3}] = [x_{n-1} + x_{2n+1} + x_{n+2}] = [x_n + x_{2n+1} + x_{n+1}]$ =S =3a+(4n-1) d

=[3a +{2(2n+1) -3}d ] ==[3*प्रथमपद +{2(पदों की संख्या) -3}*पदान्तर ] = होगा।

**2■** योगमान S के प्रति 2n कोणिक तारांकित आकृति के 2n सम बहुभुज के अन्तःभाग में कोई प्राकृत संख्या राशि x और n प्रकार के युग्मीय राशि की सुनिश्चिता विश्लेषण–

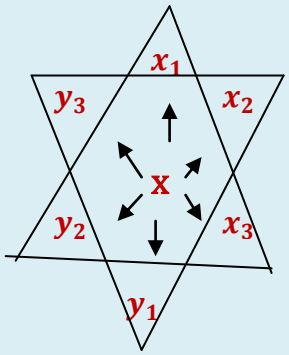
योगमान S और n की संगता उदाहरणों पर विश्लेषण प्रस्तुति अवलोकित कीजिये।

**n=3 के प्रति 2n=2*3=6 कोणिक तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् कवचम् रचना**

**षष्ट काणिक तारांकित आकृति–**

दो सर्वांगसम समबाहु त्रिभुज एक–दूसरे के प्रति इस प्रकार प्रतिस्थापित हो कि एक–दूसर की भूजाये परस्पर सम त्रिभाग करता हो **षष्ट काणिक तारांकित आकृति** कइलाता है।

तारांकित S सा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम




$x_1 + x + y_1 = S$
$x_2 + x + y_2 = S$
$x_3 + x + y_3 = S$

**अथवा**

सम षष्ठभुज के भुजाओं को दोनों ओर परस्पर उनके प्रतिच्छेद बिन्दु तक बढ़ाने से रचित प्राप्त आकृति **षष्ट काणिक तारांकित आकृति** कइलाता है। जिसमें सम षष्ठभुज के सभी षष्ठ भुजाओं पर बाह्य समबाहु त्रिभुज रवित होता है। इस प्रकार प्राप्त **षष्ट काणिक तारांकित आकृति** में षष्ठ समबाहु त्रिभज एक सम षष्ठभुज के अन्तःभाग प्राप्त होर्गा

**योगमान S ≥ 10 सा के प्रति तारांकित त्रिघरिया यत्रम्–क्वचम–**

उपरोक्तानुसार प्राप्त सम षष्ठभुज का केद्रक में संख्या x

$1 \leq x \leq (S-7)$ के प्रतिबंध पर प्राकृत संख्या होगा।

उक्त केद्रक संख्या x के प्रति ऊर्ध्वतिर्यक नियम के परिपालन में तीन युग्मीय संख्या अवयव $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ और $(x_3\ y_3)$ ऐसा हो कि सभी अवयव बिना दोहराये अद्वितीय होंगे तथा

$(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) = (x_3 + y_3) = (S - x)$ का परिपालन में हो।

**तीन युग्मीय संख्या अवयव $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ और $(x_3\ y_3)$ को चनने का युग्मीय विकल्प समुच्चय में अवयवों की संख्या–**

**1■** (S -x) सम संख्या 2m होने के प्रति – (m -1) होगा।

यथा

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | -- | -- | r | | | (m-3) | (m-2) | (m-1) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_r$ | 1 | 2 | 3 | -- | --- | r | | | m-3 | m-2 | m-1 |
| $y_r$ | 2m-1 | 2m-2 | 2m-3 | -- | -- | 2m-r | | | m+3 | m+2 | m+1 |

जिनमें से $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$और $(x_3\ y_3)$ को एक साथ लिये जाने के $\frac{!(m-1)}{!(m-4)*!3}$ तरीके होंगे।

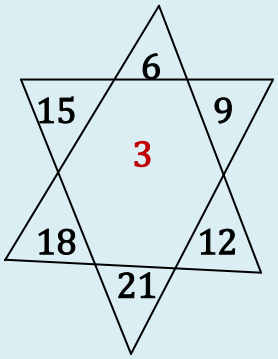
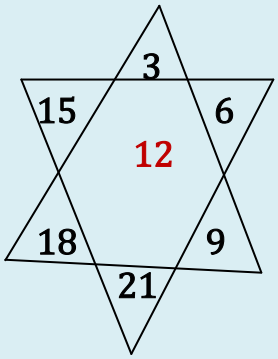
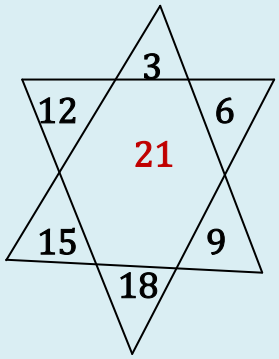
2■ =(S -x) विषम संख्या (2m+1) होने के प्रति – m होगा।

यथा

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | -- | -- | r | | | (m-2) | (m-1) | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_r$ | 1 | 2 | 3 | -- | --- | r | | | m-2 | m-1 | m |
| $y_r$ | 2m | 2m-1 | 2m-2 | -- | -- | 2m-r+1 | | | m+3 | m+2 | m+1 |

जिनमें से $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$ और $(x_3\ y_3)$ को एक साथ लिये जाने के $\frac{!m}{!(m-3)*3!}$ तरीके होंगे।

सात पदी समान्तर श्रेढ़ी [a ,(a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d), (a+5d), (a+6d)] होने के

| प्रथमपद a=3 और पदान्तर d=3 से सात पदी समान्तर श्रेढ़ी [3, 6,9,12,15,18,21] की प्रयुक्ता में | | |
|---|---|---|
| 1•प्रथमपद का नियम | 2• द्वितीय पद का नियम | 3•अन्त्यपद का नियम |
| तारांकितत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम्<br>  <br><br>6+3+21=30<br>9+3+18 = 30<br>12+3+15 =30<br>योगमान s=3a+ 7d | तारांकित छत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम्<br>  <br><br>3+12+21=36<br>6+12+18 = 36<br>9+12+15 =36<br>योगमान s=3*[a+3d] | तारांकित ब्यालीसाा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम्<br>  <br><br>3+21+18=42<br>6+21+15 = 42<br>9+21+12 =42<br>योगमान s=3*a+11d |

प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् –कवचम में योगमान S सा =

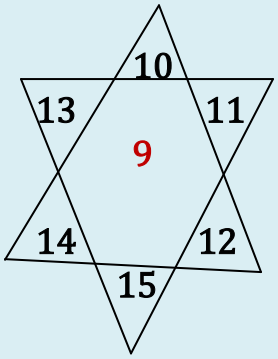
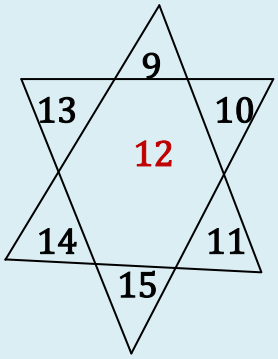
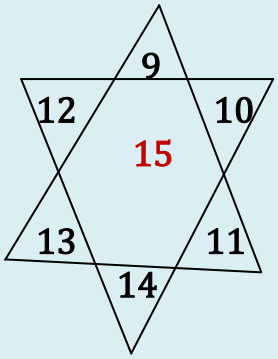
1• प्रथमपद का नियम से 3*प्रथमपदमान+ पद संख्या* पदान्तर= 3a +7*d

2• मध्य पद का नियम से 3* मध्यपद मान = 3[a+3d]

3• अन्त्य पद का नियम से =[3*प्रथमपद +{2(पदों की संख्या) -3}*पदान्तर ]

= =[3a +{2(2n+1) -3}d ]= [3a+{2*7-3}d] =3a+11d

क्रमागत सात संख्या [a ,(a+1), (a+2), (a+3), (a+4), (a+5), (a+6)] होने के

| क्रमागत सात संख्या 9,10,11,12,13,14,15 | | |
|---|---|---|
| 1•प्रथमपद का नियम | 2• द्वितीय पद का नियम | 3•अन्त्यपद का नियम |
| तारांकितत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् | तारांकित छत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् | तारांकित ब्यालीसाा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् |
|   |   |   |
| 6+3+21=30<br>9+3+18 = 30<br>12+3+15 =30<br>योगमान s=3*a+7 | 3+12+21=36<br>6+12+18 = 36<br>9+12+15 =36<br>योगमान s=3[a+3] | 3+21+18=38<br>6+21+16 = 38<br>9+21+12 =38<br>योगमान s=3*11 |

प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् –कवचम में योगमान S सा =

1• प्रथमपद का नियम से 3*प्रथमपदमान+ पद संख्या* पदान्तर= 3a +7*d =3a+7

2• मध्य पद का नियम से 3* मध्यपद मान = 3[a+3d] =3[a+3]

3• अन्त्य पद का नियम से =[3*प्रथमपद +{2(पदों की संख्या) -3}*पदान्तर ]

= =[3a +{2(2n+1) -3}d ]= [3a+{2*7-3}d] =3a+11d 3a+11

योगमान $S = 10$ सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ ही तरीका होगा

योगमान $S = 11$ सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ ही तरीका होगा

योगमान $S = 12$सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 1$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3*4}{6} = 4$ तरीके होंगे।

2• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 2$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ ही तरीका होगा

3• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 3$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ ही तरीका होगा

4• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 4$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ ही तरीका होगा

इस प्रकार कुल यथैष्ट हलो के प्रकारों की संख्या 7 होगा।

योगमान $S \geq 21$ सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 1$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(8-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

2• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 2$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(8-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे8

3• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 3$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

4• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

5• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)}$ $=\frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

6• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)}$ $=\frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

7• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)}$ $=\frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

8• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 7 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!5}{6*!(5-3)}$ $=\frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

9• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 10 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)}$ $=\frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

10• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)}$ $=\frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

11• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)}$ $=\frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

12• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6} = 4$ तरीके होंगे।

13• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

14• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 14 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 6 | 5 | 4 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

1से 14 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान = 56+56
+35+35+20+20+20+10+4+4+4+4+1+1 =270 होगा।

योगमान $S \geq 22$ सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!9}{6*!(9-3)} = \frac{7*8*9}{6} = 84$ तरीके होंगे।

2• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 2 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे8

3• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 3 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

4• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

5• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

6• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)} = \frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

7• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)} = \frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

8• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!5}{6*!(6-3)} = \frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

9• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!5}{6*!(6-3)} = \frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

10• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 9 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

11• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!5}{6*!(5-3)} = \frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

12• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

13• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

14• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 14$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

15• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 15$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 6 | 5 | 4 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

1से 15 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान =

$84+56+56+35+35+20+20+10+10+4+10+4+4+1+1 = 350$ होगा।

योगमान $S \geq 23$ सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 1$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!9}{6*!(9-3)} = \frac{7*8*9}{6} = 84$ तरीके होंगे।

2• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 2$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!9}{6*!(9-3)} = \frac{7*8*9}{6} = 84$ तरीके होंगे।

3• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 3$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

4• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 4$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

5• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 5$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

6• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 6$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

7• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)} = \frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

8• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!6}{6*!(6-3)} = \frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

9• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!5}{6*!(5-3)} = \frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

10• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!6}{6*!(6-3)} = \frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

11• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

12• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!5}{6*!(5-3)} = \frac{3*4*5}{6}$ =10 तरीके होंगे।

13• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

14• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 14 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 6 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6}$ = 4 तरीके होंगे।

15• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 15 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

16• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x =16 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 6 | 5 | 4 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

1से 16 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान =
84+ 84 +56+56 +35+35+20+20+10+20+4+10+4+4+1+1 = 444 होगा।

योगमान $S \geq 24$सा के प्रति

1• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $y_r$ | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | `16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!10}{6*!(10-3)} = \frac{8*9*10}{6} = 120$ तरीके होंगे।

2• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 2 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 21 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!9}{6*!(9-3)} = \frac{7*8*9}{6} = 84$ तरीके होंगे।

3• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 3 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!9}{6*!(9-3)} = \frac{7*8*9}{6} = 84$ तरीके होंगे।

4• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

5• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!8}{6*!(9-3)} = \frac{6*7*8}{6} = 56$ तरीके होंगे।

6• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)} = \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

7• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

8• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

9• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!6}{6*!(6-3)}=\frac{4*5*6}{6}$ =20 तरीके होंगे।

10• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 9 | 8 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!5}{6*!(5-3)}=\frac{3*4*5}{6}=10$ तरीके होंगे।

11• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!5}{6*!(5-3)}=\frac{3*4*5}{6}=10$ तरीके होंगे।

12• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!5}{6*!(5-3)}=\frac{3*4*5}{6}=10$ तरीके होंगे।

13• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!5}{6*!(5-3)}=\frac{3*4*5}{6}=10$ तरीके होंगे।

14• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 14 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से तीन युग्म चुनने के $\frac{!4}{6*!(4-3)}=\frac{2*3*4}{6}=4$ तरीके होंगे।

15• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 15 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!4}{6*!(4-3)} = \frac{2*3*4}{6} = 4$ तरीके होंगे।

16• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x =16 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 7 | 6 | 5 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

17• सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x =17 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 |
| $y_r$ | 6 | 5 | 4 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!3}{6*!(3-3)} = \frac{1*2*3}{6} = 1$ तरीके होंगे।

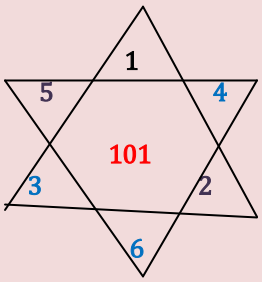
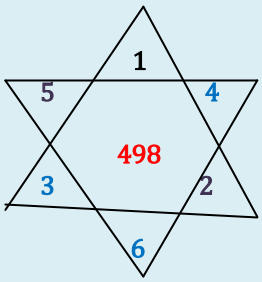
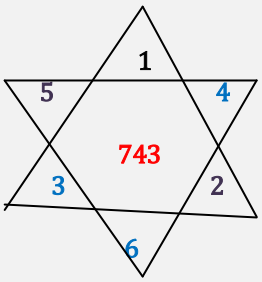
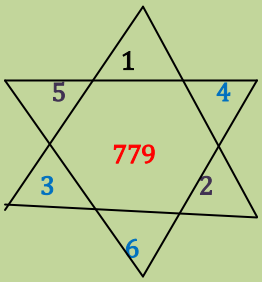
1से 17 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान = 120+84+ 84 +56+56 +35+35+35+20+10+10+10+10+4++4++1+1 = 575 होगा।

विवेचना–उपरोक्त हलित उदाहरणो से स्पष्ट है कि किसी योगमान $S \geq 10$ के प्रति क्रम 1 से (S-7) तक सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = क्रमशः क्रमांकों के संगत मानों 1,2,3,4 - - - (S-10), (S-9),(S--8),(S-7) सुनिश्चित किया जा सकता है। इन x मानों के प्रति $(x_r, y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण के वे समस्त प्रतिरूपण प्राप्त कीजिये जो कि $(x, + y_r) = (S - x)$ समिका को $[x \neq x_r \neq y_r]$ के प्रतिबंध पर संतुष्ट करता हो। इस प्रकार षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के प्रति प्राप्त युग्मों की सख्या –

1• $(S - x) = (2y+1)$ होने के प्रति y अथवा (y-1) होंगे।

2• $(S - x) = 2y$ होने के प्रति (y-1) अथवा y-2) होंगे।

कुछ I अपवादो के साथ मान्य होगा। सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के प्रति $(x_r, y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण में प्राप्त युग्मों की संख्या m में से कोई भी तीन युग्म चुनना होगा। जिसे चुनने के तरीकों की कुल संख्या $\frac{!m}{!3*!(m-3)} = \frac{(m-2)*(m-1)*m}{6}$ का हल मान होगा। इस प्रकार षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के सभी मानों 1,2,3,4 - - - (S-10), (S-9),(S-8),(S-7) मानों के प्रति $(x_r, y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण में प्राप्त युग्मों की संख्या $[m_1, m_2, m_3, m_4 - - - - m_{s-10}, m_{s-9}, m_{s-8}, m_{s-7}]$ होने पर इन प्रत्येक युग्मों की संख्या में से तीन युग्म चुनने के क्रमश $[t_1, t_2, t_3, t_4 - - - - t_{s-10}, t_{s95}, t_{s-8}, t_{s-7}]$ प्राप्त होने पर किसी योगमान $S \geq 10$ के प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम के समस्त प्रकारों की संख्या $[t_1, t_2, t_3, t_4 - - - - t_{s-10}, t_{s-9}, t_{s-8}, t_{s-7}]$ का बिना किसी सूत्र समिका के सरल योगमान होगा।

| तारांकित 108सा त्रिघरिया म्हावीराय क्वच–यंत्र | तारांकित 505सा त्रिघरिया श्रीराम क्वच–यंत्र | तारांकित 750सा त्रिघरिया श्री बूढ़ादेव क्वच–यंत्र | तारांकित 786सा त्रिघरिया प्रवर दिगाार अल्लाह क्वच–यंत्र |
|---|---|---|---|
|   |   |   |   |

योगमान S सा के 3 द्वारा विभाजित होने के प्रतिबध पर रचना के लिये –
सात पदी समांतर श्रेढी प्राप्त करने के प्रति प्रथम पद a और पदान्तर b प्राप्त करने

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{S}{3}$ = सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x को हल करनें पर a और पदान्तर b के एक या एक से अधिक हल युग्म प्राप्त हांगे।

योगमान S सा = 21 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{21}{3}=7$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 1 | 4 |
|---|---|---|
| b | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 2

योगमान S सा = 33 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{33}{3}=11$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 2 | 5 | 8 |
|---|---|---|---|
| b | 3 | 2 | 3 |

कुल प्रकारों की संख्या 3

योगमान S सा = 36 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{36}{3}=12$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 3 | 6 | 9 |
|---|---|---|---|
| b | 3 | 2 | 3 |

कुल प्रकारों की संख्या 3

योगमान S सा = 108 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{108}{3}=36$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 11

## योगमान S सा = 750 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{750}{3}=250$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 | 58 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 83 | 82 | 81 | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 | 71 | 70 | 69 | 68 | 67 | 66 | 65 | 64 |

| a | 61 | 64 | 67 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 | 103 | 106 | 109 | 112 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 |

| a | 115 | 118 | 121 | 124 | 127 | 130 | 133 | 136 | 139 | 142 | 145 | 148 | 151 | 154 | 157 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |

| a | 160 | 163 | 166 | 169 | 172 | 175 | 178 | 181 | 184 | 187 | 190 | 193 | 196 | 199 | 202 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| a | 205 | 208 | 211 | 214 | 217 | 220 | 223 | 226 | 229 | 232 | 235 | 238 | 241 | 244 | 247 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 83

## योगमान S सा = 786 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+3b=\frac{786}{3}=262$ सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 43 | 46 | 49 | 52 | 55 | 58 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 87 | 86 | 85 | 84 | 83 | 82 | 81 | 80 | 79 | 78 | 77 | 76 | 75 | 74 | 73 | 72 | 71 | 70 | 69 | 68 |

| a | 61 | 64 | 67 | 70 | 73 | 76 | 79 | 82 | 85 | 88 | 91 | 94 | 97 | 100 | 103 | 106 | 109 | 112 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 67 | 66 | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 |

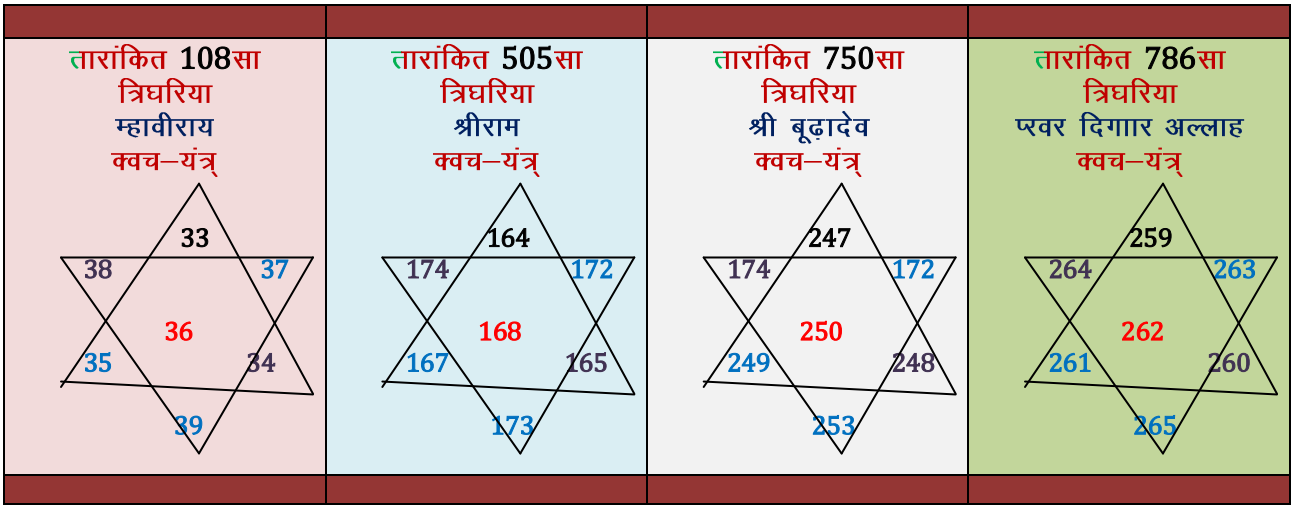
| a | 115 | 118 | 121 | 124 | 127 | 130 | 133 | 136 | 139 | 142 | 145 | 148 | 151 | 154 | 157 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 |

| a | 160 | 163 | 166 | 169 | 172 | 175 | 178 | 181 | 184 | 187 | 190 | 193 | 196 | 199 | 202 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 |

| a | 205 | 208 | 211 | 214 | 217 | 220 | 223 | 226 | 229 | 232 | 235 | 238 | 241 | 244 | 247 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 |

| a | 250 | 253 | 256 | 259 |
|---|---|---|---|---|
| b | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्श 87



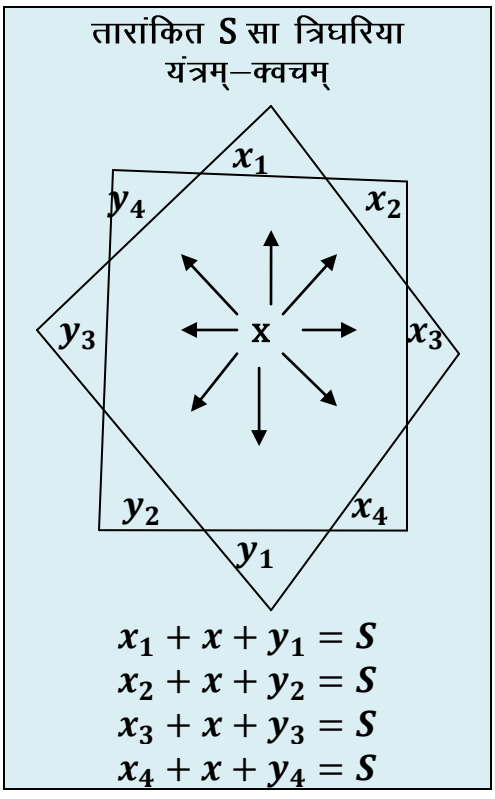

उपरोक्त हल तालिका के अनुसार–

योगमान S सा = 3x सा के प्रति सम षष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा।

## n=4 के प्रति 2n=2*4=8 (अष्ठ)कोणिक तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् कवचम् रचना

-

--अष्ट कोणिक तारांकित आकृति–सम अष्ठभुज के भुजाओं को दोनों ओर परस्पर उनके प्रतिच्छेद बिन्दु तक बढ़ाने से रचित प्राप्त आकृति अष्ट कोणिक तारांकित आकृति कइलाता है। जिसमें सम अष्ठभुज के सभी अष्ठ भुजाओं पर बाह्य सम द्विबाहु त्रिभुज रवित होता है। इस प्रकार प्राप्त अष्ठ कोणिक तारांकित आकृति में अष्ठ सम द्विबाहु त्रिभज एक सम अष्ठभुज के अन्तःभाग प्राप्त होर्गा




योगमान $S \geq 12$ सा के प्रति तारांकित त्रिघरिया यत्रम्–क्वचम– उपरोक्तानुसार प्राप्त सम षष्ठभुज का केद्रक में संख्या x $1 \leq x \leq (S-9)$ के प्रतिबंध पर प्राकृत संख्या होगा।

उक्त केद्रक संख्या x के प्रति ऊर्ध्वतिर्यक नियम के परिपालन में चार युग्मीय संख्या अवयव $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ और $(x_3\, y_3)$ $(x_4 y_4)$ ऐसा हो कि सभी अवयव बिना दोहराये अद्वितीय होंगे तथा

$(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) = (x_3 + y_3) = (x_4 + y_4) =$ (S -x) का परिपालन में हो।

चार युग्मीय संख्या अवयव $(x_1\, y_1)$, $(x_2\, y_2)$ $(x_3\, y_3)$ और$(x_4 y_4)$ को चनने का युग्मीय विकल्प समुच्चय में अवयवों की संख्या–

1■ (S -x) सम संख्या 2m होने के प्रति – (m -1) होगा। यथा

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | -- | -- | r | | | (m-3) | (m-2) | (m-1) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_r$ | 1 | 2 | 3 | -- | --- | r | | | m-3 | m-2 | m-1 |
| $y_r$ | 2m-1 | 2m-2 | 2m-3 | -- | -- | 2m-r | | | m+3 | m+2 | m+1 |

जिनमें से $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$ और $(x_3\ y_3)$ को एक साथ लिये जाने के $\frac{!(m-1)}{!(m-5)*!4} = \frac{(m-4)*(m-3)(m-2)*(m-1)}{24}$ के हलमान तरीके होंगे।

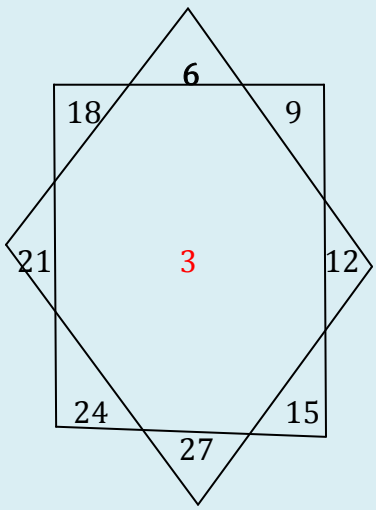
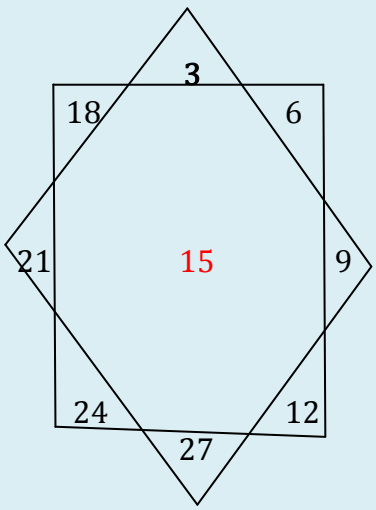
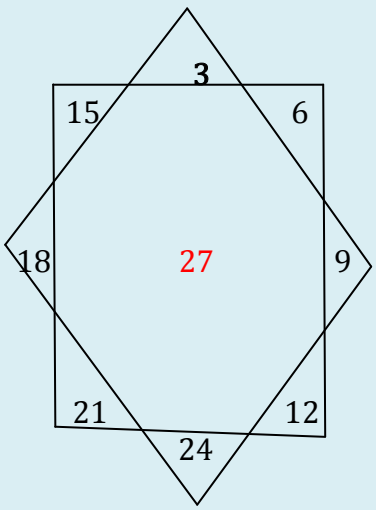
2■ =(S -x) विषम संख्या (2m+1) होने के प्रति – m होगा। यथा

| यग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | -- | -- | r | | | (m-2) | (m-1) | m |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_r$ | 1 | 2 | 3 | -- | --- | r | | | m-2 | m-1 | m |
| $y_r$ | 2m | 2m-1 | 2m-2 | -- | -- | 2m-r+1 | | | m+3 | m+2 | m+1 |

जिनमें से $(x_1\ y_1), (x_2\ y_2)$ और $(x_3\ y_3)$ को एक साथ लिये जाने के $\frac{!m}{!(m-4)*!4} = \frac{(m-3)(m-2)*(m-1)*m}{24}$ के हलमान तरीके होंगे।
तरीके होंगे।

नौ पदी समान्तर श्रेढ़ी [a ,(a+d), (a+2d), (a+3d), (a+4d), (a+5d), (a+6d),(a+7a),(a+8a] होने

प्रथमपद a=3 और पदान्तर d=3 से नौ पदी समान्तर श्रेढ़ी [3, 6,9,12,15,18,21,24,27] की प्रयुक्ता में

| 1•प्रथमपद का नियम | 2• द्वितीय पद का नियम | 3•अन्त्यपद का नियम |
|---|---|---|
| तारांकितछत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् | तारांकितपैतालीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् | तारांकितपैतालीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम |
|  |  |  |
| 6+3 + 27 = 36<br>9 + 3 + 24 = 36<br>12 + 3 + 21 = 36<br>15 + 3 + 18 = 36<br>योगमानS=3a++9d | 3+15 + 27 = 45<br>6 + 15 + 24 = 45<br>9 + 15 + 21 = 45<br>12 + 15 + 18 = 45<br>योगमानS=3[a+4d] | 3+15 + 27 = 45<br>6 + 15 + 24 = 45<br>9 + 15 + 21 = 45<br>12 + 15 + 18 = 45<br>योगमानS=3a+15d |

के प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् –कवचम में योगमान S सा

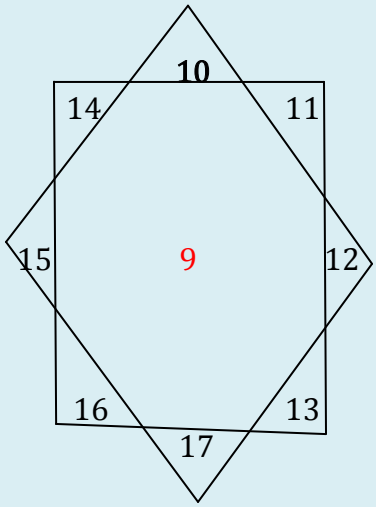
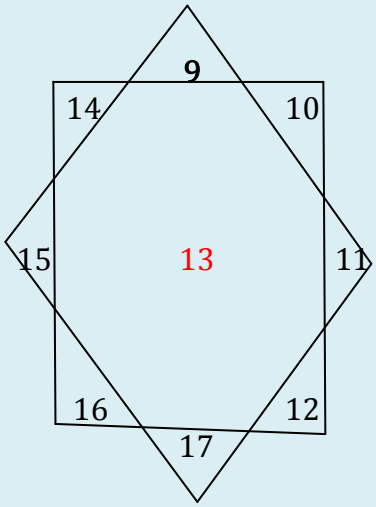
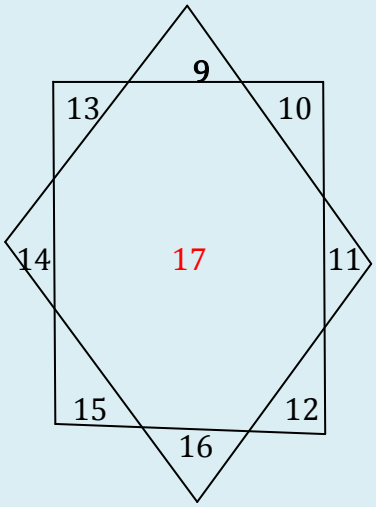
1• प्रथमपद का नियम से 3*प्रथमपदमान+ पद संख्या* पदान्तर= 3a +7*d

2• मध्य पद का नियम से 3* मध्यपद मान = 3[a+3d]

3• अन्त्य पद का नियम से =[3*प्रथमपद +{2(पदों की संख्या) -3}*पदान्तर ]

= =[3a +{2(2n+1) -3}d ]= [3a+{2*9-3}d] =3a+15d

क्रमागत नौ संख्या [a ,(a+1), (a+2), (a+3), (a+4), (a+5), (a+6),(a+7),(a+8] होने के

| क्रमागत नौ संख्या 9,10,11,12,13,14,15 16,17 | | |
|---|---|---|
| 1•प्रथमपद का नियम | 2• द्वितीय पद का नियम | 3•अन्त्यपद का नियम |
| तारांकितछत्तीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम | तारांकितउनचालिसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम् | तारांकितबियालीसा त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम |
|  |  |  |
| 10+9 + 17 = 36<br>11 + 9 + 16 = 36<br>12 + 9 + 15 = 36<br>13 + 9 + 14 = 36<br>योगमानS=3a++9 | 9+13 + 17 = 39<br>10 + 13 + 16 = 39<br>11 + 13 + 15 = 39<br>12 + 13 + 14 = 39<br>योगमानS=3[a+4] | 9+17 + 16 = 42<br>10 + 17 + 15 = 42<br>11 + 17 + 14 = 45<br>12 + 17 + 13 = 42<br>योगमानS=3a+15 |

प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम् –कवचम में योगमान S सा =

1• प्रथमपद का नियम से 3*प्रथमपदमान+ पद संख्या* पदान्तर= 3a +9*d =3a+9

2• मध्य पद का नियम से 3* मध्यपद मान = 3[a+3d] =3[a+4]

3• अन्त्य पद का नियम से =[3*प्रथमपद +{2(पदों की संख्या) -3}*पदान्तर ]

= =[3a +{2(2n+1) -3}d ]= [3a+{2*9 -3}d] =3a+15d = 3a+15

योगमान S = 12सा के प्रति

1• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ ही तरीका होगा।

योगमान $S \geq 21$ सा के प्रति

1• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $=\frac{5*6*7*8}{24}=70$ तरीके होंगे।

2• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 2 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $=\frac{5*6*7*8}{24}=70$ तरीके होंगे8

3• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 3 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!7}{24*!(7-4)}$ $=\frac{4*5*6*7}{24}=35$ तरीके होंगे।

4• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!7}{24*!(7-4)}$ $=\frac{4*5*6*7}{24}=35$ तरीके होंगे।

5• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)}$ $=\frac{3*4*5*6}{24}=15$ तरीके होंगे।

6• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)}$ $=\frac{3*4*5*6}{24}=15$ तरीके होंगे।

7• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)}$ $=\frac{3*4*5*6}{24}=15$ तरीके होंगे।

8• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)}$ $=\frac{2*3*4*5}{24}=5$ तरीके होंगे।

9• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 10 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

1से 9 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान = 70+70+35+35+15+15+15+5+1=261 होगा।

योगमान $S \geq 22$ सा के प्रति

1• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!9}{24*!(9-4)} = \frac{6*7*8*9}{24} = 126$ तरीके होंगे।

2• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 2 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)} = \frac{5*6*7*8}{24} = 70$ तरीके होंगे।

3• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 3 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)} = \frac{5*6*7*8}{24} = 70$ तरीके होंगे।

4• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!7}{24*!(7-4)} = \frac{4*5*6*7}{24} = 35$ तरीके होंगे।

5• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!7}{24*!(7-4)} = \frac{4*5*6*7}{24} = 35$ तरीके होंगे।

6• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)} = \frac{3*4*5*6}{24} = 15$ तरीके होंगे।

7• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)} = \frac{3*4*5*6}{24} = 15$ तरीके होंगे।

8• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

9• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

10• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 9 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

11• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

12• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

13• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 5 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

1से 13 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान =
126+70+70+35+35+15+15+5+5+1+5+1+1= 384 होगा।

योगमान $S \geq 23$ सा के प्रति

1• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $,x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!9}{24*!(9-4)} = \frac{6*7*8*9}{24} = 126$ तरीके होंगे।

2• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 2$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!9}{24*!(9-4)} = \frac{6*7*8*9}{24} = 126$ तरीके होंगे।

3• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 3$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $= \frac{5*6*7*8}{24} = 70$ तरीके होंगे।

होंगे।

4• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 4$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $= \frac{5*6*7*8}{24} = 70$ तरीके होंगे।

होंगे।

5• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 5$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 14 | 12 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $= \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

6• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 6$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $= \frac{5*6*7}{6} = 35$ तरीके होंगे।

7• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 7$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)} = \frac{3*4*5*6}{24}$ $= 15$ तरीके होंगे।

8• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 8$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)}$ $= \frac{3*4*5*6}{24} = 15$ तरीके होंगे।

9• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या $x = 9$ लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} =$ 5 तरीके होंगे।

10• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)} = \frac{3*4*5*6}{24}$ = 15 तरीके होंगे।

11• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

12• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

13• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

14• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 14 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

1से 14 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान =
126+126+70+70+35+35+15+15+5+15 +1+5+1+1= 510 होगा।

योगमान $S \geq 24$सा के प्रति 252 462 502

1• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 1 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| $y_r$ | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | `16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!10}{24*!(10-4)} = \frac{7*8*9*10}{24} =$ 210 तरीके होंगे।

2• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 2 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 21 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!9}{24*!(9-4)} = \frac{6*7*8*9}{24} = 126$ तरीके होंगे।

3• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 3 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| , $x_r$ | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $y_r$ | 20 | 19 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!9}{24*!(9-4)} = \frac{6*7*8*9}{24} = 126$

तरीके होंगे।

4• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 4 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 19 | 18 | 17 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $=\frac{5*6*7*8}{24}=70$ तरीके होंगे।

5• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 5 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $y_r$ | 18 | 17 | 16 | 15 | 13 | 12 | 11 | 10 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!8}{24*!(8-4)}$ $=\frac{5*6*7*8}{24}=70$ तरीके होंगे।

6• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 6 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 |
| $y_r$ | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 | 11 | 10 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

7• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 7 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 |
| $y_r$ | 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

8• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 8 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $y_r$ | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 |

में से तीन युग्म चुचने के $\frac{!7}{6*!(7-3)}$ $=\frac{5*6*7}{6}=35$ तरीके होंगे।

9• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 9 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 |
| $y_r$ | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 8 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!6}{24*!(6-4)}$ $=\frac{3*4*5*6}{24}$ $=15$ तरीके होंगे।

10• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 10 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 13 | 12 | 11 | 9 | 8 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)}$ $=\frac{2*3*4*5}{24}=5$ तरीके होंगे।

11• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 11 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $y_r$ | 12 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)}$ $=\frac{2*3*4*5}{24}=5$ तरीके होंगे।

12• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 12 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

13• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 13 लिये जाने पर

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y_r$ | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!5}{24*!(5-4)} = \frac{2*3*4*5}{24} = 5$ तरीके होंगे।

14• समआष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 14 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 9 | 8 | 7 | 6 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

15• सम अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = 15 लिये जाने पर–

| युग्म क्र. | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $, x_r$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $y_r$ | 8 | 7 | 6 | 5 |

में से चार युग्म चुचने के $\frac{!4}{24*!(4-4)} = \frac{1*2*3*4}{24} = 1$ तरीके होंगे।

1से 15 तक के गणना से प्राप्त तरीकों का योग मान = 210+126+126+70+70+35+35+35+15+5+5+5+5+1+1= 744 होगा।

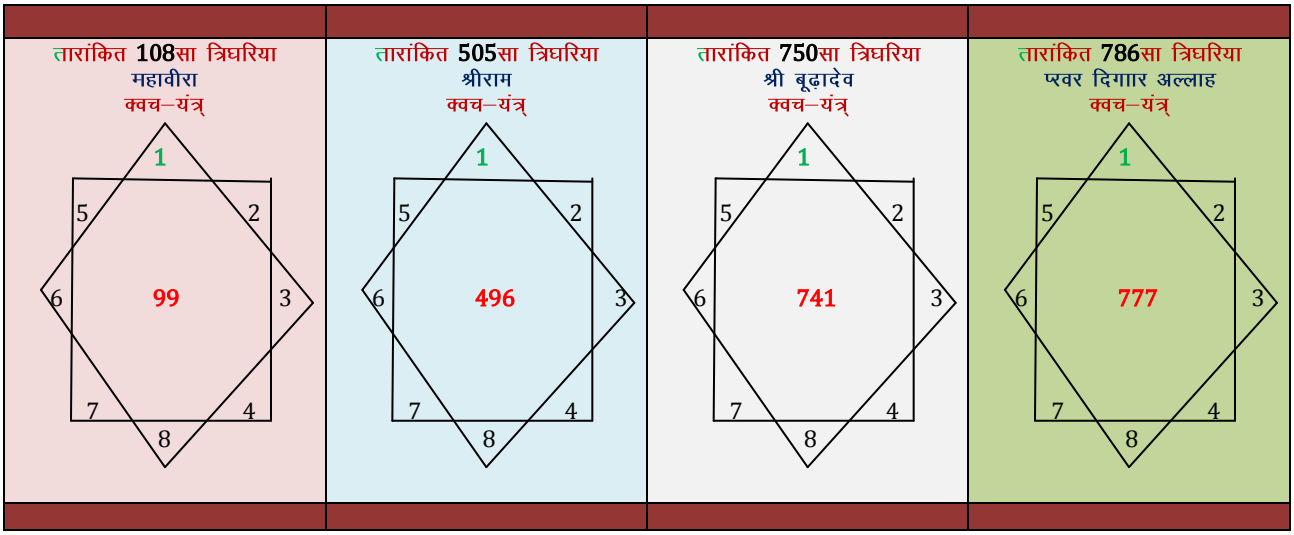
विवेचना–उपरोक्त हलित उदाहरणो से स्पष्ट है कि किसी योगमान $S \geq 12$ के प्रति क्रम 1 से (S-9) तक सम आष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x = क्रमशः क्रमांकों के संगत मानों 1,2,3,4 - - - (S-12), (S-11),(S--10),(S-9) सुनिश्चित किया जा सकता है। इन x मानों के प्रति $(x_r , y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण के वे समस्त प्रतिरूपण प्राप्त कीजिये जो कि $(x , + y_r) = (S - x)$ समिका को $[x \neq x_r \neq y_r]$ के प्रतिबंध पर संतुष्ट करता हो। इस प्रकार षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के प्रति प्राप्त युग्मों की सख्या –

1• $(S - x) = (2y+1)$ होने के प्रति y अथवा (y-1) होंगे।

2• $(S - x) = 2y$ होने के प्रति (y-1) अथवा y-2) होंगे।

कुछ अपवादो में साथ मान्य होगा। सम षष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के प्रति $(x_r , y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण में प्राप्त युग्मों की संख्या m में से कोई भी चार युग्म चुनना होगा। जिसे चुनने के तरीकों की कुल संख्या $\frac{!m}{!4*!(m-4)} = \frac{(m-3*(m-2))*(m-1)*m}{24}$ का हल मान होगा। इस प्रकार अष्ठभुज का केन्द्रक में संख्या x के सभी मानों 1,2,3,4 - - - (S-10), (S-9),(S-8),(S-7) मानों के प्रति $(x_r , y_r)$ के युग्मीय प्रतिरूपण में प्राप्त युग्मों की संख्या $[m_1, m_2, m_3, m_4 - - - -m_{s-12}, m_{s-11}, m_{s-10}, m_{s-9}]$ होने पर इन प्रत्येक युग्मों की संख्या में से तीन युग्म चुनने के क्रमश $[t_1, t_2, t_3, t_4 - - - -t_{s-12}, t_{s-11}, t_{s-10}, t_{s-9}]$ प्राप्त होने पर

किसी योगमान $S \geq 12$ के प्रति तारांकित त्रिघरिया यंत्रम्–क्वचम के समस्त प्रकारों की संख्या $[t_1, t_2, t_3, t_4 \; - \; - \; - \; - t_{s-12}, t_{s-11}, t_{s-10}, t_{s-9}]$ का बिना किसी सूत्र समिका के सरल योगमान होगा।




योगमान S सा के 3 द्वारा विभाजित होने के प्रतिबध पर रचना के लिये –
सात पदी समांतर श्रेढी प्राप्त करने के प्रति प्रथम पद a और पदान्तर b प्राप्त करने

रैखिक समीकरण $a+4b = \frac{S}{3}$ = सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x को हल करनें पर a और पदान्तर b के एक या एक से अधिक हल युग्म प्राप्त हांगे।

योगमान S सा = 21 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b = \frac{21}{3} = 7$ सम ष्अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| | |
|---|---|
| a | 3 |
| b | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 1

योगमान S सा = 33 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b = \frac{33}{3} = 11$ सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| | | |
|---|---|---|
| a | 3 | 7 |
| b | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 2

योगमान S सा = 36 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b = \frac{36}{3} = 12$ सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| | | |
|---|---|---|
| a | 4 | 8 |
| b | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 3

योगमान S सा = 108 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b=\frac{108}{3}=36$ सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 8

योगमान S सा = 750 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b=\frac{750}{3}=250$ सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

| a | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 |

| a | 82 | 86 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 | 130 | 134 | 138 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 | 30 | 29 | 28 |

| a | 142 | 146 | 150 | 154 | 158 | 162 | 166 | 170 | 174 | 178 | 182 | 186 | 190 | 194 | 198 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 | 15 | 14 | 13 |

| a | 202 | 206 | 210 | 214 | 218 | 222 | 226 | 230 | 234 | 238 | 242 | 2366 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 62

योगमान S सा = 786 सा के प्रति

रैखिक समीकरण $a+4b=\frac{786}{3}=262$ सम अष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या x होगा को हल करनें पर

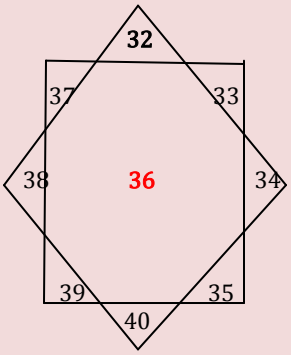
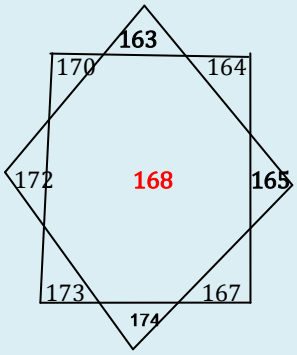
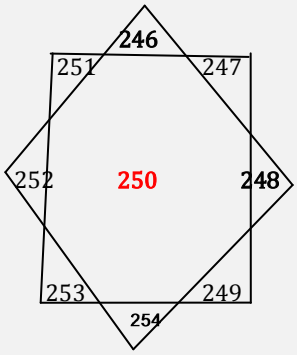
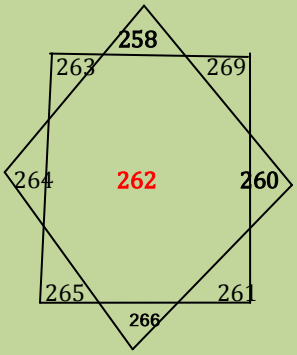
| a | 2 | 6 | 10 | 14 | 18 | 22 | 26 | 30 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 58 | 62 | 66 | 70 | 74 | 78 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 65 | 64 | 63 | 62 | 61 | 60 | 59 | 58 | 57 | 56 | 55 | 54 | 53 | 52 | 51 | 50 | 49 | 48 | 47 | 46 |

| a | 82 | 86 | 90 | 94 | 98 | 102 | 106 | 110 | 114 | 118 | 122 | 126 | 130 | 134 | 138 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 45 | 44 | 43 | 42 | 41 | 40 | 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 34 | 33 | 32 | 31 |

| a | 142 | 146 | 150 | 154 | 158 | 162 | 166 | 170 | 174 | 178 | 182 | 186 | 190 | 194 | 198 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 30 | 29 | 26 | 27 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 | 18 | 17 | 16 |

| a | 202 | 206 | 210 | 214 | 218 | 222 | 226 | 230 | 234 | 238 | 242 | 246 | 250 | 254 | 256 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| b | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

कुल प्रकारों की संख्या 65

| तारांकित 108सा त्रिघरिया<br>महावीरा<br>क्वच–यंत्र् | तारांकित 505सा त्रिघरिया<br>श्रीराम<br>क्वच–यंत्र् | तारांकित 750सा त्रिघरिया<br>श्री बूढ़ादेव<br>क्वच–यंत्र् | तारांकित 786सा त्रिघरिया<br>प्रवर दिगाार अल्लाह<br>क्वच–यंत्र् |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

उपरोक्त हल तालिका के अनुसार–

योगमान $S_{सा} = 3x_{सा}$ के प्रति सम आष्ठभुज का केन्द्रक में दर्ज संख्या $x$ होगा। तब यदि–

----14 B------

# अध्याय -15

## योग–योग संख्या श्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर
## (समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन)

**15-1 प्रस्तावना** समस्त ज्ञान–विज्ञान को ज्ञान के दो क्षेत्र कला एवं विज्ञान में बाँटा गया है। गणित विषय ज्ञान के दोनों क्षेत्र का विषय है। अर्थात् गणित कला और विज्ञान दोनों है। गणित के क्षेत्र में छत्तीसगढयों का ज्ञान विस्तार अंकगणित बीजगणित ज्योतिष के साथ ज्यामिति के क्षेत्र मे प्राचीन वास्तु (निर्माण) विज्ञान पर भी गहरा पकड़ रहा है। भवन ,मन्दिर निर्माण के साथ हवन –पूजन में विभिन्न प्रकार ज्यामिति आकृति रचना की जाती है। जिनका अपना–अपना विशेष महत्व होता है। इनको बनाने में अनुपातों का ज्ञान कमतर नहीं आका जा सकता है। इनके ज्ञान सागर के गहराई में डुबकी लगाने पर आप तथाकथित आधुनिक गणित को पीछे होता पायेंगे। ऐसा ही एक उदाहरण समांतर चतुर्भुज लुका–छुपी खेल के साथ–साथ संख्याओं के समांतर श्रेढ़ी, गुणोत्तर श्रेढ़ी एवं हरात्मक श्रेढ़ी से अलग हटकर एक विशिष्ट प्रकार की संख्या श्रेढी के उत्पत्ति के आधार से अवगत कराता है। जिसे उसके मूल गुंण (श्रेढ़ी का r वां पद का मान अपने पूर्व के प्रथम दो पद $(r-2)$ वाँ और $(r-1)$ वाँ पद मानों का योगमान होता है) पर **योग–योग संख्याश्रेढ़ी** कहा जा सकता है। जिसे आधुनिक गणित में लियोनार्दो फिबानिको को प्रथम अन्वेषक मानकर उनके नाम पर **फिबोनिकी संख्याश्रेढ़ी** कहा जाता है। एक विस्तार में **लुकस संख्याश्रेढ़ी** कहा गया है। चूँकि व्यापक विस्तार के मूल में फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी की संगता है। अतः मे बीजगणित की दृष्टि **बीजीय फिबोनिकी संख्याश्रेढ़ी** कहा जाना यथेष्ट होगा। आश्चर्य होगा यह संख्या श्रेढ़ी छत्तीसगढ़ी पूर्वजों के गणित ज्ञान के मुखान्तरित प्रश्नों के गूढ़ार्थ में छुपा हुआ है। इस गूढ़ार्थ में छुपे रहस्य का व्यापक विश्लेषण के लिये दादा–दादू (पोता या नाती) संवाद के माध्यम से अवलोकित करे।

**दादा कहे दादू से , बताओ तोला गणित बढ़िया से •**
**एला ते सूझा ले, गणित में नवा गोठ बना ले ••**
**दादा आवे जुन्ना अड़बड़ गणित पुचपुचिया •**
**दादा दादू में होवै रोज कुचकुचिया ••0**
**दादू घलो बड़े किलास गणित पढ़ैया•**
**दादा संग बने नवा–नवा गणित पुचपुचिया ••**
**दादा के गोठ सुने दादू होगे अड़बर खुश •**
**बिछावै कमरा, बैठे दादा–दादू लागे हे गणित बूझ ••**

**दादा के प्रश्न :**

**प्रश्न 1■** लम्बाई नापे के कोन्हे ईकाई में 8 ईकाई लम्बा अउ 8 ईकाई चौड़ा एक कागज ल जेकर चारो कोनिया बराबर कोण माप रहे। अइसनेच 13 ईकाई लम्बा अउ 5 ईकाई चौड़ा दूसरा कागज लेके। अब दादा

**[1]** 8*8 ईकाई वाले पहली कागज ला 8*5 अउ 8*3 ईकाई माप वाले दू तुकड़ा में बाँट ले थे। (आकृति 1A)

**[2]** 8*5 ईकाई वाले तुकड़ा कागज के दूनों लम्बा (8 ईकाई) कोर में अलग–अलग बायीं ओर से 3:5 और 5:3 में बटैया बिन्दु प्राप्त कर ये दूनों बिन्दु ला मिलाके दू ठन चरकोनिया बना ले थे।(आकृति 1A में ऊपर की ओर)

**[3]** 8*3 ईकाई वाले तुकड़ा कागज के एक सम्मुख सिरा ला मिलाके दू ठन तिकोनिया बना ले थे। (आकृति 1A में नीचे की ओर)

**[4]** अब [2] अउ[3] से मिले दूनो चरकोनिया अउ दूनों तिकोनिया ला 13*5 वाले दूसरा कागज में चिपका देथे। (आकृति 1B)

ये सब करे के बाद (आकृति 1B) ला दादू देखा के पूछते कुछ दिखतहे।

दादू झटपट कहिथे चारों तुकड़ा कागज मन आपस मिलके दूसरा कागज ला पूरा–पूरा ढाक लेहे।

दादा दादू ला फेर कहिथे बने देखना। तब दादू अच्छा से देखके कहिथे एक लकीर असन थोरिक दिखतहे। तब दादा दूसरा प्रश्न अइसनेच ढंग ले रचथे।

**प्रश्न 2■** लम्बाई नापे के कोन्हे ईकाई में 13 ईकाई लम्बा अउ 13 ईकाई चौड़ा एक कागज ल जेकर चारो कोनिया बराबर कोण माप रहे। अइसनेच 21 ईकाई लम्बा अउ 8 ईकाई चौड़ा दूसरा कागज ले–के। अब दादा

**[1]** 13*13 ईकाई वाले पहली कागज ला 13*8 अउ 13*5 ईकाई माप वाले दू तुकड़ा में बाँट ले थे। (आकृति 2।)

**[2]** 13*8 ईकाई वाले तुकड़ा कागज के दूनों लम्बा (13 ईकाई) कोर में अलग–अलग बायीं ओर से 5:8 और 8:5 में बटैया बिन्दु प्राप्त कर ये दूनों बिन्दु ला मिलाके दू ठन चरकोनिया बना ले थे।(आकृति 2A में ऊपर की ओर)

**[3]** 13*5 ईकाई वाले तुकड़ा कागज के एक सम्मुख सिरा ला मिलाके दू ठन तिकोनिया बना ले थे। (आकृति 2A में नीचे की ओर)

**[4]** अब [2] अउ [3] से मिले दूनो चरकोनिया अउ दूनों तिकोनिया ला 21*8 वाले दूसरा कागज में चिपका देथे। (आकृति 2B)

ये सब करे के बाद (आकृति 2B) ला दादू देखा फेर अउ पूछते कुछ दिखतहे।

दादू झटपट कहिथे यहूँ चारों तुकड़ा कागज मन आपस मिलके दूसरा कागज ला पूरा–पूरा ढाक लेहे।

दादा दादू ला फेर कहिथे बने देखना । तब दादू अच्छा से देखके कहिथे एमे तो तुकड़ा मन बाचके एक के ऊपर दूसरा हो जाथे।

दादा (दादू से) – दूनो बार काम तो एके जइसन करेन फेर ये अलग–अलग गोठ काबर होगे?

दादू (होशियारी मारे के हिसाब से)– उत्तर बता थे कि पहली वाला प्रश्न में 8*8 ईकाई कागज का क्षेत्रफल = 64 ईकाई वर्ग तथा 13*5 ईकाई कागज का क्षेत्रफल =65 ईकाई वर्ग होथे तब 1 ईकाई वर्ग के कागज नइ ढकाय। अउ दूसरा प्रश्न में13*13 ईकाई कागज का क्षेत्रफल =169 ईकाई वर्ग तथा 21*8 ईकाई कागज का क्षेत्रफल =168 ईकाई वर्ग होथे तब 1 ईकाई वर्ग के कागज के ऊपर तुकड़ा कागज मन एक ऊपर दूसरा हो जाथे।

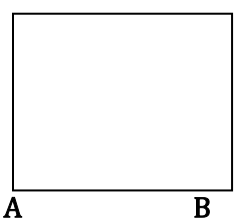
दादा (दादू से) – सत केहे ये तो सबे बता सकते थे पर अतकिच उत्तर बर अतिक लम्बा दू–दू ठन प्रश्न नइ गढ़हे हो। एमे बहुत बढ़िया रहस्य वाला गणित छुपे हे अइसे हमर पूरखा सियान मन ह बताथे। महु ये रहस्य के खोज करथव पर आज ले येकर रहस्य ला नइ पाय हो, ते तो दादू अड़बर पढ़ डारे हाबस तोला तो ये रहस्य ला तो खोजेला पड़ही। आज नही काली नही जबहे रहस्य ला पाबे तबहे बताबे।

दादू के रहस्य वाला अइसन गोठ ला सुन खोज में दिन–रात लगे रहिथे कई दिन–रात बाद एक रात अचानक सपना में समान्तर चतुर्भुज के लुका छुपी होवत देखथे। तब दादू रटपिट उठ के सिराहना रखे पेन कापी कम्पास डब्बा धर के सपना के समान्तर चतुर्भुज ला दादा के पूछे प्रश्न में खोजेबर लग जाथे। सपना साकार होथे समान्तर चतुर्भुज के लुका–छुपी ला प्रश्न के उत्तर के रूप में पाथे। रहस्य के पूरा हल अपन दादा ला बताय के तैयारी में जुट जाथे। तैयारी पूरा होय के बाद अड़बड़ खुश हो के अपन दादा करा जाथे। दादा अपन दादू के चेहरा देख कहिथे कि दादू लगथे तेहा मोर वो रहस्य वाला प्रश्न के रहस्य ला जानगे अड़बड़ खुष–खुष दिखतस। दादू अउ जादा खुष हो के कहिथे हा दादा हा रात–दिन इहिच रहस्य के हल खोज में लगे रेहेव एक रात सपना में ज्ञानदायनी मॉ सरस्वती के आषीश पायेव। आ दादू आ ये रहस्य ला समझा दादा खुष होके चटइ ऊपर कमरा बिछा के बैठ जाथे अउ अपन दादू ला बैठेबर कहिथे। दादू अपन दादा के पॉव परके आशीष पा के दादा के संग बैठ के बताथे कि दादा ये प्रश्न में तो अड़बड़ रहस्य छुप`हे सब ला सकेल के लिखबो ते एकठन किताब बन जाही । वाह दादू वाह अड़बड़ कमाल के बात हे में तो पूरा रहस्य जानके रहूँ ते रहस्य के विषय में किताब लिख छपवाय के पूरा खरचा मयहा करहूँ । हमर पूरखामन गोठिया–गोठिया के ही रीहिस कतको गोठ गवागे–भुलागे कही कुछुमा लिख के राखे रहितिस तो हमु छत्तीसगढिया मन के ज्ञान गोठ के बखान ला देश–दुनिया जानतिस। हमरो छत्तीसगढ़ के स्वर्णाक्षरित विकास इतिहास होतिस। अरे! महु कहा के गोठ कहा लेगेव, अपन ये रहस्य वाला गोठ–बात में आवन। मोला बहुत चुटपुटी धर ले हे। तब दादू कहिथे रहस्य बताय के पहिली रहस्य के नाम दे दथो। हमर छत्तीसगढ़ी गोठ भाषा में **समान्तर चतुर्भुज के लुका छुपी** अउ हमर राष्ट्र हिन्दी में **समान्तर चतुर्भुज का दर्शन और विलोपन।**

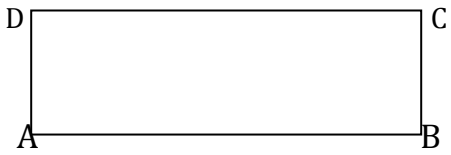
शब्दार्थ उपरोक्त गणित प्रसंग पर पंक्ति और दादा–दादू संवाद के हिन्दी में विश्लेषण करने के पूर्व छत्तीसगढ़ी शब्दो का हिन्दी शब्द प्रस्तुत करना यथेश्ठ होगा।

वर्ग आकृति ऐसा चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ एवं कोण माप इकाईवार बराबर माप की हो वर्ग आकृति कहलाता है।

वर्ग आकृति→

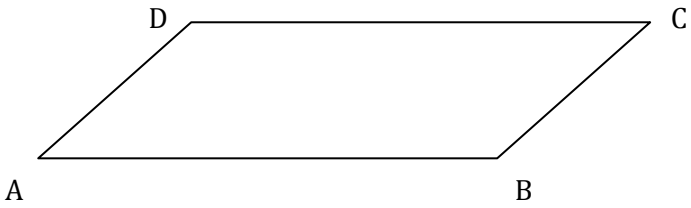


**आयत–** ऐसा चतुर्भुज आकृति जिसकी आसन्न भुजाएँ अलग–अलग माप एवं सम्मुख भुजाएँ बराबर माप की तथा चारों कोण बराबर के हो। आयत कहलाता है।



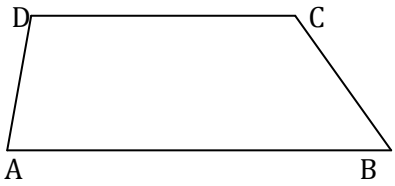

आयत आकृति

**समान्तर चतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज आकृति जिसकी आसन्न भुजाएँ अलग–अलग माप की, सम्मुख भुजाएँ बराबर माप के हो एक ही ओर के अन्तः कोण माप अलग–अलग के हो और इनका योग 180 अंष हो सम्मुख कोण बराबर माप के हो समान्तर चतुर्भुज कहलाता है।

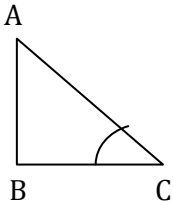



समान्तर चतुर्भुज आकृति

**समलम्ब चतुर्भुज** – ऐसा चतुर्भुज केवल सम्मुख भुजा का एक युग्म ही समान्तर हो समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।




समलम्ब चतुर्भुज आकृति




**त्रिक या त्रिभुजांक** समकोण त्रिभुज ABC में $m\angle ABC$ समकोण है। जिसके न्यून कोण $m\angle BCA = m\angle C$ के प्रति आधार(आसन्न), भुजा BC, लम्ब(सम्मुख), भुजा AB सम तथा कर्ण ACसम के मापों का मानक अनुपात x:y:z त्रिक या त्रिभुजांक कहलाता है। समकोण त्रिभज त्रिक प्रमेय अनुसार–

$(m\text{ आधार})^2 + (m\text{ लम्ब})^2 = (m\text{ कर्ण})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2$ प्रमाणित है।

यदि समकोण त्रिभुज ABC में $m\angle ABC$ समकोण है। जिसके न्यून कोण $m\angle ACB = m\angle C$ के प्रति आधार(आसन्न), भुजा BC, लम्ब(सम्मुख), भुजा AB सम तथा कर्ण ACसम के मापों का मानक अनुपात x:y:z =3:4:5 से $(m\text{ आधार})^2 + (m\text{ लम्ब})^2 = (m\text{ कर्ण})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = 5^2$

$\Rightarrow 9 + 16 = 25$

**त्रिभुजांक के सापेक्ष बीजांक**

**बीजांक** $m\angle BCA = m\angle\theta$ कर त्रिभुजांक x ,y,z के प्रति $m\angle\theta$ का बीजांक [p,q]=[(x+z),y]

$m\angle 2\theta$ का बीजांक [p,q]=[(x,y] का मानक अनुपात हल होगा।

**आदर्श बीजांक** बीजांक [p,q] का आदर्श बीजांक $P=[\frac{p}{q}\ 1]$ या केवल $\frac{p}{q} = P$ में व्यक्त होगा।

**जैसे** $m\angle BCA = m\angle\theta$ कर त्रिभुजांक 4 ,3,5 के प्रति $m\angle\theta$ का बीजांक [p,q]=[(5+4),3] =[9, 3]=[3,1]

$m\angle 2\theta$ का बीजांक [p,q]=[(4,3] होगा।

**आदर्शबीजांक** बीजांक [p,q] का आदर्श बीजांक $P=[\frac{p}{q} - 1\ ]=[\frac{9}{3}\ 1] =[3,1]$[या केवल $\frac{p}{q} = P = 3$ व्यक्त होगा।

**बीजांक के सापेक्ष त्रिभुजांक** $m\angle\theta$ का बीजांक [p,q] के प्रति $m\angle\theta$ कर त्रिभुजांक [x, y, z]=

$[(p^2-q^2), 2pq, (p^2+q^2)]$ का मानक अनुपात हल होगा।

$m\angle\theta$ का बीजांक $[p,q]$ के प्रति $m\angle\frac{\theta}{2}$ का त्रिभुजांक $[x, y, z]=[\ p, q\ , \sqrt{p^2+q^2}\ ]$ का मानक अनुपात हल होगा।

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p,q]$ के प्रति $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x, y, z]=[\ p, q\ , \sqrt{p^2+q^2}\ ]$ का मानक अनुपात हल होगा।

### $m\angle\theta$ का आकलन

### A वास्तविक मान R के निकटतर प्राप्ति के लिये

**[1]** त्रिकोणमिति अवकलन प्रमेय में सिद्ध किया जा चुका है कि ज्यों–ज्यों न्यूनकोण $m\angle\theta$ का कोण माप इकाई रेडियन में शून्य की ओर अग्रसर होता जाता है त्यों–त्यो $m\angle\theta$ का आकलन मान $Sin\theta$ रेडियन के सन्निकट प्राप्त होने की ओर होता है। अर्थात् $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x,\ y,\ z]\ =[(p^2-q^2),\ 2pq,\ (p^2+q^2)]$ के सापेक्ष $m\angle\theta$ का आकलन मान $\frac{y}{z}=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ रेडियन होगा जो $m\angle\theta$ के वास्तविक मान के न्यूनता (उनामान) लिये निकटतर होने की ओर होता है।

**[2]** त्रिकोणमिति बीजांक प्रमेय में सिद्ध किया जा चुका है कि बीजांक $[p,q]$ के प्रति आदर्श बीजांक $\frac{p}{q}$ का हल मान P ज्यों–ज्यों अनन्त की ओर अग्रसर होता जाता है त्यों–त्यो न्यून कोण $m\angle\theta$ का आकलन मान $\frac{2}{P}$ रेडियन के सन्निकट प्राप्त होने की ओर होता है, जो $m\angle\theta$ के वास्तविक मान के अधिकता (आगरमान) लिये निकटतर होने की ओर होता है।

**ध्यानाकर्षण** न्यूनकोण $m\angle\theta$ का कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ एवं $m\angle\theta=\frac{2}{P}$ का आकलन का वास्तविक मान R के प्रति सही होने के लिये निकटतर प्राप्ति के लिये आदर्श अीजांक $P=\frac{p}{q}$ का मान प्रतिबंध तालिका–

| क्र. | वास्तविक मान R के प्रति सही होने | $m\angle\theta=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ | $m\angle\theta=\frac{2}{P}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | दशमलव बाद 3 स्थान तक के लिये | $P\geq 30$ | $P\geq 13$ |
| 2 | दशमलव बाद 4 स्थान तक के लिये | $P\geq 35$ | $P\geq 24$ |
| 3 | दशमलव बाद 5 स्थान तक के लिये | $P\geq 57$ | $P\geq 52$ |

### B वास्तविक मान R के सन्निकट / वास्तविक मान R ही प्राप्ति के लिये

$m\angle\theta$ का बीजांक $[p,q]$ के प्रति उपरोक्त बिन्दु **A** क अनुसार प्राप्त दोनों मानों का मध्यमान हल होगा।

**[1]** $m\angle\theta=[\frac{q}{p}+\frac{pq}{p^2+q^2}]=q[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+q^2}]$ लिया जाना यथेष्ठ होगां।

**[2]** $m\angle 2\theta=[\frac{2pq}{p^2-q^2}+\frac{2pq\,(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)(p^2+q^2)}]=2pq[\frac{1}{p^2-q^2}+\frac{(p^2-q^2)}{(p^2+q^2)(p^2+q^2)}]$ लिया जाना यथेष्ठ होगां।

स्वतन्त्रता पूर्व छत्तीसगढ़ में प्रचलित लम्बाई नापने की ईकाइयाँ परिशिष्ट क्रमांक **4** अवलोकित कीजिये।

दादा= पिता का पिता, एवं पिता के पिता के भाईगण, दादू या नाती = पुत्र का पुत्र, तोला =तुम्हे या तुमको, एला = इसे या इसको, सूझाना = हल करना, गोठ = बात या सिद्धांत, जुन्ना = पुराना या बहुत पहले का, अड़बड़ = बहुत अधिक, पुचपुचिया = षौकीन, कुचकुचिया = एक ही विषय मे बात (बहस) करने वाले, कमरा = कम्बल, कोनिया = कोण, अइसनेच = ऐसा ही, तिकोनिया = तीन कोण वाला आकृति या त्रिभुज, अतकिच = बहुत थोड़ा या बहुत कम या बहुत छोटा , अतिक = बहुत अधिक या बहुत बड़ा , इहिच = इसी।

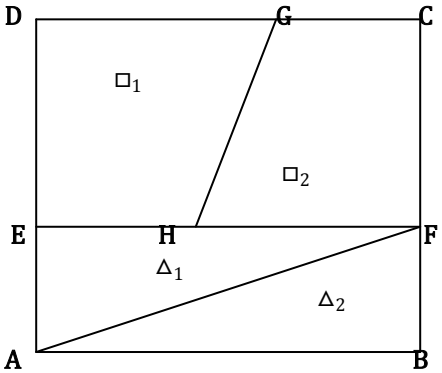
**विश्लेषण** अपने नाती के प्रति दादा के वात्सल्य प्रेम पुत्र के प्रति पिता के प्रेम से बढ़कर होता है। दादा अपने संचित ज्ञान को नाती को मुखान्तरित कर बहुत खुशी अनुभव करता है। जब दादा–नाती की रूचियाँ समान हो तो और क्या कहने। दोनों गणित अध्ययन में रूचि रखते हैं। दादा अपने गणितीय ज्ञान को नयी पीढ़ी को मुखान्तरित करने का प्रयास करता हैं। ऊपर बताये प्रश्न सभी ठीक–ठीक समझा सके, के भवना में विश्लेषण हिन्दी में प्रस्तुत है।

**15-2 योग–योग संख्याश्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर** योग–योग संख्याश्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर प्रवेश करने के क्रम में समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन कराने विषयक संगत प्रश्न1 और प्रश्न 2 के हल की ओर अवलोकन कीजिए।

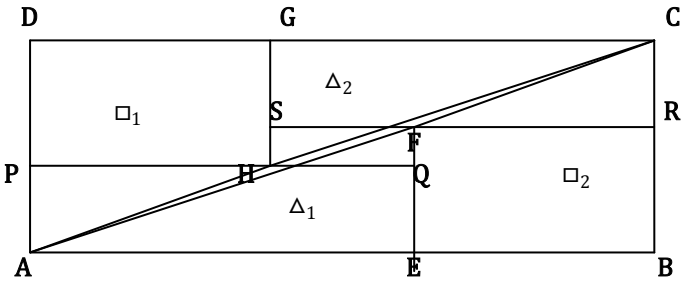
**रचना [1] समांतर चतुर्भुज का दर्शन कराने विषयक** आकृति **14.1 (a)** ABCD 8 *8 वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF}=\overline{CD}$

$=8$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = 5$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = 8$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = 3$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = 5$ इकाई $\overline{GC} = 3$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = 3$ इकाई $\overline{HF} = 5$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1 = EHGD$ और $\square_2 = HFCG$ प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = A\,EF$ और $\Delta_2 = ABF$ प्राप्त कीजिए।

2 ग्रीड लाइन $= 1$ इकाई माप




आकृति **15.1 (a)**




आकृति **15.1(b)**

आकृति **15-1 (a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\Delta_1$ $\Delta_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15-1(b)** ABCD 13*5 वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **15-1 (a)** का | $\square_1 = EHGD$ | $\square_2 = HFCG$ | $\Delta_1 = A\,EF$ | $\Delta_2 = ABF$ |
| आकृति **15-1(b)** में स्थापन | $\square_1 = AHGD$ | $\square_2 = EBCF$ | $\Delta_1 = A\,EF$ | $\Delta_2 = CGH$ |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का दर्शन** होना कहते हैं।

## दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति

समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ $\square_2$ एवं समकोण त्रिभुज $\Delta_1\Delta_2$ स्थापन से $\overline{AD}$ , $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ आयत ABCD के AB सम्मुख CD भुजा के सापेक्ष समकोणिक– समांतर होंगे। शीर्ष H से $\overline{AD} \| \overline{EF}$ पर $\overline{AE} \| \overline{PQ}$ और शीर्ष F से $\overline{GH} \| \overline{CB}$ पर $\overline{GC} \| \overline{SR}$ की रचना कीजिए। उक्त रचना से $\overline{AE}$ , $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{CH}$ आयत ABCD के AD सम्मुख BC भुजा के सापेक्ष समकोणिक–समांतर होंगे।

तब – समकोण त्रिभुज APH $\cong$ समकोण त्रिभुज FRC और आयत HQFS दर्शित होगा।

तथा $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = 5$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = 3$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = 2$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = 8$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = 13$ इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = 3 - 2 = 1$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे।

इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय $(X) = [1, 2, 3, 5, 8, 13,]$ का अवलोकन में– (पद$_3$ $=3 = 1+2 =$ पद$_1$ $+$ पद$_2$) , (पद$_4$ $=5 = 2+3 =$ पद$_2$ $+$ पद$_3$), (पद$_5$ $=8 = 3+5 =$ पद$_3$ $+$ पद$_4$) ,, (पद$_6$ $=13 = 5+8 =$ पद$_4$ $+$ पद$_5$) ,, योग–योग श्रेढ़ी की ओर होने को दर्शित करता है।

## दर्शन में आयै समांतर चतुर्भुज AFCH का ज्यामिति विश्लेश्टण

**1■ क्षेत्रफल $\blacksquare_A =$** 1 इकाई वर्ग

**2■ सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$

$AF =$ समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण $= \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{8^8 + 3^2} = \sqrt{73}$

$=$

$CH =$ समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण $= \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

युग्म$_2$ $S_2$

$FC =$ समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण $= \sqrt{FR^2 + RC^2}$ त्र$\sqrt{5^2 + 2^2}$ त्र$\sqrt{29}$

$=$

$AH =$ समकोण त्रिभुज APH का कर्ण $= \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

**3■ विकर्ण**

**विकर्ण$_1$** AC = आयत ABCD का विकर्ण AC $=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{13^2+5^2}=\sqrt{194}$

**विकर्ण$_2$** FH = आयत HQFS का विकर्ण FH $=\sqrt{HQ^2+QF^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

**4■ समातर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भ ुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1\div\sqrt{73} = \frac{1}{\sqrt{73}}$

$\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1\div\sqrt{29} = \frac{1}{\sqrt{29}}$

**5■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]**

1• m∠ HAF = m∠HCF का त्रिभुजांक = [---- ■$_A$ $(S_1 * S_2)$] = [---- 1 $(\sqrt{73}*\sqrt{29})$]

$= [\sqrt{2116}\quad 1\quad \sqrt{2117}] = [46\quad 1\quad \sqrt{2117}]$

2• m∠ AFC = m∠AHC का त्रिभुजांक = m∠ HAF = m∠HCF के सम्पूरक कोण मापका त्रिभुजांक

$= [\overline{46}\quad 1\quad \sqrt{2117}]$

**6■ m∠ HAF = m∠HCF = m∠θ का आकलन**

[मेरी कृति गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धत्ति छत्तीसगढ़ की देन सोपान **3/3** त्रिभुजांक एवं बीजांक आधारित त्रिकोणमिति अध्याय .9 समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन अनुच्छेद **9-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता अन्तर्गत बिन्दु 8■ में प्राप्त पाँच समिका का अनुप्रयोग से ]**

**(1) m∠θ का त्रिभुजांक [x y z] = [ (46 1 $\sqrt{2117}$ ] से**

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = (\text{Sin}\,\theta)^r = (\frac{■_A}{S_1*S_2})^r = \frac{1}{\sqrt{2117}} = \frac{1}{46.01} = 0.021734$ रेडियन

**(2) m∠θ का बीजांक [p q] = [ $\{\sqrt{2117}+46\}$ 1 ] = [92.01 1] से**

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{2q}{p} = \frac{2*1}{92.01} = \frac{2}{92.01} = 0.021736$ रेडियन

**(3) बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभजांक के सापेक्ष प्राप्त m∠θ के मापों के मध्यमान नियम में**

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = q\left[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+q^2}\right] = 1*\left[\frac{1}{92.01}+\frac{92.01}{(92.01)^2+1^2}\right]$

$= [0.010868+0.010867] = 0.021735$ रेडियन

**(4) m∠2θ का बीजांक [p q ] = [ (46 1 ] के सापेक्ष**

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{q}{2}\left[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+q^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{46}+\frac{46}{46^2+1^2}\right]$

$= \frac{1}{2}[0.021739+0.0217288] = 0.021733$ रेडियन

**(5) m∠2θ का बीजांक [p q ] = [ (46 1 ] के सापेक्ष m∠2θ का त्रिभुजांक [x y z ] = $[(p^2-q^2)\quad 2pq\quad (p^2+q^2)]$ से**

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{1}{2}*[\frac{y}{z}] = [\frac{pq}{p^2+q^2}] = \left[\frac{46}{46^2+1^2}\right] = 0.0217288$ रेडियन

उपरोक्त पाँचों समिका हल अन्तर्गत दशमलव बाद पाँच स्थान के लिए–

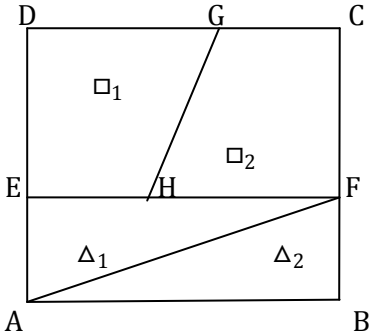
कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = 0.02173$ रेडियन मान्य होगा। जिसके प्रति

कोण माप इकाई अंश मे $\mathbf{m\angle\theta} = 0.02173*\frac{630}{11} = 1.24453$ अंश मान्य होगा।

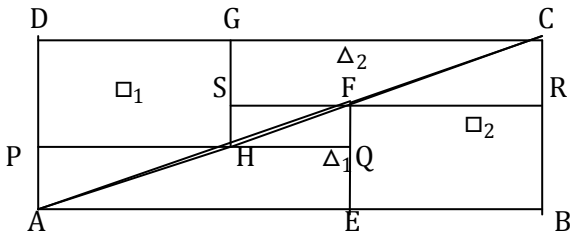
**रचना [2] समांतर चतुर्भुज का विलोपन कराने विषयक** आकृति **9.2 (a)** ABCD 13 *13 वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF}$ =$\overline{CD}$ =13 इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE}$ =$\overline{CF}$ =8 इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF}$ =$\overline{AB}$ =13 इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA}$ =$\overline{FB}$ =5 इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC}$ =8 इकाई $\overline{GC}$ = 5 इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH}$ =5 इकाई $\overline{HF}$ = 5 इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $□_1$ =EHGD और $□_2$ =HFCG प्राप्त

कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = A\,EF$ और $\Delta_2 = ABF$ प्राप्त कीजिए।

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति **15.2 (a)**




आकृति **15.2 (b)**

इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय $(X) = [1, 2, 3.\ 5, 8, 13,]$

आकृति **15.2 (a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\Delta_1$ $\Delta_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15.2(b)** ABCD 21*8 वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में निम्नानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **15.2 (a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\Delta_1 = A\,EF$ | $\Delta_2$=ABF |
| आकृति **15.2(b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\Delta_1 = A\,EF$ | $\Delta_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव में दो बार आ जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का विलोपन** होना कहते हैं।

**विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति**

समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ $\square_2$ एवं समकोण त्रिभुज $\Delta_1\Delta_2$ स्थापन से $\overline{AD}$ , $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ आयत ABCD के AB सम्मुख CD भुजा के सापेक्ष समकोणिक– समांतर होंगे। शीर्ष H से $\overline{AD} \| \overline{EF}$ पर $\overline{AE} \| \overline{PQ}$ और शीर्ष F से $\overline{GH} \| \overline{CB}$ पर $\overline{GC} \| \overline{SR}$ की रचना कीजिए। उक्त रचना से $\overline{AE}$ , $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{CH}$ आयत ABCD के ADसम्मुख BC भुजा के सापेक्ष समकोणिक– समांतर होंगे। तब – समकोण त्रिभुज APH ≅ समकोण त्रिभुज FRC और आयत HQFS दर्शित होगा।

तथा $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = 8$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = 5$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = 3$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = 13$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = 21$ इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = 5 - 3 = 2$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे।

इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय $(Y) = [\,2\,,3\,,5\,,8\,,13,21\,]$ का अवलोकन में– (पद$_3$ =5=2+3 = पद$_1$ + पद$_2$) , (पद$_4$ =8 =3+5 = पद$_2$ + पद$_3$), (पद$_5$ =13 =5+8 = पद$_3$ + पद$_4$) ,, (पद$_6$ =21 =8+13 = पद$_4$ + पद$_5$) ,, योग–योग श्रेढ़ी की ओर होने को दर्शित करता है।

**विलोपन में आयै समांतर चतुर्भुज AHCF का ज्यामिति एवं त्रिकोणमिति विश्ले ण**

**1■ क्षेत्रफल $\blacksquare_A$ =** 1 इकाई वर्ग

**2■ सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$ $\begin{cases} AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \\ = \\ CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \end{cases}$

युग्म$_2$ $S_2$ $\begin{cases} FC = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \\ = \\ AH = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \end{cases}$

**3■ विकर्ण**

विकर्ण$_1$ AC = आयत ABCD का विकर्ण AC $=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{21^2+8^2}=\sqrt{505}$

विकर्ण$_2$ FH = आयत HQFS का विकर्ण FH $=\sqrt{HQ^2+QF^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$

**4■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी = ( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1\div\sqrt{194}=\frac{1}{\sqrt{194}}$

$\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1\div\sqrt{73}=\frac{1}{\sqrt{73}}$

**5■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]**

**1•** m∠ HAF = m∠HCF का त्रिभुजांक = [ ---- $\blacksquare_A$ $(S_1 * S_2)$ ]

= [ ---- 1 $(\sqrt{194}*\sqrt{73})$]

= $[\sqrt{14161}$ 1 $\sqrt{14162}]$

= [119 1 $\sqrt{14162}]$

**2•** m∠ AFC = m∠AHC का त्रिभुजांक = m∠ HAF = m∠HCF के सम्पूरक कोण मापका त्रिभुजांक

= $[\overline{119}$ 1 $\sqrt{14162}]$

**6■ m∠ HAF = m∠HCF = m∠θ का आकलन**

[मेरी कृति गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धत्ति छत्तीसगढ़ की देन सोपान **3/3** त्रिभुजांक एवं बीजांक आधारित त्रिकोणमिति` अध्याय .9 समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन अनुच्छेद **9-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता अन्तर्गत बिन्दु 8■ में प्राप्त पाँच समिका का अनुप्रयोग से ]**

**(1) m∠θ का त्रिभुजांक [x y z] =** [ ( 119 **1** $\sqrt{14162}$ ] से

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = (\text{Sin }\theta)^r = (\frac{\blacksquare_A}{S_1*S_2})^r = \frac{1}{\sqrt{14162}} = \frac{1}{119.004} = 0.008403$ रेडियन

**(2) m∠θ का बीजांक [p q] =** [ $\{\sqrt{14162}$ **+119**} **1** ] = [**238. 004 1**] से

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta = \frac{2q}{p} = \frac{2*1}{238.004} = \frac{1}{119.002}} = 0.008403$ रेडियन

**(3) बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त m∠θ के मापों के मध्यमान नियम में**

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta = q\left[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+q^2}\right] = 1 * [\frac{1}{238.004}+\frac{238.004}{(238.004)^2+1^2}]}$

$= [0.004201+0.004201] = 0.008402$ रेडियन

**(4) m∠2θ का बीजांक [p q ] =** [ ( 119 **1** ] **के सापेक्ष**

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta = \frac{q}{2}[\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{119}+\frac{119}{119^2+1^2}]}$

$=\frac{1}{2}[0.008403 + 0.008402] = 0.008402$ रेडियन

**(5) m∠2θ का बीजांक [p q ] =** [ ( 119 **1** ] **के सापेक्ष m∠2θ का त्रिभुजांक [x y z ] =** $[(p^2-q^2)$ **2pq** $(p^2+q^2)]$ **से**

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta = \frac{1}{2} * [\frac{y}{z}] = [\frac{pq}{p^2+q^2}] = \left[\frac{119*1}{119^2+1^2}\right]} = 0.008402$ रेडियन

उपरोक्त पाँचों समिका हल अन्तर्गत दशमलव बाद छह स्थान के लिए–

कोण माप इकाई रेडियन मे **m∠θ** $=0.008402$ रेडियन मान्य होगा। जिसके प्रति

कोण माप इकाई अंश मे $\mathbf{m\angle\theta} = 0.008402 * \frac{630}{11} = 0.481205$ अंश मान्य होगा।

पुनः समुच्चय (Y) =[ 2 , 3 , 5 , 8 , 13, 21] में से समुच्चय (X) = [1, 2, 3. 5, 8, 13,] के अवयव को यथा क्रम जोड़ने घटाने पर प्राप्त क्रमशः समुच्चय (S) =[ 3 , 5 , 8 , 13, 21 34] समुच्चय (Z) =[ 1 , 1 , 2 , 3, 5, 8] योग–योग श्रेढ़ी की ओर होने को दर्शित करता है।

**15-3 मूल योग–योग संख्या श्रेढ़ी** समुच्चय (Z) =[ 1 , 1 , 2 , 3, 5 8] का विस्तार =[ 1 , 1 , 2 , 3, 5 8, 13 ,21, 34,–, – , – ] है जिसे गणित प्रेमी लियोंनार्दो फिबोनिकी ने अपने आयु के 72 वें बसंत पर प्राप्त किये। कहते है इस पर उन्होंने कोई विशेष कार्य नहीं किये। आधुनिक गणित अध्ययन में लियोंनार्दो फिबोनिकी के नाम पर फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी कहते है।

आगे चलकर महान गणितज्ञ लुकस ने **योग–योग** संख्या श्रेढ़ी एक दूसरा स्वरूप– [1, 3 , 4, 7, 11 , 18 , 29 , 47,–, – , – ] विकसित कर उन्होंने अपने इस **श्रेढ़ी** पर कार्य किये। जो उनके नाम पर लुकस संख्या श्रढ़ी के नाम गणित जगत मे प्रसिद्ध हुआ।

व्यापक विस्तार में योग–योग संख्या श्रेढ़ी का बीजीय स्वरूप का मार्ग प्रशस्त करता है। यथा अवलोकित करें।–

$[a , b, (a+b) , (a+2b) , (2a+3b) , (3a+5b) , (5a+8b) , (8a+13b) , (13a+21b) -, -, -, -,]$

संकेतन मे योग–योग संख्या श्रेढ़ी $A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , -, -, - , -, A_{n-3} , A_{n-2} , A_{n-1} , A_n$ के प्रति पदों की संख्या $n \geq 3$ के लिए $A_r = A_{r-1} + A_{r-2}$ का प्रतिबंध होगा।

जैसे योग–योग संख्या श्रेढ़ी $5, 7, 12 , 19 , 31 , 50 , 81 , 131 , 212 , 343 , 555 -, -, -, -,$ में

$$A_{10} = A_9 + A_8 \Rightarrow 343 = 212+131$$

**अध्ययन संकेत** योग–योग संख्या श्रेढ़ी में– **n वाँ** फिबोनिकी संख्या का अध्ययन संकेत $F_n$ ,

**n वाँ** लुकस संख्या का अध्ययन संकेत $L_n$

तथा **n वाँ** बीजीय योग–योग संख्या श्रेढ़ी संख्या का अध्ययन संकेत $A_n$ लिया गया है।

**सरिणी 15.1**

**योग–योग संख्या श्रेढ़ी**

| फिबोनिकी संख्या | | लुकस संख्या | | योग–योग संख्या श्रेढ़ी | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_1$ | 1 | $L_1$ | 1 | $A_1$ | A |
| $F_2$ | 1 | $L_2$ | 3 | $A_2$ | B |
| $F_3$ | 2 | $L_3$ | 4 | $A_3$ | a + b |
| $F_4$ | 3 | $L_4$ | 7 | $A_4$ | a + 2b |
| $F_5$ | 5 | $L_5$ | 11 | $A_5$ | 2a + 3b |
| $F_6$ | 8 | $L_6$ | 18 | $A_6$ | 3a + 5b |
| $F_7$ | 13 | $L_7$ | 29 | $A_7$ | 5a + 8b |
| $F_8$ | 21 | $L_8$ | 47 | $A_8$ | 8a + 13b |
| $F_9$ | 34 | $L_9$ | 76 | $A_9$ | 13a + 21b |
| $F_{10}$ | 55 | $L_{10}$ | 123 | $A_{10}$ | 21a + 34b |
| $F_{11}$ | 89 | $L_{11}$ | 199 | $A_{11}$ | 34a + 55b |
| $F_{12}$ | 144 | $L_{12}$ | 322 | $A_{12}$ | 55a + 89b |
| $F_{13}$ | 233 | $L_{13}$ | 521 | $A_{13}$ | 89a + 144b |
| $F_{14}$ | 377 | $L_{14}$ | 843 | $A_{14}$ | 144a + 233b |
| $F_{15}$ | 610 | $L_{15}$ | 1364 | $A_{15}$ | 233a + 377b |
| $F_{16}$ | 987 | $L_{16}$ | 2207 | $A_{16}$ | 377a + 610b |
| $F_{17}$ | 1597 | $L_{17}$ | 3571 | $A_{17}$ | 610a + 987b |
| $F_{18}$ | 2584 | $L_{18}$ | 5778 | $A_{18}$ | 987a + 1597b |
| $F_{19}$ | 4181 | $L_{19}$ | 9349 | $A_{19}$ | 1597a + 2584b |
| $F_{20}$ | 6765 | $L_{20}$ | 15127 | $A_{20}$ | 2584a + 4181b |
| $F_{21}$ | 10946 | $L_{21}$ | 24476 | $A_{21}$ | 4181a + 6765b |
| $F_{22}$ | 17711 | $L_{22}$ | 39603 | $A_{22}$ | 6765a + 10946b |
| $F_{23}$ | 28657 | $L_{23}$ | 64079 | $A_{23}$ | 10946a + 17711b |
| $F_{24}$ | 46368 | $L_{24}$ | 103682 | $A_{24}$ | 17711a + 28657b |
| $F_{25}$ | 75025 | $L_{25}$ | 167761 | $A_{25}$ | 28657a + 46368b |
| $F_{26}$ | 121393 | $L_{26}$ | 271443 | $A_{26}$ | 46368a + 75025b |
| $F_{27}$ | 196418 | $L_{27}$ | 439204 | $A_{27}$ | 75025a + 121393b |
| $F_{28}$ | 317811 | $L_{28}$ | 710647 | $A_{28}$ | 121393a + 196418b |
| $F_{29}$ | 514229 | $L_{29}$ | 1149851 | $A_{29}$ | 196418a + 317811b |
| $F_{30}$ | 832040 | $L_{30}$ | 1860498 | $A_{30}$ | 317811a + 514229b |
| $F_{31}$ | 1346269 | $L_{31}$ | 3010349 | $A_{31}$ | 514229a + 832040b |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $F_{32}$ | 2178309 | $L_{32}$ | 4870847 | $A_{32}$ | 832040 a + 1346269b |
| $F_{33}$ | 3524578 | $L_{33}$ | 7881196 | $A_{33}$ | 1346269a + 2178309b |
| $F_{34}$ | 5702887 | $L_{34}$ | 12752043 | $A_{34}$ | 2178309 a + 3524578b |
| $F_{35}$ | 9227465 | $L_{35}$ | 20633239 | $A_{35}$ | 3524578 a + 5702887b |
| $F_{36}$ | 14930352 | $L_{36}$ | 33385282 | $A_{36}$ | 5702887a + 9227465b |
| $F_{37}$ | 24157817 | $L_{37}$ | 54018521 | $A_{37}$ | 9227465a + 14930352b |
| $F_{38}$ | 39088169 | $L_{38}$ | 87403803 | $A_{38}$ | 14930352a + 24157817b |
| $F_{39}$ | 63245986 | $L_{39}$ | 141422324 | $A_{39}$ | 24157817a + 39088169b |
| $F_{40}$ | 102334155 | $L_{40}$ | 228826127 | $A_{40}$ | 39088169a + 63245986b |
| $F_{41}$ | 165580141 | $L_{41}$ | 370248451 | $A_{41}$ | 63245986a + 02334155b |
| $F_{42}$ | 267914296 | $L_{42}$ | 599074578 | $A_{42}$ | 102334155a + 165580141b |
| $F_{43}$ | 433494437 | $L_{43}$ | 969323029 | $A_{43}$ | 165580141a + 267914296b |
| $F_{44}$ | 701408733 | $L_{44}$ | 1568397609 | $A_{44}$ | 267914296a + 433494437b |
| $F_{45}$ | 1134903170 | $L_{45}$ | 2537720636 | $A_{45}$ | 433494437a + 701408733b |
| $F_{46}$ | 1836311903 | $L_{46}$ | 4106118243 | $A_{46}$ | 701408733a + 1134903170b |
| $F_{47}$ | 2971215073 | $L_{49}$ | 6643838879 | $A_{47}$ | 1134903170a + 1836311903b |
| $F_{48}$ | 4807526976 | $L_{48}$ | 10749957122 | $A_{48}$ | 1836311903a + 2971215073b |
| $F_{49}$ | 7778742049 | $L_{49}$ | 17393796001 | $A_{49}$ | 2971215073a + 4807526976b |
| $F_{50}$ | 125862269025 | $L_{50}$ | 28143753123 | $A_{50}$ | 4807526976a + 7778742049b |

**15-4 योग –योग संख्या श्रेढी का स्तर्** यदि किसी योग–योग संख्या श्रेढी A का प्रथम पद a और द्वितीय पद b हो तो– योग–योग संख्या श्रेढी A का स्तर ( a , b) होगा। संकेत में ( a , b)A दर्शित होगा। अतः फिबोनिकी संख्या का स्तरं (1,1) होगा। संकेत में ( 1 , 1)F दर्शित होगा। लुकस संख्या का स्तरं (1,3) होगा। संकेत में ( 1 , 3)L दर्शित होगा।

**( 1 , 1)F और ( a , b)A में सम्बंध का अभिगृहीत समिका**

सारिणी के अवलोकन से $\mathbf{r> 3}$ के प्रति $\mathbf{A_r = aF_{r-2} + bF_{r-1}}$ स्पष्टतः प्रमाणित है।

स्वयं जाँच करें $\mathbf{L_r = F_{r-2} + 3F_{r-1} = F_r + 2F_{r-1} = F_{r+1} + F_{r-1}}$

**15-5 योग –योग संख्या श्रेढी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका** किसी भी स्तर के योग–योग संख्या श्रेढी $[A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , -, -, -, -, -, -, A_{n-3} , A_{n-2} , A_{n-1} , A_n ]$ में स्थित भी दो क्रमागत पद अवयव $A_r$ और $A_{r+1}$ सें $(A_r^2 + A_r * A_{r-1} - A_{r+1}^2)$ का मापांक मान उस श्रेढ़ी के प्रथम पद अवयव $A_1$ ओर द्वितीय पद, $A_2$ सें $(A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2)$ का मापांक मान में स्थिरांक नियम का पालन करता है।

अर्थात् $| A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2 | = | A_2^2 + A_2 * A_3 - A_3^2 | = | A_3^2 + A_3 * A_4 - A_4^2 | =$ |---|=|---|=|---|= |=$|A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2 |$ =|---|=[---i =$[A_{n-2}^2 + A_{n-2} * A_{n-1} - A_{n-1}^2 |$

$= | A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n - A_n^2 | = |A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$ होगा।

**मापांक का प्रतिबंध होने का स्पष्टीकरण** यदि योग–योग श्रेढ़ी विस्तार में क्रमांक मान r के सम $(2m)$ / विषम क्रमांक $(2m+1)$ के प्रति $(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)$ का हल मान धनात्मक होने पर इसके विपरीत क्रमांक मान r के विषम $(2m+1)$ / सम क्रमांक $(2m)$ के प्रति $(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)$ का हल मान ऋणात्मक होगा। जिनके मापांक मान तुल्यता को सत्यापित करेगा।

**15-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता** समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन के संदर्भ में आकृति 9-1(a) अथवा 9-2(a) में ABCD $A_{r+3} * A_{r+3}$ वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = A_{r+3}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = A_{r+2}$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = A_{r+3}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = A_{r+1}$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = A_{r+2}$ इकाई $\overline{GC} = A_{r+1}$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = A_{r+1}$ इकाई $\overline{HF} = A_{r+2}$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = A$ EF और $\Delta_2$=ABF प्राप्त कीजिए।

आकृति **14-1 (a)** अथवा **14.2(a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\Delta_1$ $\Delta_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **13-1(b)** अथवा **13-2(b)** ABCD $A_{r+2}$*$A_{r+2}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में निम्नानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **14.1 (a)** अथवा 14.2(a) का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\Delta_1$= $A$ EF | $\Delta_2$=ABF |
| आकृति **14.2(b)** ) अथवा 14.2(b) में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\Delta_1$= $A$ EF | $\Delta_2$=CGH |

उक्त स्थापन से समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के दर्शन अथवा विलोपन की व्यापकता प्रस्तुति बनती है। जिसके दो व्युमीय निर्देशांक ज्यामिति में स्थिति, क्षेत्रफल, समस्त अंगों ( चारों भुजा, दोनों विकर्ण, समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी एवं चारों अन्तः कोणों के माप) सहित सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभूजांक ज्ञात कर $m\angle 2\theta$ का बीजांक प्राप्त कर सकते है।

**दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति**

$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = A_{r+2}$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = A_{r+1}$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = A_r$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = A_{r+3}$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = A_{r+4}$इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = A_{r+1} - A_r = A_{r-1}$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे। इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय (A) $=[A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}]$ 6 पदी योग–योग संख्या श्रेढ़ी के अवयव प्राप्त होंगे। इन अवयवों का अनु प्रयाग कर दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का दो व्युमीय निर्देशांक ज्यामिति में स्थिति क्षेत्रफल एवं समस्त अंगों मापो की गणना एवं सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ त्रिभुजांक ज्ञात कर $m\angle 2\theta$ का बीजांक प्राप्त कर सकते है। क्रमशः अवलोकित कीजिए।–

**1■ चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल** $\blacksquare_A$

$$= \left|(A_{r-1}^2 + A_{r-1} * A_r - A_r^2)\right| = \left|(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)\right|$$
$$= \left|(A_{r+1}^2 + A_{r+1} * A_{r+2} - A_{r+2}^2\right| = \left|(A_{r+2}^2 + A_{r+2} * A_{r+3} - A_{r+3}^2\right|$$
$$= \left|(A_{r+3}^2 + A_{r+3} * A_{r+4} - A_{r+4}^2\right|$$ **इकाईवर्ग**होगा।

**2■ सम्मुख समांतर भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1 = AF =$ समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण $= \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2}$
$= CH =$ समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण $= \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2}$

युग्म$_2$ $S_2 =$ $FC =$ समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण $= \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2}$
$= AH =$ समकोण त्रिभुज APH का कर्ण $= \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2}$

**3■** विकर्ण$_1$ $\mathbf{h_1} =$ $AC =$ आयत ABCD का विकर्ण $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{A_{r+4}^2 + A_{r+2}^2}$

विकर्ण$_2$ $\mathbf{h_2} =$ $FH =$ आयत HQFS का विकर्ण $FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r-1}^2}$

**4■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी** लाम्बिक दूरी = ( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

**1•** $\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $d_1$ = क्षेत्रफल ÷ संमातर भुजाओं के माप

$$= \blacksquare_A \div \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \frac{\blacksquare_A}{\sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2}}$$

**2•** $\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $\mathbf{d_2}$ = क्षेत्रफल ÷ संमातर भुजाओं के माप

$$\blacksquare_A \div \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2} = \frac{\blacksquare_A}{\sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2}}$$

**5■** $\mathbf{m\angle HAF = m\angle HCF}$ $\mathbf{m\angle\theta}$ **का त्रिभुजांक** $[x \quad y \quad z] = [\text{----} \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$

$$= [\sqrt{(S_1 * S_2)^2 - (\blacksquare_A)^2} \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$$
$$= [\quad (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$$

**6■** $\mathbf{m\angle 2\theta}$ **का बीजांक** $[p \quad q] = [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A\ ]$

$\mathbf{m\angle 2\theta}$ **का आदर्श बीजांक** $\mathbf{F[p]} = \frac{p}{q} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{\blacksquare_A}$ होगा ।

अथवा $\mathbf{m\angle\theta}$ का त्रिभुजांक $[(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A \quad \sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ ]$ के सापेक्ष

$\mathbf{m\angle\theta}$ का बीजांक $[p \quad q] = [\ \{ S_1 * S_2 + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\} \quad \blacksquare_A\ ]$

**7■** $\mathbf{m\angle\theta}$ की त्रिकोण मिति निष्पत्तियाँ - $\text{Sin}\,\theta = \frac{y}{z} = \frac{\blacksquare_A}{S_1 * S_2}$ , $\text{Cos}\,\theta = \frac{x}{z} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{S_1 * S_2}$

$\text{Tan}\,\theta = \frac{y}{x} = \frac{\blacksquare_A}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}$ , $\text{Cot}\,\theta = \frac{x}{y} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{\blacksquare_A}$

$\text{Sec}\theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}$ , $\text{Cosec}\theta = \frac{z}{y} = \frac{S_1 * S_2}{\square_A}$

**8■** $\mathbf{m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta}$ का आकलन

**(1)** $\mathbf{m\angle\theta}$ का त्रिभुजांक $[x \quad y \quad z] = [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$ से

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = (\text{Sin}\,\theta)^r = (\frac{\blacksquare_A}{S_1 * S_2})^r$

**(2)** $\mathbf{m\angle\theta}$ का बीजांक $[p \quad q] =$

$[\ \{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\} \quad \blacksquare_A\ ]$ से

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{2q}{p} = \frac{2\blacksquare_A}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}}$

**(3)** बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त $\mathbf{m\angle\theta}$ के मापों के मध्यमान नियम में

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = q[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}]$

$$= \blacksquare_A \left[\frac{1}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}} + \frac{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}\ + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}^2 + (\blacksquare_A)^2}\right]$$

**(4)** $\mathbf{m\angle 2\theta}$ का बीजांक $[p \quad q\ ] = [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A\ ]$ के सापेक्ष

.कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{q}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{\blacksquare_A}{2}[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (\blacksquare_A)^2}]$

**(5)** $\mathbf{m\angle 2\theta}$ का बीजांक $[p \quad q\ ] = [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A\ ]$ के सापेक्ष $\mathbf{m\angle 2\theta}$ का त्रिभुजांक

$[x \quad y \quad z\ ] = [(p^2 - q^2) \quad 2pq \quad (p^2 + q^2)\ ]$ से

कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{1}{2} * [\frac{y}{z}] = [\frac{pq}{p^2+q^2}] = \left[\frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) * \blacksquare_A}{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + \blacksquare_A{}^2}\right] =$ रेडियन

कोण माप इकाई अंश मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{630}{11} * (\mathbf{m\angle\theta}$ का इकाई रेडियन में माप) अंश होगा ।

टीप $\mathbf{m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta}$ के आकलन मे सामान्यतः हल क्रमांक (3)कठिनतर गणना में और हल क्रमांक (4) सरल गणना में वास्तविक मान के निकटतर अथवा अतिनिकटतर अथवा वास्तविक मान ही होता है। जबकि हल क्रमांक (1),(2)अैर (3) विशेषतः आदर्श बीजांक $F(p) > 25$ के प्रति मान्य होने को होगा।

**15-7■**. विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति . $A_{r+4} * A_{r+2}$ की आयत ABCD के आधार भुजाAB के शीर्ष A और B का निर्देशांक ज्यामिति स्थिति क्रमशः $(0,0)$ और $(A_{r+4},0)$ माने जाने पर – . विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति के तारतम्य में– **1•** शीर्ष A का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष A का निर्देशांक = $(0,0)$ **2•** शीर्ष F का निर्देशांक $(A_{r+3}, A_{r+1})$ **3•** शीर्ष C का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष C का निर्देशांक = $(A_{r+4} \ . \ A_{r+2})$ **4•** शीर्ष H का निर्देशांक $(A_{r+2}, A_r)$ होगा।

ध्यानाकर्षण : उपरोक्त गणना विश्लेषण के अनुसार समुच्चय (A) $=[A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}]$ में r के मान बढ़ते मानों $(r \to \infty)$ के प्रति $m\angle\theta$ और $m\angle 2\theta$ का मान शून्य के निकअतर होता जावेगा। अर्थात् दर्शित अथवा विलोपित

समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH की आसन्न भुजाएँ समरेख होने की ओर अग्रसर होते हुए विकर्ण AC के माप पर ही उसके प्रति ।अध्यारोपित होने की ओर अग्रसर होगा।

**उदाहरण■** $r=0$ से 6 पदी योग–योग संख्या श्रेढ़ी समुच्चय $(A)=[A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}]=$ $[A_0, A_r, A_1, A_2, A_3, A_4]=[1, 4, 5, 9, 14, 23]$ लिया जाकर आयत ABCD $A_{r+4} * A_{r+2} = 23 * 9$ वर्ग इकाई माप के अन्तःनिष्ठ समांतर चतुर्भुज AFCH की रचना कीजिए जिसका विकर्ण$_1$ AC $=\sqrt{A_{r+4}^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{23^2 + 9^2}$ $=\sqrt{610}$ और विकर्ण$_2$ HF $= \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$ इकाई माप की है। उक्त रचित समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समांतर भुजा युग्मों के माप, सम्मुख तुल्य न्यूनकोण $\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ,बीजांक एपं कोण माप की गणना कीजिए।

**बिन्दुवार हल 1■ प्रश्नानुसार प्रतिबंध पर विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति** $A_{r+4} * A_{r+2} = 23 * 9$ की आयत ABCD के आधार भुजा AB के शीर्ष A और B का निर्देशांक ज्यामिति स्थिति क्रमशः$(0, 0)$ और $(A_{r+4}, 0)$ माने जाने पर – . विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति के तारतम्य में–

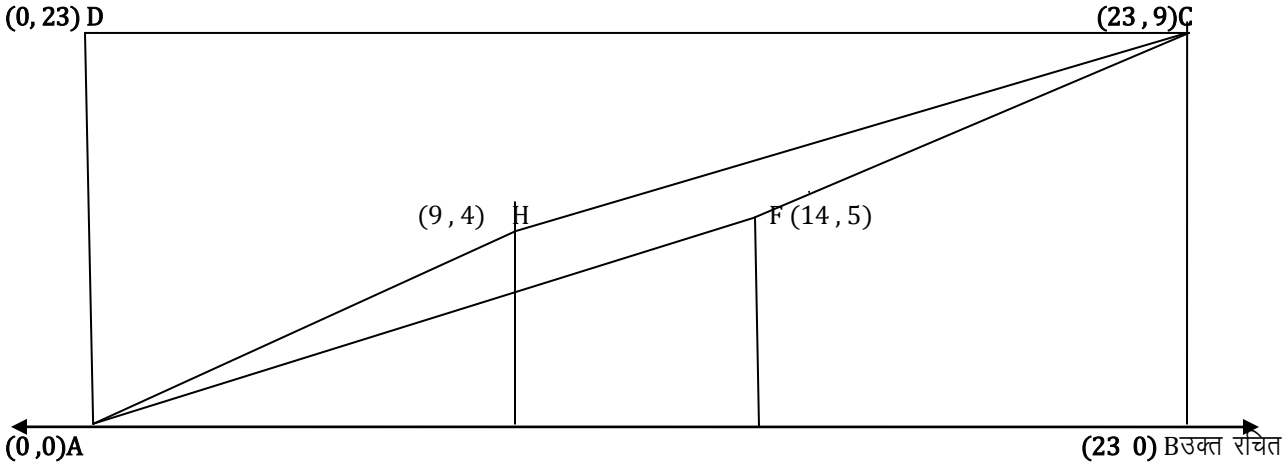
**1•** शीर्ष A का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष A का निर्देशांक $= (0, 0)$

**2•** शीर्ष F का निर्देशांक $(A_{r+3}, A_{r+1}) = (14, 5)$

**3•** शीर्ष C का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष C का निर्देशांक $= (A_{r+4} . A_{r+2}) = (23\ 9)$

**4•** शीर्ष H का निर्देशांक $(A_{r+2}, A_r) = (9\ 4)$ होगा।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समांतर भुजा युग्मों के माप, सम्मुख तुल्य न्यूनकोण $\angle$ **HAF = m$\angle$HCF = m$\angle\theta$** का त्रिभुजांक त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ,बीजांक एवं कोण माप की गणना–




उक्त रचित

**1■ चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल ■$_A$**
$$= \left|(A_{r-1}^2 + A_{r-1} * A_r - A_r^2)\right|$$
$$= \left|(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)\right|$$
$$= \left|(A_{r+1}^2 + A_{r+1} * A_{r+2} - A_{r+2}^2\right|$$
$$= \left|(A_{r+2}^2 + A_{r+2} * A_{r+3} - A_{r+3}^2\right|$$
$$= \left|(A_{r+3}^2 + A_{r+3} * A_{r+4} - A_{r+4}^2\right| = 11$$ इकाई माप वर्ग।

**2■ सम्मुख समांतर भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1 = AF = CH = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$ इकाई माप

युग्म$_2$ $S_2 = FC = AH = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2} = = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$ इकाई माप

**3■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी** लाम्बिक दूरी = ( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

**1•** $\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी$d_1$ = क्षेत्रफल ÷ संमातर भजाओं के माप = 11 ÷$\sqrt{221}$=$\frac{11}{\sqrt{221}}$ इकाई माप

**2•** $\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $\mathbf{d_2}$ = क्षेत्रफल ÷ संमातर भजाओं के माप = **11** ÷$\sqrt{97}$= $\frac{11}{\sqrt{97}}$ इकाई माप

**5■ m∠ HAF = m∠HCF = m∠θ** का त्रिभुजांक **[ x y z]**

$= [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad ■_A \quad S_1 * S_2]$

$= [(14^2 - 2 * 5^2) \quad 11 \quad \sqrt{221} * \sqrt{97}\ ]$

$= [\ 146 \quad 11 \quad \sqrt{21437}\ ]$

$= [\ 146 \quad 11 \quad 146.4138\ ]$

**5■ m∠ HAF = m∠HCF = m∠θ** की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ

$\text{Sin}\theta = \frac{11}{146.4138} = 0.07513 \quad \text{Cos}\theta = \frac{146}{146.4138} = 0.99717$

$\text{Tan}\theta = \frac{11}{146} = 0.07534 \quad \text{Cot}\theta = \frac{146}{11} = 13.27272$

$\text{Sec}\theta = \frac{146.4138}{146} = 1.00283 \quad \text{Cosec}\theta = \frac{146.4138}{11} = 13.31034$

**6■** m∠2θ का बीजांक [ p q ] = [ 146 11]

m∠2θ का आदर्श बीजांक $F[\ p\ ] = \frac{p}{q} = \frac{146}{11} = 13.27272$ होगा ।

m∠θ का बीजांक $[p \quad q] = [\ (146.4138 + 146) \quad 11\ ] = [292.4138 \quad 11]$

m∠θ का आदर्श बीजांक $F[P] = \frac{p}{q} = \frac{292.4138}{11} = 26.58307$ होगा

**7■** m∠ HAF = m∠HCF = m∠θ का आकलन

**1•** m∠θ का आदर्श बीजांक $F[\ P\ ] = \frac{p}{q} = \frac{292.4138}{11} = 26.58307$ के सापेक्ष

$m\angle\theta = [\ \frac{1}{26.58307} + \frac{26.58307}{(26.58307)^2+1^2}] = [0.03762+0.03756] = 0.07518$ रेडियन $= 4.30576$ अंश

**2•** m∠2θ का बीजांक F[ p q] = (146 11] के सापेक्ष

$m\angle\theta = \frac{1}{2}[\frac{11}{146} + \frac{146*11}{146^2+11^2}] = \frac{1}{2}[\frac{11}{146} + \frac{146*11}{21437}] = \frac{1}{2}[0.07534 + 0.07491]$

$= \frac{1}{2}[0.15025] = 0.07512$ रेडियन $= 4.30232$ अंश ।

## तलिका 15-7(a)

योग –योग संख्या श्रेढ़ी **(1 1 )F** के प्रति $\mathbf{F_{r+4} * F_{r+2}}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण **m∠θ** का कोण माप इकाई रेडियन में आकलन मान $A_\theta$ और वास्तविक मान $R_\theta$ की तुलना

| क्रमांक | r का मान | m∠2θ का आदर्श बीजांक F(P) में $p = (F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2)$ | m∠θ का आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}]$ रेडियन | m∠θ का वास्तविक मान $R_\theta = \frac{1}{2}[\text{Sin}^- \frac{2p}{p^2+1}]$ रेडियन | $(R_\theta - A_\theta)$ रेडियन |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | F(2) | 0.450000 | 0.463647 | 0.003647 |
| 2 | 1 | F(7) | 0.141428 | 0.141892 | 0.000464 |
| 3 | 2 | F(17) | 0.058722 | 0.058755 | 0.000033 |
| 4 | 3 | F(46) | 0.021734 | 0.021735 | 0.000001 |
| 5 | 4 | F(119) | 0.008203 | 0.008203 | 0.000000 |
| 6 | 5 | F(313) | 0.00319487 | 0.00319487 | 0.00000000 |
| 7 | 6 | F(818) | 0.001222492 | 0.001222493 | 0.00000001 |
| 8 | 7 | F(2143) | 0.000466635 | 0.000466635 | 0.00000000 |
| 9 | 8 | F(5609) | 0.000178284 | 0.000178285 | 0.000000001 |
| 10 | 9 | F(14686) | 0.000068092 | 0.000068092 | 0.000000000 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 10 | F(38447) | 0.0000260098 | 0.0000260098 | 0.OOOOOOOOO |
| 12 | 11 | F(100657) | 0.000009334 | 0.000009334 | 0.OOOOOOOOO |

टीप– $\because$ F(P) के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2+1}$ होने की ओर अग्रेषित होता है,।

$\therefore$ आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}] = \frac{1}{p}$ का हल ही यथेष्ट होगा।

**तलिका 15-7(b)**

**योग –योग संख्या श्रेढ़ी (1 3 )L के प्रति $L_{r+4} * L_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण m∠θ का इकाई रेडियन कोणमाप में आकलन और वास्तविक आकलन मान $A_\theta$ वास्तविक मान $R_\theta$ की तुलना**

| क्रमांक | r का मान | m∠2θ का आद,र्श बीजांक F(P) में $p = \frac{L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2}{5}$ | m∠θ का आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}]$ रेडियन | m∠θ का वास्तविक मान $R_\theta = \frac{1}{2}[\text{Sin}^- \frac{2p}{p^2+1}]$ रेडियन | $(R_\theta - A_\theta)$ रेडियन |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0 | F(2.8) | 0.336942468 | 0.343023940 | 0.006081472 |
| 2 | 1 | F(6.2) | 0.159245566 | 0.159913123 | 0.000667557 |
| 3 | 2 | F(17.8) | 0.056081397 | 0.056120787 | 0.000039390 |
| 4 | 3 | F(45.2) | 0.022112729 | 0.022120285 | 0.000008556 |
| 5 | 4 | F(119.8) | 0.008346954 | 0.008347049 | 0.000001905 |
| 6 | 5 | F(312.2) | 0.003201359 | 0.003203464 | 0.000002105 |
| 7 | 6 | F(818.8) | 0.001221298 | 0.001221298 | 0.000000000 |
| 8 | 7 | F(2142.2) | 0.000466809 | 0.000466809 | 0.000000000 |
| 9 | 8 | F(5609.8) | 0.000178259 | 0.000178259 | 0.000000000 |
| 10 | 9 | F(14685.2) | 0.000068095 | 0.000068095 | 0.000000000 |
| 11 | 10 | F(38447.8) | 0.000026009 | 0.000026009 | 0.000000000 |
| 12 | 11 | F(100656.2) | 0.000009934 | 0.000009934 | 0.000000000 |

टीप $\because$ F(P) के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2+1}$ होने की ओर अग्रेषित होता है,।

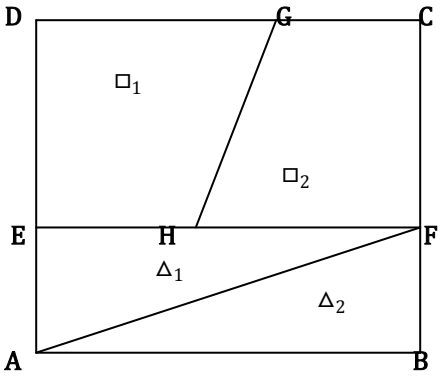
$\therefore$ आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}] = \frac{1}{p}$ का हल ही यथेष्ट होगा।

## 15-8 समान्तर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन विषयक उदाहरण–

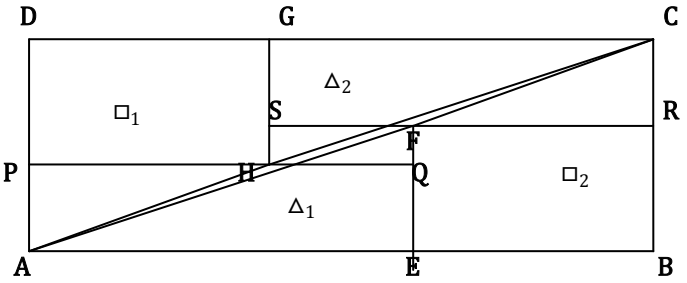
[1] फिबोनकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F से–

[1-1] समान्तर चतुर्भुज का दर्शन –

2 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति 15.8 (1-1a)




आकृति 15.8(1-1b)

**प्रक्रम1** फिबोनकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के सम क्रमांको $[F_2, F_4, F_6, - - - - F_{2n}]$ में $m \geq 2$ के प्रति किसी $F_{2m}$ इकाई माप की भुजा चुन कर एक वर्ग की रचना कीजियें।

**प्रक्रम2** आकृति 15.8 (1-1a) का अवलोकन करे। प्रक्रम 1 से प्राप्त वर्ग ABCD को $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$

ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = F_{2m}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = F_{2m-1}$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = F_{2m}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = F_{2m-2}$इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = F_{2m-1}$ इकाई $\overline{GC} = F_{2m-2}$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = F_{2m-2}$ इकाई $\overline{HF} = F_{2m-1}$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = A$ EF और $\Delta_2$=ABF प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम3** आकृति **15.8 (1-1b)** का अवलोकन करे। आकृति **15.8 (1-1a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\Delta_1$ $\Delta_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15.8(1-1b)** ABCD $F_{2m+1} * F_{2m-1}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **15.8 (1-1a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\Delta_1 = A$ EF | $\Delta_2$=ABF |
| आकृति **15.8(-1-1b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\Delta_1 = A$ EF | $\Delta_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का दर्शन** होना कहते हैं।

**दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति ज्यामिति विश्लेषण**

**1■ क्षेत्रफल $\blacksquare_A$ =** 1 इकाई वर्ग

**2■ सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$
$$\begin{cases} AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2} \\ = \\ CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2} \end{cases}$$

युग्म$_2$ $S_2$
$$\begin{cases} FC = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{(F_{2m-1})^2 + (F_{2m-3})^2} \\ = \\ AH = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{(F_{2m-1})^2 + (F_{2m-3})^2} \end{cases}$$

**3■ विकर्ण$_1$** AC = आयत ABCD का विकर्ण $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = = \sqrt{(F_{2m+1})^2 + (F_{2m-1})^2}$

**विकर्ण$_2$** FH = आयत HQFS का विकर्ण $FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = = \sqrt{(F_{2m-2})^2 + (F_{2m-4})^2}$

**4■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1 \div \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2}$
$$= \frac{1}{\sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2}}$$

$\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1 \div \sqrt{(F_{2m-1})^2 + (F_{2m-3})^2}$
$$= \frac{1}{\sqrt{(F_{2m-1})^2 + (F_{2m-3})^2}}$$

**5■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]**

$m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक = $[\,(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2) \quad 1 \quad (S_1 * S_2)\,]$

$\therefore$ m$\angle\theta$ का बीजांक $= [\{(S_1 * S_2) + (F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)\}$ 1 ]

m$\angle 2\theta$ का बीजांक $= [(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)$ 1]

**6■** m$\angle\theta$ **के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ–** $Sin\theta = \frac{y}{z} = \frac{1}{S_1 * S_2}$ $Cos\theta = \frac{x}{z} = \frac{F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2}{S_1 * S_2}$

$Tan\theta = \frac{y}{X} = \frac{1}{F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2}$ $Cot\theta\ \frac{x}{y} = F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2$

$Sec\theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2}$ $Cosec\theta = \frac{z}{y} = S_1 * S_2$

**7■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख कोण m$\angle$ HAF = m$\angle$HCF = m$\angle\theta$ का आकलन

m$\angle 2\theta$ का आदर्श बीजांक $F[P] = (F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)$ के सापेक्ष

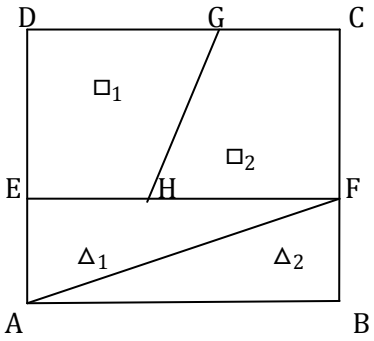
$m\angle\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)} + \frac{(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)}{((F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2))^2 + 1}\right]$ रेडियन

$= \frac{315}{11}\left[\frac{1}{(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)} + \frac{(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)}{((F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2))^2 + 1}\right]$ अंश

[1-2a] **समान्तर चतुर्भुज का विलोपन –**

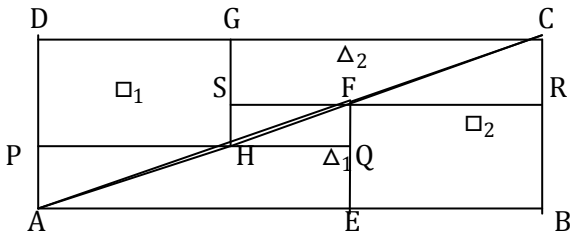
**प्रक्रम1** फिबोनकी संख्या श्रेढ़ी **(1 1)F** के विषम क्रमांको $[F_3, F_5, F_7, - - - - F_{2n+1}]$ में $m \geq 2$ के प्रति किसी$F_{2m+1}$ इकाई माप की भुजा चुन कर एक वर्ग की रचना कीजिये।

**प्रक्रम2** आकृति **15.8 (1-2a)** का अवलोकन करे। प्रक्रम **1** से प्राप्त वर्ग ABCD को $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = F_{2m+1}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = F_{2m}$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = F_{2m+1}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = F_{2m-1}$इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = F_{2m}$ इकाई $\overline{GC} = F_{2m-1}$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = F_{2m-1}$ इकाई $\overline{HF} = F_{2m}$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\triangle_1$= $A$ EF और $\triangle_2$=ABF प्राप्त कीजिए।




आकृति **14.8 (1-2a)**

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति **14.8 (1-2b)**

**प्रक्रम3** आकृति **14.8 (1-2b)** का अवलोकन करे। आकृति **14.8 (1-2a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\triangle_1$ $\triangle_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **14.8(1-2b)** ABCD $F_{2m+2} * F_{2m}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **14.8 (2a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\triangle_1$= $A$ EF | $\triangle_2$=ABF |
| आकृति **14.8(2b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\triangle_1$= $A$ EF | $\triangle_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का विलोपन** होना कहते हैं।

## दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति ज्यामिति विश्लेषण

**1■** **क्षेत्रफल** $\blacksquare_A$ = 1 इकाई वर्ग

**2■** **सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$ $\begin{cases} AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{(F_{2m+1})^2 + (F_{2m-1})^2} \\ = \\ CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{(F_{2m+1})^2 + (F_{2m-1})^2} \end{cases}$

युग्म$_2$ $S_2$ $\begin{cases} FC = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2} \\ = \\ AH = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2} \end{cases}$

**3■** **विकर्ण$_1$** AC = आयत ABCD का विकर्ण $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(F_{2m+2})^2 + (F_{2m})^2}$

**विकर्ण$_2$** FH = आयत HQFS का विकर्ण $FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = \sqrt{(F_{2m-1})^2 + (F_{2m-3})^2}$

**4■** **समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1 \div \sqrt{(F_{2m+1})^2 + (F_{2m-1})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{(F_{2m+1})^2 + (F_{2m-1})^2}}$

$\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1 \div \sqrt{(F_{2m})^2 + (F_{2m-2})^2}$

$m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x \;\; y \;\; z] = [\,(F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2) \quad 1 \quad (S_1 * S_2)\,]$

$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक $= [\{(S_1 * S_2) + (F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)\} \quad 1\,]$

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $= [(F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2) \quad 1]$

**6■** $m\angle\theta$ **के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ–** $Sin\theta = \frac{y}{z} = \frac{1}{S_1 * S_2}$ $Cos\theta = \frac{x}{z} = \frac{F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2}{S_1 * S_2}$

$Tan\theta = \frac{y}{X} = \frac{1}{F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2}$ $Cot\theta \; \frac{x}{y} = F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2$

$Sec\theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2}$ $Cosec\theta = \frac{z}{y} = S_1 * S_2$

**7■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का आकलन

$m\angle 2\theta$ का आदर्श बीजांक $F[P] = (F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)$ के सापेक्ष

$$m\angle\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)} + \frac{(F_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2)}{((F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2))^2+1}\right] \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{315}{11}\left[\frac{1}{(F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)} + \frac{(F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)}{((F_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2))^2+1}\right] \text{ अंश}$$

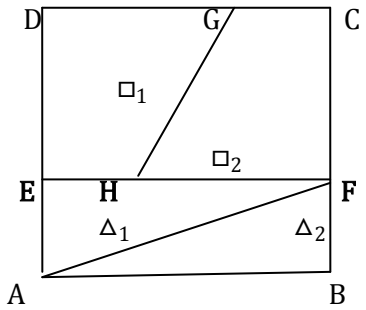
## [2] लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L से–

### [2-1] समान्तर चतुर्भुज का दर्शन

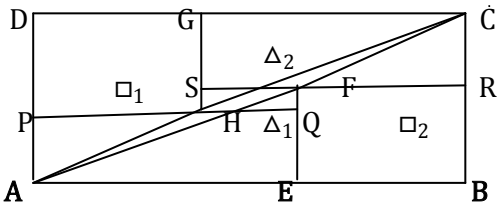
**प्रक्रम1** लुकस संख्या श्रेढ़ी **(1 3)L** के विषम क्रमांको $[L_3, L_5, F_7, - - - - L_{2n+1}]$ में से किसी $L_{2m+1}$ इकाई माप की भुजा चुन कर एक वर्ग की रचना कीजियें।

**प्रक्रम2** आकृति **15.8 (2-1a)** का अवलोकन करे। प्रक्रम **1** से प्राप्त वर्ग ABCD को $\overline{EF}$ द्वारा EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = L_{2m+1}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = L_{2m}$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = L_{2m+1}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = L_{2m-1}$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = L_{2m}$ इकाई $\overline{GC} = L_{2m-1}$ इकाई बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = F_{2m-1}$ इकाई $\overline{HF} = L$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\triangle_1 = A$ EF और $\triangle_2$=ABF प्राप्त कीजिए।

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति **15.8 (2-1a)**




आकृति **15.8 (2-1b)**

**प्रक्रम3** आकृति **15.8 (2-1a)** का अवलोकन करे। आकृति **15.8 (2-1a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\triangle_1$ $\triangle_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15.8(2-1b)** ABCD $L_{2m+2} * L_{2m}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **14.8 (2a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\triangle_1 = A$ EF | $\triangle_2$=ABF |
| आकृति **14.8(2b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\triangle_1 = A$ EF | $\triangle_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 5 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का दर्शन** होना कहते हैं।

## दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति ज्यामिति विश्लेषण

**1■** क्षेत्रफल $■_A$ = 5 इकाई वर्ग

**2■** सम्मुख भुजा युग्म

युग्म$_1$ $S_1$ $\begin{cases} AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{(L_{2m+1})^2 + (L_{2m-1})^2} \\ = \\ CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{(L_{2m+1})^2 + (L_{2m-1})^2} \end{cases}$

युग्म$_2$ $S_2$ $\begin{cases} FC = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2} \\ = \\ AH = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2} \end{cases}$

**3■** विकर्ण$_1$ AC = आयत ABCD का विकर्ण $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(L_{2m+2})^2 + (L_{2m})^2}$

विकर्ण$_2$ FH = आयत HQFS का विकर्ण $FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = \sqrt{(L_{2m-1})^2 + (L_{2m-3})^2}$

**4■** समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1 \div \sqrt{(L_{2m+1})^2 + (L_{2m-1})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{(L_{2m+1})^2 + (L_{2m-1})^2}}$

$\overline{AH}$ // $\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1 \div \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2}$

$m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x \;\; y \;\; z] = [\,(L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2) \quad 5 \quad (S_1 * S_2)\,]$

$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक $= [\{(S_1 * S_2) + (L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2)\} \quad 1\,]$

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $= [(L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2) \quad 1]$

**6■** $m\angle\theta$ के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ– $\text{Sin}\theta = \frac{y}{z} = \frac{1}{S_1 * S_2}$ $\text{Cos}\theta = \frac{x}{z} = \frac{L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2}{S_1 * S_2}$

$\text{Tan}\theta = \frac{y}{X} = \frac{1}{L_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2}$ $\text{Cot}\theta\ \frac{x}{y} = L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2$

$\text{Sec}\theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2}$ $\text{Cosec}\theta = \frac{z}{y} = S_1 * S_2$

**7■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का आकलन

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $F[p \;\; q] = [(L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2) \quad 5\,]$ के सापेक्ष

$m\angle\theta = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{(L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2)} + \frac{(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2)}{((L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2))^2 + 5^2}\right]$ रेडियन

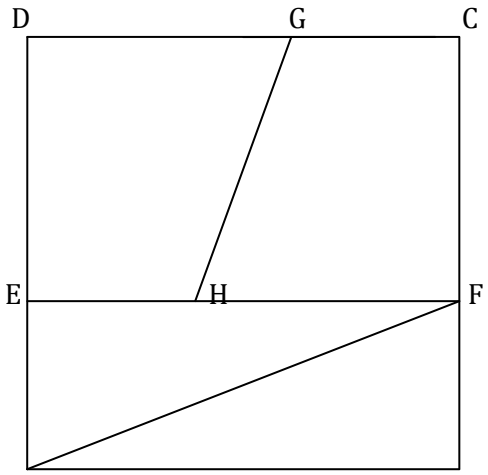
$= \frac{1575}{11}\left[\frac{1}{(L_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2)} + \frac{(L_{2m+1}^2 - 2L_{2m-1}^2)}{(L_{2m+1}^2 - 2F_{2m-1}^2))^2 + 5^2}\right]$ अंश

## [2-2] समान्तर चतुर्भुज का विलोपन

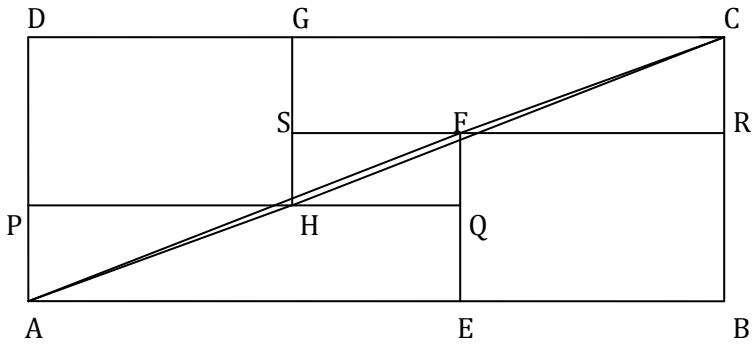
**प्रक्रम1** लुकस संख्या श्रेढ़ी **(1 3)L** के विषम क्रमांको $[L_2, L_4, F_6, - - - - L_{2n}]$ में से किसी $L_{2m}$ इकाई माप की भुजा चुन कर एक वर्ग की रचना कीजियें।

**प्रक्रम2** आकृति 15.8 (2-2a) का अवलोकन करे। प्रक्रम **1** से प्राप्त वर्ग ABCD को $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = L_{2m}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = L_{2m-1}$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = L_{2m}$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = L_{2m-2}$इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = F_{2m-1}$ इकाई $\overline{GC} = L_{2m-2}$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = L_{2m-2}$ इकाई $\overline{HF} = L_{2m-1}$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\triangle_1 = A$ EF और $\triangle_2$=ABF प्राप्त कीजिए।

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति **15.8 (2-2a)**




आकृति **15.8 (2-2b)**

**प्रक्रम3** आकृति **15.8 (2-2b)** का अवलोकन करे। आकृति **15.8 (2-2a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\triangle_1$ $\triangle_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15.8(2-2b)** ABCD $L_{2m+1} * L_{2m-1}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **15.8 (1-1a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\triangle_1 = A$ EF | $\triangle_2$=ABF |
| आकृति **15.8(-1-1b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\triangle_1 = A$ EF | $\triangle_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 5 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का विलोपन** होना कहते हैं।

### दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति ज्यामिति विश्लेषण

**1■ क्षेत्रफल ■$_A$ =** 5 इकाई वर्ग

**2■ सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$ $\begin{cases} AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2} \\ = \\ CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2} \end{cases}$

युग्म$_2$ $S_2$ $\begin{cases} FC = \text{समकोण त्रिभुज } FRC \quad \text{का कर्ण } = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{(L_{2m-1})^2 + (L_{2m-3})^2} \\ = \\ AH = \text{समकोण त्रिभुज } APH \quad \text{का कर्ण } = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{(L_{2m-1})^2 + (L_{2m-3})^2} \end{cases}$

**3■** **विकर्ण$_1$** $AC = \text{आयत } ABCD \text{ का विकर्ण } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = = \sqrt{(L_{2m+1})^2 + (L_{2m-1})^2}$

**विकर्ण$_2$** $FH = \text{आयत } HQFS \text{ का विकर्ण } FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = = \sqrt{(L_{2m-2})^2 + (L_{2m-4})^2}$

**4■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF} \ // \ \overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = 1 \div \sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{(L_{2m})^2 + (L_{2m-2})^2}}$

$\overline{AH} \ // \overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = 1 \div \sqrt{(L_{2m-1})^2 + (L_{2m-3})^2}$

$= \frac{1}{\sqrt{(L_{2m-1})^2 + (L_{2m-3})^2}}$

**5■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]**

$m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $= [\ (L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2) \quad 5 \quad (S_1 * S_2)\ ]$

$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक $= [\{(S_1 * S_2) + (L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2)\} \quad 5\ ]$

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $= [(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2) \quad 5]$

**6■** $m\angle\theta$ **के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तिया–** $Sin\theta = \frac{y}{z} = \frac{1}{S_1 * S_2}$ $Cos\theta = \frac{x}{z} = \frac{L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2}{S_1 * S_2}$

$Tan\theta = \frac{y}{X} = \frac{5}{L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2}$ $Cot\theta\ \frac{x}{y} = \frac{L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2}{5}$

$Sec\theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2}$ $Cosec\theta = \frac{z}{y} = \frac{S_1 * S_2}{5}$

**7■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का आकलन

$m\angle 2\theta$ बीजांक $F[P] = [(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2) \quad 5]$ के सापेक्ष

$m\angle\theta = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{(l_{2m}^2 - 2l_{2m-2}^2)} + \frac{(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2)}{((L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2))^2 + 5^2}\right]$ रेडियन

$= \frac{1575}{11}\left[\frac{1}{(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2)} + \frac{(L_{2m}^2 - 2L_{2m-2}^2)}{((L_{2m}^2 - 2F_{2m-2}^2))^2 + 5^2}\right]$ अंश

**[3] योग–योग श्रेढ़ी का बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी और समान्तर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन** – ऊपर दिए फिबोनिकी ,लुकस एवं बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी की क्रमांक 1 से क्रमांक 50 तक की तालिका अध्ययन से स्पष्ट है कि—

$A_n = a * F_{n-2} + bF_{n-1}$ होगा।

अतः योग–योग श्रेढ़ी का बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी और समान्तर चतुर्भुज का दर्षन एवं विलोपन का अध्ययन विस्तार फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी और समान्तर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन का अध्ययन विस्तार के षब्दो में विस्तारित किया जा सकता ह। संक्षेप में प्रस्तुत है।

**प्रक्रम1** $A_n$ ईकाई माप का एक वर्ग की रचना कीजिए।

**प्रक्रम2** वर्ग को $A_n*A_{n-1}$ और $A_n*A_{n-2}$ माप के दो आयत बाँटिए।

**प्रक्रम3** आयत $A_n*A_{n-1}$ के $A_n$ माप वाले दोनों सम्मुख भुजाओं को समदिश $A_{n-1} : A_{n-2}$ और $A_{n-2} : A_{n-1}$ में बाँटने वाले बिन्दुओं को मिलाकर दो सर्वांग सम समलम्ब चतुर्भुज प्राप्त करे। साथ–साथ आयत $A_n*A_{n-2}$ का एक विकर्ण की रचना कर दो सर्वांग सम समकोण त्रिभुज प्राप्त करें।

प्रक्रम**4** प्रक्रम 3 से प्राप्त दोनों चतुर्भुज एवं दोनों त्रिभुज को अलग–अलग काटकर किसी दूसरे समतल पर इस प्रकार स्थानान्तरित कर जमाएँ कि ये चारों आकृति मिलकर $A_{n+1}*A_{n-1}$ का आयत निरूपित करें।

**प्रक्रम5 (अवलोकन प्रक्रम)** प्रक्रम 4 के अनुसार सम्पन्न कार्य उपरान्त किए अवलोकन से दो स्थिति दृश्टिगत होगा–

(1) आयत के बीच स्थान स्पष्टतः रिक्त दिखाई दे रहा है या आयत के बीच स्थान रिक्त होना सूक्ष्मतः आभाशित है।

(2) उक्त चारो आकृतियाँ के कुछ–कुछ भाग एक– दूसरे के ऊपर आ गयी है।

**निष्कर्ष (1) समान्तर चतुर्भुज का दर्शन** – अवलोकन प्रक्रम (1) से समान्तर चतुर्भुज का दर्षन की स्थिति निर्मित होगा।

**(2) समान्तर चतुर्भुज का ठिलोपन** – अवलोकन प्रक्रम (2) से समान्तर चतुर्भुज का विलोपन की स्थिति निर्मित होगा।

**(3) दर्शित अथवा विलोपित चतुर्भुज के अंगों का माप –**

**1■** बराबर और समान्तर भुजाएँ– (1) बड़ी भुजा $S_1=\sqrt{A_n^2+A_{n+2}^2}$

(2) छोटी भुजा $S_1=\sqrt{A_{n-1}^2+A_{n-3}^2}$

**2■** विकर्ण– (1) बड़ा विकर्ण $=\sqrt{A_{n+1}^2+A_{n-1}^2}$

(2) छोटा विकर्ण $=\sqrt{A_{n-2}^2+A_{n-4}^2}$

**4■** समान्तर चतर्भुज का क्षेत्रफल $■_A = |\ A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$

$=|\ A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n - A_n^2|$

$=|\ A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$

**5■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

(1) बड़ी समान्तर भुजा की लम्बवत दूरी $=$ क्षेत्रफल $\div$ बड़ी भुजा $= \frac{A}{S_1}$

(2) छोटी समान्तर भुजा की लम्बवत दूरी $=$ क्षेत्रफल $\div$ छोटी भुजा $= \frac{A}{S_2}$

**6■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख एवं बराबर न्यून कोण $\mathbf{m\angle\theta}$ का त्रिभुजांक **[x y z]**

$= [\ (A_n^2 - 2A_{n-2}^2) \quad ■_A \quad (S_1 * S_2)\ ]$

$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक $= [\{(S_1 * S_2) + (A_n^2 - 2A_{N-2})\} \quad ■_A\ ]$

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $= [(A_n^2 - 2A_{n-2}^2) \quad ■_A]$

**7■** $m\angle 2\theta$ बीजांक $F[p\ q] = [(A_n^2 - 2A_{n-2}^2) \quad ■_A\ ]$ के सापेक्ष

$$m\angle\theta = \frac{■_A}{2}\left[\frac{1}{(A_n^2-2A_{n-2}^2)} + \frac{(A_n^2-2A_{n-2}^2)}{((A_n^2-2A_{n-2}^2))^2+(■_A)^2}\right] \text{ रेडियन}$$

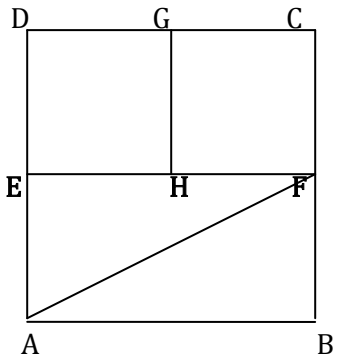
$$= \frac{315*■_A}{11}\left[\frac{1}{(A_n^2-2A_{n-2}^2)} + \frac{A_n^2-2A_{n-2}^2)}{((A_n^2-2A_{n-2}^2))^2+(■_A)^2}\right] \text{ अंश}$$

## [4] समान्तर चतुर्भुज का केवल और केवल विलोपन

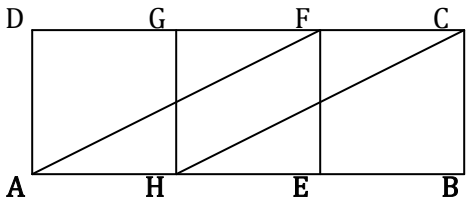
**प्रक्रम1** अनुच्छेद 13-7 समान्तर के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता में $A_{r+1} = A_{r+2} = a$ लिये जाने पर $A_r = (A_{r+2} - A_{r+1}) = (a - a) = 0$, $A_{r+3} = (A_{r+2} + A_{r+1}) = (a + a) = 2a$ तथा $A_{r+4} = (A_{r+3} + Ar+2=2a+a=3a,$−−−−−होगा। तब समान्तर के दर्शन एवं विलोपन के संदर्भ में आकृति 13.8 (4-1a) में वर्ग ABCD का क्षेत्रफल $= A^2_{r+3}=(2a)^2 =4a^2$ वर्ग इकाई माप की रचना कीजिये।

**प्रक्रम2** $\overline{EF}$ द्वारा आयत$_1$ EFCD और आयत$_2$ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत$_1$ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = 2a$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{DE} = \overline{CF} = a$ इकाई माप और आयत$_2$ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = 2a$ इकाई माप तथा चौडाई $\overline{EA} = \overline{FB} = a$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = a$ इकाई $\overline{GC} = a$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = a$ इकाई $\overline{HF} = a$ इकाई में बाँटती है।बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम वर्ग $\square_1$ =EHGD और $\square_2$ =HFCG प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = A$ EF और $\Delta_2$=ABF प्राप्त कीजिए।

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप




आकृति **15.8 (3-1a)**




आकृति **15.8 (3-1b)**

**प्रक्रम3** आकृति **15.8 (3-1b)** का अवलोकन करे। आकृति **15.8 (1-1a)** से प्राप्त $\square_1$ , $\square_2$, $\Delta_1$ $\Delta_2$ को अलग– अलग काटकर आकृति **15.8(3-1b)** ABCD $3a * a$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| आकृति **15.8 (3-1a)** का | $\square_1$ =EHGD | $\square_2$ =HFCG | $\Delta_1 = A$ EF | $\Delta_2$=ABF |
| आकृति **158(3-1b)** में स्थापन | $\square_1$ =AHGD | $\square_2$ =EBCF | $\Delta_1 = A$ EF | $\Delta_2$=CGH |

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 5 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। **समांतर चतुर्भुज का विलोपन और केवल विलोपन** होना कहलाता हैं।

## दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति ज्यामिति विश्लेषण

**1■ क्षेत्रफल** $\blacksquare_A = a^2$ इकाई वर्ग

**2■ सम्मुख भुजा युग्म**

युग्म$_1$ $S_1$

AF = समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण $= \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ इकाई माप

=

CH = समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण $= \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$ इकाई माप

युग्म$_2$ $S_2$

FC = वर्ग EBCF का भुजा माप $= a$ इकाई माप

=

AH = वर्ग AHGDका भुजा माप $= a$ इकाई माप

**3■** **विकर्ण$_1$** AC = आयत ABCD का विकर्ण $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = = \sqrt{(3a)^2 + a^2} = a\sqrt{10}$ इकाई माप

**विकर्ण$_2$** FH = वर्ग HEFG का विकर्ण $= a\sqrt{2}$ इकाई माप

**4■** **समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी**

लाम्बिक दूरी =( समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल)÷(संगत समांतर भुजा के माप ) से–

$\overline{AF}$ // $\overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $h_1 = a^2 \div a\sqrt{5} = \frac{a}{\sqrt{5}}$ इकाई माप

$\overline{AH}$ //$\overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $h_2 = a^2 \div a = a$ इकाई माप

**5■** **कोणों के त्रिभुजांक [x y z]**

$m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक = $[\,(A^2_{r+3} - 2A^2_{r+1}) \quad ■_A \quad (S_1 * S_2)\,]$

$= [(2a)^2 - 2a^2 \quad a^2 \quad (a\sqrt{5} * a)$

$= [\,2a^2 \quad a^2 \quad a^2\sqrt{5}\,]$

$= [\,2 \quad 1 \quad \sqrt{5}\,]$

$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक = $[\{(\sqrt{5}+2) \quad 1\,]$

$m\angle 2\theta$ का बीजांक = $[\,2 \quad 1]$

**6■** $m\angle\theta$ **के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियां–** $\text{Sin}\theta = \frac{y}{z} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\text{Cos}\theta = \frac{x}{z} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\text{Tan}\theta = \frac{y}{X} = \frac{1}{2}$ $\text{Cot}\theta\ \frac{x}{y} = 2$

$Sec\theta = \frac{z}{x} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\text{Cos}ec\theta = \frac{z}{y} = \sqrt{5}$

**7■** आयत के शीर्षस्थ सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का आकलन

**(1)** $m\angle\theta$ का बीजांक = $[\{(\sqrt{5}+2) \quad 1\,]$ के सापेक्ष $10\sqrt{5} + 20 - 20 - 8\sqrt{5}$

$m\angle\theta = \left[\frac{1}{\sqrt{5}+2} + \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}+2)^2+1}\right] = \left[\frac{\sqrt{5}-2}{1} + \frac{\sqrt{5}+2}{10+4\sqrt{5}}\right] = [\frac{\sqrt{5}-2}{1} + \frac{\sqrt{5}}{10}]$

$= \frac{11\sqrt{5}-20}{10} = \frac{4.6}{10} = 0.4596747$ रेडियन के निकटतर होगा।

$= \frac{630}{11} * (0.4596747\ ) = 26.326823$ अंश के निकटर होगा।

**(2)** $m\angle 2\theta$ बीजांक $F[P] = [2 \quad 1]$ के सापेक्ष

$m\angle\theta = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} + \frac{2}{(2^2+1}\ ] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} + \frac{2}{5}] = \frac{1}{2}[\frac{9}{10}] = \frac{9}{20} = 0.45$ रेडियन के निकटतर होगा।

$= \frac{315}{11} * \frac{9}{10} = \frac{63*9}{22} = \frac{567}{22} = 25.7727272$ अंश के निकटर होगा।

अति सन्निकट मान के लिये दोनों मानो का मध्यमान लेने पर $m\angle\theta = 0.4548373$ रेडियन होगा।

$= 26.05$ अंश होगा।

## 15-9 अति महत्वपूर्ण अभिगृहीत

1■ योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1 )F के प्रति $F_{r+4} * F_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\theta$ के दूनें मान $m\angle 2\theta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक एवं योग–योग संख्या श्रेढ़ी (1 3 )L के प्रति $L_{r+4} * L_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\beta$ के दूने मान $m\angle 2\beta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक से प्राप्त अभिगृहीत –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \bar{4}$ होगा।

**2•** r=1 , 3 ,5 , 7 ,9, 11 -------- (विषम मानो) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ होगा।

**जाँच तालिका अवलोकित कीजिए**

**1• $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \bar{4}$ का अवलोकन**

| क्रमांक | r | $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$ | $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$ | $L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$ | $[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$ | A − B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 0 | $5[F_3^2 - 2F_1^2]$ | $5[2^2 - 2*1^2] = 10$ | $L_3^2 - 2L_1^2$ | $4^2 - 2*1^2 = 14$ | $\bar{4}$ |
| 2 | 2 | $5[F_5^2 - 2F_3^2]$ | $5[5^2 - 2*2^2] = 85$ | $L_5^2 - 2L_3^2$ | $11^2 - 2*4^2 = 89$ | $\bar{4}$ |
| 2 | 4 | $5[F_7^2 - 2F_5^2]$ | $5[13^2 - 2*5^2] = 595$ | $L_7^2 - 2L_5^2$ | $29^2 - 2*11^2 = 599$ | $\bar{4}$ |
| 4 | 6 | $5[F_9^2 - 2F_7^2]$ | $5[34^2 - 2*13^2] = 4090$ | $L_9^2 - 2L_7^2$ | $76^2 - 2*29^2 = 4094$ | $\bar{4}$ |
| 5 | 8 | $5[F_{11}^2 - 2F_9^2]$ | $5[89^2 - 2*34^2] = 28045$ | $L_{11}^2 - 2L_9^2$ | $199^2 - 2*76^2 = 28049$ | $\bar{4}$ |

**2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ का अवलोकन**

| क्रमांक | r | $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$ | $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$ | $L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$ | $[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$ | A − B |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 1 | $5[F_4^2 - 2F_2^2]$ | $5[3^2 - 2*1^2] = 35$ | $L_4^2 - 2L_2^2$ | $7^2 - 2*3^2 = 31$ | 4 |
| 2 | 3 | $5[F_6^2 - 2F_4^2]$ | $5[8^2 - 2*3^2] = 230$ | $L_6^2 - 2L_4^2$ | $18^2 - 2*7^2 = 226$ | 4 |
| 2 | 5 | $5[F_8^2 - 2F_6^2]$ | $5[21^2 - 2*8^2] = 1565$ | $L_8^2 - 2L_6^2$ | $47^2 - 2*18^2 = 1561$ | 4 |
| 4 | 7 | $5[F_{10}^2 - 2F_8^2]$ | $5[55^2 - 2*21^2] = 10715$ | $L_{10}^2 - 2L_8^2$ | $123^2 - 2*47^2 = 10711$ | 4 |
| 5 | 9 | $5[F_{12}^2 - 2F_{10}^2]$ | $5[144^2 - 2*55^2] = 73430$ | $L_{12}^2 - L_{10}^2$ | $322^2 - 2*123^2 = 7426$ | 4 |

2■ योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ एवं योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के तुल्य क्रमांक में अवयव के वर्ग मानों के प्रति –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ होगा।

**2•** r=1 , 3 ,5 , 7 ,9, 11 -------- (विषम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ होगा।

**जाँच तालिका अवलोकित कीजिए**

**1• $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ का अवलोकन**

| क्रमांक | r | $L_r^2$ | $5F_r^2$ | $L_r^2 - 5F_r^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | $L_=^2 = 2^2 = 4$ | $5F_=^2 = 5*0^3 = 0$ | 4 |
| 2 | 2 | $L_2^2 = 3^2 = 9$ | $5F_2^2 = 5*1^2 = 5$ | 4 |
| 3 | 4 | $L_4^2 = 7^2 = 49$ | $5F_4^2 = 5*3^2 = 45$ | 4 |
| 4 | 6 | $L_6^2 = 18^2 = 324$ | $5F_6^2 = 5*8^2 = 320$ | 4 |
| 5 | 8 | $L_8^2 = 47^2 = 22\ 09$ | $5F_8^2 = 5*21^2 = 2205$ | 5 |

**2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ का अवलोकन**

| क्रमांक | r | $L_r^2$ | $5F_r^2$ | $L_r^2 - 5F_r^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | $L_1^2 = 1^2 = 1$ | $5F_1^2 = 5*1^2 = 5$ | $\bar{4}$ |
| 2 | 3 | $L_3^2 = 4^2 = 16$ | $5F_3^2 = 5*2^2 = 20$ | $\bar{4}$ |
| 3 | 5 | $L_5^2 = 11^2 = 121$ | $5F_5^2 = 535^2 = 125$ | $\bar{4}$ |
| 4 | 7 | $L_7^2 = 29^2 = 8\ 41$ | $5F_7^2 = 5*13^2 = 845$ | $\bar{4}$ |
| 5 | 9 | $L_9^2 = 76^2 = 5776$ | $5F_9^2 = 5*34^2 = 5780$ | $\bar{4}$ |

3■ योग–याग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के तुल्य क्रमांक में दो क्रमागत अवयव के गुणनफल मानों के प्रति –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2$ होगा।

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \overline{2}$ होगा।

## जाँच तालिका अवलोकित कीजिए

**1•** $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $L_r * L_{r+1}$ | $5 * F_r * F_{r+1}$ | $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | $L_0 * L_1 = 2*1 = 2$ | $5* F_0 * F_1 = 5*0*1 = 0$ | $=2$ |
| 2 | 2 | $L_2 * L_3 = 3*4 = 12$ | $5* F_2 * F_3 = 5*1*2 = 10$ | 2 |
| 3 | 4 | $L_4 * L_5 = 7*11 = 77$ | $5* F_4 * F_5 = 5 * 3 * 5 = 75$ | 2 |
| 4 | 6 | $L_6 * L_7 = 18*29 = 522$ | $5* F_6 * F_7 = 5 * 8 * 13 = 520$ | 2 |
| 5 | 8 | $L_8 * L_9 = 47*76 = 3572$ | $5* F_8 * F_9 = 5 * 21 * 34 = 3570$ | 2 |

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \overline{2}$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $L_r * L_{r+1}$ | $5 * F_r * F_{r+1}$ | $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | $L_1 * L_2 = 1*3 = 3$ | $5* F_1 * F_2 = 5*1*1 = 5$ | $\overline{2}$ |
| 2 | 3 | $L_3 * L_4 = 4*7 = 28$ | $5* F_3 * F_4 = 5*2*3 = 30$ | $\overline{2}$ |
| 3 | 5 | $L_5 * L_6 = 11*18 = 198$ | $5* F_5 * F_6 = 5*5*8 = 200$ | $\overline{2}$ |
| 4 | 7 | $L_7 * L_8 = 29*47 = 1363$ | $5* F_7 * F_8 = 5* 13*21 = 1365$ | $\overline{2}$ |
| 5 | 9 | $L_9 * L_{10} = 76*123 = 9348$ | $5* F_9 * F_{10} = 5*34*55 = 9350$ | $\overline{2}$ |

4■ $(r < x)$ के प्रति योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ एवं योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के rवें और xवें क्रमांक के युग्मीय अवयव के $(F_r, L_r)$ और $(F_x, L_x)$ के प्रति –

| r | x | $L_x * L_r - 5 * F_x * F_r$ का हलमान | $L_x * F_r - F_x * L_r$ का हलमान |
|---|---|---|---|
| विषम | विषम | $\overline{2} * L_{x-r}$ | $2* F_{x-r}$ |
| सम | सम | $2 * L_{x-r}$ | $\overline{2} * F_{x-r}$ |
| विषम | सम | $2 * L_{x-r}$ | $\overline{2} * F_{x-r}$ |
| सम | विषम | $\overline{2} * L_{x-r}$ | $2* F_{x-r}$ |

## साधित उदाहरण

r और x दोनों सम संख्या क्रमांक होने के प्रति–

$L_{10} * L_4 - 5 * F_{10} * F_4 = 123 * 7 - 5 * 55 * 3 = 861 - 825 = 36 = 2 * 18$

$= 2 * L_6 = 2 * L_{10-4}$

$L_{10} * F_4 - F_{10} * L_4 = 123 * 3 - 55 * 7 = 369 - 385 = \overline{16} = \overline{2} * 8$

$= \overline{2} * F_6 = \overline{2} * F_{10-4}$

r और x दोनों विषम संख्या क्रमांक होने के प्रति–

$L_7 * L_3 - 5 * F_7 * F_3 = 29 * 4 - 5 * 13 * 2 = 116 - 130 = \overline{14} = \overline{2} * 7$

$= \overline{2} * L_4 \ = \overline{2} * L_{7-3}$

$L_7 * F_3 - F_7 * L_3 \ = 29 * 2 - 13 * 4 \ = 58 - 52 \ = 6 = 2 * 3$

$= 2 * F_4 \ = 2 * F_{7-3}$

r और x क्रमशः विषम और सम संख्या क्रमांक होने के प्रति–

$L_9 * L_4 - 5 * F_9 * F_4 \ = 76 * 7 - 5 * 34 * \ 3 \ = 532 - 510 = 22 = 2 * 11$

$= 2 * L_5 \ = 2 * L_{9-4}$

$L_9 * F_4 - F_9 * L_4 \ = 76 * 3 - 34 * 7 \ = 228 - 238 \ = \overline{10} = \overline{2} * 4$

$= \overline{2} * F_5 \ = \overline{2} * F_{9-4}$

r और x क्रमशः सम और विषम संख्या क्रमांक होने के प्रति–

$L_{10} * L_3 - 5 * F_{10} * F_3 \ = 123 * 4 - 5 * 55 * 2 \ = 492 - 550 \ = \overline{58} = \overline{2} * 29$

$= \overline{2} * L_7 \ = \overline{2} * L_{10-3}$

$L_{10} * F_3 - F_{10} * L_3 \ = 123 * 2 - 55 * 4 \ = 246 - 220 \ = 26 = 2 * 13$

$= 2 * F_7 \ = 2 * F_{10-3}$

---------15-------

# अध्याय -16
## $A_{r+4} * A_{r+2}$ आयत के अन्तःनिष्ठ समान्तर चतुर्भुज की रचना

समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन अध्ययन से स्पष्ट हो चुका है कि इनके न्यून कोण माप में अन्तरित सम्मुख शीर्ष युग्म आयत के सम्मुख शीर्ष युग्म होते है। जिसे दृष्टिगत करते हुए मानक प्रतिबंध पर $A_{r+4} * A_{r+2}$ आयत के अन्तःनिष्ठ ऐसे समान्तर चतुर्भुज की रचना किया जा सकता है जिसका क्षेत्रफल $\blacksquare_A$ इकाई माप वर्ग और $(x > y)$ के प्रति आसन्न भुजाओं के माप $\sqrt{x}$ और $\sqrt{y}$ इकाई माप की हो।

### [1] समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रतिबंध

माना कि $(a< b)$के प्रति योग–व्योग श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय $A = [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] =$ [(b-a), a , b , (a+b)] हो तो आसन्न भुजाओं में – बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{x}$ और छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{y}$ होगा।

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\blacksquare_A = \left| a^2 + a * b - b^2 \right| \Rightarrow a^2 + a * b - b^2 = \pm \blacksquare_A$

**टीप** उक्त प्रतिबंध में a ,b x, y और $\blacksquare_A$ शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या होगी।

### [2] समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

**प्रक्रम 1** a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{x} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = x$

$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = x$--------- समिका (1)

$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{y} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = y$

$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = y$ --------- समिका (2)

समिका (1)+ समिका (2) से $S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = x+y \therefore a^2 + b^2 = \frac{x+y}{3}$ --------- समिका (3)

समिका (1)– समिका (2) से $S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = x - y \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = x - y$

$\Rightarrow (\pm \blacksquare_A) + 3ab = x - y$

$\Rightarrow 3ab = x - y \pm \blacksquare_A$

$\therefore ab$ के दो हल मान $\frac{x-y+\blacksquare_A}{3}$ और $\frac{x-y-\blacksquare_A}{3}$ प्राप्त होंगे।. जिनमें से जो हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है लिया जाय। -------- समिका (4)

**ध्यानाकर्षण** ab के दो हल मान $\frac{x-y+\blacksquare_A}{3}$ और $\frac{x-y-\blacksquare_A}{3}$ में यदि $ab = \frac{x-y+\blacksquare_A}{3}$ का हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है तो समांतर चतुर्भुज का दर्शन का नियम और यदि $ab = \frac{x-y-\blacksquare_A}{3}$ का हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है तो समांतर चतुर्भुज का विलोपन का नियम प्रतिपादित होगा।

समिका (3) में $\frac{x+y}{3} = m$ दर्शित किये जाने पर $a^2 + b^2 = m$ --------- समिका (5 ) तथा

समिका (4) में चयन प्रक्रिया नियम से $ab = n$ --------- समिका (6 ) प्राप्त होंगे।

तब $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = m + 2n \Rightarrow a+b = \sqrt{m+2n}$ --------- समिका (7) .

चूँकि प्रतिबंधानुसार $(a< b)$ है।

$\therefore (b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = m - 2n \Rightarrow b-a = \sqrt{m-2n}$ -------- समिका (8) .

समिका (7 ) + समिका (8) से $2b = \sqrt{m+2n} + \sqrt{m-2n} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{m+2n} + \sqrt{m-2n}}{2} = A_{r+2}$ इकाई माप

तथा समिका (7 ) − समिका (8) से $2a = \sqrt{m+2n} - \sqrt{m-2n} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{m+2n}-\sqrt{m-2n}}{2} = A_{r+1}$ इकाई माप प्राप्त होंगे।

**प्रक्रम 2** a और b के प्राप्त हल मान से योग–योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव क्रमशः $A_r = (b-a), A_{r+1} = a, A_{r+2} = b, A_{r+3} = (a+b), A_{r+4} = (a+2b)$ विस्तारित कीजिए।

**प्रक्रम 3** AB=CD $= A_{r+4}$ तथा AD= BC $= A_{r+2}$ इकाई माप का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

**प्रक्रम 4** प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर BP=DQ$=A_{r+2}$ इकाई माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम 5** रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब PR = QS $= A_{r+1}$ इकाई माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

**प्रक्रम 6** लम्ब PR = QS के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें AR\\ और = CS तथा AS\\ और = CR होगा।

## अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

**1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में** बड़ी भुजा युग्म AR\\ \और CS का माप $S_1 = \sqrt{x} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$

तथा छोटी भुजा युग्म AS\\ और= CRका माप $S_2 = \sqrt{y} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

**2■ विकर्ण युग्म में** बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2}$

छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$

$[A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (2a-b)$ होगा।]

**3■ $m\angle 2\theta$ का बीजांक [p q] =** $[(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A]$

**4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर मे) $m\angle 2\theta$ का बीजांक [p q] =** $[(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A]$ **के सापेक्ष**

1• कोण माप इकाई रेडियन मे $m\angle\theta = \frac{q}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{\blacksquare_A}{2}[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (\blacksquare_A)^2}]$

2• कोण माप इकाई अंश मे $m\angle\theta = \frac{630}{11} * \frac{\blacksquare_A}{2}[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (\blacksquare_A)^2}]$

$= \frac{315 * \blacksquare_A}{11}[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (\blacksquare_A)^2}]$

**उदाहरण 1■** विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 0.11 वर्ग सेन्टी मीटर तथा भुजा AS = RC $= \sqrt{28.61}$ सेन्टी मीटर एवं SC= AR= $\sqrt{11.05}$ सेन्टी मीटर है।

**हल** माना कि $(a < b)$ के प्रति योग–योग श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयवा का समुच्चय A $= [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] =$ [(b-a), a , b , (a+b)] हो तो आसन्न भुजाओं में –

बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{28.61}$ सेन्टी मीटर

और छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{11.05}$ सेन्टी मीटर होगा।

तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\blacksquare_A = |a^2 + a*b - b^2| = 0.11$ वर्ग सेन्टी मीटर

$\Rightarrow a^2 + a*b - b^2 = \pm 0.11$

## समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

**प्रक्रम 1** a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{28.61}$

$\Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 28.61$

$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 28.61$--------- समिका (1)

$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{11.05} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 11.05$

$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 11.05$ --------- समिका (2)

समिका (1)+ समिका (2) से $S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 39.66$

$\therefore a^2 + b^2 = \frac{39.66}{3} = 13.22$ ------- समिका (3)

समिका (1)− समिका (2) से $S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 17.56 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 17.56$

$\Rightarrow (\pm 0.11) + 3ab = 17.56$

$\Rightarrow (3ab = 17.56 \pm 0.11$

$\therefore$ ab के दो हल मान $\frac{17.56+0.11}{3} = \frac{17.67}{3} = 5.89$ शांत दशमलव भिन्न है और $\frac{17.56-0.11}{3} = \frac{17.45}{3}$

$= 5.816666$--- अशांत दशमलव भिन्न है । अतः $ab = 5.89$ मान्य होगा -------- समिका (4)

तब $(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a + b)^2 = 13.22 + 2 * 5.89 = 25.00$

$\therefore a+b = \sqrt{25.00} = 5$ --------- समिका (5 ) ...

चूँकि प्रतिबंधानुसार $(a < b)$ है।

पुनः $(b - a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = 13.22 - 2 * 5.89 = 1.44$

$\therefore b-a = \sqrt{1.44} = 1.2$ --------- समिका (6) ...

समिका (5 ) + समिका (6) से $2b = 6.2 \therefore b = 3.1$ सेन्टी मीटर $= A_{r+2}$

तथा समिका (5 ) − समिका (6) से $2a = 3.8 \therefore a = 1.9$ सेन्टी मीटर $= A_{r+1}$ होंगे।

**प्रक्रम2** $a = A_{r+1} = 1.9$ से..मी और $b = A_{r+2} = 3.1$ से योग–योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव $[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [1.2, 1.9, 3.1, 5.0, 8.1]$ विस्तारित कीजिए।

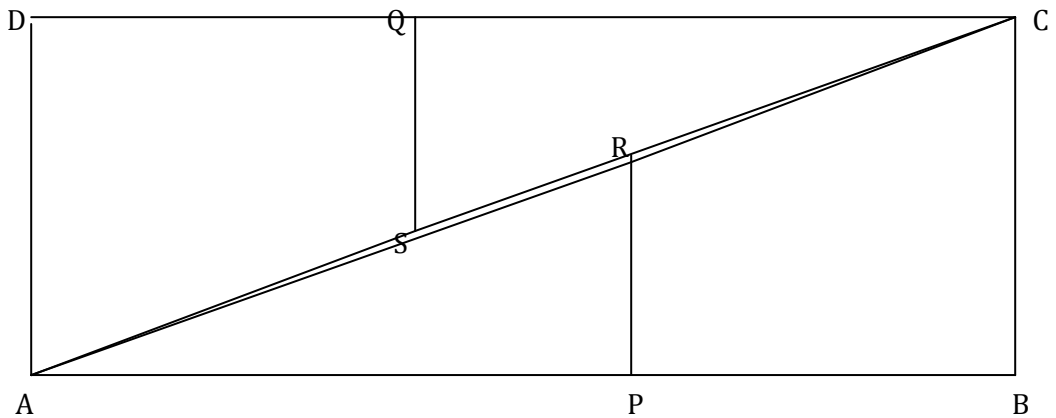
**प्रक्रम 3** AB=CD $= A_{r+4} = 8.1$ से.मी जथा AD= BC $= A_{r+2} = 3.1$ सें.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

**प्रक्रम 4** प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर $BP = DQ = A_{r+2} = 3.1$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम 5** रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब $PR = QS = A_{r+1} = 1.9$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

**प्रक्रम 6** लम्ब $PR = QS$ के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें $AR \parallel$ और $= CS$ और $AS \parallel$ और $= CR$ होगा।

पैमाना 1 सेन्टी मीटर = 5 ग्रीड लाइन।




## अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

### 1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में

बड़ी भुजा युग्म AR\\ और $= CS$ का माप $S_1 = \sqrt{28.61} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$

तथा छोटी भुजा युग्म AS\\ और $=$ CR का माप $S_2 = \sqrt{11.05} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

**2■ विकर्ण युग्म में** बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{(3.1)^2 + (8.1)^2} = \sqrt{75.22}$ से..मी

छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ $[A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (1.9 - 1.2) = 0.7$ होगा।]

$= \sqrt{(0.7)^2 + (1.9)^2} = \sqrt{4.10}$ से..मी

**3■ m∠2θ का बीजांक** [ p q ] = [ $(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)$ ■A ] = $[(5^2 - 2 * 1.9^2)$ 0.11 ]

= [17.78 0.11] = [1778 11]

**4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून कोण के माप का आकलन (वास्तविकमान के अतिसन्निकट होने की ओर मे) –**

m∠2θ का बीजांक [ p q ] = [ ( 1778 11 ] के सापेक्ष–

**1•-**कोण माप इकाई रेडियन मे $m\angle\theta = \frac{q}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{11}{2}[\frac{1}{1778} + \frac{1778}{1778^2+11^2}] = 0.000618764$ रेडियन

**2•-**कोण माप इकाई अंश मे $m\angle\theta = \frac{630}{11} * 0.000618764 = 0.0354$ अंश

**उदाहरण** 2■ विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 31 वर्ग सेन्टी मीटर तथा भूजा $AS = RC = \sqrt{425}$ सेन्टी मीटर एवं $SC = AR = \sqrt{130}$ सेन्टी मीटर है।

**हल** माना कि $(a < b)$के प्रति योग–योग श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयवा का समुच्चय A $= [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] =$ [(b-a), a , b , (a+b)] हो तो आसन्न भुजाओं में – बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{425}$ सेन्टी मीटर और छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{130}$ सेन्टी मीटर होगा।

तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ■A $= |a^2 + a * b - b^2| = 31$ वर्ग सेन्टी मीटर

$\Rightarrow a^2 + a * b - b^2 = \pm 31$

**समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम**

**प्रक्रम 1** a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{425} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 425$

$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 425$--------- समिका (1)

$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{130} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 130$

$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 130$ --------- समिका (2)

समिका (1)+ समिका (2) से $S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 555 \therefore a^2 + b^2 = \frac{555}{3} = 185$--------- समिका (3)

समिका (1)– समिका (2) से $S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 295 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 295$

$\Rightarrow (\pm 31) + 3ab = 295$

$\Rightarrow 3ab = 295 \pm 31$

$\therefore$ ab के दो हल मान $\frac{295+31}{3} = \frac{326}{3} = 108.666 - -$ अशांत दशमलव भिन्न है और $\frac{295-31}{3} = \frac{264}{3} = 88$

अतः ab=88 मान्य होगा -------- समिका (4)

तब $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 185 + 2 * 88 = 185 + 176 = 361$

$\therefore$ a+b $= \sqrt{361} \Rightarrow a + b = 19$ --------- समिका (5 ) ...

चूँकि प्रतिबंधानुसार $(a < b)$ है।

पुनः $(b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 165 - 2 * 88 = 185 - 176 = 9$

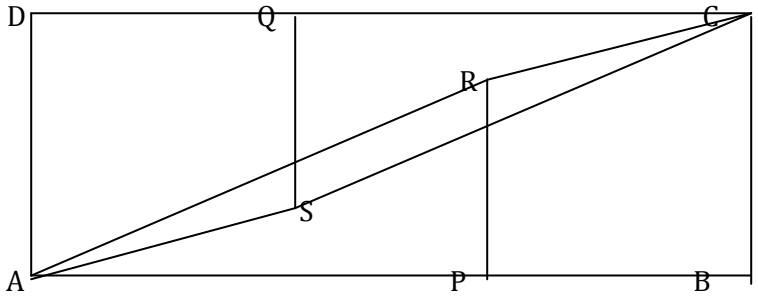
$\therefore$ b−a $= \sqrt{9} \Rightarrow b - a = 3$ --------- समिका (6) ...

समिका (5 ) + समिका (6) से 2b =. 22 $\therefore$ b = 11 सेन्टी मीटर $= A_{r+2}$

तथा समिका (5 ) − समिका (6) से 2a =. 16 $\therefore$ a = 8 सेन्टी मीटर $= A_{r+1}$ होंगे।

**प्रक्रम 2** $a = A_{r+1} = 8$ से..मी और $b = A_{r+2} = 11$ से योग–योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव $[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [3, 8, 11, 19, 30]$ विस्तारित कीजिए।

पैमाना 1 सेन्टी मीटर = 1 ग्रीड लाइन।




**प्रक्रम 3** AB=CD $= A_{r+4} = 30$ से.मी जथा AD= BC $= A_{r+2} = 11$ सें.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

**प्रक्रम 4** प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर BP=DQ=$A_{r+2} = 11$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम 5** रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब PR = QS $= A_{r+1} = 8$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

**प्रक्रम 6** लम्ब PR = QS के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें AR\\&= CS और AS\\&= CR होगा।

**अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति**

**1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में**

बड़ी भुजा युग्म AR\\ और = $CS$ का माप $S_1 = \sqrt{425} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$

तथा छोटी भुजा युग्म AS\\ और = CR का माप $S_2 = \sqrt{130} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

**2■ विकर्ण युग्म में** बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{30^2 + 11^2} = \sqrt{1021}$ से..मी

छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ $[A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (8-3) = 5$ होगा।$]$

$= \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$ से.मी

**3 ■ m∠2θ का बीजांक [p q] =** $[(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad ■_A] = [(19^2 - 2*8^2) \quad 31]$

$= [(361\text{-}128) \quad 31] = [233 \quad 31]$

**4 ■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर मे) –**

m∠2θ का बीजांक [p q] = [ ( 233 31 ] के सापेक्ष–

**1•**.कोण माप इकाई रेडियन मे $m\angle\theta = \frac{q}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{31}{2}[\frac{1}{233} + \frac{233}{233^2+31^2}] = 0.131890$ रेडियन

**2•** कोण माप इकाई अंश मे $m\angle\theta = \frac{630}{11} * 0.131890 = 7.5537$ अंश

**उदाहरण 3■** विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 31 वर्ग सेन्टी मीटर तथा भूजा AS = RC =$\sqrt{130}$ सेन्टी मीटर एवं SC= AR= $\sqrt{89}$ सेन्टी मीटर है।

**हल** माना कि $(a < b)$के प्रति योग–योग श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय A $= [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] =$ [(b-a), a , b , (a+b)] हो तो आसन्न भुजाओं में–

बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{130}$ सेन्टी मीटर

तथा छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{89}$ सेन्टी मीटर होगा।

एवं समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $■_A = |a^2 + a*b - b^2| = 31$ वर्ग सेन्टी मीटर

$$\Rightarrow a^2 + a * b - b^2 = \pm 31$$

## समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

**प्रक्रम 1** a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{130} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 130$

$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 130$--------- समिका (1)

$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{89} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 89$

$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 89$ --------- समिका (2)

समिका (1)+ समिका (2) से $S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 219 \therefore a^2 + b^2 = \frac{219}{3} = 73$--------- समिका (3)

समिका (1)− समिका (2) से $S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 41 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 41$

$\Rightarrow (\pm 31) + 3ab = 41$

$\Rightarrow 3ab = 41 \pm 31$

$\therefore$ ab के दो हल मान $\frac{41+31}{3} = \frac{72}{3} = 24$ और $\frac{41-31}{3} = \frac{10}{3} = 3.3333$--- अशांत दशमलव में है।

अतः ab=24 मान्य होगा -------- समिका (4)

तब $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 73 + 2 * 24 = 73 + 48 = 121$

$\therefore$ $a+b = \sqrt{121} \Rightarrow a + b = 11$--------- समिका (5 ) ...

चूँकि प्रतिबंधानुसार $(a < b)$ है।

पुनः $(b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 73 - 2 * 24 = 73 - 48 = 25$

$\therefore$ $b-a = \sqrt{25} \Rightarrow b - a = 5$ --------- समिका (6) ...

समिका (5 ) + समिका (6) से $2b = 16 \therefore b = 8$ सेन्टी मीटर $= A_{r+2}$

तथा समिका (5 ) − समिका (6) से $2a = 6 \therefore a = 3$ सेन्टी मीटर $= A_{r+1}$ होंगे।

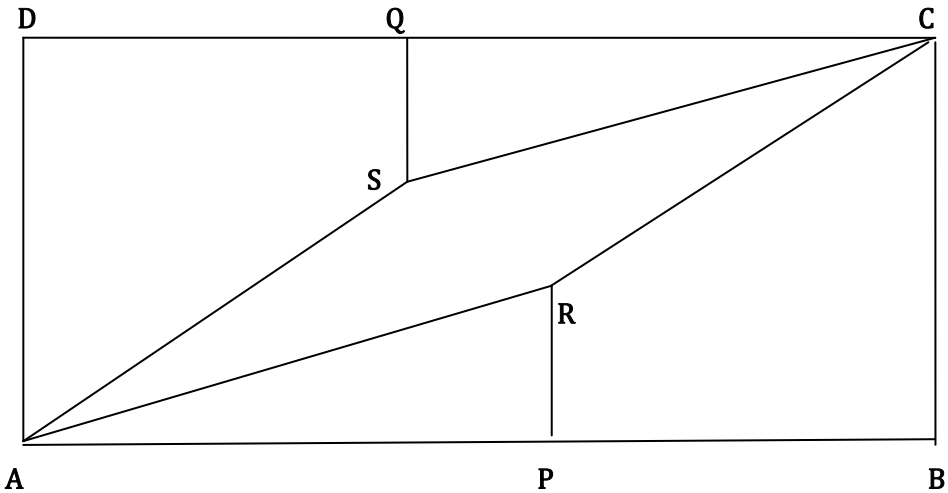
**प्रक्रम 2** $a = A_{r+1} = 3$ से..मी और $b = A_{r+2} = 8$ से योग–योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव $[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [5, 3, 8, 11, 19]$ विस्तारित कीजिए।

**प्रक्रम 3** AB=CD $= A_{r+4} = 19$ से.मी तथा AD= BC $= A_{r+2} = 8$ सें.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

**प्रक्रम 4** प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर BP=DQ=$A_{r+2} = 8$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

**प्रक्रम 5** रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब PR = QS $= A_{r+1} = 3$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

**पैमाना 1 सेन्टी मीटर = 2 ग्रीड लाइन।**



**प्रक्रम 6** लम्ब PR = QS के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें AR और = CS तथा AS और =CR होगा।

**अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति**

**1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म** में

बड़ी भुजा युग्म AR\ और = CS का माप $S_1 = \sqrt{130} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$

तथा छोटी भुजा युग्म AS\\– और = CR का का माप $S_2 = \sqrt{89} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

**2■ विकर्ण युग्म में** बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{19^2 + 8^2} = \sqrt{425}$ से..मी

छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ $[A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (3-5) = \bar{2}$ होगा।]

$= \sqrt{\bar{2}^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ से..मी

**3■ m∠2θ का बीजांक [ p q ]** $= [\ (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad ■_A\ ]$

$= [(11^2 - 2 * 3^2) \quad 31\ ]$

$= [(121 - 18) \quad 31] = [\ 103 \quad 31]$

**4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर मे)**

**m∠2θ का बीजांक [ p q ] = [ ( 103 31 ] के सापेक्ष**

**1•** .कोण माप इकाई रेडियन मे $\mathbf{m\angle\theta} = \frac{q}{2}[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2}] = \frac{31}{2}[\frac{1}{103} + \frac{103}{103^2+31^2}] = 0.288471$ रेडियन

**2•** कोण माप इकाई अंश मे $m\angle\theta = \frac{630}{11} * 0.288471 = 16.521520 = 16.52$ अंश

---------16 ---------

## अध्याय -17
## योग–योग संख्या श्रेढो का योग प्रमेय, स्वर्णानुपात प्रमेय

**17-1 योग–योग संख्या श्रेढ़ी विषयक महत्वपूर्ण विशेष कथन एवं तत् आधारित प्रमेय**–अध्याय **15** के हलित उदाहरणों 1,2,3 में समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख शीर्ष में स्थित तुल्य न्यून कोणों का त्रिभुजांक प्राप्ति विश्लेषण में आधार की गणना व्याख्या में योग–योग संख्या श्रेढ़ी विषयक कथन श्रृंखला में कई महत्वपूर्ण विशेष कथन के आधार पर प्रमेय प्रतिपादित होते हैं। अतः इन कथनों पर आधारित प्रमेय की प्रमाणिकता, विश्लेषण करते हुये त्रिभुजांक गणना में बीजांक प्राप्ति के लिये तथ्य प्रतिपादित करने का प्रयास किया गया है।

**विशेष कथन–**

**कथन 1 योग–योग संख्या श्रेढ़ो और फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी में सम्बंध समिका–** अनुच्छेद 13-6 में दिये सारिणी से स्पष्ट है कि –योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a,b)A$ का n वाँ पद और फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी$(1,1)F$ में सम्बंध समिका–

$A_n = aF_{10-2} + bF_{10-1}$ दर्शित होता है।

**जैस** योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(2,5)A$ का $A_{10} = 2F_{10-2} + 5F_{10-1} = 2F_8 + 5F_9$

$=2*21+5*34 = 42+170 =212$

**जाँच** योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(2,5)A$ का10 पद तक श्रेढी विस्तार– $[2,5,7,12,19,31,50,81,131,212]$ से $A_{10} = 212$ संख्या होगा।

**कथन 2 किसी स्तर $(a\ b)A$ के योग–योग संख्या श्रेढ़ी के n पदों का योगमान–**

किसी स्तर $(a\ b)A$ के योग–योग संख्या श्रेढ़ी के क्रमागत n पदों का योगमान उस श्रेढी के $(n+2)$ पद में से 2 रा पद अवयव को घटाकर प्राप्त कीजिये।

अर्थात् $A_1 + A_2 + A_3 + - - - - + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n = A_{n+2} - A_2$

$= [(A_{n-1} + 2A_n) - A_2]$ होगा।

**जसे** 1■ योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(2,5)A$ का क्रमागत 10 पदों $[2+5+7+12+19+31+50+81+131+212]$ तक योगमान $= [(131 + 2 * 212) - 5] = [(131 + 424) - 5] = 455 - 5 = 450$ होगा।

2■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(1,1)F$ का क्रमागत 12 पदों

$[1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144]$ तक योगमान $= [(89 + 2 * 144) - 1] = [(89 +$ $288-1=377-1=376$ होगा।

3■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(1,3)L$ का क्रमागत 15 पदों

$[1+3+4+7+11+18+29+47+76+123+199+322+521+843+1364]$ तक योगमान $= [(843 + 2 *$ $1364-3=89+2728-3=2817-3=2814$ होगा।

4■ फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी $(a,b)A$ का क्रमागत 10 पदों

$[a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+(8a+13b)+(13a+21b)+(21a+34b)] = [\{(13a+21b)+2*(21a+34b)\} - b]$ तक योगमान

$= [\{(13a + 21b) + (42a + 68b)\} - b] = [(55a + 89b) - b] = 55a + 88b$ होगा।

**17-2 स्वर्णानुपात** $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}$ के प्रतिरूपण में दर्शित वह धनात्मक परिमेय संख्या जिसके गुणन प्रतिलोम $\frac{Q}{P}$ को उसी परिमेय संख्या में घटाने पर प्राप्त अन्तरमान या व्यवकलन मान 1 प्राप्त हो स्वर्णानुपात कहलाता है।

संख्या जगत में यह धनात्मक परिमेय संख्या केवल और केवल $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ही है। **जिसका गुणन प्रतिलोम** $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ से

अश्टअश्ट जाँच $\frac{P}{Q}-\frac{Q}{P}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{(1+\sqrt{5})-(\sqrt{5}-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

**ध्यानाकर्षण –** मेरी कृति **। गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धति छत्तीसगझ की देन । बीजगणित सोपान ।** अध्याय 25 के अनुच्छेद **25 -21** करणी गत संख्या श्रेढी अध्ययन के अनुसार–

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+,+,+,+}}}}$ का व्यापक हल मान $S_1=\frac{\sqrt{(4*1)+1}+1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ स्वर्णानुपात है। तथा इसी कृति–ग्रंथ के अध्याय 23 में गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी के प्रतिरूपण की संख्या श्रेढ़ी जिसका–

r वाँपद $M_r=L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}$ होगा। जिसके प्रति $M_{r+1}:M_r=\frac{M_{r+1}}{M_r}=\frac{L_r+\sqrt{5}*F_r}{L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ स्वर्णानुपात सिद्ध है।

आपको को यह जानकर आश्चर्य होगा कि पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति योग–योग संख्या $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ का मान स्वर्णानुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ $= 1.618033988749895$ और $\frac{A_n}{A_{n+1}}$ का मान स्वर्णानुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887498948$ के सकिन्नट होने की ओर अग्रसर होता है। उदाहरण योग–योग संख्या श्रेढ़ी $A = 2, 5, 7, 12, 19 ,31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898 , 1453 , 2351,$ ..... में $\frac{555}{343},\frac{898}{555},\frac{1453}{898},-------$ एवं $\frac{343}{555},\frac{555}{898},\frac{898}{1453}-----$ –के दशमलव मे क्रमशः स्वर्णानुपात एवं स्वर्णानुपात के गुणन प्रतिलोम के तारतम्य में अभिगृहीत (सत्य कथन) को प्रमाणित होने ओर अग्रसर पायेंगे।

**व्यापक विस्ताार में –**

$$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{A_n+A_{n-1}}{A_n}=1+\frac{A_{n-1}}{A_n}=1+\frac{1}{\frac{A_n}{A_{n-1}}}=1+\frac{1}{\frac{A_{n-1}+A_{n-2}}{A_{n-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-2}}{A_{n-1}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-1}}{A_{n-2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-2}+A_{n-1}}{A_{n-2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-3}}{A_{n-2}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-2}}{A_{n-3}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-3}+A_{n-4}}{A_{n-3}}}}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-4}}{A_{n-3}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{A_{n-3}}{A_{n-4}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-4}+A_{n-5}}{A_{n-4}}}}}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-5}}{A_{n-4}}}}}$$

$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{A_{n-4}}{A_{n-5}}}}}}$ ---------- इस प्रकार के छायांकित विस्तार क्रम पूर्णता में अंतिम विस्तार का अंतिम हर $\frac{A_2}{A_1}=\frac{b}{a}$ होगा।

तब $1+\frac{A_2}{A_1}=1+\frac{b}{a}=\frac{a+b}{a}$ होगा। जो कि फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी विस्तार क्रम पूर्णता में अंतिम विस्तार का अंतिम हर $\frac{F_2}{F_1}=\frac{1}{1}=1$ होगा। तब $1+\frac{F_2}{F_1}=1+1=2$ होगा।

**17-3 फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के विस्तार क्रम में स्वर्णानुपात या स्वर्णानुपात भिन्न–** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के विस्तार क्रम में $F_1, F_2, F_3, F_4 - - - - F_n$ .. पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति योग–योग संख्या $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ का दशमलव निरूपण में हल मान स्वर्णानुपाात या स्वर्णानुपात भिन्न $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के दशमलव निरूपण हल मान 1.618033988749895 के अतिसन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा.।

... $\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) की जाँच सारिणी

| क्र. | $F_{n+1}/F_n$ | $F_{n+1}/F_n$ का सरल भिन्न | $F_{n+1}/F_n$ का दशमलव भिन्न |
|---|---|---|---|
| 1 | $F_2/F_1$ | 1/1 | 1.0000000 |
| 2 | $F_3/F_2$ | 2/1 | 2.0000000 |
| 3 | $F_4/F_3$ | 3/2 | 1.5000000 |
| 4 | $F_5/F_4$ | 5/3 | 1.6666666 |
| 5 | $F_6/F_5$ | 8/5 | 1.6000000 |
| 6 | $F_7/F_6$ | 13/8 | 1.6250000 |
| 7 | $F_8/F_7$ | 21/13 | 1.6307692 |
| 8 | $F_9/F_8$ | 34/21 | I.6190476 |
| 9 | $F_{10}/F_9$ | 55/34 | I.6176470 |
| 10 | $F_{11}/F_{10}$ | 89/55 | I.6181818 |
| 11 | $F_{12}/F_{11}$ | 144/89 | 1.6179775 |
| 12 | $F_{13}/F_{12}$ | 233/144 | 1.6180555 |
| 13 | $F_{14}/F_{13}$ | 377/233 | 1.6180257 |
| 14 | $F_{15}/F_{14}$ | 610/377 | 1.6180371 |
| 15 | $F_{16}/F_{15}$ | 987/610 | 1.6180327 |
| 16 | $F_{17}/F_{16}$ | 1597/987 | 1.6180344 |
| 17 | $F_{18}/F_{19}$ | 2584/1597 | 1.6180338 |
| 18 | $F_{19}/F_{18}$ | 4181/2584 | 1.6180340 |
| 19 | $F_{20}/F_{19}$ | 6765/4181 | 1.6180339 |
| 20 | $F_{21}/F_{20}$ | 10946/6765 | 1.6180339 |
| 21 | $F_{22}/F_{21}$ | 17711/10946 | 1.6180339 |

उपरौक्त सारिणी से स्पष्ट है कि–

$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ का हल मान $n \geq 12$ के प्रति दशमलव बाद चार स्थान तक 1.6180 है।

$n \geq 14$ के प्रति दशमलव बाद पाँच स्थान तक 1.61803 है।

$n \geq 19$ के प्रति दशमलव बाद सात स्थान तक 1.6180 339 है।

**17-4 फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के विस्तार क्रम में स्वर्णानुपात या स्वर्णानुपात भिन्न का गुणन**

**प्रतिलोम–** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के विस्तार क्रम में $F_1, F_2, F_3, F_4 - - - - F_n$ .. पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति योग–योग संख्या $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ का गुणन प्रतिलोम $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ दशमलव निरूपण में हल मान स्वर्णानुपाात या स्वर्णानुपात भिन्न $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ का गुणन

प्रतिलोम $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का दशमलव निरूपण हल मान $0.6180339887498948$ के अतिसन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा.। .....'

$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) की जाँच सारिणी

| क्र. | $F_n/F_{n+1}$ | $F_n/F_{n+1}$ का सरल भिन्न | $F_n/F_{n+1}$ का दशमलव भिन्न |
|---|---|---|---|
| 1 | $F_1/F_2$ | 1/1 | 1.0000000 |
| 2 | $F_2/F_3$ | ½ | 0.5000000 |
| 3 | $F_3/F_4$ | 2/3 | 0.6666666 |
| 4 | $F_4/F_5$ | 3/5 | 0.6000000 |
| 5 | $F_5/F_6$ | 5/8 | 0.6250000 |
| 6 | $F_6/F_7$ | 8/12 | 0.6307692 |
| 7 | $F_7/F_8$ | 13/21 | 0.6190476 |
| 8 | $F_8/F_9$ | 21/34 | 0.6176470 |
| 9 | $F_9/F_{10}$ | 34/55 | 0.6181818 |
| 10 | $F_{10}/F_{11}$ | 55/89 | 0.6179775 |
| 11 | $F_{11}/F_{12}$ | 89/144 | 0.6180555 |
| 12 | $F_{12}/F_{13}$ | 144/233 | 0.6180257 |
| 13 | $F_{13}/F_{14}$ | 233/377 | 0.6180371 |
| 14 | $F_{14}/F_{15}$ | 377/610 | 0.6180327 |
| 15 | $F_{15}/F_{16}$ | 610/987 | 0.6180344 |
| 16 | $F_{16}/F_{17}$ | 987/1597 | 0.6180338 |
| 17 | $F_{17}/F_{18}$ | 1597/2584 | 0.6180340 |
| 18 | $F_{18}/F_{19}$ | 2584/4181 | 0.6180339 |
| 19 | $F_{19}/F_{20}$ | 4181/6765 | 0.6180339 |
| 20 | $F_{20}/F_{21}$ | 6765/10946 | 0.6180339 |
| 21 | $F_{21}/F_{22}$ | 10946/17711 | 0.6180339 |

उपरौक्त सारिणी से स्पष्ट है कि—

$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का हल मान $n \geq 11$ के प्रति दशमलव बाद चार स्थान तक $0.6180$ है।

$n \geq 13$ के प्रति दशमलव बाद पाँच स्थान तक $0.61803$ है।

$n \geq 18$ के प्रति दशमलव बाद सात स्थान तक $0.6180\,339$ है।

## 17-5 n वें क्रमांक में स्थित फिबोनिकी स्वरूप संख्या $A_n$ और फिबोनिकी संख्या $F_n$ का मानक अनुपात

**भिन्न प्रतिरूपण प्रमेय—** n के बढ़ते मानों के प्रति n वें क्रमांक में स्थित फिबोनिकी स्वरूप संख्या $A_n$ और फिबोनिकी संख्या $F_n$ का मानक अनुपात भिन्ना प्रतिरूपण $\frac{A_n}{F_n} = \frac{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2} = \frac{(A_2-A_1)\sqrt{5}+(3A_1-A_2)}{2}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** $\frac{A_n}{F_n} = \frac{A_1*F_{n-2}+A_2*F_{n-1}}{F_n} = \frac{A_1*F_{n-2}}{F_n} + \frac{A_2*F_{n-1}}{F_n} = \frac{A_1*(F_n-F_{n-1})}{F_n} + \frac{A_2*F_{n-1}}{F_n}$

$$= \frac{A_1*F_n}{F_n} - \frac{A_1*F_{n-1}}{F_n} + \frac{A_2*F_{n-1}}{F_n} = \frac{(A_2-A_1)F_{n-1}}{F_n} + A_1$$

$$= \frac{(A_2 - A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2} == \frac{(A_2 - A_1)\sqrt{5}+(3A_1 - A_2)}{2}$$ **प्रमाणित।**

## 17-6 n वें क्रमांक में स्थित लुकस संख्या $L_n$ और फिबोनिकी संख्या $F_n$ का मानक अनुपात

**भिन्न प्रतिरूपण प्रमेय–** n के बढ़ते मानों के प्रति n वें क्रमांक में स्थित लुकस संख्या $L_n$ और फिबोनिकी संख्या $F_n$ का मानक अनुपात भिन्न प्रतिरूपण हल मान $\frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** अनुच्छेद **15-5** से प्राप्त समिका $\frac{A_n}{F_n} = \frac{(A_2 - A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2}$ में $A_n$ , $A_1$ एवं $A_2$ के प्रति क्रमशः $L_n$ , $L_1 = 1$ एवं $L_2 = 3$ प्रतिस्थापित करने पर–

$$\frac{L_n}{F_n} = \frac{(L_2 - L_1)(\sqrt{5}-1)+2L_1}{2} = \frac{(3-1)(\sqrt{5}-1)+2*1}{2} = \frac{2*(\sqrt{5}-1+1)}{2} = \sqrt{5}$$ **प्रमाणित।**

$\frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5} = 2.2360679$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) की जाँच सारिणी

| क्र. | $F_n/F_{n+1}$ | $L_n/F_n$ का सरल भिन्न | $L_n/F_n$ का दशमलव भिन्न |
|---|---|---|---|
| 1 | $L_1/F_1$ | 1/1 | 1.0000000 |
| 2 | $L_2/F_2$ | 3/1 | 3.00000000 |
| 3 | $L_3/F_3$ | 4/2 | 2.0000000 |
| 4 | $L_4/F_4$ | 7/3 | 2.3333333 |
| 5 | $L_5/F_5$ | 11/5 | 2.2000000 |
| 6 | $L_6/F_6$ | 18/8 | 2.2500000 |
| 7 | $L_7/F_7$ | 29/13 | 2.2307692 |
| 8 | $L_8/F_8$ | 47/21 | 2.2380952 |
| 9 | $L_9/F_9$ | 76/34 | 2.2352941 |
| 10 | $L_{10}/F_{10}$ | 123/55 | 2.2363636 |
| 11 | $L_{11}/F_{11}$ | 199/89 | 2.2359550 |
| 12 | $L_{12}/F_{12}$ | 322/144 | 2.2361111 |
| 13 | $L_{13}/F_{13}$ | 521/233 | 2.2360515 |
| 14 | $L_{14}/F_{14}$ | 843/377 | 2.2360742 |
| 15 | $L_{15}/F_{15}$ | 1364/610 | 2.2360655 |
| 16 | $L_{16}/F_{16}$ | 2207/987 | 2.2360688 |
| 17 | $L_{17}/F_{19}$ | 3571/1597 | 2.2360676 |
| 18 | $L_{18}/F_{18}$ | 5778/2584 | 2.2360681 |
| 19 | $L_{19}/F_{19}$ | 9349/4181 | 2.2360679 |
| 20 | $L_{20}/F_{20}$ | 15127/6765 | 2.2360679 |
| 21 | $L_{21}/F_{21}$ | 34476/10946 | 2.2360679 |

**उपरोक्त** सारिणी से स्पष्ट है कि–

$\frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}$ का हल मान $n \geq 13$ के प्रति दशमलव बाद चार स्थान तक 2.2360 है।

$n \geq 15$ के प्रति दशमलव बाद पाँच स्थान तक 2.23606 है।

$n \geq 19$ के प्रति दशमलव बाद सात स्थान तक 2.2360679 है।

**17-7 फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी** (a b)A **के विस्तार क्रम में अनुपात या अनुपात भिन्न**– फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी (a b)A के विस्तार क्रम में $A_1, A_2, A_3, A_4 - - - - A_n$ .. पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ का हल मान $= \frac{2(A_2-A_1)+A_1(\sqrt{5}+1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1} = \frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+A_1(3+\sqrt{5})}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** ज्ञात हो चुका है कि–

$A_n = A_1F_{n-2} + A_2F_{n-1}$ फिबोनिकी संख्या एवं फिबोनिकी स्वरूप संख्या में सम्बंध समिका ----------(1)

$\frac{F_{n*1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ फिबोनिकी संख्या में स्वर्णानुपात भिन्न का प्रमेय। ----------(2)

$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ फिबोनिकी संख्या में स्वर्णानुपात भिन्न का प्रतिलोम प्रमेय। ----------(3)

$\frac{A_n}{F_n} = \frac{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2}$ फिबोनिकी संख्या एवं फिबोनिकी स्वरूप संख्या का अनुपात प्रमेय ----------(4)

$\frac{F_n}{A_n} = \frac{2}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}$ समिका (4) का प्रतिलोम अनुपात ----------(5)

$\frac{F_{n+1}}{A_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}$ समिका (2) को समिका (4) द्वारा विभाजित करने पर ----------(6)

अतः $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{A_1F_{n-1}+A_2F_n}{A_n} = \frac{A_2F_n}{A_n} + \frac{A_1F_{n-1}}{A_n} = \frac{A_2F_n}{A_n} + \frac{A_1(F_{n+1}-F_n)}{A_n} = \frac{A_2F_n}{A_n} - \frac{A_1F_n}{A_n} + \frac{A_1F_{n+1}}{A_n}$

$= \frac{(A_2-A_1)F_n}{A_n} + \frac{A_1F_{n+1}}{A_n} = (A_2 - A_1)\frac{2}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1} + A_1\frac{\sqrt{5}+1}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}$

$= \frac{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}$ **प्रमाणित**

**पुन** : $\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1} * \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+(6+2\sqrt{5})A_1}{(A_2-A_1)(4)+2(\sqrt{5}+1)A_1}$

$= \frac{2*[(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+(3+\sqrt{5})A_1]}{2*[2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1]} = \frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+(3+\sqrt{5})A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$ **प्रमाणित।**

आप आश्चर्यजनक रूप से रोमांचित होंगे कि पद क्रमांक n के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ का दशमलव निरूपण मान हल $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के दशमलव निरूपण मान हल के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा। जो कि अध्याय 23 गुणोत्तर सह योग–योग श्रेढ़ी के अध्ययन के तारतम्य में प्रमाणित होगा।

**17-8 फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी** (a b)A **के विस्तार क्रम में अनुपात या अनुपात भिन्न–का प्रतिलोम**

फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी (a b)A के विस्तार क्रम में $A_1, A_2, A_3, A_4 - - - - A_n$ .. पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{A_{n-1}}{A_n}$ का हल मान $\frac{(A_2-A_1)*(3-\sqrt{5})+A_1(\sqrt{5}-1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1} = \frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** $\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_{n+1}-A_n}{A_n} = \frac{A_{n+1}}{A_n} - 1 = \frac{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1} - 1$

$$=\frac{\{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1\}-\{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1\}}{(A_2-A_1)(\sqrt{5}-1)+2A_1}=\frac{(A_2-A_1)*(3-\sqrt{5})+A_1(\sqrt{5}-1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}$$ **प्रमाणित।**

**अथवा** $\frac{A_{n-1}}{A_n}=\frac{A_{n+1}-A_n}{A_n}=\frac{A_{n+1}}{A_n}-1=\frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+(3+\sqrt{5})A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}-1$

$$=\frac{\{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+(3+\sqrt{5})A_1\}-\{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1\}}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}=\frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$$ **प्रमाणित।**

आप आश्चर्यजनक रूप से रोमांचित होंगे कि पद क्रमांक $n$ के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{A_{n-1}}{A_n}$ का दशमलव निरूपण मान हल $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ के दशमलव निरूपण मान हल के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**17=9 लुकस संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 3)L$ **के विस्तार क्रम में स्वर्णानुपात या स्वर्णानुपात भिन्न**– लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के विस्तार क्रम में $L_1, L_2, L_3, L_4 - - - - L_n$ .. पद क्रमांक मान $n$ के बढ़ते मानों के प्रति योग–योग संख्या $\frac{L_{n+1}}{l_n}$ का दशमलव निरूपण में हल मान स्वर्णानुपात या स्वर्णानुपात भिन्न $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के दशमलव निरूपण हल मान $1.618033988749895$ के अतिसन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा.। ...

**प्रमाण** अनुच्छेद **15-7** में सिद्ध कर चुके है कि $\frac{A_{n+1}}{A_n}$ का हल मान $=$

$\frac{2(A_2-A_1)+A_1(\sqrt{5}+1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}=\frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+A_1(3+\sqrt{5})}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

.. में $A_{n+1}, A_n, A_2$ और $A_1$ के प्रति क्रमशः $L_{n+1}, L_n$ $L_2=3$ और $L_1=1$ प्रतिस्थापित करने पर–

$\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{2(A_2-A_1)+A_1(\sqrt{5}+1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}\Rightarrow\frac{L_{n+1}}{L_n}=\frac{2(3-1)+1*(\sqrt{5}+1)}{(3-1)*(\sqrt{5}-1)+2*1}=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **प्रमाणित।**

**अथवा** $\frac{A_{n+1}}{A_n}=\frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}+1)+A_1(3+\sqrt{5})}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}-1)A_1}\Rightarrow\frac{L_{n+1}}{L_n}=\frac{(3-1)*(\sqrt{5}+1)+1*(3+\sqrt{5})}{2(3-1)+(\sqrt{5}+1)*1}=\frac{2*(\sqrt{5}+1)+(3+\sqrt{5})}{2*2+(\sqrt{5}+1)}$

$$=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}=\frac{5+3\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}*\frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{10+10\sqrt{5}}{20}=\frac{10(\sqrt{5}+1)}{20}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$ **प्रमाणित।**

$\frac{L_{n+1}}{L_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) की जाँच सारिणी

| क्र. | $L_{n+1}/L_n$ | $L_{n+1}/L_n$ का सरल भिन्न | $L_{n+1}/L_n$ का दशमलव भिन्न |
|---|---|---|---|
| 1 | $L_2/L_1$ | 3/1 | 3.0000000 |
| 2 | $L_3/L_2$ | 4/3 | 1.3333333 |
| 3 | $L_4/L_3$ | 7/4 | 1.7500000 |
| 4 | $L_5/L_4$ | 11/7 | 1.5714285 |
| 5 | $L_6/L_5$ | 18/11 | 1.6363636 |
| 6 | $L_7/L_6$ | 29/18 | 1.6111111 |
| 7 | $L_8/L_7$ | 47/29 | 1.6206896 |
| 8 | $L_9/L_8$ | 76/47 | 1.6170212 |
| 9 | $L_{10}/L_9$ | 123/76 | 1.6184210 |
| 10 | $L_{11}/L_{10}$ | 199/123 | 1.6178861 |
| 11 | $L_{12}/L_{11}$ | 322/199 | 1.6180904 |
| 12 | $L_{13}/L_{12}$ | 521/322 | 1.6180124 |
| 13 | $L_{14}/L_{13}$ | 843/521 | 1.6180422 |
| 14 | $L_{15}/L_{14}$ | 1364/843 | 1.6180308 |
| 15 | $L_{16}/L_{15}$ | 2207/1364 | 1.6180351 |
| 16 | $L_{17}/L_{16}$ | 3571/2207 | 1.6180335 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 17 | $L_{18}/L_{17}$ | 5778/3571 | 1.6180341 |
| 18 | $F_{19}/L_{18}$ | 9349/5778 | 1.6180339 |
| 19 | $L_{20}/L_{19}$ | 15127/9349 | 1.6180340 |
| 20 | $L_{21}/L_{20}$ | 24476/15127 | 1.6180339 |
| 21 | $L_{22}/L_{21}$ | 39603/24476 | 1.6180339 |
| 22 | $L_{23}/L_{22}$ | 64079/39603 | 1.6180339 |

उपरोक्त सारिणी से स्पष्ट है कि–

$\frac{L_{n+1}}{L_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ का हल मान $n \geq 11$ के प्रति दशमलव बाद चार स्थान तक 1.6180 है।

$n \geq 14$ के प्रति दशमलव बाद पाँच स्थान तक 1.61803 है।

$n \geq 20$ के प्रति दशमलव बाद सात स्थान तक 1.6180 339 है।

**17-10 लुकस संख्या श्रेढ़ी** (1 3)L **के विस्तार क्रम में स्वर्णानुपात या स्वर्णानुपात भिन्न का प्रतिलोम–**

लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के विस्तार क्रम में $L_0$ $L_1, L_2, L_3, L_4 - - - - L_n$ .. पद क्रमांक मान n के बढ़ते मानों के प्रति योग–योग संख्या $\frac{L_{n-1}}{l_n}$ का दशमलव निरूपण में हल मान स्वर्णानुपाात या स्वर्णानुपात भिन्न $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ के दशमलव निरूपण हल मान 0.618033988749895 के अतिसन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा.।छ

**प्रमाण** अनुच्छेद **15-8** में सिद्ध कर चुके है कि $\frac{A_{n-1}}{A_n}$ का हल मान

$\frac{(A_2-A_1)*(3-\sqrt{5})+A_1(\sqrt{5}-1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1} = \frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1}$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

में $A_{n-1}, A_n, A_2$ और $A_1$ के प्रति क्रमशः $L_{n-1}, L_n$ $L_2 = 3$ और $L_1 = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{(A_2-A_1)*(3-\sqrt{5})+A_1(\sqrt{5}-1)}{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1} \Rightarrow \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{(L_2-L_1)*(3-\sqrt{5})+L_1(\sqrt{5}-1)}{(L_2-L_1)*(\sqrt{5}-1)+2L_1} = \frac{(3-1)*(3-\sqrt{5})+1*(\sqrt{5}-1)}{(3-1)*(\sqrt{5}-1)+2*1}$$

$$= \frac{2*(3-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-1)}{2*(\sqrt{5}-1)+2} = \frac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ **प्रमाणित।**

**अथवा** $\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{(A_2-A_1)*(\sqrt{5}-1)+2A_1}{2(A_2-A_1)+(\sqrt{5}+1)A_1} \Rightarrow \frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{(L_2-L_1)*(\sqrt{5}-1)+2L_1}{2(L_2-L_1)+(\sqrt{5}+1)L_1} = \frac{(3-1)*(\sqrt{5}-1)+2*1}{2(3-1)+(\sqrt{5}+1)*1}$

$$= \frac{2*(\sqrt{5}-1)+2}{2*2+(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}+1} * \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ **प्रमाणित।**

$\frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) की जाँच सारिणी

| क्र. | $L_{n-1}/L_n$ | $L_{n-1}/L_n$ का सरल भिन्न | $L_{n-1}/L_n$ का दशमलव भिन्न |
|---|---|---|---|
| 1 | $L_0/L_1$ | 2/1 | 2.0000000 |
| 2 | $L_1/L_2$ | 1/3 | 0.3333333 |
| 3 | $L_2/L_3$ | ¾ | 0.7500000 |
| 4 | $L_3/L_4$ | 4/7 | 0.5714285 |
| 5 | $L_4/L_5$ | 7/11 | 0.6363636 |
| 6 | $L_5/L_6$ | 11/18 | 0.6111111 |
| 7 | $L_6/L_7$ | 18/29 | 0.6206896 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | $L_7/L_8$ | 29/47 | 0.6170212 |
| 9 | $L_8/L_9$ | 47/76 | 0.6184210 |
| 10 | $L_9/L_{10}$ | 76/123 | 0.6178861 |
| 11 | $L_{10}/L_{11}$ | 123/199 | 0.6180904 |
| 12 | $L_{11}/L_{12}$ | 199/322 | 0.6180124 |
| 13 | $L_{12}/L_{13}$ | 322/521 | 0.6180422 |
| 14 | $L_{13}/L_{14}$ | 521/843 | 0.6180308 |
| 15 | $L_{14}/L_{15}$ | 843/1364 | 0.6180351 |
| 16 | $L_{15}/L_{16}$ | 1364/2207 | 0.6180335 |
| 17 | $L_{16}/L_{17}$ | 2207/3571 | 0.6180341 |
| 18 | $L_{17}/L_{18}$ | 3571/5778 | 0.6180339 |
| 19 | $L_{18}/L_{19}$ | 5778/9349 | 0.6180340 |
| 20 | $L_{19}/L_{20}$ | 9349/15127 | 0.6180339 |
| 21 | $L_{20}/L_{21}$ | 15127/24476 | 0.6180339 |
| 22 | $L_{21}/L_{22}$ | 24476/39603 | 0.6180339 |
| 23 | $L_{22}/L_{32}$ | 39603/64079 | 0.6180339 |

उपरौक्त सारिणी से स्पष्ट है कि—

$\frac{L_{n-1}}{L_n} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का हल मान $n \geq 11$ के प्रति दशमलव बाद चार स्थान तक $0.6180$ है।

$n \geq 14$ के प्रति दशमलव बाद पाँच स्थान तक $0.61803$ है।

$n \geq 20$ के प्रति दशमलव बाद सात स्थान तक $0.6180\,339$ है।

**----------17-------**

# अध्याय -18
## योग–योग संख्या श्रेढ़ी एवं स्वर्णानुपात द्विघात या वर्ग समीकरण

अध्याय 16 के हलित उदाहरणों 1,2,3 में समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख स्थित न्यून कोणों का त्रिभुजांक प्राप्ति विश्लेषण में आधार की गणना व्याख्या से योग–योग संख्या श्रेढ़ी विषयक कथन श्रृंखला विश्लेषण में कई महत्वपूर्ण कथन एवं उक्त कथनों के आधार पर प्रमेय प्रतिपादित होते हैं तत् श्रृंखला में अध्याय 16 में स्वर्णानुपात एवं योग–योग संख्या श्रेढ़ी में स्वर्णानुपात एवं स्वर्णानुपात का गुणन प्रतिलोम प्रमेय प्रतिपादित किया गया है। इस अध्याय में योग–योग संख्या श्रेढ़ी के परिपेक्ष्य में स्वर्णानुपात द्विघात समीकरण का अध्ययन प्रासांगिक एवं यथेष्ठ मानते हुयें प्रथम द्विघात या वर्ग समीकरण का अध्ययन प्रस्तुत है।

**18-1 द्विघात या वर्ग समीकरण का प्रतिरूपण** यतः वर्ग समीकरण का प्रतिरूपण $ax^2+bx+c=0$ होता है a,b ,c अचर राशि (संख्या) तथा x चर राशि है। **जैसे** $3x^2+8x+4=0$, $5x^2+\overline{11}x+6=0$

समीकरण हल का तात्पर्य चर राशि x का वह मान प्राप्त करना है जिसे समीकरण के बाँये में प्रतिस्थापित करने पर हलमान दाँयें पक्ष में निहित 0 (शून्य) के बराबर हो। समीकरण का हल अचर राशि a,b ,c की निहित प्रकृति पर निर्भर करता है।

**18-2 वर्ग समीकरण के मूल** वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के दो हल प्राप्त होंगे । जिसे गणित अध्ययन में वर्ग समीकरण के मूल कहते हैं। प्राप्त दोनो मूलों कें लिए क्रमशः प्रथम मूल का संकेत $\alpha$ (अल्फा) और द्वितीय मूल का संकेत $\beta$ (बीटा) है।

**[C] व्यापकता में** व्यापकता में वर्ग समीकरण के बाँये पक्ष $ax^2+bx+c$ का प्रथम अवकलन $\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)$

$=2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4a*c}$ होता है। गणितीय संकेतन में $(b^2-4ac)$ को समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का विविक्तिकर या विवेचक (सूत्रधार) कहते है। अध्ययन संकेत में अंग्रेजी के बड़े अक्षर D से व्यक्त करते है।

अतः $ax^2+bx+c=0$ का हल समीकरण $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4a*c}$ से समीकरण के दो मूल क्रमशः $\alpha=\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta=\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ होगा।

**प्रमाण** वर्ग समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के बाँये पक्ष का प्रथम अवकलन

$\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=2ax+b$ ---------(1)

पुनः $ax^2+bx+c=0$

$\Rightarrow 4a(ax^2+bx+c)=4a*0$ समीकरण के दोनों पक्ष में 4 का गुणा करने पर

$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-b^2=0$ बाँये पक्ष में $b^2$ जोडने एवं धटाने पर।

$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$

$\Rightarrow (4a^2x^2+4abx+b^2)-(b^2-4ac)=0$

$\Rightarrow (2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2=0$

$\Rightarrow (2ax+b)^2=(\sqrt{b^2-4ac})^2 \Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ ----------(2)

समिका (1) और (2) से

$\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)=2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ से

समीकरण के दो मूल क्रमशः $\alpha=\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ और $\beta=\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **प्रमाणित ।**

चूँकि $\bar{b}^2=\bar{b}*\bar{b}=b^2$ तथा $-4a\bar{c}=-(-4ac)=+4ac$

**∴ समीकरण का प्रतिरूपण एवं प्रतिरूपानुसार समीकरण का विविक्तकर और उनके दोनों मूल तालिका**

| क्रमांक | समीकरण | विविक्तिकर D | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $ax^2+bx+c=0$ | $b^2-4ac$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| 2 | $ax^2+\bar{b}x+c=0$ | $b^2-4ac$ | $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ |
| 3 | $ax^2+bx+\bar{c}=0$ | $b^2+4ac$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $ax^2+\bar{b}x+\bar{c}=0$ | $b^2+4ac$ | $\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ |

**1•** विविक्तिकर $D=0$ होने से वर्ग समीकरण के दोनों मूल बराबर होंगे। अर्थात् वर्ग समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त होगा ।

**2•** विविक्तिकर $D=$ किसी संख्या $n$ का वर्गमान होने से वर्ग समीकरण के दोनों मूल अलग–अलग परिमेय संख्या होंगे।

**3•** विविक्तिकर $D=$ शून्येतर धनात्मक पूर्णांक $w$ जो किसी संख्या $n$ का वर्ग नहीं है होनें से वर्ग समीकरण के दोनों मूल अलग–अलग अपरिमेय संख्या :होंगे।

**4•** विविक्तिकर $D=$ भून्येतर ऋणात्मक पूर्णांक $\bar{w}$ होनें से वर्ग समीकरण के दोनों मूल अलग–अलग काल्पनिक संख्या होंगे।

## विविक्तिकर D के हल मान पर वर्ग समीकरण के मूलों की प्रकृति

| क्रमांक | विविक्तिकर D का हलमान | समीकरण एवं उनके मूल | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $ax^2+bx+c=0$ | | $ax^2+\bar{b}x+c=0$ | | $ax^2+bx+\bar{c}=0$ | | $ax^2+\bar{b}x+\bar{c}=0$ | |
| | | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ |
| 1 | 0 (शून्य) | $\frac{\bar{b}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}}{2a}$ | $\frac{b}{2a}$ | $\frac{b}{2a}$ | $\frac{\bar{b}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}}{2a}$ | $\frac{b}{2a}$ | $\frac{b}{2a}$ |
| 2 | संख्या $n$ का वर्गमान | $\frac{\bar{b}+n}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-n}{2a}$ | $\frac{b+n}{2a}$ | $\frac{b-n}{2a}$ | $\frac{\bar{b}+n}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-n}{2a}$ | $\frac{b+n}{2a}$ | $\frac{b-n}{2a}$ |
| 3 | शून्येतर धनात्मक पूर्णांक जो किसी संख्या $n$ का वर्ग नहीं है । | $\frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{b+\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{b+\sqrt{w}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{w}}{2a}$ |
| 4 | शून्येतर ऋणात्मक पूर्णांक $\bar{w}$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{b+\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{b+\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{\bar{w}}}{2a}$ |

## समीकरण के मूल तथा मूलों का योगफल एवं गुणनफल तालिका

| क्रमांक | समीकरण | मूल $\alpha$ | मूल $\beta$ | मूलों का योगफल $(\alpha+\beta)$ | मूलों का गुणनफल $(\alpha*\beta)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $ax^2+bx+c=0$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}}{a}$ | $\frac{c}{a}$ |
| 2 | $ax^2+\bar{b}x+c=0$ | $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ | $\frac{b}{a}$ | $\frac{c}{a}$ |
| 3 | $ax^2+bx+\bar{c}=0$ | $\frac{\bar{b}+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{\bar{b}}{a}$ | $\frac{\bar{c}}{a}$ |
| 4 | $ax^2+\bar{b}x+\bar{c}=0$ | $\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ | $\frac{b}{a}$ | $\frac{\bar{c}}{a}$ |

**18-3 स्वर्णानुपात समीकरण–** वे द्विघात समीकरण जिसका मूल $\alpha=$ स्वर्णनुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ तथा मूल $\beta=$ स्वर्णानुपात का गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ अथवा स्वर्णानुपात का गुणन प्रतिलोम का योज्य प्रतिलोम $(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ प्राप्त हो, स्वर्णानुपात समीकरण कहलाता है। ये दो ही हैं।

### 1■ प्रथम स्वर्णानुपात समीकरण

वर्गसमीकरण $x^2+\bar{1}x+\bar{1}=0$ में $a=1, b=\bar{1}$ से $\bar{b}=1, c=\bar{1}$ है।

∴ समीकरण का विविक्तिकर $D=b^2-4ac=(\bar{1})^2-4*1*\bar{1}=1+4=5=w$ से

समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2*1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ तथा
मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2*1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ होगा।
$\frac{2*(1-\sqrt{5})}{-4} = \frac{(1-\sqrt{5})}{-2}$ का योज्य प्रतिलोम $= \frac{1-\sqrt{5}}{2} =$ मूल $\beta$
मूलों का गुणनफल $= \frac{1+\sqrt{5}}{2} * \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = \frac{\bar{4}}{4} = \frac{\bar{1}}{1} = \bar{1}$
मूलों का योगफल $= \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{2} = 1$

**2■ द्वितीय स्वर्णानुपात समीकरण** वर्ग समीकरण $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ में $a=1, b=\sqrt{5}$ से $\bar{b}=\sqrt{5}$ , $c=1$ है।
∴ समीकरण का विविक्तिकर $D = b^2 - 4ac = (\sqrt{5})^2 - 4 * 1 * 1 = 5-4 = 1 = w$ से
समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2*1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ तथा मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2*1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ होगा।

**मूलोंका विशिष्ट अध्ययन** मूल $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2*(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)*(\sqrt{5}-1)} = \frac{2*(\sqrt{5}-1)}{5-1}$
$= \frac{2*(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2} =$ मूल $\beta$
मूलों का गुणनफल $= \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$
मूलों का योगफल $= \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2*\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

**स्वर्णानुपात समीकरणों का विस्तार**

**1■ प्रथम स्वर्णानुपात समीकरण $x^2 + \bar{1}x + \bar{1} = 0$ का विस्तार**

प्रथम स्वर्णानुपात समीकरण $x^2 + \bar{1}x + \bar{1} = 0$ का विस्तार $x^2 + \bar{b}x + \overline{b^2} = 0$ होगा। जिसका विविक्तिकर $D = \bar{b}^2 - 4*1*\overline{b^2} = b^2 + 4b^2 = 5b^2 = w$ से समीकरण के मूल $\boldsymbol{\alpha} = \frac{-\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{b+\sqrt{5b^2}}{2*1} = \frac{b+b\sqrt{5}}{2} = b * \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = b * (\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ तथा मूल $\boldsymbol{\beta} = \frac{-\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{b-\sqrt{5b^2}}{2*1} = \frac{b-b\sqrt{5}}{2} =$
$b * (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ होगा।

**मूलों का विशिष्ट अध्ययन**

मूल $\alpha = b * \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{2}{b*(\sqrt{5}+1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2b}$ का योज्य प्रतिलोम $(-\frac{\sqrt{5}-1}{2b}) = (\text{मूल } \beta \div b^2)$
मूलों का गुणनफल $= [b*(\frac{\sqrt{5}+1}{2})] * \left[b * (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\right] = b^2 * (-\frac{5-1}{4} = b^2 \frac{\bar{4}}{4} = b^2 \frac{\bar{1}}{1} = \overline{b^2}$
मूलों का योगफल $= [b*(\frac{\sqrt{5}+1}{2})] * \left[b * (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})\right] = b * \left(\frac{4}{4}\right) = \bar{b}$

**उदाहरण■** $x^2 + \bar{5}x + \overline{25} = 0$ के हल लिए जाँच – समीकरण $x^2 + \bar{5}x + \overline{25} = 0$ में $b^2 = \bar{5}^2 = 25$ तथा $c=\overline{25} = \overline{5^2}$ है।
अतः हल नियम के अनुसार मूल $\alpha = b(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = 5(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ तथा मूल $\beta = b(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 5(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ होगा।

**2■ द्वितीय स्वर्णानुपात समीकरण $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ का विस्तार**

द्वितीय स्वर्णानुपात समीकरण $x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0$ का विस्तार $x^2 + \sqrt{5}\,bx + b^2 = 0$ होगा।जिसका विविक्तिकर $D = (\sqrt{5}\,b)^2 - 4 * 1 * b^2 = 5b^2 - 4b^2 = b^2 = w$ से

समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}\,b+\sqrt{b^2}}{2*1} = b*(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ तथा मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}\,b-\sqrt{b^2}}{2*1} = b*\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ होगा।

**मूलों का विशिष्ट अध्ययन** मूल $\alpha = b*\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{2}{b*(\sqrt{5}+1)} = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2b}$ = मूल $\beta \div b^2$ मूलों का

गुणनफल $=[b*\frac{\sqrt{5}+1}{2}]*[b*\frac{\sqrt{5}-1}{2}] = \frac{5-1}{4}*b^2 = \frac{4}{4}b^2 = b^2$

मूलों का योगफल $= b*\frac{\sqrt{5}+1}{2} + b*\frac{\sqrt{5}-1}{2} = b*\frac{2*\sqrt{5}}{2} = b*\sqrt{5}$

**उदाहरण■** $x^2 + \sqrt{45}\,x + 9 = 0$ के हल लिए जाँच – समीकरण $x^2 + \sqrt{45}\,x + 9 = 0$ को $x^2 + \sqrt{5}\,bx + b^2 = 0$ के प्रतिरूपण में दर्शित करने पर $x^2 + \sqrt{5}\,3x + 3^2 = 0$ दर्शित होगा ।

अतः $x^2 + \sqrt{5}\,bx + b^2 = 0$ के हल नियम के अनुसार मूल $\alpha = b\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = 3(\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ तथा

मूल $\beta = b*\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 3(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ होगा।

**18-4 स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरण** वे द्विघात समीकरण जिसका मूल $\alpha$ = स्वर्णनुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ अथवा स्वर्णनुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का योज्य प्रतिलोम $(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ तथा मूल $\beta$ = स्वर्णानुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ का योज्य प्रतिलोम $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ प्राप्त हो, स्वर्णानुपात का गुणन / योज्य प्रतिलोम समीकरण कहलाता है।ये दो ही हैं।

**1■ प्रमेय स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरण** प्रमेय

वर्गसमीकरण $x^2 + x + \bar{1} = 0$ में $a=1, b=1$ से $\bar{b} = \bar{1}, c = \bar{1}$ है।

∴ समीकरण का विविक्तिकर $D = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4*1*\bar{1} = 1+4 = 5 = w$ से

समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\bar{1}+\sqrt{5}}{2*1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ तथा

मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\bar{1}-\sqrt{5}}{2*1} = (-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

मूलों का गुणनफल $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}*\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = -\frac{5-1}{4} = \left(-\frac{4}{4}\right) = -1 = \bar{1}$

मूलों का योगफल $= (\frac{\sqrt{5}-1}{2}) + \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\bar{2}}{2} = \bar{1}$

**2■ द्वितीय स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरण समीकरण** वर्ग समीकरण $x^2 + \sqrt{5}\,x + 1 = 0$ में $a=1, b=\sqrt{5}$ से $\bar{b} = \overline{\sqrt{5}}, c = 1$ है।

∴ समीकरण का विविक्तिकर $D = b^2 - 4ac = (\sqrt{5})^2 - 4*1*1 = 5-4 = 1 = w$ से

समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\overline{\sqrt{5}}+1}{2*1} = (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ तथा मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\overline{\sqrt{5}}-1}{2*1} = (-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

**मूलोंका विशिष्ट अध्ययन** मूल $\alpha = (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ के गुणन प्रतिलोम $(-\frac{2}{\sqrt{5}-1}) = \left(-\frac{2*(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)*(\sqrt{5}+1)}\right) =$

$(-\frac{2*(\sqrt{5}+1)}{5-1}) = \left(-\frac{2*(\sqrt{5}+1)}{4}\right) = (-\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}) =$ मूल $\beta$

मूलों का गुणनफल $= (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

मूलों का योगफल $= = (-\frac{\sqrt{5}-1}{2})*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = (-\frac{2*\sqrt{5}}{2}) = \sqrt{5}$

## स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरणों का विस्तार

### 1■ प्रथम स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरण $x^2+1x+\bar{1}=0$ का विस्तार

प्रथम स्वर्णानुपात समीकरण $x^2+x+\bar{1}=0$ का विस्तार $x^2+bx+\overline{b^2}=0$ होगा। जिसका विविक्तिकर $D= b^2-4*1*\overline{b^2} = b^2+4b^2=5b^2=w$ से समीकरण के मूल $\alpha = \frac{-\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\bar{b}+\sqrt{5b^2}}{2*1} = b(\frac{\bar{1}+\sqrt{5}}{2}) = b*\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ तथा मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\bar{b}-\sqrt{5b^2}}{2*1} = \frac{\bar{b}-b\sqrt{5}}{2} = b*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

### मूलों का विशिष्ट अध्ययन

मूल $\alpha = b*\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{2}{b*(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}+1}{2b}$ का योज्य प्रतिलोम $(-\frac{\sqrt{5}+1}{2b}) = (\text{मूल } \beta \div b^2)$

मूलों का गुणनफल $= [b^*\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)]*\left[b*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})\right] = b^2*\left(-\frac{5-1}{4}\right) = b^2\frac{4}{4} = b^2\frac{\bar{1}}{1} = \overline{b^2}$

मूलों का योगफल $=[b^*\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)]+\left[b*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})\right] = -b = \bar{b}$

**उदाहरण■** $x^2+5x+\overline{25}=0$ के हल लिए जाँच – समीकरण $x^2+5x+\overline{25}=0$ में $b^2=\bar{5}^2=25$ तथा $c=\overline{25}=\overline{\bar{5}^2}$ है।

अतः हल नियम के अनुसार मूल $\alpha = b(\frac{\sqrt{5}-1}{2}) = 5(\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ तथा मूल $\beta = b(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = 5(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

### 2■ द्वितीय स्वर्णानुपात का गुणन /योज्य प्रतिलोम समीकरण $x^2+\sqrt{5}x+1=0$ का विस्तार

द्वितीय स्वर्णानुपात समीकरण $x^2+\sqrt{5}x+1=0$ का विस्तार $x^2+\sqrt{5}\,bx+b^2=0$ होगा।जिसका विविक्तिकर $D=\sqrt{5}\,b)^2-4*1*b^2=5b^2-4b^2=b^2=w$ से

समीकरण के मूल $\alpha = \frac{\bar{b}+\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}\,b+\sqrt{b^2}}{2*1} = b^*(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = b(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ तथा मूल $\beta = \frac{\bar{b}-\sqrt{w}}{2a} = \frac{\sqrt{5}\,b-\sqrt{b^2}}{2*1} = b*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

### मूलों का विशिष्ट अध्ययन

मूल $\alpha = b*\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ के गुणन प्रतिलोम $\frac{2}{-b*(\sqrt{5}-1)} = (-\frac{\sqrt{5}+1}{2b}) = \text{मूल } \beta \div b^2$

मूलों का गुणनफल $=[b^*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})]*[b*(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})] = \frac{5-1}{4}*b^2 = \frac{4}{4}b^2 = b^2$

मूलों का योगफल $=[b^*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})]+[b*(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})] = \overline{\sqrt{5}}b$

**उदाहरण■** $x^2+\sqrt{45}\,x+9=0$ के हल लिए जाँच – समीकरण $x^2+\sqrt{45}\,x+9=0$ को $x^2+\sqrt{5}\,bx+b^2=0$ के प्रतिरूपण में दर्शित करने पर $x^2+\sqrt{5}\,3x+3^2=0$ दर्शित होगा ।

अतः $x^2+\sqrt{5}\,bx+b^2=0$ के हल नियम के अनुसार मूल $\alpha = b\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 3(-\frac{\sqrt{5}-1}{2})$ तथा मूल $\beta = b*(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}) = 3(-\frac{\sqrt{5}+1}{2})$ होगा।

**प्रमय 1■** योग.योग यंख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के पद क्रमांक $r$ के बढते मानों की ओर कोई क्रमागत चार अवयव $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}$ से द्विघात समीकरण युग्म– समीकरण$_1$ $ax^2+bx+c=0$ समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0$ के प्रति $a=A_{r+2}$, $b=A_{r+3}$ तथा $c=A_{r+1}$ लिये जाने पर–

1• दोनों समीकरण का उभय निष्ठ विवेचक $D=A_r^2$ होगा । अतः: दोंनों समीकरण के मूल परिमेय संख्या में प्राप्त होंगे।

2• समीकरण$_1$ $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow A_{r+2}x^2+A_{r+3}x+A_{r+1}=0$ का हल मान–

मूल $\alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -0.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा। तथा मूल $\beta = -1$ होगा।

3• समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0 \Rightarrow A_{r+1}x^2 + A_{r+3}x + A_{r+2} = 0$ का हल मान–

मूल $\alpha = 1$ होगा। तथा मूल $\beta = -1.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** 1• समीकरण$_1$ $\Rightarrow A_{r+2}x^2 + A_{r+3}x + A_{r+1} = 0$ का

विवेचक $D = A_{r+3}^2 - 4A_{r+1}A_{r+2} = (A_{r+2}+A_{r+1})^2 - 4A_{r+1}A_{r+2}$

$= (A_{r+2}-A_{r+1})^2 = A_r^2$ **प्रमाणित।**

समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0 \Rightarrow A_{r+1}x^2 + A_{r+3}x + A_{r+2} = 0$ का

विवेचक $D = A_{r+3}^2 - 4A_{r+1}A_{r+2} = (A_{r+2}+A_{r+1})^2 - 4A_{r+2}A_{r+1}$

$= (A_{r+2}-A_{r+1})^2 = A_r^2$ **प्रमाणित।**

**प्रमाण** 2• समीकरण$_1$ $A_{r+2}x^2 + A_{r+3}x + A_{r+1} = 0$ का हल–

मूल $\alpha = \frac{-A_{r+3}+A_r}{2A_{r+2}} = \frac{-(A_{r+2}+A_{r+1})+(A_{r+2}-A_{r+1})}{2A_{r+2}}$

$= \frac{-2A_{r+1}}{2A_{r+2}} = -\frac{A_{r+1}}{A_{r+2}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$= -0.6180339$ के सन्निकट होने अग्रसर होगा। तथा

मूल $\beta = \frac{-A_{r+3}-A_r}{2A_{r+2}} = \frac{-(A_{r+2}+A_{r+1})-(A_{r+2}-A_{r+1})}{2A_{r+2}}$

$= \frac{-2A_{r+2}}{2A_{r+2}} = -1$ **प्रमाणित।**

**प्रमाण** 3• समीकरण$_2$ $A_{r+1}x^2 + A_{r+3}x + A_{r+2} = 0$ का हल–

मूल $\alpha = \frac{-A_{r+3}+A_r}{2A_{r+1}} = \frac{-(A_{r+2}+A_{r+1})+(A_{r+2}-A_{r+1})}{2A_{r+1}}$

$= \frac{-2A_{r+1}}{2A_{r+1}} = -1$ तथा

मूल $\beta = \frac{-A_{r+3}-A_r}{2A_{r+1}} = \frac{-(A_{r+2}+A_{r+1})-(A_{r+2}-A_{r+1})}{2A_{r+1}} = \frac{-2A_{r+2}}{2A_{r+1}}$

$= -\frac{A_{r+2}}{A_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1.6180339$ के सन्निकट होने अग्रसर होगा। **प्रमाणित।**

**प्रमय 2■** समीकरण $ax^2+bx+c=0$ में $b=(a+c)$ होने के प्रति समीकरण के दो हल–

मूल $\alpha = -\frac{c}{a}$ तथ मूल $\beta = -1$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow ax^2+(a+c)x+c=0$ का विवेचक $D = (a+c)^2 - 4ac$

$= (a-c)^2 \therefore \sqrt{D} = (a-c)$

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = \frac{-(a+c)+(a-c)}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a}$

मूल $\beta = \frac{-(a+c)-(a-c)}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$ **प्रमाणित।**

**उदाहरण 1•** $5x^2+8x+3=0 \Rightarrow 5x^2+(5+3)x+3=0$ के प्रति

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -\frac{3}{5}$ तथा मूल $\beta = -1$

**उदाहरण 2•** $3x^2+8x+5=0 \Rightarrow 5x^2+(3+5)x+3=0$ के प्रति

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -\frac{5}{3}$ तथा मूल $\beta = -1$

**प्रमय 3(a)■** योग.योग यंख्या श्रेढ़ी के पद क्रमांक त के बढ़ते मानों के प्रति कोई तीन क्रमागत अवयव $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}$ से द्विघात

समीकरण $A_r x^2 + A_{r+2}x + A_{r+1} = 0$ के प्रति

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -\frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1.6180339$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

तथा मूल $\beta = -1$ होगा।

**प्रमाण** $A_r x^2 + A_{r+2}x + A_{r+1} = 0 \Rightarrow A_r x^2 + (A_r + A_{r+1})x + A_{r+1} = 0$ के प्रति प्रमेय 2 के तहत्

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -\frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1.6180339$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

तथा मूल $\beta = -1$ होगा। **प्रमाणित।**

**प्रमय 3(b)■** योग.योग यंख्या श्रेढ़ी के पद क्रमांक त के बढ़ते मानों के प्रति कोई तीन क्रमागत अवयव $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}$ से द्विघात

समीकरण $A_{r+1}x^2 + A_{r+2}x + A_r = 0$ के प्रति

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -1$ होगा।

तथा मूल $\beta = -\frac{A_r}{A_{r61}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -0.6180339$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा।

**प्रमाण** $A_r x^2 + A_{r+2}x + A_{r+1} = 0 \Rightarrow A_{r+1}x^2 + (A_{r+1} + A_r)x + A_r = 0$ के प्रति प्रमेय 2 के तहत्

समीकरण के दो हल मूल $\alpha = -1$ होगा।

मूल $\beta$तथा $= -\frac{A_r}{A_{r61}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} = -0.6180339$ के सन्निकट होने की ओर अग्रसर होगा। **प्रमाणित।**

**प्रमेय 4(a)■** समीकरण $a^2x^2 + abx - b^2 = 0$ के दो हल

मूल $\alpha = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{b}{a}$ तथा मूल $\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$होगा।

**प्रमाण** समीकरण $a^2x^2 + abx - b^2 = 0$ का विवेचक $D = (ab)^2 - a^2 * (-b^2) = 5a^2b^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\,ab$ से

मूल $\alpha = \frac{-ab+\sqrt{5}\,ab}{2a^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{b}{a}$ तथा मूल $\beta = \frac{-ab-\sqrt{5}\,ab}{2a^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$ होगा।

**प्रमेय 4(b)■** समीकरण $a^2x^2 - abx - b^2 = 0$ के दो हल

मूल $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$ तथा मूल $\beta = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $a^2x^2 - abx - b^2 = 0$ का विवेचक $D = (-ab)^2 - a^2 * (-b^2) = 5a^2b^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\,ab$ से

मूल $\alpha = \frac{ab+\sqrt{5}\,ab}{2a^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$ तथा मूल $\beta = \frac{ab-\sqrt{5}\,ab}{2a^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{b}{a}$ होगा।

## 18-5 योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के पद क्रमांक r के बढ़ते मानों के प्रति क्रमागत दो अवयव का समीकरण प्रमेय–

**1•** समीकरण $A_r^2x^2 + A_r * A_{r+1}x - A_{r+1}^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = 1$ के सन्निकट तथा मूल $\beta = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**प्रमाण** समीकरण$A_r^2x^2 + A_r * A_{r+1}x - A_{r+1}^2 = 0$ का

विवेचक $D = (A_r * A_{r+1})^2 - 4A_r^2 * (-A_{r+1}^2) = 5A_r^2A_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ A_rA_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{-A_rA_{r+1}+\sqrt{5}\,A_rA_{r+1}}{2A_r^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$ के सन्निकट

तथा मूल $\beta = = \frac{-A_rA_{r+1}-\sqrt{5}\,A_rA_{r+1}}{2A_r^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**2•** समीकरण $A_r^2x^2 - A_r * A_{r+1}x - A_{r+1}^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट तथा मूल $\beta = -1$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**प्रमाण** समीकरण $A_r^2x^2 - A_r * A_{r+1}x - A_{r+1}^2 = 0$ का

विवेचक $D = (-A_r * A_{r+1})^2 - 4A_r^2 * (-A_{r+1}^2) = 5A_r^2A_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ A_rA_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{A_rA_{r+1}+\sqrt{5}\,A_rA_{r+1}}{2A_r^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{A_{r+1}}{A_r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट

तथा मूल $\beta = = \frac{A_rA_{r+1}-\sqrt{5}\,A_rA_{r+1}}{2A_r^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{A_{r+1}}{A_r} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**3•** समीकरण $A_{r+1}^2x^2 + A_{r+1} * A_rx - A_r^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट तथा मूल $\beta = -1$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**प्रमाण** समीकरण $A_r^2x^2 + A_{r+1} * A_rx - A_r^2 = 0$ का

विवेचक $D = (A_{r+1} * A_r)^2 - 4A_{r+1}^2 * (-A_r^2) = 5A_{r+1}^2A_r^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ A_{+1r}A_r$ से

मूल $\alpha = \frac{-A_{r+1}A_r+\sqrt{5}\,A_{r+1}A_r}{2A_{r+1}^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{A_r}{A_{r+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट

तथा मूल $\beta = = \frac{-A_{r+1}A_r-\sqrt{5}\,A_{r+1}A_r}{2A_{r+1}^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{A_r}{A_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -1$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**4•** समीकरण $A_{r+1}^2x^2 - A_{r+1} * A_rx - A_r^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = 1$ के सन्निकट तथा मूल $\beta = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**प्रमाण** समीकरण $A_r^2x^2 - A_{r+1} * A_rx - A_r^2 = 0$ का

विवेचक $D = (-A_{r+1} * A_r)^2 - 4A_{r+1}^2 * (-A_r^2) = 5A_{r+1}^2A_r^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ A_{+1r}A_r$ से

मूल $\alpha = \frac{A_{r+1}A_r+\sqrt{5}\,A_{r+1}A_r}{2A_{r+1}^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{A_r}{A_{r+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ के सन्निकट

तथा मूल $\beta = \frac{A_{r+1}A_r-\sqrt{5}\,A_{r+1}A_r}{2A_{r+1}^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{A_r}{A_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

# अध्याय -19
## क्रमागत अवयवों का प्रमेय

### 19-1 दो क्रमागत अवयवों का प्रमेय–

**1■** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अअयव के वर्ग मानों का योगमान दनके क्रमांक मानों के योगमान क्रमांक में स्थित फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी का अवयव होता है। अर्थात् $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+(n+1)} = F_{2n+1}$

**प्रमाण आगमन–निगमन विधि द्वारा–**

| क्रमांक | $F_n^2 + F_{n+1}^2$ | $F_n^2 + F_{n+1}^2$ का योगमान | $F_{2n+1}$ की फिबानिकी संख्या |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $F_1^2 + F_2^2$ | $1^2+1^2=1+1=2$ | $F_{2*1+1} = F_3 = 2$ |
| 2 | $F_2^2 + F_3^2$ | $1^2+2^2 = 1+4 = 5$ | $F_{2*2+1} = F_5 = 5$ |
| 3 | $F_3^2 + F_4^2$ | $2^2+3^2 = 4+9 = 13$ | $F_{2*3+1} = F_7 = 13$ |
| 4 | $F_4^2 + F_5^2$ | $3^2+5^2=9+25=34$ | $F_{2*4+1} = F_9 = 34$ |
| 5 | $F_5^2 + F_6^2$ | $5^2+8^2=25+64 = 89$ | $F_{2*5+1} = F_{11} = 89$ |
| 6 | $F_6^2 + F_7^2$ | $8^2+13^2 = 64+169 = 233$ | $F_{2*6+1} = F_{13} = 233$ |
| 7 | $F_7^2 + F_8^2$ | $13^2+21^2=169+441 = 610$ | $F_{2*7+1} = F_{15} = 610$ |
| 8 | $F_8^2 + F_9^2$ | $21^2+34^2=441+1156=1597$ | $F_{2*8+1} = F_{17} = 1597$ |
| 9 | $F_9^2 + F_{10}^2$ | $34^2+55^2=1156+3025 = 4181$ | $F_{2*9+1} = F_{19} = 4181$ |
| 10 | $F_{10}^2 + F_{11}^2$ | $55^2+89^2=3025+7921=10946$ | $F_{2*10+1} = F_{21} = 10946$ |

**2■** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अअयव $F_{n-1}, F_n, F_{n+1}$ से $F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{2n}$ होगा।

**प्रमाण आगमन–निगमन विधि द्वारा–**

| क्रमांक | N | $F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ | $F_{2n}$ की फिबानिकी संख्या |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | $F_1(F_2 + F_0) = 1(1+0) = 1*1=1$ | $F_2 = 1$ |
| 2 | 2 | $F_2(F_3 + F_1) = 1(2+1) = 1*3=3$ | $F_4 = 3$ |
| 3 | 3 | $F_3(F_4 + F_2) = 2(3+1) = 2*4=8$ | $F_6 = 8$ |
| 4 | 4 | $F_4(F_5 + F_3) = 3(5+2) = 3*7=21$ | $F_8 = 21$ |
| 5 | 5 | $F_5(F_6 + F_4) = 5(8+3) = 5*11=55$ | $F_{10} = 55$ |
| 6 | 6 | $F_6(F_7 + F_5) = 8(13+5)$ 8*18=144 | $F_{12} = 144$ |
| 7 | 7 | $F_7(F_8 + F_6) = 13(21+8)$ 13*29=377 | $F_{14} = 377$ |
| 8 | 8 | $F_8(F_9 + F_7) = 21(34+13) = 21*47=987$ | $F_{16} = 987$ |
| 9 | 9 | $F_9(F_{10} + F_8) = 34(55+21) = 34*76=2584$ | $F_{18} = 2584$ |
| 10 | 10 | $F_{10}(F_{11} + F_9) = 55(89+34)=55*123=6765$ | $F_{20} = 6765$ |

**3■** **r** वें क्रमांक की फिबोनिकी संख्या $F_r$ और लुकस संख्या $L_r$ का गुणनफल **r** के दुने क्रमांक की फिबोनिकी संख्या $F_{2r}$ के बराबर होगी। अर्थात् $F_r * L_r = F_{2r}$

**प्रमाण विश्लेषण विधि–**

ज्ञात है– $\mathbf{A_n} = A_1 * F_{n-2} + A_2 * F_{n-1}$ ----------(1)

$$F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{2n} \quad \text{----------(2)}$$

**उपपत्ति**

$$F_r * L_r = F_r * (L_1 * F_{r-2} + L_2 * F_{r-1}) = F_r * (1 * F_{r-2} + 3 * F_{r-1})$$
$$= F_r * (F_{r-2} + 3F_{r-1}) = F_r * \{(F_{r-2} + F_{r-1}) + 2F_{r-1})\}$$
$$= F_r * (F_r + 2F_{r-1}) = F_r * \{(F_r + F_{r-1}) + F_{r-1}\}$$
$$= F_r * (F_{r+1} + F_{r-1}) = F_{2r}$$ **प्रमाणित**

**4■** लुकस संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अअयव के वर्ग मानों का योगमान

$$L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n+2} + L_{2n} = L_{2n+3} - L_{2n-1}$$

**प्रमाण आगमन.–नगमन विधि द्वारा–**

| क्र. | $L_n^2 + L_{n+1}^2 = x$ | $L_{2n+2} + L_{2n} = y$ | $L_{2n+3} - L_{2n-1} = z$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | $L_1^2 + L_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ | $L_4 + L_2 = 7 + 3 = 10$ | $L_5 - L_1 = 11 - 1 = 10$ |
| 2 | $L_2^2 + L_3^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ | $L_6 + L_4 = 18 + 7 =$ **25** | $L_7 - L_3 = 29 - 4 = 25$ |
| 3 | $L_3^2 + L_4^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ | $L_8 + L_6 = 47 + 18 = 65$ | $L_9 - L_5 = 76 - 11 = 65$ |
| 4 | $L_4^2 + L_5^2 = 7^2 + 11^2 = 170$ | $L_{10} + L_8 = 123 + 47 = 170$ | $L_{11} - L_7 = 199 - 29 = 170$ |
| 5 | $L_5^2 + L_6^2 = 11^2 + 18^2 = 445$ | $L_{12} + L_{10} = 322 + 123 = 445$ | $L_{13} - L_9 = 521 - 76 = 445$ |

**उपप्रमेय 4. 1■** लुकस संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अअयव के वर्ग मानों का योगमान

$$L_n^2 + L_{n+1}^2 = \frac{L_{2(n+2)} + L_{2(n+1)}}{2}$$ होगा।

**प्रमाण1** प्रमेय **2** के तहत $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n+2} + L_{2n}$ ---------- (1)

$$L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n+3} - L_{2n-1} \text{ ---------- (2)}$$

समिका (1)+ (2) से $2[L_n^2 + L_{n+1}^2] = \{L_{2n+2} + L_{2n+3}\} + \{L_{2n} - L_{2n-1}\}$

$$= L_{2n+4} + -L_{2n-2}$$
$$= L_{2(n+2)} + -L_{2(n-1)}$$ **माणित।**

**प्रमाण2 आगमन–निगमन विधि द्वारा**

| क्र. | N | $L_n^2 + L_{n+1}^2 = x$ | $\frac{L_{2(n+2)} + L_{2(n-1)}}{2} = y$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | | $L_1^2 + L_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ | $\frac{L_6 + L_0}{2} = \frac{18+2}{2} = \frac{20}{2} = 10$ |
| 2 | 2 | $L_2^2 + L_3^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ | $\frac{L_8 + L_2}{2} = \frac{47+3}{2} = \frac{50}{2} = 25$ |
| 3 | 3 | $L_3^2 + L_4^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ | $\frac{L_{10} + L_4}{2} = \frac{123+7}{2} = \frac{130}{2} = 65$ |
| 4 | 4 | $L_4^2 + L_5^2 = 7^2 + 11^2 = 170$ | $\frac{L_{12} + L_6}{2} = \frac{322+18}{2} = \frac{340}{2} = 170$ |
| 5 | 5 | $L_5^2 + L_6^2 = 11^2 + 18^2 = 445$ | $\frac{L_{14} + L_8}{2} = \frac{843+47}{2} = \frac{890}{2} = 445$ |

**उपप्रमेय 4. 2■** लुकस संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अअयव के वर्ग मानों का योगमान उन्हीं क्रमागत क्रमांकों के फिबोनिकी संख्या युग्म

के वर्ग मानों के योग मान का पाँच गुणा होता है। अर्थात् $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5(F_n^2 + F_{n+1}^2) = 5F_{2n+1}$होगा।

**प्रमाण1 आगमन–निगमन विधि द्वारा**

| क्र. | n | $L_n^2 + L_{n+1}^2 = x$ | $5(F_n^2 + F_{n+1}^2)$ | $5F_{2n+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | $L_1^2 + L_2^2 = 1^2 + 3^2 = 10$ | $5(F_1^2 + F_2^2)=5(1^2 + 1^2)=5*2=10$ | $5*F_5=5*2=10$ |
| 2 | 2 | $L_2^2 + L_3^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ | $5(F_2^2 + F_3^2)=5(1^2 + 2^2)=5*5=25$ | $5*F_5=5*5=25$ |
| 3 | 3 | $L_3^2 + L_4^2 = 4^2 + 7^2=65$ | $5(F_3^2 + F_4^2)=5(2^2 + 3^2)=5*13=65$ | $5*F_7=5*13=65$ |
| 4 | 4 | $L_4^2 + L_5^2 = 7^2 + 11^2=170$ | $5(F_4^2 + F_5^2)=5(3^2 + 5^2)=5*34=170$ | $5*F_9=5*34=170$ |
| 5 | 5 | $L_5^2 + L_6^2 = 11^2 + 18^2=445$ | $5(F_5^2 + F_6^2)=5(5^2 + 8^2)=5*89=445$ | $5*F_{11}=5*89=445$ |

**विश्लेषण विधि–**

ज्ञात है– $\mathbf{A_n} = A_1 * F_{n-2} + A_2 * F_{n-1}$ ----------(1)

$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{n+(n+1)} = F_{2n+1}$ ----------(2)

$F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = F_{2n}$ ----------(3)

उपपत्ति $L_n^2 + L_{n+1}^2 = (L_1 * F_{n-2} + L_2 * F_{n-1})^2 + (L_1 * F_{n-1} + L_2 * F_n)^2$

$= (1 * F_{n-2} + 3 * F_{n-1})^2 + (1 * F_{n-1} + 3 * F_n)^2$

$= (F_{n-2} + 3F_{n-1})^2 + (F_{n-1} + 3F_n)^2$

$= (F_{n-2}^2 + 6F_{n-2}F_{n-1} + 9F_{n-1}^2)+( F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 9F_n^2)$

$= (F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2)+9(F_{n-1}^2 + F_n^2) +6F_{n-1}(F_{n-2} + F_n)$

$= F_{2n-3} + 9F_{2n-1} + 6\,F_{2n-2}$

$= F_{2n-1} - F_{2n-2} + 9F_{2n-1} + 6\,F_{2n-2}$

$= 10F_{2n-1} + 5\,F_{2n-2}$

$= 5F_{2n-1} + 5(\,F_{2n-1} + F_{2n-2}\,)$

$= 5F_{2n-1} + 5\,F_{2n}$ $=5(F_{2n-1} + F_{2n}) =5F_{2n+1}$ **प्रमाणित**

**5■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अवयव में दीर्घ एवं लघु क्रम के वर्ग मान का अन्तरमान दीर्घ क्रम के बाद एवं लघु क्रम के पूर्व पद के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् $A_{n+1}^2 - A_n^2 = A_{n+2} * A_{n-1}$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_{n+1}^2 - A_n^2 = (A_{n+1} + A_n) * (A_{n+1} - A_n) = A_{n+2} * A_{n-1}$ **प्रमाणित।**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $[A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 - - - -]$ =[3,2,5,7,12----------] के प्रति अवलोकन तालिका

| क्र. | n | $A_{n+1}^2 - A_n^2 = x$ | $A_{n+2} * A_{n-1}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | $A_2^2 - A_1^2 = 5^2 - 2^2 = 25\text{-}4 = 21$ | $A_3 * A_0 = 7*3 = 21$ |
| 2 | 2 | $A_3^2 - A_2^2 = 7^2 - 5^2 = 49\text{-}25 = 24$ | $A_4 * A_1 = 12*2 = 24$ |
| 3 | 3 | $A_4^2 - A_3^2 = 12^2 - 7^2 = 144\text{-}49 = 95$ | $A_5 * A_2 = 19*5 = 95$ |
| 4 | 4 | $A_5^2 - A_4^2 = 19^2 - 12^2 = 361\text{-}144 = 217$ | $A_6 * A_3 = 31*7 = 217$ |
| 5 | 5 | $A_6^2 - A_5^2 = 31^2 - 19^2 = 961\text{-}361 = 600$ | $A_7 * A_4 = 50*12 = 600$ |

**6■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के दो एकान्तर पदों में दीर्घ एवं लघु क्रम के वर्ग मान का अन्तरमान उनके मध्यपद एवं दोनों पदों के योगमान का गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात् $A_{n+1}^2 - A_{n-1-}^2 = A_n * (A_{n+1} + A_{n-1})$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_{n+1}^2 - A_{n-1}^2 = (A_{n+1} + A_{n-1}) * (A_{n+1} - A_{n-1}) = (A_{n+1} + A_{n-1}) * A_n$

$= A_n * (A_{n+1} + A_{n-1})$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**7■ योग–योग संख्या** (a b)A **श्रेढ़ी के दो क्रमागत अवयवों के वर्ग मानों का योगमान प्रमेय–**

$A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ होगा।

**प्रमाण–**

**प्रमाणन हेतू संदर्भ समिकाएँ–** 1• $A_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$

2• $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

3• $(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$

बाँया पक्ष $= A_n^2 + A_{n+1}^2 = (aF_{n-2} + bF_{n-1})^2 + (aF_{n-1} + bF_n)^2$ संदर्भ समिका 1 से

$= a^2(F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2) + b^2(F_{n-1}^2 + F_n^2) + 2ab\{(F_{n-2} * F_{n-1}) + (F_{n-1} * F_n)\}$

$= a^2F_{2n-3} + b^2F_{2n-1} + 2abF_{2n-2}$ संदर्भ समिका 2 और 3 से

$= (a^2F_{2n-3} + abF_{2n-2}) + (b^2F_{2n-1} + abF_{2n-2})$

$= a(aF_{2n-3} + bF_{2n-2}) + b(bF_{2n-1} + aF_{2n-2}))$

$= aA_{2n-1} + bA_{2n} =$ दाँया पक्ष संदर्भ समिका 1 से **प्रमाणित।**

**फिबोनिकी संख्या** (1 1)F **श्रेढ़ी के प्रति–** $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ **का प्रमाण**

$A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n} \Rightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 = 1 * F_{2n-1} + 1 * F_{2n}$

$= F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$ **प्रमाणित।**

**व्याख्या** अर्थात् थिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी के प्रति – दो क्रमागत अवयव के अवयवों के वर्ग मानों का योगमान उन क्रमांक के योग मान पर स्थित अवयव मान होता है।

**लुकस संख्या** (1 3)L **श्रेढ़ी के प्रति–** $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n} + L_{2(n+1)}$ **का प्रमाण**

$A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n} \Rightarrow L_n^2 + L_{n+1}^2 = 1 * L_{2n-1} + 3 * L_{2n}$

$= L_{2n-1} + 3L_{2n}$

$= L_{2n+1} + 2L_{2n}$

$= L_{2n+2} + L_{2n}$

$= L_{2n} + L_{2(n+1)}$ **प्रमाणित।**

**व्याख्या** अर्थात् लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के प्रति – दो क्रमागत अवयव के अवयवों के वर्ग मानों का योगमान क्रमशःउनके दुने क्रमांक पर स्थित अवयवों का योगमान होता है।

## 19-2 तीन क्रमागत अवयवों का प्रमेय–

**1■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद मानों का योगमान तीसरे पद मान का दुगुना होगा।

अर्थात् $A_n + A_{n+1} + A_{n+2} = 2A_{n+2}$

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_n + A_{n+1} = (A_n + A_{n+1}) + A_{n+2}$

$= A_{n+2} + A_{n+2} = 2A_{n+2} =$ दाँया पक्ष योग–योग संख्या श्रेढी का तीसरा पद मान उसके पूर्व दो पदो योगमान होने के नियम से। **प्रमाणित।**

**2■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद मानों में तीसरे और प्रथम पद के वर्ग मानों का अन्तर मान उनके योगमान एवं दूसरे पद का गुणनफल होता है। अर्थात् $A_{n+2}^2 - A_n^2 = (A_{n+2} + A_n) * A_{n+1}$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_{n+2}^2 - A_n^2 = (A_{n+2} + A_n) * (A_{n+2} - A_n)$

$= (A_{n+2} + A_n) * A_{n+1} =$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**टीप–** इसी प्रमेय को**17-1, 5■** के शब्दों में व्यक्त किया गया है।

## 19-3 चार क्रमागत अवयवों का प्रमेय–

**1■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के चार क्रमागत पद मानों में तीसरे एवं दूसरे पद मानों के वर्ग मानों का अन्जर मान प्रथम एव चौथे पद मानों का गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् चार क्रमागत पद $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}$ मानों में $A_{n+2}^2 - A_{n+1}^2 = A_n * A_{n+3}$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_{n+2}^2 - A_{n+1}^2 = (A_{n+2} + A_{n+1}) * (A_{n+2} - A_{n+1})$

$= A_{n+3} * A_n = A_n * A_{n+3} =$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**टीप–** इसी प्रमेय को**19-1, 5■** के शब्दों में व्यक्त किया गया है।

**2■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के चार क्रमागत पद मानों के अन्त्य पदों का गुणनफल और मध्य पदो के गुणनफल का अन्तर मान का मापांक और उसी श्रेढ़ी के प्रथम चार क्रमागत पद मानों के अन्त्य पदों का गुणनफल और मध्य पदो के गुणनफल का अन्तर मान का मापांक बराबर होंगे।

अर्थात $|(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})| = |(A_1 * A_4) - (A_2 * A_3)|$ होंगे।

**प्रमाण** अनुच्छेद **15-5** योग –योग संख्या श्रेढी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका के अनुसार– किसी भी स्तर के योग–योग संख्या श्रेढी $[A_1, A_2, A_3, A_4, -, -, -, -, -, -, A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n]$ में स्थित भी दो क्रमागत पद अवयव $A_r$ और $A_{r+1}$ सें $(A_r^2 + A_r * A_{r-1} - A_{r+1}^2)$ का मापांक मान उस श्रेढ़ी के प्रथम पद अवयव $A_1$ओर द्वितीय पद, $A_2$ सें $(A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2)$ का मापांक मान में स्थिरांक नियम का पालन करता है।

तदानुसार $|A_{m+1}^2 + A_{m+1} * A_{m+2} - A_{m+2}^2| = |A_{m+1} * A_{m+2} - (A_{m+2}^2 - A_{m+1}^2)|$

$= |A_{m+1} * A_{m+2} - (A_{m+2}^2 - A_{m+1}^2)|$

$= |A_{m+1} * A_{m+2} - (A_{m+2} + A_{m+1}) * (A_{m+2} - A_{m+1})|$

$= |(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})|$

$= |(A_{m+1} * A_{m+2}) - (A_m * A_{m+3})|$

$|A_2^2 + A_2 * A_3 - A_3^2| = |A_2 * A_3 - (A_3^2 - A_2^2)|$

$= |A_2 * A_3 - (A_3^2 - A_2^2)|$

$= |A_2 * A_3 - (A_3 + A_2)(A_3 - A_2)|$

$= |(A_2 * A_3) - (A_4 * A_1)|$

$= |(A_2 * A_3) - (A_1 * A_4)|$

$\therefore |(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})| = |(A_1 * A_4) - (A_2 * A_3)|$ होंगे। **प्रमाणित।**

**उप प्रमेय 2■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी के किन्हीं चार क्रमागत पद मानों के अन्त्य पदों का गुणनफल और मध्य पदो के गुणनफल का अन्तर मान का मापांक तथा उसी श्रेढ़ी के किसी अन्य चार क्रमागत पद मानों के अन्त्य पदों का गुणनफल और मध्य पदो के गुणनफल का अन्तर मान का मापांक बराबर होंगे।

अर्थात चार क्रमागत पद $(A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3})$ और उसी श्रेढ़ी के किसी अन्य चार क्रमागत पद $(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3})$ के प्रति– $|(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})| = |(A_n * A_{n+3}) - (A_{n+1} * A_{n+2})|$ होंगे।

**प्रमाण** प्रमेय 2■ के तहत् – $|(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})| = |(A_1 * A_4) - (A_2 * A_3)|$ -------(1)

$|(A_n * A_{n+3}) - (A_{n+1} * A_{n+2})| = |(A_1 * A_4) - (A_2 * A_3)|$ -------(2)

समिका (1) और (2) से– $|(A_m * A_{m+3}) - (A_{m+1} * A_{m+2})| = |(A_n * A_4) - (A_2 * A_3)|$ **प्रमाणित।**

**3■** अध्याय 14 अनुच्छेद 14-8 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन विषयक $\mathbf{m\angle\theta}$ का त्रिभुजांक गणना क्रम में योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के प्रति दो क्रमागत अवयव $A_n$ और $A_{n+1}$ से $|A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2| = k$ स्थिरांक होगा। जिसका सरल हल मान $|A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2| = |a^2 + a * b - b^2|$ होगा। तब चार क्रमागत अवयव $A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}$ और स्थिरांक k से–

$[(A_n^2 + A_{n+2}^2) * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)] - k^2 = [A_{n+3}^2 - 2A_{n+1}^2]^2$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= [(A_n^2 + A_{n+2}^2) * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)] - k^2$

$= [(A_n^2 + A_{n+2}^2) * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)] - [A_{n+2}^2 + A_{n+2} * A_{n+3} - A_{n+3}^2]^2$

( स्थिरांक k का हल विस्तार दो क्रमागत अवयव $A_{n+2}$ और $A_{n+3}$ से

$= [\{(A_{n+3} - 2A_{n+1})^2 + (A_{n+3} - A_{n+1})^2\} * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)]$

$-[(A_{n+3} - A_{n+1})^2 + (A_{n+3} - A_{n+1}) * A_{n+3} - A_{n+3}^2]^2$

$A_{n+1}$ और $A_{n+3}$ में विस्तारित करने पर

$= [\{(A_{n+3}^2 - 4A_{n+3}A_{n+1} + 4A_{n+1}^2) + (A_{n+3}^2 - 2A_{n+3}A_{n+1} + A_{n+1}^2)\} * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)]$

$-[(A_{n+3}^2 - 2A_{n+3}A_{n+1} + A_{n+1}^2) + (A_{n+3}^2 - A_{n+1}A_{n+3}) - A_{n+3}^2]^2$

$= [(2A_{n+3}^2 - 6A_{n+3}A_{n+1} + 5A_{n+1}^2) * (A_{n+1}^2 + A_{n+3}^2)] - [A_{n+3}^2 - 3A_{n+3}A_{n+1} + A_{n+1}^2]^2$

$= [7A_{n+3}^2A_{n+1}^2 - 6A_{n+3}A_{n+1}^3 + 5A_{n+1}^4 + 2A_{n+3}^4 - 6A_{n+3}^3A_{n+1}]$

$-[A_{n+3}^4 - 6A_{n+3}^3A_{n+1} + 11A_{n+1}^2A_{n+3}^2 - 6A_{n+3}A_{n+1}^3 + A_{n+1}^4]$

$= [-4A_{n+1}^2A_{n+3}^2 + 4A_{n+1}^4 + A_{n+3}^4]$

$= [A_{n+3}^4 - 4A_{n+1}^2A_{n+3}^2 + A_{n+1}^4] = [A_{n+3}^2 - 2A_{n+1}^2]^2$ = दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**उक्त प्रमेय से–**

**फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के प्रति–**

$[(F_n^2 + F_{n+2}^2) * (F_{n+1}^2 + F_{n+3}^2)] - 1 = [F_{n+3}^2 - 2F_{n+1}^2]^2$ होगा।

**लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के प्रति–**

$[(L_n^2 + L_{n+2}^2) * (L_{n+1}^2 + L_{n+3}^2)] - 25 = [L_{n+3}^2 - 2L_{n+1}^2]^2$

**4■** अन्त्य पदों के वर्ग मानों का योगमान मध्य पदों के वर्गमानों के योगमान का दुगुना होता है।

अर्थात् योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के चार क्रमागत अवयव $A_n$, $A_{n+1}$, $A_{n+2}$ $A_{n+3}$ के प्रति –

$A_n^2 + A_{n+3}^2 = 2(A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2) = 2(aA_{2n+1} + bA_{2n+2})$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_n^2 + A_{n+3}^2 = (A_{n+2} - A_{n+1})^2 + (A_{n+2} + A_{n+1})^2$

$= \quad 2(A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2) \quad =$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

$= 2(aA_{2n+1} + bA_{2n+2})$ { योग–योग संख्या (a b)Aश्रेढ़ी के दो क्रमागत अवयवों के वर्ग मानों का योगमान प्रमेय– $A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ }

त **18-4 छः क्रमागत अवयवों का प्रमेय–**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी के किन्हीं छः क्रमागत पद मानों का योगमान पाँचवें पद मान का चार गुना होगा।

अर्थात छः क्रमागत पद का योगमान $= (A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + A_{m+4} + A_{m+5}) = 4A_{m+4}$

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_m + A_{m+1} + A_{m+2} + A_{m+3} + A_{m+4} + A_{m+5}$

$= (A_m + A_{m+1} + A_{m+2}) + (A_{m+3} + A_{m+4} + A_{m+5})$

$= \mathbf{2A_{m+2} + 2A_{m+5}}$ **तीन क्रमागत पद मानों का योगमान प्रमेय 17-2**

$= \mathbf{2(A_{m+2} + A_{m+5})}$

$= 2[(A_{\mathbf{17-3}\,m+4} - A_{m+3}) + ((A_{m+3} + A_{m+4})]$

$= 2A_{m+2} + 2A_{m+5}$ तीन क्रमागत पद मानों का योगमान प्रमेय **17-2 1■** से

$= 2[A_{m+2} + A_{m+5}]$

$= 2[(A_{m+4} - A_{m+3}) + ((A_{m+3} + A_{m+4})]$

$= 2[2A_{m+4}] = 4A_{m+4} =$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

----------19--------

## अध्याय -20
## फिबोनिकी श्रेढ़ी (1 1)F विषयक प्रमेय

चूँकि किसी भी स्तर (a b) के योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b) A के प्रति स्तर (1 1) के योग–योग संख्या श्रेढ़ी को योग–योग संख्या का प्रथम प्रस्तुति माना गया है। आधुनिक गणित जगत में लियों नार्दो फिबोनिकी को प्रथम प्रस्तुत कर्ता मानकर उनके सम्मान में फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1) F कहा गया है। योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b) Aऔर फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी ? (1 1)F में स्वयं सिद्ध सम्बंध समिका $A_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$ अंगिृहीत है। अतः योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के महत्वपूर्ण गुणों को प्रतिपादित करने के पूर्व फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के महत्वपूर्ण गुणों को प्रतिपादित करना यथेष्ठ होगा। अवलोकित कीजिये।

### 20-1 फिबोनिकी श्रेढ़ी (1 1)F विषयक अभिगृहीत –

**अभिगृहीत 1■** फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के n वें क्रमांक स्थित संख्या $F_n$ का वर्गमान–

1• n के विषम मानों (1,3,5,7-----2m+1) के प्रति उसके पूर्व एव बाद के पद मानों के गुणनफल का एकाधिक्य होगा। अर्थात् $F_{2m+1}^2 = (F_{2m} * F_{2m+2}) + 1$ होगा।

2• n के विषम मानों (2,4,6,8-----2m) के प्रति उसके पूर्व एव बाद के पद मानों के गुणनफल का एकान्यून होगा। अर्थात् $F_{2m}^2 = (F_{2m-1} * F_{2m+1}) - 1$ होगा।

**अभिगृहीत 2■** फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े के प्रति दोनों जोड़े के अलग–अलग गूणनफल का योगमान– जोड़े के प्रथम (;लघु) क्रमांको के योगमान का एकाधिक्य क्रमांक में स्थित फिबोनिकी संख्या होगी।

**अथवा**

जोड़े के द्वितीय (;लघु) क्रमांको के योगमान का एकन्यून क्रमांक में स्थित फिबोनिकी संख्या होगी।

**अथवा**

जोड़ो के चारों क्रमांकों के योगमान के आधे क्रमांक में स्थित फिबोनिकी संख्या होगी।

अर्थात फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_m, F_{m+1}$ और $F_n, F_{n+1}$ के प्रति दोनों जोड़े के अलग–अलग गुणनफल का योगमान–

$$(F_m * F_{m+1}) + (F_n * F_{n+1}) = F_{(m+n)+1} = F_{\{(n+1)+(m+1)\}-1} = F_{\frac{m+(m+1)+n+(n+1)}{2}} = F_{m+n+1}$$ होगी।

**अभिगहीत 3■** संख्या r संख्या n का गुणनखण्ड होने के प्रति nवें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_n$ , r वें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_r$ द्वारा पूर्ण विभाजित होगी। और प्राप्त भागफल–

**प्रतिबंध 1- संख्या r विषम संख्या होने के प्रति–**

$$\text{भागफल} = [(F_{(n-r)-1} + F_{(n-r)+1}) - \frac{F_{n-2r}}{F_r}] = [L_{n-r} - \frac{F_{n-2r}}{F_r}]$$

**अथवा**

$n \div r = q$ के प्रति भागफल $= [(F_{(q-1)r-1} + F_{(q-1)r+1}) - \frac{F_{n-2r}}{F_r}] = [L_{(q-1)r} - \frac{F_{n-2r}}{F_r}]$

**उदाहरण 1•** संख्या 3 संख्या 12 का गुणनखण्ड होने के प्रति 12 वें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_{12} = 144$, 3 रे क्रमांक फिबानिकी संख्या $F_3 = 2$ द्वारा पूर्ण विभाजित होगी। और प्राप्त भागफल– $144 \div 2 = 72$ प्राप्त होगा।

**प्रतिबंध समिका द्वारा भागफल की जाँच–**

**संख्या 3 विषम संख्या होने के प्रति–**

जाँच**1** भागफल $= [(F_{(12-3)-1} + F_{(12-3)+1}) - \frac{F_{12-2*3}}{F_3}]$

$$= [(F_8 + F_{10}) - \frac{F_6}{F_3}] = [(21+55) - \frac{8}{2}] = 76-4 = 72$$

जाँच**2** भागफल $= [L_{12-3} - \frac{F_{12-2*3}}{F_3}] = [L_9 - \frac{F_6}{F_3}] = [(76 - \frac{8}{2}] = 76-4 = 72$

**अथवा**

जाँच**1** $12 \div 3 = 4$ के प्रति भागफल $= [(F_{(4-1)*3-1} + F_{(4-1)*3+1}) - \frac{F_{12-2*3}}{F_3}]$

$= [(F_8 + F_{10}) - \frac{F_6}{F_3}] = [(21+55) - \frac{8}{2}] = 76-4 = 72$

जाँच**2** भागफल $= [L_{(4-1)*3} - \frac{F_{n-2*3}}{F_3}] ] = [L_9 - \frac{F_6}{F_3}] = [(76 - \frac{8}{2}] = 76-4 = 72$

**उदाहरण 2•** संख्या 5 संख्या 35 का गुणनखण्ड होने के प्रति 35 वें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_{35} = 9227465$, 5 वे क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_5 = 5$ द्वारा पूर्ण विभाजित होगी। और प्राप्त भागफल– $9227465 \div 5 = 1845493$ प्राप्त होगा।

**प्रतिबंध समिका द्वारा भागफल की जाँच–**

**संख्या 5 विषम संख्या होने के प्रति–**

जाँच**1** भागफल $= [(F_{(35-5)-1} + F_{(35-5)+1}) - \frac{F_{35-2*5}}{F_5}]$

$= [(F_{29} + F_{31}) - \frac{F_{25}}{F_5}]$

$= [(514229+1346269) - \frac{75025}{5}] = 1860498 - 15005 = 1845493$

जाँच**2** भागफल $= [L_{35-5} - \frac{F_{35-2*5}}{F_5}]$

$= [L_{30} - \frac{F_{25}}{F_5}] = [(1860498 - \frac{75025}{5}] = 1860498 - 15005 = 1845493$

**अथवा**

जाँच**1** $35 \div 5 = 7$ के प्रति भागफल $= [(F_{(7-1)*5-1} + F_{(7-1)*5+1}) - \frac{F_{35-2*5}}{F_5}]$

$= [(F_{29} + F_{31}) - \frac{F_{25}}{F_5}]$

$= [(514229+1346269) - \frac{75025}{5}] = 1860498 - 15005 = 1845493$

जाँच**2** भागफल $= [L_{(7-1)*5} - \frac{F_{35-2*5}}{F_5}] ]$

$= [L_{30} - \frac{F_{25}}{F_5}] = [(1860498 - \frac{75025}{5}] = 1860498 - 15005 = 1845493$

**प्रतिबंध 2- संख्या r सम संख्या होने के प्रति–**

भागफल $= [(F_{(n-r)-1} + F_{(n-r)+1}) + \frac{F_{n-2r}}{F_r}] = [L_{n-r} + \frac{F_{n-2r}}{F_r}]$

**अथवा**

$n \div r = q$ के प्रति भागफल $= [(F_{(q-1)r-1} + F_{(q+1)r+1}) + \frac{F_{n-2r}}{F_r}] = [L_{(q-1)r} + \frac{F_{n-2r}}{F_r}]$

**उदाहरण 1•** संख्या 4 संख्या 12 का गुणनखण्ड होने के प्रति 12 वें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_{12} = 144$, 3 रे क्रमांक फिबानिकी संख्या $F_4 = 2$ द्वारा पूर्ण विभाजित होगी। और प्राप्त भागफल– $144 \div 3 = 48$ प्राप्त होगा।

**प्रतिबंध समिका द्वारा भागफल की जाँच–**

**संख्या 4 सम संख्या होने के प्रति–**

जाँच**1** भागफल $= [(F_{(12-4)-1} + F_{(12-4)+1}) + \frac{F_{12-2*4}}{F_4}]$

$= [(F_7 + F_9) - \frac{F_4}{F_4}] = [(13+34) + \frac{3}{3}] = 47+1 = 48$

जाँच**2** भागफल $= [L_{12-4} - \frac{F_{12-2*4}}{F_4}] = [L_8 + \frac{F_4}{F_4}] = [(47 + \frac{3}{3}] = 47+1 = 48$

**अथवा**

जाँच**1** $12 \div 4 = 3$ के प्रति भागफल $= [(F_{(3-1)*4-1} + F_{(3-1)*4+1}) + \frac{F_{12-2*4}}{F_4}]$

$$=[(F_7+F_9)-\frac{F_4}{F_4}]=[(13+34)+\frac{3}{3}]=47+1=48$$

जाँच**2** भागफल $=[L_{(3-1)*4})+\frac{F_{12-2*4}}{F_4}]\,]=[L_8-\frac{F_4}{F_4}]=47+1=48$

**उदाहरण 2•** संख्या 8 संख्या 40 का गुणनखण्ड होने के प्रति 40 वें क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_{40}=102334155$, 8 वे क्रमांक की फिबानिकी संख्या $F_8=21$ द्वारा पूर्ण विभाजित होगी। और प्राप्त भागफल– $102334155\div 21=4873055$ प्राप्त होगा।

**प्रतिबंध समिका द्वारा भागफल की जाँच–**

**संख्या 8 सम संख्या होने के प्रति–**

जाँच**1** भागफल $=[(F_{(40-8)-1}+F_{(40-8)+1})+\frac{F_{40-2*8}}{F_8}]$

$$=[(F_{31}+F_{33})+\frac{F_{24}}{F_8}]$$

$$=[(1346269+3524578)+\frac{46368}{21}]=4870847+2208=4873055$$

जाँच**2** भागफल $=[L_{40-8}+\frac{F_{40-2*8}}{F_8}]$

$$=[L_{32}-\frac{F_{24}}{F_8}]=[(1860498+\frac{46368}{21}]=4870847+2208=4873055$$

**अथवा**

जाँच**1** $40\div 8=5$ के प्रति भागफल $=[(F_{(5-1)*8-1}+F_{(5-1)*8+1})-\frac{F_{40-2*8}}{F_8}]$

$$=[(F_{31}+F_{33})+\frac{F_{24}}{F_8}]$$

$$=[(1346269+3524578)+\frac{46368}{21}]=4870847+2208=4873055$$

जाँच**2** भागफल $=[L_{(5-1)*8}+\frac{F_{40-2*6}}{F_8}]\,]$

$$=[L_{32}-\frac{F_{24}}{F_8}]=[(1860498+\frac{46368}{21}]=4870847+2208=4873055$$

**प्रमेय1■** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत अअयव के वर्ग मानों का योगमान उनके क्रमांक मानों के योगमान क्रमांक में स्थित फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी का अवयव होता है। अर्थात् $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{n+(n+1)}=F_{2n+1}$

**प्रमाण**

**प्रक्रम 1•** अभिगृहीत **1** का अनुप्रयोग से

**(a)** **n** सम संख्या होने के प्रति (n+1) विषम संख्या होगी।

तब $F_n^2+F_{n+1}^2=(F_{n-1}*F_{n+1}-1)+(F_n*F_{n+2}+1)$

$$=F_{n-1}*F_{n+1}+F_n*F_{n+2}$$

**(b)** **n** विषम संख्या होने के प्रति (n+1) सम संख्या होगी।

तब $F_n^2+F_{n+1}^2=(F_{n-1}*F_{n+1}+1)+(F_n*F_{n+2}-1)$

$$=F_{n-1}*F_{n+1}+F_n*F_{n+2}$$

उपरोक्त a और b संख्या के विश्लेषण से स्पष्ट है कि n के सम और विषम मानों के प्रति–

$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{n-1}*F_{n+1}+F_n*F_{n+2}$ ---------(1)

**प्रक्रम 2•** अभिगृहीत **2** के अनुप्रयोग से

$$F_{n-1}*F_{n+1}+F_n*F_{n+2}=F_{2n+1}\text{ ---------(2)}$$

समिका (1) और (2) से– $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{n+(n+1)}=F_{2n+1}$ **प्रमाणित।**

**ध्यानाकर्षण** $\mathbf{F_{2n}\div F_n}=[F_{n-1}+F_{n+1}]=L_n$ होगा।

**उदाहरण 1•** $F_{2*5}\div F_5=F_{10}\div F_5=55\div 5=11$

जाँच**1** भागफल $= [F_{5-1} + F_{5+1}] = [F_4 + F_6] = 3 + 8 = 11$

जाँच**2** भागफल $= L_5 = 11$

**उदाहरण 1•** $F_{2*8} \div F_8 = F_{16} \div F_8 = 987 \div 21 = 47$

जाँच**1** भागफल $= [F_{8-1} + F_{8+1}] = [F_7 + F_9] = 13 + 34 = 47$

जाँच**2** भागफल $= L_8 = 47$

**प्रमेय2■** विषम एकान्तर क्रम की दो फिबोनिकी संख्या के वर्ग मानों अन्तर मान { (दीर्घक्रम)$^2$ –(लघुक्रम)$^2$} लिये गये क्रमांको का योग मान या उनके मध्य स्थित क्रमाक के दूने क्रमांक की फिबोनिकी संख्या होगी। अर्थात् $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{(n-1)+(n+1)} = F_{2n}$

**प्रमाण**

**प्रक्रम 1** बाँया पक्ष $= F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = (F_{n+1} + F_{n-1}) * (F_{n+1} - F_{n-1})$

$= (F_{n+1} + F_{n-1}) * F_n = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$ ----------(1)

**प्रक्रम 2** अभिगृहीत **2** के अनुप्रयोग से

$F_n * F_{n+1} + F_{n-1} * F_n = F_{2n}$ ---------(2)

समिका (1) और (2) से– $F_{n-1}^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n}$ **प्रमाणित।**

**प्रमेय3■** फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_m, F_{m+1}$ और $F_n, F_{n+1}$ के प्रति दानों जोड़े के अलग–अलग गूणनफल का योगमान– $(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1}) = F_{m+n} + F_m * F_n$ होगी।

**प्रमाण**

**1•** $(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1})$ के प्रति

दाँया पक्ष $= F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1})$

$= \{(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1})\} - \{(F_{m+1} - F_m) * (F_{n+1} - F_n)\}$

$= \{(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1})\}$

$-\{(F_{m+1} * F_{n+1}) - (F_m * F_{n+1}) - (F_n * F_{m+1}) + (F_m * F_n)\}$

$= (F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) =$ बाँया पक्ष --------- (1)

**2•** $(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = F_{m+n} + (F_m * F_n)$ के प्रति

$(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1})$ का

दाँया पक्ष $= F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1})$

$= \{F_{m+n-1} + F_{m+n}\} - (F_{m-1} * F_{n-1})$

$= F_{m+n} + [F_{m+n-1} - (F_{m-1} * F_{n-1})]$

$= F_{m+n} + [\{(F_{m-1} * F_{n-1}) + (F_m * F_n)\} - (F_{m-1} * F_{n-1})]$

$= F_{m+n} + F_m * F_n$ --------- (2)

समिका (1) और (2) से $(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1})$

$= F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1}) = F_{m+n} + F_m * F_n$ **प्रमाणित।**

**प्रमेय4■** फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_m, F_{m+1}$ और $F_n, F_{n+1}$ के प्रति $n > m$ होने पर–

$|(F_n * F_{m+1}) - (F_m * F_{n+1})| = F_{n-m}$ होगा।

समिका के बाँये पाक्ष में मापांक का प्रतिबंध निम्नानुसार चार स्थिति में स्पष्ट होगा।

**स्थिति1•** m और n में दोनों सम संख्या होने के प्रति–

$(F_n * F_{m+1}) - (F_m * F_{n+1}) = F_{n-m}$ होगा।

**उदाहरण** फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_4, F_5$ और $F_{10}, F_{11}$ से–

$(F_{10} * F_5) - (F_4 * F_{11}) = (55 * 5) - (3 * 89) = 275 - 267 = 8 = F_6 = F_{10-4}$

**स्थिति2•** m और n में दोनों विषम संख्या होने के प्रति–

$$(F_n * F_{m+1}) - (F_m * F_{n+1}) = -F_{n-m}$$ होगा।

**उदाहरण** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_5, F_6$ और $F_{13}, F_{14}$ से–

$$(F_{13} * F_6) - (F_5 * F_{14}) = (233 * 8) - (5 * 377) = 1864 - 1885 = -21 = -F_8 = -F_{13-5}$$

**स्थिति3•** m सम और n विषम संख्या होने के प्रति–

$$(F_n * F_{m+1}) - (F_m * F_{n+1}) = F_{n-m}$$ होगा।

**उदाहरण** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_6, F_7$ और $F_{13}, F_{14}$ से–

$$(F_{13} * F_7) - (F_6 * F_{14}) = (233 * 13) - (8 * 377) = 3029 - 3016 = 13 = F_7 = -F_{13-6}$$

**स्थिति 4•** m विषम और n सम संख्या होने के प्रति–

$$(F_n * F_{m+1}) - (F_m * F_{n+1}) = -F_{n-m}$$ होगा।

**उदाहरण** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $F_5, F_6$ और $F_{12}, F_{13}$ से–

$$(F_{12} * F_6) - (F_5 * F_{13}) = (144 * 8) - (5 * 233) = 1152 - 1165 = -13 = -F_7 = -F_{12-5}$$

**प्रमेय 5■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद मानों के प्रति अन्त्य पदो के योगमान और मध्यपद मान का गुणनफल मध्य पद क्रमांक के दुने क्रमांक की फिबोनिकी संख्या होगी। अर्थात् $(F_{n-1} + F_{n+1}) * F_n = F_{2n}$

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= (F_{n-1} + F_{n+1}) * F_n$

$= (F_{n-1} * F_n) + (F_n * F_{n+1}) = F_{2n}$ अभिगृहीत **2** के अनुप्रयोग से **प्रमाणित।**

**प्रमेय 6■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के दो क्रमागत पद मानों $F_n, F_{n+1}$ के प्रति–$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n+2} * F_{n-1}$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} + F_n) * (F_{n+1} - F_n) = F_{n+2} * F_{n-1}$ **प्रमाणित।**

**प्रमेय 7■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद मानों $F_{n-1}F_n, F_{n+1}$ में मध्य पद $F_n$ के प्रति–

1• n **के सम संख्या मानों के प्रति–** $F_n = \sqrt{F_{n-1} * F_{n+1} - 1}$

2• n **के विषम संख्या मानों के प्रति–** $F_n = \sqrt{F_{n-1} * F_{n+1} + 1}$ होगा।

**प्रमेय 8■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के चार क्रमागत पद मानों $F_n, F_{n+1}F_{n+2}$ और $F_{n+3}$ के प्रति–

1• n **के सम संख्या मानों के प्रति–** अन्त्य पदों कागुणनफल − अन्त्य पदों कागुणनफल $=1$

अर्थात् $F_n * F_{n+3} - , F_{n+1} * F_{n+2} = 1$

2• n **के विषम संख्या मानों के प्रति–** अन्त्य पदों का गुणनफल − अन्त्य पदों कागुणनफल $=1$

अर्थात् $F_n * F_{n+3} - , F_{n+1} * F_{n+2} = -1 = \bar{1}$ होगा।

**प्रमेय 9■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी के चार क्रमागत पद मानों $F_n, F_{n+1}F_{n+2}$ और $F_{n+3}$ के वर्ग मानों के योग के प्रति–

$F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = 3F_{2n+3}$ होगा।

**प्रमाण1•** बाँया पक्ष $= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = (F_n^2 + F_{n+1}^2) + (F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2)$

$= F_{2n+1} + F_{2n+5} = (F_{2n+3} - F_{2n+2}) + (F_{2n+3} + F_{2n+4})$

$= (F_{2n+3} - F_{2n+2}) + (F_{2n+3} + F_{2n+2} + F_{2n+3}) = 3F_{2n+3}$ **प्रमाणित।**

**प्रमाण** 2• बाँया पक्ष $= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$

$= (F_{n+2} - F_{n+1})^2 + (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) + (F_{n+1} + F_{n+2})^2$

$= (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 - 2F_{n+1} * F_{n+2}) + (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) + (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + 2F_{n+1} * F_{n+2})$

$= 3(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) = 3F_{2n+3}$ **प्रमाणित।**

**प्रमेय 10■** अन्त्य पदों के वर्ग मानों का योगमान मध्य पदों के वर्गमानों के योगमान (जो कि अन्त्य अथवा मध्य पउ क्रमांकों के योगमान क्रमांक की फिबोनिकी संख्या होगा।) का दुगुना होता है।

अर्थात् फिबोनकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F के चार क्रमागत अवयव $F_n$, $F_{n+1}$, $F_{n+2}$ $F_{n+3}$ के प्रति –

$F_n^2 + F_{n+3}^2 = 2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2) = 2F_{n+(n+3)} = 2F_{2n+3}$ अथवा $2F_{(n+1)++(n+2)} = 2F_{2n+3}$ होगा।

**प्रमाण –1** बाँया पक्ष $= F_n^2 + F_{n+3}^2 = (F_{n+2} - F_{n+1})^2 + (F_{n+2} + F_{n+1})^2$

$= 2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$

$= 2F_{2n+3} =$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।** त्र

**प्रमाण–2** प्रमेय 9 से $F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = 3F_{2n+3}$

$\Rightarrow F_n^2 + +F_{n+3}^2 = 3F_{2n+3} - (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$

$= 3F_{2n+3} - F_{2n+3}$

$= 2F_{2n+3} = 2(F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)$ **प्रमाणित।**

**20-2 अभिगृहीत 1 और 2 एवं प्रमेय 1 ,3 और 5 का अनुप्रयोग से $F_{3n}$, $F_{3n+1}$ $F_{3n+2}$, $F_{3n-1}$ विस्तार के प्रति गणना सोपिका प्राप्त करना –**

**1■** अभिगृहीत **1** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के n वें क्रमांक स्थित संख्या $F_n$ का वर्गमान–

**1•** n के विषम मानों के प्रति–

**a)** $F_n^2 = F_{n+1} * F_{n-1} + 1$ .होगा।

**b)** $F_n^3 = F_n(F_{n+1} * F_{n-1} + 1) = F_{n+1} * F_n * F_{n-1} + F_n$ .होगा।

**2•** n के सम मानों के प्रति–

**a)** $F_n^2 = F_{n+1} * F_{n-1} - 1$ .होगा।

**b)** $F_n^3 = F_n(F_{n+1} * F_{n-1} - 1) = F_{n+1} * F_n * F_{n-1} - F_n$ .होगा।

**3•** n विषम तो (n+1) सम होगा, के प्रति–

a) $F_{n+1}^3 + F_n^3 = (F_{n+2} * F_{n+1} * F_n - F_{n+1}) + (F_{n+1} * F_n * F_{n-1} + F_n)$

$= F_{n+1}F_n(F_{n+2} + F_{n-1}) - (F_{n+1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{(F_{n+1} + F_n) + (F_{n+1} - F_n)\} - (F_{n+1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{2F_{n+1}\} - F_{n-1}$

$= 2F_{n+1}^2F_n - F_{n-1}$ होगा।

b) $F_{n+1}^3 - F_n^3 = (F_{n+2} * F_{n+1} * F_n - F_{n+1}) - (F_{n+1} * F_n * F_{n-1} + F_n)$

$= F_{n+1}F_n(F_{n+2} - F_{n-1}) - (F_{n+1} + F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+1} - F_n)\} - F_{n+2}$

$= F_{n+1}F_n\{2F_n\} - F_{n+2}$

$= 2F_{n+1}F_n^2 - F_{n+2}$ होगा।

**4•** n सम तो (n+1) विषम होगा, के प्रति–

a) $F_{n+1}^3 + F_n^3 = (F_{n+2} * F_{n+1} * F_n + F_{n+1}) + (F_{n+1} * F_n * F_{n-1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n(F_{n+2} + F_{n-1}) + (F_{n+1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{(F_{n+1} + F_n) + (F_{n+1} - F_n)\} + (F_{n+1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{2F_{n+1}\} + F_{n-1}$

$= 2F_{n+1}^2F_n + F_{n-1}$ होगा।

b) $F_{n+1}^3 - F_n^3 = (F_{n+2} * F_{n+1} * F_n + F_{n+1}) - (F_{n+1} * F_n * F_{n-1} - F_n)$

$= F_{n+1}F_n(F_{n+2} - F_{n-1}) + (F_{n+1} + F_n)$

$= F_{n+1}F_n\{(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+1} - F_n)\} + F_{n+2}$

$= F_{n+1}F_n\{2F_n\} + F_{n+2}$

$= 2F_{n+1}F_n^2 + F_{n+2}$ होगा।

**2■** अभिगृहीत **2** से – $(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$

**3■** प्रमेय **1** से – $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

**4■** प्रमेय **5** से $(F_{n-1} + F_{n+1}) * F_n = F_{2n}$

**5■** प्रमेय **3** से– $(F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = F_{m+n+1} - (F_{m-1} * F_{n-1}) = F_{m+n} + F_m * F_n$ का अनुप्रयोग कर प्रमाणित किया जा सकता है।–

| समिका | बाँया पक्ष | दाँया पक्ष | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **n के सम एवं विषम दोनों मानों केप्रति** | **n के केवल सम मानं के प्रति** | **n के केवल विषम मानं के प्रति** |
| **6** | $F_{3n}$ | $F_n[2F_n^2 + 3F_{n-1} * F_{n+1}]$ | $F_n[5F_{n-1}F_{n+1} - 2]$ या $F_n[5F_n^2 + 3]$ | $F_n[5F_{n-1}F_{n+1} + 2]$ या $F_n[5F_n^2 - 3]$ |
| **7** | $F_{3n+1}$ | $F_{n+1}^3 - F_n^3 + 3F_{n+1} * F_n^2$ | $5F_n^2 * F_{n+1} + F_{n+2}$ | $5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}$ |
| **8** | $F_{3n+2}$ | $F_{n+1}^3 + F_n^3 + 3F_{n+1}^2 * F_n$ | $5F_n * F_{n+1}^2 + F_{n-1}$ | $5F_n * F_{n+1}^2 - F_{n-1}$ |
| **9** | $F_{3n-1}$ | $F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_n^2 * F_{n-1}$ | $5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}$ | $5F_n^2 * F_{n-1} + F_{n-2}$ |

**समिका 6 का प्रमाण–**

**n के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति–**

उपरोक्त समिका **A•** अभिगृहीत **2** से – $(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$ में $m = (2n-1)$ प्रतिस्थापित करने पर

$F_{(2n-1)+n+1} = (F_{2n-1} * F_n) + (F_{(2n-1)+1} * F_{n+1})$

$\Rightarrow F_{3n} = (F_{2n-1} * F_n) + (F_{2n} * F_{n+1})$

$= [(F_{n-1}^2 + F_n^2) * F_n\} + \{F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) * F_{n+1}]$

$= F_n[(F_{n-1}^2 + F_n^2) + F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n-1})]$

$= F_n[\{F_{n-1}^2 + (F_{n+1} - F_{n-1})^2\} + F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n-1})\}$

$= F_n[\{F_{n-1}^2 + (F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2 - 2F_{n+1}F_{n-1})\} + (F_{n+1}^2 + F_{n+1}F_{n+1})\}$

$= F_n[2(F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2) - F_{n+1}F_{n-1}]$

$= F_n[2\{(F_{n+1} - F_{n-1})^2 + 2F_{n+1}F_{n-1}\} - F_{n+1}F_{n-1}]$

$= F_n[2F_n^2 + 4F_{n+1}F_{n-1} - F_{n+1}F_{n-1}]$

$= F_n[2F_n^2 + 3F_{n+1}F_{n-1}]$ प्रमाणित।

**n के केवल सम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-2•** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के n के सम संख्या मानों के प्रति– $F_n^2 = F_{n+1} * F_{n-1} - 1$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n} = F_n[2F_n^2 + 3F_{n+1}F_{n-1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n} = F_n[2F_n^2 + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[2(F_{n+1} * F_{n-1} - 1) + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[(2F_{n+1} * F_{n-1} - 2) + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[5F_{n+1}F_{n-1} - 2]$$ प्रमाणित।
$$= F_n[5F_{n+1}F_{n-1} - 5 + 3]$$
$$= F_n[5(F_{n+1}F_{n-1} - 1) + 3]$$
$$= F_n[5F_n^2 + 3]$$ प्रमाणित।

**n के केवल विषम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-2•** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी के n के विषम संख्या मानों के प्रति– $F_n^2 = F_{n+1} * F_{n-1} + 1$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n} = F_n[2F_n^2 + 3F_{n+1}F_{n-1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n} = F_n[2F_n^2 + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[2(F_{n+1} * F_{n-1} + 1) + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[(2F_{n+1} * F_{n-1} + 2) + 3F_{n+1}F_{n-1}]$$
$$= F_n[5F_{n+1}F_{n-1} + 2]$$ प्रमाणित।
$$= F_n[5F_{n+1}F_{n-1} + 5 - 3]$$
$$= F_n[5(F_{n+1}F_{n-1} + 1) - 3]$$
$$= F_n[5F_n^2 - 3]$$ प्रमाणित।

**समिका 7 का प्रमाण–**

**n के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति–**

उपरोक्म समिका **A•** अभिगृहीत **2** से – $(F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$ में $m=2n$ प्रतिस्थापित करने पर

$$F_{(2n)+n+1} = (F_{2n} * F_n) + (F_{(2n)+1} * F_{n+1})$$
$$\Rightarrow \quad F_{3n+1} = (F_{2n} * F_n) + (F_{2n+1} * F_{n+1})$$
$$= [F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) * F_n] + \{(F_{n+1}^2 + F_n^2) * F_{n+1}]$$
$$= [F_n^2(F_{n+1} + F_{n-1})] + \{(F_{n+1}^2 + F_n^2) * F_{n+1}\}]$$
$$= [F_n^2(2F_{n+1} + F_{n-1})] + F_{n+1}^3]$$
$$= [F_n^2(3F_{n+1} - F_n)] + F_{n+1}^3]$$
$$= [F_{n+1}^3 - F_n^3 + 3F_n^2F_{n+1}]$$ प्रमाणित।

**n के केवल सम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-4•b** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n सम संख्या हो तो $(n+1)$ विषम संख्या होगा, के प्रति–

$F_{n+1}^3 - F_n^3 = 2F_{n+1}F_n^2 + F_{n+2}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n+1} = [(F_{n+1}^3 - F_n^3) + 3F_n^2F_{n+1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n+1} = [(2F_{n+1}F_n^2 + F_{n+2}) + 3F_n^2F_{n+1}]$$
$$= 5F_{n+1}F_n^2 + F_{n+2}$$ प्रमाणित।

**n के केवल विषम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-3•b** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n विषम हो तो (n+1) विषम होगा, के प्रति–

$F_{n+1}^3 - F_n^3 = 2F_{n+1}F_n^2 - F_{n+2}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n+1}$ $(F_{3n+1}F_{n+1}^3 - F_n^3) + 3F_n^2F_{n+1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n+1} = [(2F_{n+1}F_n^2 - F_{n+2}) + 3F_n^2F_{n+1}]$$
$$= 5F_{n+1}F_n^2 - F_{n+2}$$ प्रमाणित

**समिका 8 का प्रमाण–**

**n के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति–**

उपरोक्म समिका **A•** अभिगृहीत **2** से – $(F_m * F_n)+(F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$ में $m= (2n+1)$ प्रतिस्थापित करने पर

$$F_{(2n+1)+n+1} = (F_{2n+1} * F_n)+(F_{(2n+1)+1} * F_{n+1})$$
$$\Rightarrow F_{3n+2} = (F_{2n+1} * F_n)+(F_{2(n+1)} * F_{n+1})$$
$$= [\{(F_{n+1}^2 + F_n^2) * F_n\} + \{F_{n+1}(F_{n+2} + F_n) * F_{n+1}\}]$$
$$= [\{(F_{n+1}^2 + F_n^2) * F_n\} + \{F_{n+1}(F_{n+1} + 2F_n) * F_{n+1}\}]$$
$$= [\{F_{n+1}^2F_n + F_n^3\} + \{F_{n+1}^3 + 2F_{n+1}^2F_n\}$$
$$= \{F_{n+1}^3 + F_n^3\} + 3F_{n+1}^2F_n)$$ प्रमाणित

**n के केवल सम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-4•a** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n सम संख्या हो तो (n+1) विषम संख्या होगा, के प्रति–

$F_{n+1}^3 + F_n^3 = 2F_{n+1}^2F_n + F_{n-1}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n+2} = [(F_{n+1}^3 + F_n^3) + 3F_{n+1}^2F_n]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n+2} = [(2F_{n+1}^2F_n + F_{n-1}) + 3F_{n+1}^2F_n]$$
$$= 5F_{n+1}^2F_n + F_{n-1}$$ प्रमाणित।

**n के केवल विषम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-3•a** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n सम संख्या हो तो (n+1) विषम संख्या होगा, के प्रति–

$F_{n+1}^3 + F_n^3 = 2F_{n+1}^2F_n - F_{n-1}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n+2} = [(F_{n+1}^3 + F_n^3) + 3F_{n+1}^2F_n]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n+2} = [(2F_{n+1}^2F_n - F_{n-1}) + 3F_{n+1}^2F_n]$$
$$= 5F_{n+1}^2F_n - F_{n-1}$$ प्रमाणित।

**समिका 9 का प्रमाण–**

**n के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति–**

उपरोक्म समिका **A•** अभिगृहीत **2** से – $(F_m * F_n)+(F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$ में $m= (2n-2)$ प्रतिस्थापित करने पर

$$F_{(2n-2)+n+1} = (F_{2n-2} * F_n)+(F_{(2n-2)+1} * F_{n+1})$$
$$\Rightarrow F_{3n-1} = (F_{2(n-1)} * F_n)+(F_{2n-1} * F_{n+1})$$
$$= [\{F_{n-1}(F_n + F_{n-2}) * F_n\} + \{(F_n^2 + F_{n-1}^2) * F_{n+1}\}]$$
$$= [\{F_{n-1}(2F_n - F_{n-1}) * F_n\} + \{(F_n^2 + F_{n-1}^2) * (F_n + F_{n-1})\}]$$
$$= [\{2F_n^2F_{n-1} - F_nF_{n-1}^2\} + \{F_n^3 + F_nF_{n-1}^2 + F_n^2F_{n-1} + F_{n-1}^3\}]$$
$$= [(F_n^3 + F_{n-1}^3) + 3F_n^2F_{n-1}]$$ प्रमाणित

**n के केवल सम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-4•a** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n सम संख्या हो तो (n−1) विषम संख्या होगा, के प्रति–

$F_n^3 + F_{n-1}^3 \quad = 2F_n^2F_{n-1} - F_{n-2}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n-1} = [(F_n^3 + F_{n-1}^3) + 3F_n^2F_{n-1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n-1} = [(2F_n^2F_{n-1} - F_{n-2}) + 3F_n^2F_{n-1}]$$
$$= 5F_n^2F_{n-1} - F_{n-2}$$ प्रमाणित।

**n के केवल विषम मानं के प्रति**

अभिगृहीत **1-3-a** से फिबानिकी संख्या श्रैढ़ी में n विषम संख्या हो तो $(n-1)$ सम संख्या होगा, के प्रति–

$F_n^3 + F_{n-1}^3 \quad = 2F_n^2F_{n-1} + F_{n-2}$ .होगा, को

**n** के सम एवं विषम दोनों मानों के प्रति प्राप्त समिका $F_{3n-1} = [(F_n^3 + F_{n-1}^3) + 3F_n^2F_{n-1}]$ में प्रतिस्थापित करने पर–

$$F_{3n-1} = [(2F_n^2F_{n-1} + F_{n-2}) + 3F_n^2F_{n-1}]$$
$$= 5F_n^2F_{n-1} + F_{n-2}$$ प्रमाणित।

विस्तारित समिका तालिका

| स मि का | बाँया पक्ष | दाँया पक्ष | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **n** के सम एवं विषम दोनों मानों केप्रति | **n** के केवल सम मानं के प्रति | **n** के केवल विषम मान के प्रति |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | $F_{2n}$ | $F_n[F_{n+1} + F_{n-1}]$ | $F_n[F_{n+1} + F_{n-1}]$ | $F_n[F_{n+1} + F_{n-1}]$ |
| 2 | $F_{2n+1}$ | $F_n^2 + F_{n+1}^2$ | $F_n^2 + F_{n+1}^2$ | $F_n^2 + F_{n+1}^2$ |
| 3 | $F_{2n-1}$ | $F_{n-1}^2 + F_n^2$ | $F_{n-1}^2 + F_n^2$ | $F_{n-1}^2 + F_n^2$ |
| 4 | $F_{3n}$ | $F_n[2F_n^2 + 3F_{n-1} * F_{n+1}]$ | $F_n[5F_{n-1}F_{n+1} - 2]$ या $F_n[5F_n^2 + 3]$ | $F_n[5F_{n-1}F_{n+1} + 2]$ या $F_n[5F_n^2 - 3]$ |
| 5 | $F_{3n+1}$ | $F_{n+1}^3 - F_n^3 + 3F_{n+1}F_n^2$ | $5F_n^2 * F_{n+1} + F_{n+2}$ | $5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}$ |
| 6 | $F_{3n+2}$ | $F_{n+1}^3 + F_n^3 + 3F_{n+1}^2F_n$ | $5F_n * F_{n+1}^2 + F_{n-1}$ | $5F_n * F_{n+1}^2 - F_{n-1}$ |
| 7 | $F_{3n-1}$ | $F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_n^2F_{n-1}$ | $5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}$ | $5F_n^2 * F_{n-1} + F_{n-2}$ |
| 8 | $F_{4n}$ | $[F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]^*$ $[2F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n-1}^2]$ | $[F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]^*$ $[5F_n^2 + 2]$ | $[F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]^*$ $[5F_n^2 - 2]$ |
| 9 | $F_{4n+1}$ | $[F_n(F_{n+1} + F_{n-1}]^2$ $+\{F_n^2 + F_{n+1}^2\}^2$ | $F_n^2[5F_n^2 + 3]+$ $F_{n+1}[5F_n^2 * F_{n+1} + F_{n+2}]$ | $F_n^2[5F_n^2 - 3]+$ $F_{n+1}[5F_n^2 * F_{n+1}$ $- F_{n+2}]$ |
| 10 | $F_{4n-1}$ | $[F_n(F_{n+1} + F_{n-1}]^2$ $+[F_n^2 + F_{n-1}^2]^2$ | $F_n^2[5F_n^2 + 3]+$ $F_{n-1}[5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}]$ | $F_n^2[5F_n^2 - 3]+$ $F_{n-1}[5F_n^2 * F_{n-1}$ $+ F_{n-2}]$ |
| 11 | $F_{5n}$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{F_n^3 + F_{n-1}^3 + 3F_n^2F_{n-1}\}]$ $+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} *$ $\{F_n(2F_n^2 + 3F_{n-1}F_{n+1})]$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}\}]$ $+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} *$ $F_n(5F_n^2 + 3)\}]$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{5F_n^2 * F_{n-1} + F_{n-2}\}]$ $+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} *$ $F_n(5F_n^2 - 3)\}]$ |
| 12 | $F_{5n+1}$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{F_n(2F_n^2$ $+ 3F_{n-1}F_{n+1})\}]$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{F_n(5F_n^2 + 3\ )]$ $+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} *$ | $[\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^*$ $\{F_n(5F_n^2 - 3)\ \}]$ $+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} *$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | $+[\{F_n^2+F_{n+1}^2\}*$ $\{F_{n+1}^3-F_n^3+3F_{n+1}F_n^2\}]$ | $\{5F_n^2*F_{n+1}+F_{n+2}\}]$ | $\{5F_n^2*F_{n+1}-F_{n+2}\}]$ |
| **13** | $F_{5n-1}$ | $[\{F_{n-1}^2+F_n^2\}*$ $\{F_n^3+F_{n-1}^3+3F_n^2F_{n-1}\}]$ $+[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*$ $\{F_n(2F_n^2+3F_{n-1}F_{n+1})\}]$ | $[\{F_{n-1}^2+F_n^2\}*$ $\{5F_n^2*F_{n-1}-F_{n-2}\}]$ $+[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*$ $\{F_n(5F_n^2+3)\}]$ | $[\{F_{n-1}^2+F_n^2\}*$ $\{5F_n^2*F_{n-1}+F_{n-2}\}]$ $+[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*$ $\{F_n(5F_n^2-3)\}]$ |
| **14** | $F_{6n}$ | $[F_n(2F_n^2+3F_{n-1}F_{n+1})]*$ $[\{F_{n+1}^3+F_{n-1}^3\}+$ $\{3F_n^2(F_{n+1}+F_{n-1})\}]$ | $[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*$ $\{5F_n^2+3\}*\{5F_n^2+1\}]$ | $[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*$ $\{5F_n^2-3\}*\{5F_n^2-1\}]$ |
| **15** | $F_{6n+1}$ | $[F_{n+1}^3-F_n^3+$ $3Fn+1Fn2//2+$ $[F_n[2F_n^2+3F_{n-1}F_{n+1}]]^2$ | $[5F_n^2*F_{n+1}+F_{n+2}]^2+$ $[F_n\{5F_n^2+3\}]^2$ | $[5F_n^2*F_{n+1}-F_{n+2}]^2+$ $[F_n\{5F_n^2-3\}]^2$ |
| **16** | $F_{6n-1}$ | $[F_n[2F_n^2+$ $3Fn-1Fn+1\}//2+$ $[F_n^3+F_{n-1}^3+3F_n^2F_{n-1}]^2$ | $[F_n\{5F_n^2+3\}]^2+$ $[5F_n^2*F_{n-1}-F_{n-2}]^2$ | $[F_n\{5F_n^2-3\}]^2+$ $[5F_n^2*F_{n-1}+F_{n-2}]^2$ |

**उदाहरण 1■** $\mathbf{F_{36}}$ का मान विस्तारित समिका तालिका में से प्रयुक्त समिकाओं अनुप्रयोग कर प्रयुक्त समिकाओं को सत्यापित कीजिये।

**हल**– अनुच्छेद 13-6 व्यापक अध्ययन विस्तार में $F_{36}=14930352$ प्राप्त है, का विस्तारित समिका तालिका में से प्रयुक्त समिकाओं अनुप्रयोग कर प्रयुक्त समिकाओं को सत्यापित करने के क्रम मे–

1• $F_{18}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $2n=36$ से $n=18$ अनुप्रयोग समिका–

$$F_{2n}=F_n[F_{n+1}+F_{n-1}]\Rightarrow F_{36}=F_{18}[F_{18+1}+F_{18-1}]$$
$$=F_{18}[F_{19}+F_{17}]$$
$$=2584[4181+1597]=2584*5778=14930352$$

2• $F_{36}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $3n=36$ से $n=12$ सम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{3n}=F_n[5F_n^2+3]\Rightarrow F_{36}=F_{12}[5F_{12}^2+3]=144[5*144^2+3]$$
$$=144[5*20736+3]=144*103\ 683=14930352$$

3• $F_{36}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $4n=36$ से $n=9$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{4n}=[F_n(F_{n+1}+F_{n-1})]*[5F_n^2-2]\Rightarrow F_{36}=[F_9(F_{10}+F_8)]*[5F_9^2-2]\ []$$
$$=[34(55+21)]*[5*34^2-2]=[34*76]*[5*1156-2]$$
$$=2584*577\ 8=14930352$$

4• $F_{36}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $5n+1=36$ से $n=7$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{5n+1}=[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*\{F_n(5F_n^2-3)\}]+[\{F_n^2+F_{n+1}^2\}*\{5F_n^2*F_{n+1}-F_{n+2}\}]$$
$$\Rightarrow\ F_{5n+1}=[\{F_7(F_8+F_6)\}*\{F_7(5F_7^2-3)\}]+[\{F_7^2+F_8^2\}*\{5F_7^2*F_8-F_9\}]$$
$$=[\{13(21+8)\}*\{13(5*13^2-3)\}]+[\{13^2+21^2\}*\{5*13^2*21-34\}]$$
$$=[\{13*29\}*\{13(5*169-3)\}]+[\{169+441\}*\{5*169*21-34\}]$$
$$=[\{377\}*\{13*842\}]+[\{610\}*\{17711\}]$$
$$=[\{377\}*\{109\ 46\}]+[\{610\}*\{17711\}]$$

$= 4126642+10803710 = 14930352$

4• $F_{36}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $6n = 36$ से $n = 6$ सम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$F_{6n} = [\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^* \{5F_n^2 + 3\} * \{5F_n^2 + 1\}]$

$\Rightarrow \quad F_{36} = [\{F_6(F_7 + F_5)\}^* \{5F_6^2 + 3\} * \{5F_6^2 + 1\}]$

$= [\{8(13 + 5)\}^* \{5 * 8^2 + 3\} * \{5 * 8^2 + 1\}]$

$= [8^*18 \quad ^* \{5 * 64 + 3\} * \{5 * 64 + 1\}]$

$= [144 * 323 * 321] \quad = 14930352$

**उदाहरण 2■** $(1\,1)F$ के पद मान गणना के प्रति समिकाएँ $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ एवं $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + E_n^2$ का आवश्यकतानुसार अनुप्रयोग कर $F_{100}$ का मान ज्ञात कीजिये और प्राप्त उत्तर ही जाँच निम्नानुसार

समिकाओं के प्रति गणना कीजिये और समिकाओं को सत्यापित कीजिये।

1• $F_{3n+1} = 5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}$

2• $F_{4n} = [F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]^* [5F_n^2 - 2]$

3• $F_{5n} = [\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}^* \{5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}\}] + [\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} * (5F_n^2 + 3)\}]$

**हल–**

**प्रक्रम** 1• $F_{100} = F_{50}(F_{51} + F_{49}) \Rightarrow F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ में $n=50$ के प्रतिस्थापन से ।

**प्रक्रम** 2• $F_{50} = F_{25}(F_{26} + F_{24}) \Rightarrow F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ में $n=25$ के प्रतिस्थापन से ।

$F_{51} = F_{26}^2 + F_{25}^2 \Rightarrow F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + E_n^2$ में $n=25$ के प्रतिस्थापन से

$F_{49} = F_{51} - F_{50} \Rightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ में $n=50$ के प्रतिस्थापन से

**प्रक्रम** 3• $F_{24} = F_{12}(F_{13} + F_{11}) \Rightarrow F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ में $n=12$ के प्रतिस्थापन से ।

$F_{25} = F_{13}^2 + F_{12}^2 \Rightarrow F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + E_n^2$ में $n=12$ के प्रतिस्थापन से

$F_{26} = F_{24} + F_{25} \Rightarrow F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ में $n=25$ के प्रतिस्थापन से

**प्रक्रम** 4• $F_{12} = F_6(F_7 + F_5) \Rightarrow F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ में $n=6$ के प्रतिस्थापन से ।

$F_{13} = F_7^2 + F_6^2 \Rightarrow F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + E_n^2$ में $n=6$ के प्रतिस्थापन से

$F_{11} = F_{13} - F_{12} \Rightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ में $n=12$ के प्रतिस्थापन से

**प्रक्रम** 5• $F_6 = F_3(F_4 + F_2) \Rightarrow F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$ में $n=3$ के प्रतिस्थापन से ।

$F_7 = F_4^2 + F_3^2 \Rightarrow F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + E_n^2$ में $n=3$ के प्रतिस्थापन से

$F_8 = F_6 + F_7 \Rightarrow F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ में $n=7$ के प्रतिस्थापन से

**प्रक्रम** 6• $F_3 = F_1 + F_2 = 1 + 1 = 2$ **(1 1)F** से

$F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$

$F_5 = F_3 + F_4 = 2 + 3 = 5$

**प्रक्रम** 7• **प्रक्रम 6 से प्राप्त मानों को प्रक्रम 5 में प्रतिस्थापित करने पर–**

$F_6 = F_3(F_4 + F_2) = 2(3 + 1) = 2 * 4 = 8$

$F_7 = F_4^2 + F_3^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$

$F_8 = F_6 + F_7 = 8 + 13 = 21$

**प्रक्रम** 8• **प्रक्रम 7 और 6से प्राप्त मानों को प्रक्रम 4 में प्रतिस्थापित करने पर–**

$F_{12} = F_6(F_7 + F_5) = 8(13 + 5) = 8 * 18 = 144$

$F_{13} = F_7^2 + F_6^2 = 13^2 + 8^2 = 169+64 = 233$

$F_{11} = F_{13} - F_{12} = 233-144 = 89$

**प्रक्रम 9•** **प्रक्रम 8 से प्राप्त मानों को प्रक्रम 3 में प्रतिस्थापित करने पर–**

$F_{24} = F_{12}(F_{13} + F_{11}) = 144(233 + 89) = 144 * 322 = 46368$

$F_{25} = F_{13}^2 + F_{12}^2 = 233^2 + 144^2 = 54289 + 20736 = 75025$

$F_{26} = F_{24} + F_{25} = 46368 + 75025 = 121393$

**प्रक्रम 10•** **प्रक्रम 9 से प्राप्त मानों को प्रक्रम 2 में प्रतिस्थापित करने पर–**

$F_{50} = F_{25}(F_{26} + F_{24}) = 75025(121393 + 46368) = 75025 * 167761$

$=12586269025$

$F_{51} = F_{26}^2 + F_{25}^2 = 121393^2 + 75025^2 = 14736260449+5628750625$

$= 20365011074$

$F_{49} == F_{51} - F_{50} = 20365011074-12586269025 = 7778742049$

**प्रक्रम 11•** **प्रक्रम 10 से प्राप्त मानों को प्रक्रम 1 में प्रतिस्थापित करने पर–**

$F_{100} = F_{50}(F_{51} + F_{49}) = 12586269025(20365011074+7778742049)$

$=12586269025*28143753123$

**=35,42,24,84,81,79,26,19,15,075** होगा।

**उत्तर जाँच–**

1• $F_{3n+1} = 5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}$ के प्रति

$F_{100}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $3n + 1 = 100$ से $n = 33$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$F_{3n+1}=5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2} \Rightarrow F_{100}= 5F_{33}^2 * F_{34} - F_{35}$

$=5*3524578^2 * 5702887 - 9227465$

$= 28\,514435*12422650078084 -9227465$

$=354224848179271142540 -9227465$

$=35,42,24,84,81,79,26,19,15,075$ होगा।

2• $F_{4n} = [F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]* [5F_n^2 - 2]$ के प्रति

$F_{100}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $4n = 100$ से $n = 25$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$F_{4n} = [F_n(F_{n+1} + F_{n-1})]* [5F_n^2 - 2]$

$\Rightarrow F_{100} = [F_{25}(F_{26} + F_{24})]* [5F_{25}^2 - 2]$

$= [75025*167761] *[5*5628750625 - 2 ]$

$= 12586269025* 28143753123$

**=35,42,24,84,81,79,26,19,15,075** होगा।

3• $F_{5n} = [\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}* \{5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}\}]+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} * \{F_n (5F_n^2 + 3)\}]$ के प्रति

$F_{100}$ का मान प्राप्त करने के प्रति – $5n = 100$ से $n = 20$ सम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$F_{5n} = [\{F_n(F_{n+1} + F_{n-1})\}* \{5F_n^2 * F_{n-1} - F_{n-2}\}]+[\{F_n^2 + F_{n+1}^2\} * \{ F_n(5F_n^2 + 3)\}]$

$= [\{F_{20}(F_{21} + F_{19})\}* \{5F_{20}^2 * F_{19} - F_{18}\}]+[\{F_{20}^2 + F_{21}^2\} * F_n(5F_{20}^2 + 3)\}]$

$= [\{6765(10946 + 4181)\}* \{5 * 6765^2 * 4181 - 2584\}]+$

$[\{6765^2 + 10946^2\} * 6765(5 * 6765^2 + 3)\}]$

$= [\{6765 * 15127\}* \{5 * 45765225 * 4181 - 2584\}] +$

$[\{45765225+119814916\}* 6765\{5*45765225 + 3\}]$

$= [\{102334155\}* \{228826125 * 4181 - 2584\}] +$

$$[\{165580141\}*\{6765(228826125+3)\}]$$

$$=[\{102334155\}*\{956722028625-2584\}]+[\{165580141\}*\{6765(228826128)\}]$$

$$=[\{102334155\}*\{956722026041\}]+[\{165580141\}*\{1548008755920\}]$$

$$=[9,79,05,34,01,04,79,37,30,356]+[25,63,19,50,80,74,46,81,84,720]$$

$$=35,42,24,84,81,79,26,19,15,075$$ होगा।

**20-3 योग संख्या श्रेढ़ी (a b) A का r वाँ पद मान ज्ञात करना–**

योग– योग संख्या श्रेढ़ी (a b) A और (1 1)F के प्रति अभिगृहीत सम्बंध समिका – $A_r = aF_{r-2} + bF_{r-1}$ में $a, b, F_{r-2}$ एवं $F_{r-1}$ के प्राप्त मानों को प्रस्थिापित कर (a b) A का r वाँ पद मान सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

**उदाहरण 1■** (2 5) A का 20 वाँ पद मान विस्तारित समिका तालिका का अनुप्रयोग कर प्राप्त कीजिये।

हल रमिका– $A_r = aF_{r-2} + bF_{r-1} \Rightarrow A_{20} = 2F_{20-2} + 5F_{20-1} = 2F_{18} + 5F_{19}$ --------- (1)

हल समिका (1) के प्रति $F_{18}$ एव $F_{19}$ का मान प्राप्त करने विस्तारित समिका तालिका अनुप्रयोग–

1• $F_{18}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $2n = 18$ से $n = 9$ अनुप्रयोग समिका–

$$F_{2n}=F_n[F_{n+1}+F_{n-1}] \Rightarrow F_{18}=F_9[F_{9+1}+F_{9-1}] = F_9[F_{10}+F_8]$$

$$= 34[55+21] = 34*76 = 2584$$

$F_{19}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $2n+1 = 19$ से $n = 9$ अनुप्रयोग समिका–

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2 \Rightarrow \quad F_{19} = F_9^2 + F_{9+1}^2 = F_9^2 + F_{10}^2$$

$$= 34^2 + 55^2 = 1156+3025=4181$$

2• $F_{18}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $3n = 18$ से $n = 6$ सम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{3n}=F_n[5F_n^2+3] \Rightarrow F_{18} = F_6[5F_6^2+3] = 8[5*8^2+3]$$

$$= 8[5*64+3] = 8[320+3] = 8*323 = 258\ 4$$

$F_{19}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $3n+1 = 19$ से $n = 6$ सम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{3n+1}=5F_n^2 * F_{n+1} + F_{n+2} \Rightarrow F_{19}= 5F_6^2 * F_{6+1} + F_{6+2} = 5F_6^2 * F_7 + F_8$$

$$= 5*8^2 * 13 + 21 = 320*13+21$$

3• $F_{18}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $6n = 18$ से $n = 3$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका–

$$F_{6n}=[\{F_n(F_{n+1}+F_{n-1})\}*\{5F_n^2-3\}*\{5F_n^2-1\}]$$

$$\Rightarrow F_{18} = [\{F_3(F_{3+1}+F_{3-1})\}*\{5F_3^2-3\}*\{5F_3^2-1\}]$$

$$= [\{F_3(F_4+F_2)\}*\{5F_3^2-3\}*\{5F_3^2-1\}]$$

$$= [\{2(3+1)\}*\{5*2^2-3\}*\{5*2^2-1\}]$$

$$= 2*4*17*19 = 2584$$

$F_{19}$ का मान प्राप्त करने के प्रति– $6n+1 = 19$ से $n = 3$ विषम संख्या है। अनुप्रयोग समिका

$$F_{6n+1}=[5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}]^2 + [F_n\{5F_n^2-3\}]^2$$

$$\Rightarrow F_{19} = [5F_n^2 * F_{n+1} - F_{n+2}]^2 + [F_n\{5F_n^2-3\}]^2$$

$$= [5F_3^2 * F_4 - F_5]^2 + [F_3\{5F_3^2-3\}]^2$$

$$= [5*2^2*3-5]^2 + [2\{5*2^2-3\}]^2$$

$$= [15*4-5]^2 + [2\{5*4-3\}]^2$$

$$= 55^2 + 34^2 = 3025+1156 = 4181$$

इस प्रकार $F_{18}$ एव $F_{19}$ के प्राप्त मान को $A_{20} = 2F_{18} + 5F_{19}$ ----------(1) के में प्रतिस्थापित करने पर–

$$A_{20} = 2*2584 + 5*4184 = 5168 + 2092\ 0 = 26,088$$ होगा।

----------20---------

# अध्याय–21
# योग–योग संख्या श्रेढ़ी विषयक महत्वपूर्ण प्रमेय

अध्याय19 में उल्लेखित फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी विषयक महत्वपूर्ण प्रमेय के द्वारा योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी विषयक महत्वपूर्ण प्रमेय प्रतिपादित किये जा सकते हैं जिसे फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी और लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के उदाहरणों के द्वारा निम्नानुसार विश्लेषित किया गया है।

## 21-1 योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के दो क्रमागत जोड़े का प्रमेय–

योग–योग संख्या(a b)A श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $(A_m, A_{m+1})$के और $(A_n, A_{n+1})$ के प्रति–

1■ $(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$ होगा।

2■ $(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$ होगा।

**समिका 1■ का प्रमाण**

**प्रमाणन हेतू संदर्भ समिकाएँ–** 1• $A_n = aF_{n-2} + bF_{n-1}$

2• $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

3• $(F_m * F_n)+(F_{m+1} * F_{n+1}) = F_{m+n+1}$

बाँया पक्ष $=(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})$

$= [\{aF_{m-2} + bF_{m-1}\} * \{aF_{n-2} + bF_{n-1}\}] + [\{aF_{m-1} + bF_m\} * \{aF_{n-1} + bF_n\}]$ संदर्भ समिका 1 से

$= a^2[F_{m-2} * F_{n-2} + F_{m-1} * F_{n-1}] + b^2[F_{m-1} * F_{n-1} + F_m * F_n]$

$+ab[\{F_{m-1} * F_{n-2}+F_m * F_{n-1}\} + \{F_{m-2} * F_{n-1} + +F_{m-1} * F_n\}]$ संदर्भ समिका 2 और 3 से

$= a^2F_{m+n-3} + b^2F_{m+n-1} + ab[F_{m+n-2}] + \{F_{m+n-2}\}]$

$= [a^2F_{m+n-3} + abF_{m+n-2}] + [abF_{m+n-2} + b^2F_{m+n-1}]$

$= a[aF_{m+n-3} + bF_{m+n-2}] + b[aF_{m+n-2} + bF_{m+n-1}]$

$= aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$ =दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**उक्त प्रमेय 1■ के द्वारा–**

(1) **योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के दो क्रमागत अवयवों के वर्ग मानों का योगमान के प्रति – $A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ का प्रमाण**

$(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$ में $m=n$ के प्रतिस्थापन से

$(A_n * A_n) + (A_{n+1} * A_{n+1}) = aA_{n+n-1} + bA_{n+n} = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ **प्रमाणित।**

(2) **फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी के प्रति– $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ का प्रमाण**

$(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$

$\Rightarrow (F_m * F_n) + (F_{m+1} * F_{n+1}) = 1 * F_{m+n-1} + 1 * F_{m+n}$ में $m=n$ के प्रतिस्थापन से

$\Rightarrow (F_n * F_n) + (F_{n+1} * F_{n+1}) = F_{2n-1} + 1 * F_{2n}$

$\Rightarrow F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$ **प्रमाणित।**

(3) **लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के प्रति– $L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n} + L_{2(n+1)}$ का प्रमाण**

$(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$

$\Rightarrow (L_m * L_n) + (L_{m+1} * L_{n+1}) = 1 * L_{m+n-1} + 3 * L_{m+n}$ में $m=n$ के प्रतिस्थापन से

$\Rightarrow (L_n * L_n) + (L_{n+1} * L_{n+1}) = L_{2n-1} + 3L_{2n}$

$\Rightarrow L_n^2 + L_{n+1}^2 = L_{2n+1} + 2L_{2n} = L_{2n+2} + L_{2n} = L_{2n} + L_{2(n+1)}$ **प्रमाणित।**

**समिका का 2■प्रमाण–**

**प्रमाणन हेतू संदर्भ समिका**

$$(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$$

बाँया पक्ष $= (A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1})$

$= (A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) + \{(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})\}$

$- \{(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})\}$ समान राशि जोड़ने एवं घटाने के नियम से।

$= \{(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})\} + \{(A_m * A_{n+1}) - (A_{m+1} * A_{n+1})\}$

$+ \{(A_n * A_{m+1}) - (A_m * A_n)\}$

$= \{(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})\} - A_{n+1}(A_{m+1} - A_m) + A_n(A_{m+1} - A_m)$

$= \{(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1})\} - \{(A_{m+1} - A_m) * (A_{n+1} - A_n)\}$

$= A_m * A_n + A_{m+1} * A_{n+1} - (A_{m-1} * A_{n-1})$

$= aA_{m+n-1} + bA_{m+n} - (A_{m-1} * A_{n-1})$ दाँया पक्ष **प्रमाणित।**

**उक्त प्रमेय 2■ के द्वारा–**

**(1) योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के दो क्रमागत अवयवों के वर्ग मानों का योगमान के प्रति –**

$A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ **का प्रमाण**

$(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$ में

$m=n$ के प्रतिस्थापन से

$(A_n * A_{n+1}) + (A_n * A_{n+1}) = (aA_{n+n-1} + bA_{n+n}) - (A_{n-1} * A_{n-1})$

$\Rightarrow 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n}) - A_{n-1}^2$

$\Rightarrow A_{n-1}^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$

$\Rightarrow (A_{n+1} - A_n)^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n+1} + bA_{2n})$

$\Rightarrow (A_n^2 + A_{n+1}^2 - 2A_n * A_{n+1}) + 2A_n * A_{n+1} = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$

$\Rightarrow A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ **प्रमाणित।**

**(2) फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी के प्रति–**

$F_{n-1}^2 + 2(F_n * F_{n+1}) = F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ **का प्रमाण**

उपरोक्त छायांकन समिका $A_{n-1}^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$ के प्रति फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी रूपान्तर–

$A_{n-1}^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$

$\Rightarrow F_{n-1}^2 + 2(F_n * F_{n+1}) = (1 * F_{2n-1} + 1 * F_{2n})$

$\Rightarrow F_{n-1}^2 + 2(F_n * F_{n+1}) = F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ **प्रमाणित।**

**(3) लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के प्रति $L_{n-1}^2 + 2(L_n * L_{n+1}) = L_{2n+2} + L_{2n}$ का प्रमाण**

उपरोक्त छायांकन समिका $A_{n-1}^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$ के प्रति लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी रूपान्तर–

$A_{n-1}^2 + 2(A_n * A_{n+1}) = (aA_{2n-1} + bA_{2n})$

$\Rightarrow L_{n-1}^2 + 2(L_n * L_{n+1}) = (1 * L_{2n-1} + 3 * L_{2n})$

$\Rightarrow L_{n-1}^2 + 2(L_n * L_{n+1}) = L_{2n-1} + 3 * L_{2n}$

$= L_{2n+1} + 2L_{2n}$

$= L_{2n+2} + L_{2n} = L_n^2 + L_{n+1}^2$ **प्रमाणित।**

**(4) फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी के प्रति–**

$F_m * F_{n+1} + F_n * F_{n+1} = F_{m+n+1} - F_{m-1} * F_{n-1}$ **का प्रमाण**

समिका $(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$ से

$$(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow (F_m * F_{n+1}) + (F_n * F_{m+1}) = (1 * F_{m+n-1} + 1 * F_{m+n}) - (F_{m-1} * F_{n-1})$$
$$= (F_{m+n-1} + F_{m+n}) - (F_{m-1} * F_{n-1})$$
$$= F_{m+n+1} - F_{m-1} * F_{n-1}$$ प्रमाणित।

**(5) लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के प्रति–**

$L_m * L_{n+1} + L_n * L_{n+1} = (L_{m+n+2} + L_{m+n}) - L_{m-1} * L_{n-1}$ का प्रमाण

समिका $(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$ से

$$(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow (L_m * L_{n+1}) + (L_n * L_{m+1}) = (1 * L_{m+n-1} + 3 * L_{m+n}) - (L_{m-1} * L_{n-1})$$
$$= (L_{m+n-1} + 3L_{m+n}) - (L_{m-1} * L_{n-1})$$
$$= (L_{m+n+1} + 2L_{m+n}) - L_{m-1} * L_{n-1}$$
$$= (L_{m+n+2} + L_{m+n}) - L_{m-1} * L_{n-1}$$ प्रमाणित।

**(6) योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के प्रति–**

$(A_{m-1} * A_{n-1}) + (A_{m+2} * A_{n+2}) = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$ का प्रमाण

प्रमाणित समिकाएँ

1■ $(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$

2■ $(A_m * A_{n+1}) + (A_n * A_{m+1}) = (aA_{m+n-1} + bA_{m+n}) - (A_{m-1} * A_{n-1})$

दोनों सिकिाओं को जोड़ने पर–

$$A_m(A_n + A_{n+1}) + A_{m+1}(A_n + A_{n+1}) = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow A_m * A_{n+2} + A_{m+1} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow A_{n+2}(A_m + A_{m+1}) = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})) - (A_{m-1} * A_{n-1})$$
$$\Rightarrow A_{m-1} * A_{n-1} + A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$$ प्रमाणित।

उक्त समिका में $m=n$ के प्रतिस्थापन से $A_{n-1}^2 + A_{n+2}^2 = 2(aA_{2n+1} + bA_{2n})$

**(7) फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी के प्रति–**

$F_{m-1} * F_{n-1} + F_{m+2} * F_{n+2} = 2F_{m+n+1}$ का प्रमाण

समिका $A_{m-1} * A_{n-1} + A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$ से

$$A_{m-1} * A_{n-1} + A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$$
$$\Rightarrow F_{m-1} * F_{n-1} + F_{m+2} * F_{n+2} = 2(1 * F_{m+n-1} + 1 * A_{m+n})$$
$$= 2(F_{m+n-1} + A_{m+n})$$
$$= 2F_{m+n+1}$$ प्रमाणित।

उक्त समिका में $m=n$ के प्रतिस्थापन से $F_{n-1}^2 + F_{n+2}^2 = 2F_{2n+1}$

**(8) लुकस संख्या (1 3)L श्रेढ़ी के प्रति–**

$L_{m-1} * L_{n-1} + L_{m+2} * L_{n+2} = 2F_{m+n+1}$ का प्रमाण

समिका $A_{m-1} * A_{n-1} + A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$ से

$$A_{m-1} * A_{n-1} + A_{m+2} * A_{n+2} = 2(aA_{m+n-1} + bA_{m+n})$$

$$\Rightarrow L_{m-1} * L_{n-1} + L_{m+2} * L_{n+2} = 2(1 * L_{m+n-1} + 3 * L_{m+n})$$
$$= 2(L_{m+n-1} + 3L_{m+n})$$
$$= 2(L_{m+n+1} + 2L_{m+n})$$
$$= 2(L_{m+n+2} + L_{m+n})$$ प्रमाणित।

उक्त समिका में $m=n$ के प्रतिस्थापन से $L_{n-1}^2 + L_{n+2}^2 = 2(L_{2n+2} + L_{2n})$

**21-2 योग–योग संख्या** (a b)A **श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अवयव** $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}$ **का प्रमेय –**

$$A_{r+1}(A_r + A_{r+2}) = aA_{2r} + bA_{2r+1}$$ होगा।

**प्रमाण–**

योग–योग संख्या(a b)A श्रेढ़ी के दो क्रमागत जोड़े $(A_m, A_{m+1})$के और$(A_n, A_{n+1})$ के प्रति–

प्रमाणित समिका $(A_m * A_n) + (A_{m+1} * A_{n+1}) = aA_{m+n-1} + bA_{m+n}$ में दो क्रमागत जोड़े के प्ररूपण में$(A_r, A_{r+1})$के और$(A_{r+1}, A_{r+2})$ लिये जाने पर–

$$(A_r * A_{r+1}) + (A_{r+1} * A_{r+2}) = aA_{r+(r+1)-1} + bA_{r+(r+1)}$$
$$A_{r+1}(A_r + A_{r+2}) = aA_{2r} + bA_{2r+1}$$ प्रमाणित।

**उक्त प्रमेय 20-2 के द्वारा**

**(1) फिबोनिकी संख्या** (1 1)F **श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अवयव** $F_r, F_{r+1}, F_{r+2}$ **के प्रति–**

$F_{r+1}(F_r + F_{r+2}) = F_{2(r+1)}$ **का प्रमाण**

$$A_{r+1}(A_r + A_{r+2}) = aA_{2r} + bA_{2r+1}$$
$$\Rightarrow F_{r+1}(F_r + F_{r+2}) = 1 * F_{2r} + 1 * F_{2r+1}$$
$$= F_{2r} + F_{2r+1}$$
$$= F_{2(r+2)}$$ प्रमाणित।

**(2) लुकस संख्या** (1 3)L **श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अवयव** $L_r, L_{r+1}, L_{r+2}$ **के प्रति–**

$L_{r+1}(L_r + L_{r+2}) = L_{2r+3} + L_{2r+1}$ **का प्रमाण**

$$A_{r+1}(A_r + A_{r+2}) = aA_{2r} + bA_{2r+1}$$
$$\Rightarrow L_{r+1}(L_r + L_{r+2}) = 1 * L_{2r} + 3 * L_{2r+1}$$
$$= L_{2r+2} + 2L_{2r+1}$$
$$= L_{2r+3} + L_{2r+1}$$ प्रमाणित।

**21-3 योग–योग संख्या** (a b)A **श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अवयव के दो त्रिगुटों** $(A_m, A_{m+1}, A_{m+2})$ **और** $(A_n, A_{n+1}, A_{n+2})$ **का प्रमेय –**

**(1) योग तुल्यता का प्रमेय**

$$A_m + A_{m+1} + A_{n+2} = A_n + A_{n+1} + A_{m+2} = A_{n+2} + A_{m+2}$$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= A_m + A_{m+1} + A_{n+2} = A_{m+2} + A_{n+2}$

दाँया पक्ष $= A_n + A_{n+1} + A_{m+2} = A_{n+2} + A_{m+2}$

बाँया पक्ष = दाँया पक्ष $= A_{n+2} + A_{m+2}$ प्रमाणित।

**21-4 योग–योग संख्या** (a b)A **श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव का प्रमेय –**

(1) योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+2}$ के प्रति– अन्त्य पदो के वर्गों का योग मान मध्य पदो के वर्गो के योग मान कादुगुना होता है। अर्थात् $(A_r^2 + A_{r+3}^2) = 2(A_{r+1}^2 + A_{r+2}^2)$

बाँया पक्ष $= A_r^2 + A_{r+3}^2 = (A_{r+2} - A_{r+1})^2 + (A_{r+2} + A_{r+1})^2$

$$= (A_{r+2}^2 + A_{r+1}^2 - 2A_{r+2} * A_{r+1}) + (A_{r+2}^2 + A_{r+1}^2 + 2A_{r+2} * A_{r+1})$$
$$= 2(A_{r+1}^2 + A_{r+2}^2) =$$ दाँया पक्ष प्रमाणित।

(2ा योग–योग संख्या (a b)A श्रेढ़ी के चार क्रमागत पदों $A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}$के वर्ग मानों का योग प्रमेय– $A_r^2 + A_{r+1}^2 + A_{r+2}^2 + A_{r+3}^2 = 3(aA_{2r+1} + bA_{2r+2})$ होगा। यो

प्रमाणन हेतू संदर्भ समिका–$A_n^2 + A_{n+1}^2 = aA_{2n-1} + bA_{2n}$ के अनुपालन मे–

$$A_r^2 + A_{r+1}^2 = aA_{2r-1} + bA_{2r}\text{.---------- 1}$$

$$A_{r+2}^2 + A_{r+3}^2 = aA_{2(r+2)-1} + bA_{2(r+2)}\text{.}$$

$$= aA_{2r+3} + bA_{2r+4} \text{ ---------- 2}$$

समिका 1+ 2 से '

$$A_r^2 + A_{r+1}^2 + A_{r+2}^2 + A_{r+3}^2$$
$$= a[A_{2r-1} + A_{2r+3}]+b[A_{2r} + A_{2r+4}]$$
$$= a[(A_{2r+1} - A_{2r}) + (A_{2r+1} + A_{2r+2})]+b[(A_{2r+2} - A_{2r+1}) + (A_{2r+2} + A_{2r+3})]$$
$$= a[2A_{2r+1} + (A_{2r+2} - A_{2r})]+b[2A_{2r+2} + (A_{2r+3} - A_{2r+1})]$$
$$= a[2A_{2r+1} + A_{2r+1}]+b[2A_{2r+2} + A_{2r+2}]$$
$$= a[3A_{2r+1}]+b[3A_{2r+2}] =3(aA_{2r+1} + bA_{2r+2})$$ प्रमाणित।

## 21-5 – योग–योग संख्या (a,b)A श्रेढ़ी के प्रति मापांक तुल्यता प्रमेय विस्तार

### [A] सरल क्रमांक में स्थित क्रमागत संख्या–के प्रति–

### [1] तीन क्रमागत के अवयवों के प्रति मापांक तुल्यता का प्रमेय

त्रिगुटों के अन्त्य पदो के गुणनफल के अन्तर मान और मध्य पद के वर्ग मान का मापांक $|A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$ के साम्यता में होता है।

अर्थात् $|A_m * A_{m+2} - A_{m+1}^2| = |A_n * A_{n+2} - A_{n+1}^2|$

$$= |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$$ होगा।

प्रमाणन हेतु संदर्भ समिका– अध्याय 13 के अनुच्छेद **13-5** योग –योग संख्या श्रेढी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका के तहत्–

$|A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2| = |A_2^2 + A_2 * A_3 - A_3^2| = |A_3^2 + A_3 * A_4 - A_4^2| =$ |---|=|---|=|---|=

|=$|A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2|$ =|---]=[---i =$[A_{n-2}^2 + A_{n-2} * A_{n-1} - A_{n-1}^2|$

$= |A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n - A_n^2| = |A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$ होगा। आत्मसाती है। के अनुपालन में–

प्रमाण **1**■ बाँया पक्ष $= |A_m * A_{m+2} - A_{m+1}^2| = |A_m * (A_{m+1} + A_m) - A_{m+1}^2|$

$$= |A_m^2 + A_m * A_{m+1} - A_{m+1}^2|$$
$$= |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$$

2■ दाँया पक्ष $= |A_n * A_{n+2} - A_{n+1}^2| = |A_n * (A_{n+1} + A_n) - A_{n+1}^2|$

$$= |A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$$
$$= |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$$

3■ दाँया पक्ष $= |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1 * (A_1 + A_2) - A_2^2|$

$$= |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$$

अतः उक्त प्रमाण क्रमांक **1**■ **2**■, **3**■ से–

$|A_m * A_{m+2} - A_{m+1}^2| = |A_n * A_{n+2} - A_{n+1}^2| = |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$

प्रमाणित।

उक्त मापांक प्रमेय (2) के द्वारा

(1) फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1,1)F के तारतम्य में–

$|F_r * F_{r+2} - F_{r+1}^2| = 1$ होगा।

(2) लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1,3)L$ के तारतम्य में–

$|L_r * L_{r+2} - L_{r+1}^2| = 5$ होगा।

## [2] चार क्रमागत के अवयवों के प्रति मापांक तुल्यता का प्रमेय

चार पदी क्रमागत अवयव के समूह । के अन्त्य पदो के पद मानों का गुणनफल एवं मध्य पदो के पद मानों का गुणनफल के अन्तर मान मापांक $|A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$ के साम्यता में होता है।

अर्थात् $|A_m * A_{m+3} - A_{m+1} * A_{m+2}| = |A_n * A_{n+3} - A_{n+1} * A_{n+2}|$

$= |A_1 * A_4 - A_2 * A_3| = |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$ होगा।

**प्रमाणन हेतु संदर्भ समिका–** अध्याय 13 के अनुच्छेद **13-5** योग –योग संख्या श्रेढी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका के तहत्–

$|A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2| = |A_2^2 + A_2 * A_3 - A_3^2| = |A_3^2 + A_3 * A_4 - A_4^2| =$ |---|=|---|=|---|=

|=$|A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2|$ =|---]=[---i =$[A_{n-2}^2 + A_{n-2} * A_{n-1} - A_{n-1}^2|$

$= |A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n - A_n^2| = |A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$ होगा। आत्मसाती है। के अनुपालन में–

**प्रमाण 1■** बाँया पक्ष $= |A_m * A_{m+3} - A_{m+1} * A_{m+2}|$

$= |A_m * (A_{m+2} + A_{m+1}) - A_{m+1} * (A_m + A_{m+1})|$

$= |A_m * A_{m+2} - A_{m+1}^2|$

$= |A_m * (A_{m+1} + A_m) - A_{m+1}^2|$

$= |A_m^2 + A_m * A_{m+1} - A_{m+1}^2|$

$= |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$

**2■** बाँया पक्ष $= |A_n * A_{n+3} - A_{n+1} * A_{m=n+2}|$

$= |A_n * (A_{n+2} + A_{n+1}) - A_{n+1} * (A_n + A_{n+1})|$

ा $= |A_n * A_{n+2} - A_{n+1}^2|$

$= |A_n * (A_{n+1} + A_n) - A_{n+1}^2|$

$= |A_n^2 + A_n * A_{n+1} - A_{n+1}^2|$

$= |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$

**3■** बाँया पक्ष $|A_1 * A_4 - A_2 * A_3| = |A_1 * (A_{22} + A_3) - A_2 * (A_1 + A_2| =$

$= |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$ होगा।

अतः उक्त प्रमाण क्रमांक **1■ 2■, 3■** से–

$|A_m * A_{m+3} - A_{m+1} * A_{m+2}| = |A_n * A_{n+3} - A_{n+1} * A_{n+2}|$

$= |A_1 * A_4 - A_2 * A_3| = |A_1 * A_3 - A_2^2| = |A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2|$ **प्रमाणित**

उक्त मापांक प्रमेय [3]के द्वारा

(1) फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(1,1)F$ के तारतम्य में–

$|F_r * F_{r+3} - F_{r+1} * F_{r+2}| = 1$ होगा।

(2) लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1,3)L$ के तारतम्य में–

$|L_r * L_{r+3} - L_{r+1} * L_{r+2}| = 5$ होगा॥

**[B] एकान्तर क्रमांक में स्थित क्रमागत संख्या–के प्रति–**

**[1] पदमान प्रमेय** –एकान्तर पद मान की श्रेढ़ी का r पद $E_r = 3E_{r-1} - E_{r-2}$ होगा।

**प्रमाण–** –योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ विस्तार में सरल पद क्रमांक संकेत

$A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, A_{m+4}, - - - \rightarrow$ प्रथम तीन एकान्तर पद अवयव

$A_m, A_{m+2}, A_{m+4}$ की तुलना से r वाँ पद $E_r = A_{m+4}$, $E_{r-1} = A_{m+2}$, $E_{r-2} = A_m$

तब r वाँ पद $E_r = 3E_{r-1} - E_{r-2}$ के प्रतिरूपण में $A_{m+4} = 3A_{m+2} - A_m$ सिद्ध करना होगा।

अतः बाँया पक्ष $= A_{m+4} = A_{m+3} + A_{m+2} = 2A_{m+2} + A_{m+1} = 3A_{m+2} - A_m$ **सिद्ध।**

अतः योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A एकान्तर पद मान की श्रेढ़ी का r पद $E_r = 3E_{r-1} - E_{r-2}$ **प्रमाणित ।**

**[2] एकान्तर पद मान की श्रेढ़ी के तीन क्रमागत अवयव $E_r$ $E_{r+1}$ $E_{r+2}$ के प्रति –**

$$|E_r * E_{r+2} - E_{r+1}^2| = |a^2 + a * b - b^2|$$

**प्रमाण**– –योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A विस्तार में सरल पद क्रमांक संकेत

$A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, A_{m+4}, - - - -$ प्रथम तीन एकान्तर पद अवयव

$A_m, A_{m+2}, A_{m+4}$ की तुलना से r पद $E_r = A_m$, $E_{r+1} = A_{m+2}$, $E_{r+2} = A_{m+4}$

तब $|E_r * E_{r+2} - E_{r+1}^2| = |a^2 + a * b - b^2|$ के प्रतिरूपण में

$|A_m * A_{m+4} - A_{m+2}^2| = |a^2 + a * b - b^2|$ सिद्ध करना होगा।

अतः बाँया पक्ष $= |A_m * A_{m+4} - A_{m+2}^2| = \left|A_m * (3A_{m+2} - A_m) - (A_m + A_{m+1})^2\right|$ पदमान प्रमेय से

$$= \left|A_m * \{\{3(A_m + A_{m+1}) - A_m\}\} - (A_m + A_{m+1})^2\right|$$

$$= \left|A_m * \{(2A_m + 3A_{m+1}) + (A_m + A_{m+1})\} - (A_m + A_{m+1})^2\right|$$

$$= \left|(2A_m^2 + 3A_mA_{m+1}) - (A_m^2 + 2A_mA_{m+1} + A_{m+1}^2)\right|$$

$$= |A_m^2 + A_mA_{m+1} - A_{m+1}^2|$$

$$= |a^2 + a * b - b^2|$$ **सिद्ध**

अतः योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के तीन एकान्तर पद मान **अवयव $E_r$ $E_{r+1}$ $E_{r+2}$ के प्रति –**

$$|E_r * E_{r+2} - E_{r+1}^2| = |a^2 + a * b - b^2|$$ **प्रमाधित**

**उक्त मापांक प्रमेय [1]के द्वारा**

**(1) फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1,1)F के तारतम्य में–**

$$|E_r * E_{r+2} - E_{r+1}^2| = 1$$ होगा।

**(2) लुकस संख्या श्रेढ़ी (1,3)L के तारतम्य में–**

$$|E_r * E_{r+2} - E_{r+1}^2| = 5$$ होगा।

**[3] एकान्तर पद मान की श्रेढ़ी के चार क्रमागत अव,वव $E_r$ $E_{r+1}$ $E_{r+2}$ $E_{r+3}$ के प्रति –**

$$|E_r * E_{r+3} - E_{r+1} * E_{r+2}| = 3^* |a^2 + a * b - b^2|$$

**प्रमाण**– –योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A विस्तार में सरल पद क्रमांक संकेत

$A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, A_{m+3}, A_{m+4}, , A_{m+5}, A_{m+6} - - - -$ प्रथम चार एकान्तर पद अवयव

$A_m, A_{m+2}, A_{m+4}, A_{m+6}$ की तुलना स–

r वाँपद $E_r = A_m$, $E_{r+1} = A_{m+2}$, $E_{r+2} = A_{m+4}$ . , $E_{r+3} = A_{m+6}$

तब

$|E_r * E_{r+3} - E_{r+1} * E_{r+2}| = 3^* |a^2 + a * b - b^2|$ के प्रतिरूपण में

$|A_m * A_{m+6} - A_{m+2} * A_{m+4}| = 3^* |a^2 + a * b - b^2|$ सिद्ध करना होगा।

अतः बाँया पक्ष $= |A_m * A_{m+6} - A_{m+2} * A_{m+4}|$

$= |A_m * (3A_{m+4} - A_{m+2}) - A_{m+2} * (3A_{m+2} - A_m|$ पदमान प्रमेय से

$= |3(A_m * A_{m+4} - A_{m+2}^2)|$

$= 3|A_m * A_{m+4} - A_{m+2}^2|$

$= 3|a^2 + a * b - b^2|$ मापांक प्रमेय (1) से **सिद्ध**

अतः योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)+A के **चार क्रमागत अव,वव $E_r$ $E_{r+1}$ $E_{r+2}$ $E_{r+3}$ के प्रति –**

$$|E_r * E_{r+3} - E_{r+1} * E_{r+2}| = 3^* |a^2 + a * b - b^2| \text{ प्रमाधित}$$

उक्त मापांक प्रमेय (2)के द्वारा

(1) फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1,1)F के तारतम्य में–

$$|E_r * E_{r+3} - E_{r+1} * E_{r+2}| = 3 * 1 = 3$$

(2) लुकस संख्या श्रेढ़ी (1,3)L के तारतम्य में–

$|E_r * E_{r+3} - E_{r+1} * E_{r+2}| = 3 * 5 = 15$

**[C]** अलग–अलग स्तर की दो योग–योग संख्या श्रेढ़ी **(a , b)A** और **(c , d)B** के एक ही सरल क्रमांक के दो क्रमागत संख्या के प्रति अभिगृहीत –

योग–योग संख्या श्रेढ़ी **(a , b)A** के सरल क्रमांक दो क्रमागत $\mathbf{A_n}$ और $\mathbf{A_{n+1}}$

**तथा** –योग संख्या श्रेढ़ी **(c , d)B** के सरल क्रमांक दो क्रमागत $B_n$ और $B_{n+1}$ के प्रति –

(1) मापांक तुल्यता साम्य समीकरण –

$|A_n * B_{n+1} - B_n * A_{n+1}| = |A_1 * B_2 - B_1 * A_2| = |a * d - c * b|$ होगा।

प्रमाणन हेतू अवलोकनार्थ–

| श्रेढ़ी (a , b)A के प्रति → | क्रमांक | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ळलमान | a | b | (a+b) | (a+2b) | (2a+3b) | (3a+5b) | (5a+8b) |
| श्रेढ़ी (c , d)B के प्रति → | क्रमांक | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | $B_7$ |
| | ळलमान | c | d | (c+d) | (c+2d) | (2a+3b) | (3a+5b) | (5a+8b) |

1■ $|A_1 * B_2 - B_1 * A_2| = |a * d - c * b|$

2■ $|A_2 * B_3 - B_2 * A_3| = |b * (c + d) - c * (a + b| = |c * b - a * d| = |a * d - c * b|$

3■ $|A_3 * B_4 - B_3 * A_4| = |(a + b) * (c + 2d) - (c + d) * (a + 2b| = |a * d - c * b|$

4■ $|A_4 * B_5 - B_4 * A_5| = |(a + 2b) * (2c + 3d) - (c + 2d) * (2a + 3b|$
$= |c * b - a * d| = |a * d - c * b|$

5■ $|A_5 * B_6 - B_5 * A_6| = |(2a + 3b) * (3c + 5d) - (2c + 3d) * (3a + 5b| = |a * d - c * b|$

6■ $|A_6 * B_7 - B_6 * A_7| = |(3a + 5b) * (5c + 8d) - (3c + 5d) * (5a + 8b|$
$= |c * b - a * d| = |a * d - c * b|$

उक्त अभिगृहीत के द्वारा–

3■ योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के तुल्य क्रमांक में अवयव के वर्ग मानों के प्रति –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2}$ होगा।

**2•** $r=1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \overline{2}}$ होगा।

जाँच तालिका अवलोकित कीजिए

**1•** $r = 0, 2, 4, 6 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2}$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $\mathbf{L_r * L_{r+1}}$ | $\mathbf{5 * F_r * F_{r+1}}$ | $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 ** F_{r+1}}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0 | $L_0 * L_1 = 2*1=2$ | $5^* F_0 * F_1 = 5*0*1= 0$ | =2 |
| 2 | 2 | $L_2 * L_3 = 3*4=12$ | $5^* F_2 * F_3 = 5*1*2 =10$ | 2 |
| 3 | 4 | $L_4 * L_5 = 7*11=77$ | $5^* F_4 * F_5 = 5 * 3 * 5=75$ | 2 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 6 | $L_6 * L_7 = 18*29 = 522$ | $5* F_6 * F_7 = 5 * 8 * 13 = 520$ | 2 |
| 5 | 8 | $L_8 * L_9 = 47*76 = 3572$ | $5* F_8 * F_9 = 5 * 21 * 34 = 3570$ | 2 |

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \bar{2}$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $L_r * L_{r+1}$ | $5 * F_r * F_{r+1}$ | $L_r * L_{r+1} - 5 ** F_{r+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | $L_1 * L_2 = 1*3 = 3$ | $5* F_1 * F_2 = 5*1*1 = 5$ | $\bar{2}$ |
| 2 | 3 | $L_3 * L_4 = 4*7 = 28$ | $5* F_3 * F_4 = 5*2*3 = 30$ | $\bar{2}$ |
| 3 | 5 | $L_5 * L_6 = 11*18 = 198$ | $5* F_5 * F_6 = 5*5*8 = 200$ | $\bar{2}$ |
| 4 | 7 | $L_7 * L_8 = 29*47 = 1363$ | $5* F_7 * F_8 = 5* 13*21 = 1365$ | $\bar{2}$ |
| 5 | 9 | $L_9 * L_{10} = 76*123 = 9348$ | $5* F_9 * F_{10} = 5*34*55 = 9350$ | $\bar{2}$ |

फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(1,1)F$ और लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1,3)L$ के प्रति–

तुल्यता साम्य समीकरण –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति– $[F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}] = \bar{2}$ होगा।

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति– $[F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}] = 2$ होगा।

जाँच तालिका अवलोकित कीजिए

**1•** $r = 0, 2, 4, 6 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति– $[F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}] = \bar{2}$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $F_r * L_{r+1} =$ | $L_r * F_{r+1} =$ | $F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | |
| 1 | 0 | $F_0 * L_1 = 0 * 1 = 0$ | $L_0 * F_1 = 2*1 = 2$ | $\bar{2}$ |
| 2 | 2 | $F_2 * L_3 = 1*4 = 4$ | $L_2 * F_3 = 3*2 = 6$ | $\bar{2}$ |
| 3 | 4 | $F_4 * L_5 = 3*11 = 33$ | $L_4 * F_5 = 7*5 = 35$ | $\bar{2}$ |
| 4 | 6 | $F_6 * L_7 = 8* 29 = 232$ | $L_6 * F_7 = 18*13 = 234$ | $\bar{2}$ |
| 5 | 8 | $F_8 * L_9 = 21*76 = 1596$ | $L_8 * F_9 = 47*34 = 1598$ | $\bar{2}$ |

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानो) के प्रति $-[F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}] = 2$ का अवलोकन

| क्रमांक | r | $F_r * L_{r+1} =$ | $L_r * F_{r+1} =$ | $F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | $F_1 * L_2 = 1*3 = 3$ | $L_1 * F_2 = 1*1 = 1$ | 2 |
| 2 | 3 | $F_3 * L_4 = 2*7 = 14$ | $L_3 * F_4 = 4*3 = 12$ | 2 |
| 3 | 5 | $F_5 * L_6 = 5*18 = 90$ | $L_5 * F_6 = 11*8 = 88$ | 2 |
| 4 | 7 | $F_7 * L_8 = 13*47 = 611$ | $L_7 * F_8 = 29*21 = 609$ | 2 |
| 5 | 9 | $F_9 * L_{10} = 34*123 = 4182$ | $L_9 * F_{10} = 76*55 = 4180$ | 2 |

# अध्याय–22
# योग–योग संख्या श्रेढ़ी विषयक विस्तारित पद मानों का योगमान प्रमेय

## 22-1 योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–

योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के क्रमागत n पदों का योग फल श्रेढ़ी के (n+2) वाँ पद और 2रे पद मान का अन्तर मान होगा। जहाँ $A_{n+2} = (A_{n-1} + 2A_n)$ होगा।

अर्थात् $[A_1 + A_2 + A_3 + - + - + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n] = A_{n+2} - A_2 = A_{n+2} - b$

**प्रमाण** [1] आगमन –निगमन विधि

**प्रमाण** योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के प्रति–

$[A_1 + A_2 + A_3 + - + - + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n]$

$= [a + b + (a + b) + (a + 2b) + (2a + 3b) + (3a + 5b) * - - - - - -$nपद तक विस्तार होगा।

तब आगमन से निगमन विधि का अनुसरण से–

प्रथम पद तक योगमान = a = (a+b)−b = 3 रा पद−2 रा पद

2 रे पद तक योगमान = a+b =(a+b) = (a+2b)−b = 4चौथा पद−2 रा पद

3 रे पद तक योगमान = a+b+(a+b) =(2a+2b) = (2a+3b)−b = 5चौथा पद−2 रा पद

---------- = --- ---------- ---------- ------- =- --- ----------

---------- = --- ---------- ---------- ------- =- --- ----------

n वाँ पद तक योगमान = --- ---------- ---------- ------- = (n+2)वाँ पद−2रा पद **प्रमाणित।**

**प्रमाण** [2] योग–योग श्रेढ़ी के प्रतिबंध का अनुप्रयोग –

$[A_1 + A_2 + A_3 + - + - + A_{n-2} + A_{n-1} + A_n]$

$= [(A_3 - A_2) + (A_4 - A_3) + (A_5 - A_4) +$ ----------

$+ (A_n - A_{n-1}) + (A_{n+1} - A_n) + (A_{n+2} - A_{n+1})$

$= A_{n+2} - A_2$ **प्रमाणित।**

उदाहरण 1■ योग–योग संख्या श्रेढ़ी (2,5)A का क्रमागत 10 पदों [2+5+7+12+19+31+50+81+131+212] तक योगमान $= [(131 + 2 * 212) - 5] = [(131 + 424) - 5] = 455 - 5 = 450$ होगा।

2■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1,1)F का क्रमागत 12 पदों

[1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+1] तक योगमान $= [(89 + 2 * 144) - 1] = [(89 + 288) -$ 1=377−1=376 होगा।

3■ लिकस संख्या श्रेढ़ी (1,3)L का क्रमागत 15 पदों

[1+3+4+7+11+18+29+47+76+123+199+322+521+843+1364] तक योगमान $= [(843 + 2 *$ 1364−3=89+2728−3=2817−3=2814 होगा।

4■ फिबोनिकी स्वरूप संख्या श्रेढ़ी (a,b)A का क्रमागत 10 पदों

[a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+(8a+13b)+(13a+21b)+(21a+3 4b)] = [{(13a+21b)+2*(21a+34b)} – b] तक योगमान

$= [\{(13a + 21b) + (42a + 68b)\} - b] = [(55a + 89b) - b] = 55a + 88b$ होगा।

## 22-2 योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के विषम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–

योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के विषम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$[A_1 + A_3 + A_5 + - + - + A_{2n-5} + A_{2n-3} + A_{2n-1}] = A_{2n} - (A_2 - A_1)$

$= [(2A_{2n+1} - A_{2n-1}) - (b - a)]$ होगा।

**प्रमाण–** **योग–योग श्रेढ़ी के प्रतिबंध का अनुप्रयोग**

$[A_1 + A_3 + A_5 + - + - + A_{2n-5} + A_{2n-3} + A_{2n-1}]$

$= = [(A_2 - A_0) + (A_4 - A_2) + (A_6 - A_4) +$ ----------

$+(A_{2n-4} - A_{2n-6}) + (A_{2n-2} - A_{2n-4}) + (A_{2n} - A_{2n-2})]$

$= A_{2n} - A_0 = A_{2n} - (A_2 - A_1) = [(2A_{2n+1} - A_{2n-1}) - (b - a)]$ **प्रमाणित।**

**उक्त प्रमेय 22-2 के द्वारा–**

1■ **फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 1)F$ **के विषम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के विषम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$[F_1 + F_3 + F_5 + - + - + F_{2n-5} + F_{2n-3} + F_{2n-1}] = F_{2n} - (F_2 - F_1) = F_{2n} - (1 - 1)$

$= F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1}) = (2F_{2n-1} - F_{2n-3})$ होगा।

**उदाहरण** ■ फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के विषम क्रमांकों में स्थित 8 पदी अवयव का योगमान $[F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} + F_{13} + F_{15}] = F_{2*8} = F_8(F_9 + F_7) = 2F_{15} - F_{13}$ की जाँच कर समिका सत्याापन कीजिये।

**जाँच–** बाँया पक्ष $= [F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} + F_{13} + F_{15}]$

$= [1 + 2 + 5 + 13 + 34 + 89 + 233 + 610] = 987 = F_{16} = F_{2*8}$ सारिणी अवलोकन से

दाँया पक्ष $= F_8(F_9 + F_7) = 21(34+13) = 21*47 = 987$

एवं $2F_{15} - F_{13} = 2 * 610 - 233 = 1220 - 233 = 987$

**निष्कर्ष** समिका सत्य है।

2■ **लुकस संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 3)L$ **के विषम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के विषम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$[L_1 + L_3 + L_5 + - + - + L_{2n-5} + L_{2n-3} + L_{2n-1}] = L_{2n} - (L_2 - L_1) = L_{2n} + (3 - 1)$

$= L_{2n} - 2 = [(2L_{2n-1} - L_{2n-3}) - 2]$होगा।

**उदाहरण** ■ लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के विषम क्रमांकों में स्थित 8 पदी अवयव का योगमान $[L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + L_9 + L_{11} + L_{13} + L_{15}] = L_{2*8} - 2 = [(2L_{15} - L_{13}) - 2]$ की जाँच कर समिका सत्याापन कीजिये।

**जाँच–** बाँया पक्ष $= [L_1 + L_3 + L_5 + L_7 + L_9 + L_{11} + L_{13} + L_{15}]$

$= [1 + 4 + 11 + 29 + 76 + 199 + 521 + 1364] = 2205$

दाँया पक्ष $= L_{2*8} - 2 = L_{16} - 2 = 2207 - 2 = 2205$

एवु $[(2L_{15} - L_{13}) - 2] = [(2 * 1364 - 521) - 2](2728 - 521) - 2] = 2205$

**निष्कर्ष** समिका सत्य है।

**22-3 योग–योग संख्या श्रेढ़ी** $(a\ b)A$ **के सम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के सम क्रमांकों में स्थित $[A_2 + A_4 + A_6 + - + - + A_{2n-4} + A_{2n-2} + A_{2n}] = A_{2n+1} - A_1 = A_{2n+1} - a = [(2A_{2n} - A_{2n-2}) - a]$ होगा।

**प्रमाण–** **योग–योग श्रेढ़ी के प्रतिबंध का अनुप्रयोग**

$[A_2 + A_4 + A_6 + - + - + A_{2n-4} + A_{2n-2} + A_{2n}]$

$= = [(A_3 - A_1) + (A_5 - A_3) + (A_7 - A_5) +$ ----------

$+(A_{2n-3} - A_{2n-5}) + (A_{2n-1} - A_{2n-3}) + (A_{2n+1} - A_{2n-1})]$

$= A_{2n+1} - A_1 = A_{2n} - A_1 = [(2A_{2n} - A_{2n-2}) - a]$ **प्रमाणित।**

**उक्त प्रमेय 22-3 के द्वारा–**

1■ **फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 1)F$ **के सम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–**

फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के सम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$$[F_2 + F_4 + F_6 + - + - + F_{2n-4} + F_{2n-2} + F_{2n}] = F_{2n+1} - F_1 = F_{2n+1} - 1$$
$$= [(F_n^2 + F_{n+1}^2) - 1] = [(2F_{2n} - F_{2n-2}) - 1]$$ होगा।

**उदाहरण** ■ फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ \ 1)F$ के सम क्रमांकों में स्थित 8 पदी अवयव का योगमान $[F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12} + F_{14} + F_{16}] = F_{2*8+1} - 1 = [(F_8^2 + F_9^2) - 1] = [(2F_{16} - F_{14}) - 1]$ की जाँच कर समिका सत्याापन कीजिये।

**जाँच**– बाँया पक्ष $= [F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12} + F_{14} + F_{16}]$
$= [1 + 3 + 8 + 21 + 55 + 144 + 377 + 987] = 1596$
दाँया पक्ष $= [(F_8^2 + F_9^2) - 1] = [(21^2 + 34^2) - 1] = [(441+1156)-1] = 1596$
एवं $[(2F_{16} - F_{14}) - 1] = [(2 * 987 - 377) - 1] = [(1974 - 377) - 1] = 1596$
**निष्कर्ष** समिका सत्य है।

2■ **लुकस संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 3)L$ **के सम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–**

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के सम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =
$$[L_2 + L_4 + L_6 + - + - + L_{2n-4} + L_{2n-2} + L_{2n}] = L_{2n+1} - L_1 = L_{2n+1} - 1$$
$$= [(2L_{2n} - L_{2n-2}) - 1]$$ होगा।

**उदाहरण** ■ लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ \ 3)L$ के सम क्रमांकों में स्थित 8 पदी अवयव का योगमान $[L_2 + L_4 + L_6 + L_8 + L_{10} + L_{12} + L_{14} + L_{16}] = L_{2*8+1} - 1 = [(2L_{16} - L_{14}) - 1]$ की जाँच कर समिका सत्याापन कीजिये।

**जाँच**– बाँया पक्ष $= [L_2 + L_4 + L_6 + L_8 + L_{10} + L_{12} + L_{14} + L_{16}]$
$= [3 + 7 + 18 + 47 + 123 + 322 + 843 + 2207] = 3570$
दाँया पक्ष $= L_{2*8+1} - 1 = L_{17} - 1 = 3571 - 1 = 3570$
एवु $[(2L_{16} - L_{14}) - 1] = [(2 * 2207 - 843) - 1](4414 - 843) - 1] = 3570$
**निष्कर्ष** समिका सत्य है।

## 22-4 योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के प्रति–

$[A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + - +$ **का n पदी विस्तार में–**

1■ **पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–**

**1•** विषम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी $[A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + -, -, -]\ \frac{n}{2}$ पदी होगा।
जिसका योगमान$= A_{2\frac{n}{2}} - (A_2 - A_1) = A_n - (A_2 - A_1)$

**2•** सम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी $[A_2 + A_4 + A_6 + A_8 + -, -, -]\ \frac{n}{2}$ पदी होगा।
जिसका योगमान$= A_{2\frac{n}{2}+1} - A_1 = A_{n+1} - A_1$

∴ **हल मान** = (विषम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी के पदों का योगमान) –(सम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी के पदों का योगमान)
$= [A_n - (A_2 - A_1)] - [A_{n+1} - A_1] = [(2A_1 - A_2) - A_{n-1}]$
$= [(2a-b) - A_{n-1}]$ होगा।

2■ **पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–**

**1•** विषम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी $[A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + -, -, -]\ \frac{n+1}{2}$ पदी होगा।
जिसका योगमान$= A_{2\frac{n+1}{2}} - (A_2 - A_1) = A_{n+1} - (A_2 - A_1)$

**2•** सम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी $[A_2 + A_4 + A_6 + A_8 + -, -, -]\ \frac{n-1}{2}$ पदी होगा।

जिसका योगमान= $A_{2\frac{n-1}{2}-+1} - A_1 = A_n - A_1$

∴ **हल मान** = ( विषम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी के पदों का योगमान) −( सम क्रमांकों से प्राप्त श्रेढ़ी के पदों का योगमान)

$= [A_{n+1} - (A_2 - A_1)] - [A_n - A_1] = [(2A_1 - A_2) + A_{n-1}]$

$= [(2a-b) + A_{n-1}]$ होगा।

उक्त प्रमेय **22-4** के द्वारा

**फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 1)F$ **के प्रति–**

$[F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 - F_6 + - +$ **का n पदी विस्तार में**

1■ **पदों की संख्या** n **सम संख्या होने के प्रति–**

**हल मान** $= [1-F_{n-1})]$ होगा।

2■ **पदों की संख्या** n **विषम संख्या होने के प्रति–**

**हल मान** $= [1 + F_{n-1}]$ होगा।

**लुकस संख्या श्रेढ़ी** $(1\ 3)L$ **के प्रति–**

$[L_1 - L_2 + L_3 - L_4 + L_5 - L_6 + - +$ **का n पदी विस्तार में**

1■ **पदों की संख्या** n **सम संख्या होने के प्रति–**

**हल मान** $= [-(1+L_{n-1})]$ होगा।

2■ **पदों की संख्या** n **विषम संख्या होने के प्रति–**

**हल मान** $= [-(1-L_{n-1}]$ होगा।

## 22-5 योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के क्रमागत पद मानो के वर्ग मानों का योगमान प्रमेय–

योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के क्रमागत पद मानो के वर्ग मानों –

$[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + - - - - +A_{n-2}^2 + A_{n-1}^2 + A_n^2]$ का योगमान =

$[(A_n * A_{n+1}) - A_1(A_2 - A_1] = [A_n(A_{n-1} + A_n) - A_1(A_2 - A_1]$ होगा।

**प्रमाण** – अवलोकन एवं विश्लेषण विधि द्वारा–

**योग–योग संख्या श्रेढ़ी** $(a\ b)A$ **के प्रति–**

$[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + - - - - +A_{n-2}^2 + A_{n-1}^2 + A_n^2]$

$=[a^2 + b^2 + (a+b)^2 + (a+2b)^2 + (2a+3b)^2 + (3a+5b)^2 \ - \ - \ - -]$ होगा। तब–

1 पद तक का योग मान $= a^2 = [a^2 + ab - ab] = [ab - ab + a^2] = [a * b - a(b-a)]$

$=[(A_1 * A_2) - A_1(A_2 - A_1)]$

2 पद तक का योग मान $= [a^2 + b^2] = [[a^2 + b^2 + ab - ab] = [ab + b^2 - ab + a^2]$

$= [b * (a+b) - a(b-a)] =[(A_2 * A_3) - A_1(A_2 - A_1)]$

3 पद तक का योग मान $= [a^2 + b^2 + (a+b)^2] = [2a^2 + 2ab + 2b^2]$

$= [(a^2 + 3ab + 2b^2) - ab + a^2] = [(a+b) * (a+2b) - a(b-a)]$

$= [(A_3 * A_4) - A_1(A_2 - A_1)]$

4 पद तक का योग मान $= [(2a^2 + 2ab + 2b^2) + (a+2b)^2] = [3a^2 + 6ab + 6b^2]$

$= [(2a^2 + 7ab + 6b^2) - ab + a^2] = [(a+2b) * (2a+3b) - a(b-a)]$

$= [(A_4 * A_5) - A_1(A_2 - A_1)]$

5 पद तक का योग मान $= [(3a^2 + 6ab + 6b^2) + (2a+3b)^2] = [7a^2 + 18ab + 6b^2]$

$= [(6a^2 + 19ab + 15b^2) - ab + a^2] = [(2a+3b) * (3a+5b) - a(b-a]$

$= [(A_5 * A_6) - A_1(A_2 - A_1)]$

**निष्कर्ष** उपरोक्तानुसार अवलोकन एवं विश्लेषण से

$[A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + - - - - +A_{n-2}^2 + A_{n-1}^2 + A_n^2]$ का योगमान =

$$[(A_n * A_{n+1}) - A_1(A_2 - A_1] = [A_n(A_{n-1} + A_n) - A_1(A_2 - A_1)]$$ **प्रमाणित।**

**उदाहरण ■** योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(4\ \ 9)A$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान की गणना सामान्य गणना विधि एवं गणना समिका सूत्र द्वारा प्राप्त कर गणना समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल–** योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(4\ \ 9)A$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान–

1• सामान्य गणना विधि द्वारा $-[4^2 + 9^2 + 13^2 + 22^2 + 35^2 + 57^2 + 92^2 + 149^2]$

$$= [16 + 81 + 169 + 484 + 1225 + 3249 + 8464 + 22201] = 35889$$

2• समिका सूत्र द्वारा $[(A_n * A_{n+1}) - A_1(A_2 - A_1)]$

$$\Rightarrow [(A_8 * A_9) - A_1(A_2 - A_1)]$$
$$= [A_8(A_7 + A_8) - A_1(A_2 - A_1)]$$
$$= [149(92+149) - 4(9-4)] = 35889$$

**निष्कर्ष** उपरोक्त हल क्रम से समिका सत्यापित।

**उक्त प्रमेय 22--5 के द्वारा**

**1■फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के प्रति**

फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के क्रमागत पद मानो के वर्ग मानों –

$[F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + - - - - + F_{n-2}^2 + F_{n-1}^2 + F_n^2]$ का योगमान

$$= F_n * F_{n+1} = F_n(F_{n-1} + F_n)$$ होगा।

**उदाहरण ■** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ \ 1)F$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान की गणना सामान्य गणना विधि एवं गणना समिका सूत्र द्वारा प्राप्त कर गणना समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल–** फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान–

1• सामान्य गणना विधि द्वारा $[1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2]$

$$= [1+1+4+9+25+64+169+441] = 714$$

2• समिका सूत्र द्वारा $F_8 * F_{8+1} = F_8 * F_9 = F_8(F_7 + F_8) = 21(13 + 21)$

$$= 21 * 34 = 714$$

**निष्कर्ष** उपरोक्त हल क्रम से समिका सत्यापित।

**2■ लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के प्रति**

लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के क्रमागत पद मानो के वर्ग मानों –

$[L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + - - - - + L_{n-2}^2 + L_{n-1}^2 + L_n^2]$ का योगमान

$$= [L_n * L_{n+1} - 2] = [L_n(L_{n-1} + L_n) - 2]$$ होगा।

**उदाहरण ■** लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ \ 3)L$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान की गणना सामान्य गणना विधि एवं गणना समिका सूत्र द्वारा प्राप्त कर गणना समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल–** लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के क्रमागत $8$ पद मानो के वर्ग मानों के योग मान–

1• सामान्य गणना विधि द्वारा $[1^2 + 3^2 + 4^2 + 7^2 + 11^2 + 18^2 + 29^2 + 47^2]$

$$= [1+9+16+49+121+324+841+2209] = 3\,570$$

2• समिका सूत्र द्वारा $[L_8 * L_{8+1} - 2] = [L_8 * L_9 - 2]$

$$= [L_8(L_7 + L_8) - 2] = [47(29+47) - 2]$$
$$= [(47*76) - 2] = 3\,570$$

**निष्कर्ष** उपरोक्त हल क्रम से समिका सत्यापित।

## 22-6 अलग–अलग दो स्तर के योग–योग श्रेढो के संगत पद क्रम अवयवों के गुणनफलों का योगफल

**प्रमेय–** अलग–अलग स्तर के योग–योग संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ और $(c\ d)B$ के संगत पद क्रमांक के $n$ पदों का गुणन फलों $[A_1 * B_1 + A_2 * B_2 + A_3 * B_3 + - - - - A_{n-2} * B_{n-2} + A_{n-1} * B_{n-1} + A_n * B_n]$का योग मान–

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$$[A_n * B_{n+1} - A_1(B_2 - B_1)] = [A_n * B_{n+1} - a(d - c)]$$

या

$$[B_n * A_{n+1} - B_1(A_2 - A_1)] = [B_n * A_{n+1} - c(b - a)]$$ होगा।

2■ पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति–

$$[A_n * B_{n+1} - B_1(A_2 - A_1)] = [A_n * B_{n+1} - c(b - a)]$$

या

$$[B_n * A_{n+1} - A_1(B_2 - B_1)] = [B_n * A_{n+1} - a(d - c)]$$ होगा।

प्रमाण–

प्रक्रम1• अलग–अलग स्तर के योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A और (c d)B के संगत पद क्रमांक के गुणन संक्रिया से प्राप्त श्रेढ़ी का पद क्रमांक 1 से - - - - पद क्रमांक n की ओर सतत पदमान गणना –

| | | | |
|---|---|---|---|
| पद1 | $= A_1 * B_1$ | = a*c | = ac |
| पद 2 | $= A_2 * B_2$ | = b*d | = bd |
| पद 3 | $= A_3 * B_3$ | = (a+b)*(c+d) | = ac+bc+ad+bd |
| पद 4 | $= A_4 * B_4$ | = (a+2b)*(c+2d) | = ac+2bc+2ad+4bd |
| पद 5 | $= A_5 * B_5$ | = (2a+3b)*(2c+3d) | = 4ac+6bc+6ad+9bd |
| पद 6 | $= A_6 * B_6$ | = (3a+5b)*(3c+5d) | = 9ac+15bc+15ad+25bd |
| पद 7 | $= A_7 * B_7$ | = (5a+8b)*(5c+8d) | = 25ac+40bc+40ad+64bd |
| पद 8 | $= A_8 * B_8$ | = (8a+13b)*(8c+13d) | = 64ac+104bc+104ad+169bd |
| पद 9 | $= A_9 * B_9$ | = (13a+21b)*(13 c+21d) | = 169ac+273bc+273ad+441bd |
| पद 10 | $= A_{10} * B_{10}$ | = (21a+34b)*(21 c+34d) | = 441ac+714bc+714ad+1156bd |
| पद 11 | $= A_{11} * B_{11}$ | = (34a+55b)*(34 c+55d) | = 1156ac+1870bc+1870ad+2025bd |
| पद 12 | $= A_{12} * B_{12}$ | = (55a+89b)*(55 c+89d) | = 3025ac+4895bc+4895ad+7921bd |
| -------- | = ---------- | = ---------- | = ---------- |
| -------- | = ---------- | = ---------- | = ---------- |

प्रक्रम2•

विषम पद क्रमांकों (1,3,5,7,9.11--------)तक योगमानो का विश्लेषण–

पद 1 तक का योगमान = ac = ad – a(d – c) $= A_1 * B_2 - A_1(B_2 - B_1)$

या ac = cb – c(b – a) $= B_1 * A_2 - B_1(A_2 - A_1)$

पद 3 तक का योगमान = 2ac+bc+ad+2bd

= (a+b)*(c+2d) – a(d – c) $= A_3 * B_2 - A_1(B_2 - B_1)$

या 2ac+bc+ad+2bd

= (c+d)*(a+2b) – c(b – a) $= B_3 * A_4 - B_1(A_2 - A_1)$

पद 5 तक का योगमान = 7ac+9bc+9ad+15bd

= (2a+3b)*(3c+5d) – a(d – c) $= A_5 * B_6 - A_1(B_2 - B_1)$

या 7ac+9bc+9ad+15bd

= (2c+3d)*(3a+5b) – c(b – a) $= B_3 * A_4 - B_1(A_2 - A_1)$

पद 7 तक का योगमान = 41ac+64bc+64ad+104bd

= (5a+8b)*(8 c+13d) – a(d – c) $= A_7 * B_8 - A_1(B_2 - B_1)$

या 41ac+64bc+64ad+104bd

$= (5c+8d)*(8\,a+13b) - c(b-a)$ $= B_7 * A_8 - B_1(A_2 - A_1)$

पद 9 तक का योगमान $= 274ac+441bc+441ad+714bd$

$= (13a+21b)*(21\,c+34d) - a(d-c)$ $= A_9 * B_{10} - A_1(B_2 - B_1)$

या $274ac+441bc+441ad+714bd$

$= (13c+21d)*(21\,a+34b) - c(b-a)$ $= B_9 * A_{10} - B_1(A_2 - A_1)$

पद 11 तक का योगमान $= 1871ac+3025bc3025441ad+4895bd$

$= (34a+55b)*(55\,c+89d) - a(d-c)$ $= A_{11} * B_{12} - A_1(B_2 - B_1)$

या $1871ac+3025bc3025441ad+4895bd$

$= (34c+55d)*(55\,a+89b) - c(b-a)$ $= B_{11} * A_{12} - B_1(A_2 - A_1)$

निष्कर्ष– उपरोकत अवलोकन और विश्लेषण से –

पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$[A_n * B_{n+1} - A_1(B_2 - B_1)] = [A_n * B_{n+1} - a(d-c)]$

या

$[B_n * A_{n+1} - B_1(A_2 - A_1)] = [B_n * A_{n+1} - c(b-a)]$ होगा। प्रमाणित।

प्रक्रम3• सम पद क्रमांकों (1,3,5,7,9.11--------)तक योगमानो का विश्लेषण–

पद 2 तक का योगमान $= ac+bd = b(c+d) - c(b-a)$ $= A_2 * B_3 - B_1(A_2 - A_1)$

या $ac+bd = d(a+b) - a(d-c)$ $= B_2 * A_3 - A_1(B_2 - B_1)$

पद 4 तक का योगमान $= 3ac+3bc+3ad+6bd$

$= (a+2b)*(2c+3d) - c(b-a)$ $= A_4 * B_5 - B_1(A_2 - A_1)$

या $3ac+3bc+3ad+6bd$

$= (c+2d)*(2a+3b) - a(d-c)$ $= B_4 * A_5 - A_1(B_2 - B_1)$

पद 6 तक का योगमान $= 16ac+24bc+24ad+40bd$

$= (3a+5b)*(5\,c+8d) - c(b-a)$ $= A_6 * B_7 - B_1(A_2 - A_1)$

या $16ac+24bc+24ad+40bd$

$= (3c+5d)*(5\,a+8b) - a(d-c)$ $= B_6 * A_7 - A_1(B_2 - B_1)$

पद 8 तक का योगमान $= 105ac+168bc+168ad+273bd$

$= (8a+13b)*(13c+21d) - c(b-a)$ $= A_8 * B_9 - B_1(A_2 - A_1)$

या $= 105ac+168bc+168ad+273bd$

$= (8c+13d)*(13\,a+21b) - a(d-c)$ $= B_8 * A_9 - A_1(B_2 - B_1)$

पद 10तक का योगमान $= 715ac+1155bc+1155ad+1870bd$

$= (21a+34b)*(34\,c+55d) - c(b-a)$ $= A_{10} * B_{11} - B_1(A_2 - A_1)$

या $= 715ac+1155bc+1155ad+1870bd$

$= (21c+34d)*(34\,a+55b) - a(d-c)$ $= B_{10} * A_{11} - A_1(B_2 - B_1)$

पद 12तक का योगमान $= 4896ac+7920bc+7920ad+12816bd$

$= (55a+89b)*(89\,c+144d) - c(b-a)$ $= A_{12} * B_{13} - B_1(A_2 - A_1)$

या $= 4896ac+7920bc+7920ad+12816bd$

$= (55c+89d)*(8\,9\,a+144b) - a(d-c)$ $= B_{12} * A_{13} - A_1(B_2 - B_1)$

निष्कर्ष– उपरोकत अवलोकन और विश्लेषण से –

पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति–

$[A_n * B_{n+1} - B_1(A_2 - A_1)] = [A_n * B_{n+1} - c(b-a)]$

या

$[B_n * A_{n+1} - A_1(B_2 - B_1)] = [B_n * A_{n+1} - a(d - c)]$ होगा। प्रमाणित।

उक्त प्रमेय 22-6 के द्वारा

(1) प्रमेय 20-5 का सत्यापन– प्रमेय 20-6 में $B_r = A_r$ के प्रतिस्थापन से –

$[A_1 * B_1 + A_2 * B_2 + A_3 * B_3 + - - - - A_{n-2} * B_{n-2} + A_{n-1} * B_{n-1} + A_n * B_n]$

$= [A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + - - - - + A_{n-2}^2 + A_{n-1}^2 + A_n^2]$ का योगमान n के विषम एवं सम दोनों मानों के प्रति $[A_n * A_{n+1} - A_1(A_2 - A_1)] = [A_n * A_{n+1} - a(b - a)]$ प्राप्त होगा।

(2) फिबानिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ और लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ के संगत पद क्रमांक के n पदों का गुणन फलों

$[F_1 * L_1 + F_2 * L_2 + F_3 * L_3 + - - - - F_{n-2} * L_{n-2} + F_{n-1} * L_{n-1} + F_n * L_n]$ का योग मान –

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$$[F_n * L_{n+1} - F_1(L_2 - L_1)] = [F_n * L_{n+1} - 1(3 - 1)] = [F_n * L_{n+1} - 2]$$

या

$$[L_n * F_{n+1} - L_1(F_2 - F_1)] = [L_n * F_{n+1} - 1(1 - 1)] = L_n * F_{n+1}$$ होगा।

2■ पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति–

$$[F_n * L_{n+1} - L_1(F_2 - F_1)] = [F_n * L_{n+1} - 1(1 - 1)] = F_n * L_{n+1}$$

या

$$[L_n * F_{n+1} - F_1(L_2 - L_1)] = [L_n * F_{n+1} - 1(3 - 1)] = [L_n * F_{n+1} - 2]$$ होगा।

(3) योग–योग संख्या$(a\ b)A$ श्रेढ़ी से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $A_r * A_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[A_1 * A_2 + A_2 * A_3 + A_3 * A_4 - - - - + A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-1} * A_n + A_n * A_{n+1}]$का योग मान

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$$[A_n * A_{n+2} - A_1^2] = [A_n(A_n + A_{n+1}) - A_1^2] = [A_n(A_n + A_{n+1}) - a^2]$$

या

$$[A_{n+1} * A_{n+1} - A_2(A_2 - A_1)] = [A_{n+1}^2 - A_2(A_2 - A_1)] = [A_{n+1}^2 - b(b - a)]$$ होगा।

2■ पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति–

$$[A_n * A_{n+2} - A_2(A_2 - A_1)] = [A_n(A_n + A_{n+1}) - b(b - a)]$$

या

$$[A_{n+1} * A_{n+1} - A_1(A_3 - A_2)] = [A_{n+1}^2 - A_1^2] = [A_{n+1}^2 - a^2]$$ होगा।

प्रमाण प्रमेय 21-6 में दर्ज श्रेढ़ी एवं श्रेढ़ी के प्रति प्राप्त हल समिका में $B_r = A_{r+1}$ के प्रतिस्थापन से उक्त श्रेढ़ी –

$[A_1 * A_2 + A_2 * A_3 + A_3 * A_4 - - - - + A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-1} * A_n + A_n * A_{n+1}]$ प्राप्त करे एवं इसके प्रति योगमान हल समिका उपरोक्तानुसार प्राप्त कीजिये।

उदाहरण1■– योग–योग संख्या $(2\ \ 5)A$ श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $A_r * A_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

हल योग–योग संख्या $(2\ \ 5)A$ श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $A_r * A_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी

$[A_1 * A_2 + A_2 * A_3 + A_3 * A_4 + A_4 * A_5 + A_5 * A_6 + A_6 * A_7 + A_7 * A_8]$

$= [2*5+5*7+7*12+12*19+19*31+31*50+50*81]$ का योगमान गणना–

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–[2*5+5*7+7*12+12*19+19*31+31*50+50*81] का योगमान
=[10+35+84+228+58 9+1550+4050] =6 546 होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 7 के विषम संख्या होने के प्रति–

योगमान $[A_n(A_n + A_{n+1}) - a^2] = [A_7(A_7 + A_8) - a^2]$
$=[50(50+81)-2^2] =50*131 - 4 =6546$ होगा।

**या** योगमान $=[A_{n+1}^2 - b(b-a)] = [A_{7+1}^2 - 5(5-2)] = [A_8^2 - 5*3]$
$= 81^2 - 15 = 6561 - 15 = 6546$ होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

उदाहरण2■– योग–योग संख्या (2 5)A श्रेढ़ी से विस्तारित 8 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $A_r * A_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल** योग–योग संख्या (2 5)A श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $A_r * A_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी
$[A_1 * A_2 + A_2 * A_3 + A_3 * A_4 + A_4 * A_5 + A_5 * A_6 + A_6 * A_7 + A_7 * A_8 + A_8 * A_9]$
$=$ [2*5+5*7+7*12+12*19+19*31+31*50+50*81+81*131+131*212] का योगमान गणना–

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–
[2*5+5*7+7*12+12*19+19*31+31*50+50*81+81*131] का योगमान
=[10+35+84+228+58 9+1550+4050+ 10611] =17157 होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 8 के सम संख्या होने के प्रति–

योगमान $=[A_n(A_n + A_{n+1}) - b(b-a)]=[A_8(A_8 + A_9) - b(b-a)]$
$= [81(81+131) - 5(5-2)$
$= 81*212 - 15 = 17172 - 15 =17157$ होगा।

**या** योगमान $= \left[A_{n+1}^2 - A_1^2\right] = A_{8+1}^2 - a^2$
$= 131^2 - 2^2 = 1\,7\,161 - 4 = 17157$ होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

**तब इसी तारतम्य में**

(1) **फिबानिकी संख्या (1 1)F से विस्तारित श्रेढ़ी**–

$[F_1 * F_2 + F_2 * F_3 + F_3 * F_4 + - - - - F_{n-2} * F_{n-1} + F_{n-1} * F_n + F_n * F_{n+1}]$ **का योग मान**

1■ **पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति**–

$$[F_n * F_{n+2} - F_1(F_3 - F_2)] = [F_n * F_{n+2} - F_1^2] = [F_n([F_n + F_{n+1}) - 1]$$

**या**

$$[F_{n+1} * F_{n+1} - F_2(F_2 - F_1)] = [F_{n+1} * F_{n+1} - 1(1-1)] = F_{n+1}^2$$ **होगा।**

2■ **पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति**–

$$[F_n * F_{n+2} - F_2(F_2 - F_1)] = [F_n * F_{n+2} - 1(1-1)] = F_n(F_n + F_{n+1})$$

**या**

$$[F_{n+1} * F_{n+1} - F_1(F_3 - F_2)] = [F_{n+1}^2 - F_1^2] = [F_{n+1}^2 - 1]$$

उदाहरण1■– फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल** योग–योग फिबानिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी
$[F_1 * F_2 + F_2 * F_3 + F_3 * F_4 + F_4 * F_5 + F_5 * F_6 + F_6 * F_7 + F_7 * F_8]$

$= [1*1+1*2+2*3+3*5+5*8+8*13+13*21]$ का योगमान गणना–

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–$[1*1+1*2+2*3+3*5+5*8+8*13+13*21]$ का योगमान

$=[1+2+6+15+40+104+273] =441$होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 7 विषम संख्या हाने के प्रति योगमान $= [F_n([F_n + F_{n+1}) - 1]$

$= [F_7([F_7 + F_8) - 1] =[13(13+21)-1] =13*34-1 =441$ होगा।

**या** योगमान $= F_{n+1}^2 = F_{7+1}^2 = F_8^2 = 21^2 = 441$होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

**उदाहरण 2■**– फिबोनिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी से विस्तारित 8 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल** योग–योग फिबानिकी संख्या (1 1)F श्रेढ़ी से विस्तारित 8 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी

$[F_1 * F_2 + F_2 * F_3 + F_3 * F_4 + F_4 * F_5 + F_5 * F_6 + F_6 * F_7 + F_7 * F_8 + F_8 * F_9]$

$= [1*1+1*2+2*3+3*5+5*8+8*13+13*21+21*34]$ का योगमान गणना–

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–$[1*1+1*2+2*3+3*5+5*8+8*13+13*21+21*34]$ का योगमान

$=[1+2+6+15+40+104+273+714] =1155$होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 8 सम संख्या हाने के प्रति योगमान $= F_n(F_n + F_{n+1})$

$= F_8(F_8 + F_9) =21(21++34) =21*55= 1155$ होगा।

**या** योगमान $=[F_{n+1}^2 - 1] = F_{8+1}^2 - 1 = F_9^2 - 1 = 34^2 - 1 = 1156-1 = 1155$ होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

**(2) लुकस संख्या (1 3)L से विस्तारित श्रेढ़ी–**

$[L_1 * L_2 + L_2 * L_3 + L_3 * L_4 + - - - - L_{n-2} * L_{n-1} + L_{n-1} * L_n + L_n * L_{n+1}]$ **का योग मान**

1■ **पदों की संख्या** n **विषम संख्या में होने के प्रति–**

$$[L_n * L_{n+2} - L_1(L_3 - L_2)] = [L_n * L_{n+2} - L_1^2] = [L_n(L_n + L_{n+1}) - 1]$$

**या**

$$[L_{n+1} * L_{n+1} - L_2(L_2 - L_1)] = [L_{n+1} * L_{n+1} - 3(3 - 1)] = L_{n+1}^2 - 6$$ **होगा।**

2■ **पदों की संख्या** n **सम संख्या में होने के प्रति–**

$$[L_n * L_{n+2} - L_2(L_2 - L_1)] = [L_n * L_{n+2} - 3(3 - 1)] = [L_n(L_n + L_{n+1}) - 6]$$

**या**

$$[L_{n+1} * L_{n+1} - L_1(L_3 - L_2)] = [L_{n+1}^2 - L_1^2] = [L_{n+1}^2 - 1]$$

**उदाहरण1■**– फिबोनिकी संख्या (1 3)L श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $L_r * L_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल** योग–योग फिबानिकी संख्या (1 3)L श्रेढ़ी से विस्तारित 7 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी

$[L_1 * L_2 + L_2 * L_3 + L_3 * L_4 + L_4 * L_5 + L_5 * L_6 + L_6 * L_7 + L_7 * L_8]$

$=[1*3+3*4+4*7+7*11+11*18+18*29+29*47]$ का योगमान

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–$[1*3+3*4+4*7+7*11+11*18+18*29+29*47]$ का योगमान

$= [3+12+28+77+ 198+ 522+1363] = 2203$ होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 7 विषम संख्या हाने के प्रति योगमान $[L_7(L_7 + L_8) - 1]$

$=[29(29+47) - 1] = 29 * 76 - 1 =2204-1 =2203$ होगा।

**या** योगमान $= \quad L_{n+1}^2 - 6 = L_{7+1}^2 - 6 = L_8^2 - 6 = 47^2 - 6 = 2209 - 6 = 2203$ होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

**उदाहरण2■**– फिबोनिकी संख्या $(1\ \ 3)L$ श्रेढ़ी से विस्तारित 8 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $L_r * L_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी का योगमान सामान्य गणना एवं योगमान समिका सूत्र द्वारा प्राप्तकर योगमान समिका सूत्र को सत्यापित कीजिये।

**हल** योग–योग फिबानिकी संख्या $(1\ \ 3)L$ श्रेढ़ी से विस्तारित 8 पदी श्रेढ़ी जिसका r वा पद $F_r * F_{r+1}$ होने प्राप्त श्रेढ़ी

$[L_1 * L_2 + L_2 * L_3 + L_3 * L_4 + L_4 * L_5 + L_5 * L_6 + L_6 * L_7 + L_7 * L_8 + L_8 * L_9]$

$=$[1*3+3*4+4*7+7*11+11*18+18*29+29*47 +47*76] का योगमान

1• **सामान्य गणना विधि द्वारा**–[1*3+3*4+4*7+7*11+11*18+18*29+29*47+47*76] का योगमान

$=$ [3+12+28+77+ 198+ 522+1363+3572] $= 5775$ होगा।

2• **समिका सूत्र विधि द्वारा** पदसंख्या 8 सम संख्या हाने के प्रति योगमान $=[L_n(L_n + L_{n+1}) - 6]$

$=[L_8(L_8 + L_9) - 6] =[47\ (47+76) - 6] = 47 * 123 - 6 = 5781 - 6 = 5775$ होगा।

**या** योगमान $= \quad L_{n+1}^2 - 1 = L_{8+1}^2 - 1 = L_9^2 - 1 = 76^2 - 1 = 5776 - 1 = 5775$ होगा।

**निष्कर्ष** समिका सत्यापित ।

## 22-7 अलग–अलग दो स्तर के योग–योग श्रेढ़ी $(a\ \ b)A$ और $(c\ \ d)B$ के संगत पद क्रम युग्म क्रमश:$A_r, A_{r+1}$ और $B_r, B_{r+1}$ के प्रति अन्तरमान का प्रमेय–

अलग–अलग दो स्तर के योग–योग श्रेढ़ी $(a\ \ b)A$ **और** $(c\ \ d)B$ के संगत पद क्रम युग्म क्रमश:: $A_r, A_{r+1}$ और $B_r, B_{r+1}$ के प्रति – $A_r * B_{r+1}$ और $B_r * A_{r+1}$ का अन्तर मान–

1■ **पद क्रम मान r विषम संख्या में होने के प्रति–**

$$A_r * B_{r+1} - B_r * A_{r+1} = A_1 * B_2 - B_1 * A_2 \text{ होगा।}$$

2■ **पद क्रम मान r सम संख्या में होने के प्रति–**

$$A_r * B_{r+1} - B_r * A_{r+1} = B_1 * A_2 - A_1 * B_2 \text{ होगा।}$$

**प्रमाण**

1■ **पद क्रम मान r विषम संख्या में होने के प्रति–**

प्रमेय 22-6 के अनुसार–$A_1 * B_1 + A_2 * B_2 + A_3 * B_3 + - - - - A_{r-2} * B_{r-2} + A_{r-1} * B_{r-1} + A_r * B_r]$का योग मान पदों की संख्या विषम संख्या होने के प्रति–

$$[A_r * B_{r+1} - A_1(B_2 - B_1)] = [B_r * A_{r+1} - B_1(A_2 - A_1)] \quad \text{(या के नियम से)}$$

$$\Rightarrow A_r * B_{r+1} - B_r * A_{r+1} = A_1(B_2 - B_1) - B_1(A_2 - A_1) = A_1 * B_2 - B_1 * A_2$$ **प्रमाणित**

2■ **पद क्रम मान r सम संख्या में होने के प्रति–**

प्रमेय 22-6 के अनुसार–$A_1 * B_1 + A_2 * B_2 + A_3 * B_3 + - - - - A_{r-2} * B_{r-2} + A_{r-1} * B_{r-1} + A_r * B_r]$का योग मान पदों की संख्या सम संख्या होने के प्रति–

$$[A_r * B_{r+1} - B_1(A_2 - A_1)] = [B_r * A_{r+1} - A_1(B_2 - B_1)] \text{(या के नियम से)}$$

$$\Rightarrow A_r * B_{r+1} - B_r * A_{r+1} = B_1(A_2 - A_1) - A_1(B_2 - B_1) = B_1 * A_2 - A_1 * B_2$$ **प्रमाणित**

**मापांक के प्रतिरूपण में** $|A_r * B_{r+1} - B_r * A_{r+1}| = |A_1 * B_2 - B_1 * A_2|$ **दर्शित होगा।**

**उक्त प्रमेय 22-7 के द्वारा**

**फिबानिकी संख्या**$(1\ \ 1)F$ **श्रेढ़ी और लुकस** $(1\ \ 3)L$ के संगत पद क्रम युग्म क्रमश::$F_r, F_{r+1}$ और $L_r, L_{r+1}$ के प्रति – $F_r * L_{r+1}$ और $L_r * F_{r+1}$ का अन्तर मान–

1■ **पद क्रम मान r विषम संख्या में होने के प्रति –**

$$F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1} = F_1 * L_2 - L_1 * F_2 = 1 * 3 - 1 * 1 = 2$$ होगा।

2■ पद क्रम मान r सम संख्या में होने के प्रति –

$$F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1} = L_1 * F_2 - F_1 * L_2 = 1 * 1 - 1 * 3 = \bar{2}$$ होगा।

मापांक के प्रतिरूपण में

$|F_r * L_{r+1} - L_r * F_{r+1}| = |F_1 * L_2 - L_1 * F_2| = |\pm 2| = 2$ दर्शित होगा।

22-8 योग–योग संख्या(a b)A श्रेढ़ी से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $A_r^2 * A_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[A_1^2 * A_2 + A_2^2 * A_3 + A_3^2 * A_4 - - - - + A_{n-2}^2 * A_{n-1} + A_{n-1}^2 * A_n + A_n^2 * A_{n+1}]$का

योग मान $= \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - A_1 * A_2(A_2 - A_1)]$

$= \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)]$ होगा।

प्रमाण– अवलोकन एवं विश्लेषण विधि द्वारा–

प्रक्रम 1• पदमान गणना–

पद 1 $= A_1^2 * A_2 = a^2 * b = a^2b$

पद 2 $= A_2^2 * A_3 = b^2 * (a + b) = ab^2 + b^3$

पद 3 $= A_3^2 * A_4 = (a + b)^2 * (a + 2b) = (a^2 + 2ab + b^2) * (a + 2b)$
$= a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + 2b^3$

पद 4 $= A_4^2 * A_5 = (a + 2b)^2 * (2a + 3b) = (a^2 + 4ab + 4b^2) * (2a + 3b)$
$= 2a^3 + 11a^2b + 20ab^2 + 12b^3$

पद 5 $= A_5^2 * A_6 = (2a + 3b)^2 * (3a + 5b) = (4a^2 + 12ab + 9b^2) * (3a + 5b)$
$= 12a^3 + 56a^2b + 87ab^2 + 45b^3$

पद 6 $= A_6^2 * A_7 = (3a + 5b)^2 * (5a + 8b) = (9a^2 + 30ab + 25b^2) * (5a + 8b)$
$= 45a^3 + 222a^2b + 365ab^2 + 200b^3$

पद 7 $= A_7^2 * A_8 = (5a + 8b)^2 * (8a + 13b) = (25a^2 + 80ab + 64b^2) * (8a + 13b)$
$= 200a^3 + 965a^2b + 1552ab^2 + 832b^3$

पद 8 $= A_8^2 * A_9 = (8a + 13b)^2 * (13a + 21b) = (64a^2 + 204ab + 169b^2) * (13a + 21b)$
$= 832a^3 + 4048a^2b + 6565ab^2 + 3549b^3$

प्रक्रम 2• पदांत तक योगमान गणना–

पद 1 तक योगमान $= a^2b$

पद 2 तक योगमान $= a^2b + ab^2 + b^3$

पद 3 तक योगमान $= a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + 3b^3$

पद 4 तक योगमान $= 3a^3 + 16a^2b + 26ab^2 + 15b^3$

पद 5 तक योगमान $= 15a^3 + 72a^2b + 113ab^2 + 60b^3$

पद 6 तक योगमान $= 60a^3 + 294a^2b + 478ab^2 + 260b^3$

पद 7 तक योगमान $= 260a^3 + 1259a^2b + 2030ab^2 + 1092b^3$

पद 8 तक योगमान $= 1092a^3 + 5307a^2b + 8595ab^2 + 4641b^3$

प्रक्रम 3• 2*(पदांत तक योगमान) गणना–

2*( पद 1 तक योगमान ) $= 2a^2b$

$2*(\text{ पद } 2 \text{ तक योगमान}) = 2a^2b + 2ab^2 + 2b^3$
$2*(\text{पद } 3 \text{ तक योगमान}) = 2a^3 + 10a^2b + 12ab^2 + 6b^3$
$2*(\text{पद } 4 \text{ तक योगमान}) = 6a^3 + 32a^2b + 52ab^2 + 30b^3$
$2*(\text{पद } 5 \text{ तक योगमान}) = 30a^3 + 144a^2b + 226ab^2 + 120b^3$
$2*(\text{पद } 6 \text{ तक योगमान}) = 120a^3 + 588a^2b + 956ab^2 + 520b^3$
$2*(\text{पद } 7 \text{ तक योगमान}) = 520a^3 + 2518a^2b + 4060ab^2 + 2184b^3$
$2*(\text{पद } 8 \text{ तक योगमान}) = 2184a^3 + 10614a^2b + 17190ab^2 + 9282b^3$

प्रक्रम 4• पद क्रमांक r से क्रमागत तीन पदों $A_r * A_{r+1} * A_{r+2}$का गुणनफल –

पद क्रमांक1 से– $A_1 * A_2 * A_3 = a * b * (a + b) = a^2b + ab^2$

पद क्रमांक2 से– $A_2 * A_3 * A_4 = b * (a + b) * (a + 2b) = a^2b + 3ab^2 + 2b^3$

पद क्रमांक3 से– $A_3 * A_4 * A_5 = (a + b) * (a + 2b) * (2a + 3b)$
$= 2a^3 + 9a^2b + 13ab^2 + 6b^3$

पद क्रमांक4 से– $A_4 * A_5 * A_6 = (a + 2b) * (2a + 3b) * (3a + 5b)$
$= 6a^3 + 31a^2b + 53ab^2 + 30b^3$

पद क्रमांक5 से– $A_5 * A_6 * A_7 = (2a + 3b) * (3a + 5b) * (5a + 8b)$
$= 30a^3 + 143a^2b + 227ab^2 + 120b^3$

पद क्रमांक6 से– $A_6 * A_7 * A_8 = (3a + 5b) * (5a + 8b) * (8a + 13b)$
$= 120a^3 + 587a^2b + 957ab^2 + 520b^3$

पद क्रमांक7 से– $A_7 * A_8 * A_9 = (5a + 8b) * (8a + 13b) * (13a + 21b)$
$= 520a^3 + 2517a^2b + 4061ab^2 + 2184b^3$

पद क्रमांक8 से– $A_8 * A_9 * A_{10} = (8a + 13b) * (13a + 21b) * (21a + 34b)$
$= 2184a^3 + 10613a^2b + 17191ab^2 + 9282b^3$

प्रक्रम 5• (प्रक्रम3)–( प्रक्रम 4)

=2*(पदांत rतक योगमान)–( पद क्रमांक r से क्रमागत तीन पदों$A_r * A_{r+1} * A_{r+2}$ का हलमान)

$2*(\text{ पद } 1 \text{ तक योगमान}) - (A_1 * A_2 * A_3) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 2 \text{ तक योगमान}) - (A_2 * A_3 * A_4) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 3 \text{ तक योगमान}) - (A_3 * A_4 * A_5) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 4 \text{ तक योगमान}) - (A_4 * A_5 * A_6) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 5 \text{ तक योगमान}) - (A_5 * A_6 * A_7) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 6 \text{ तक योगमान}) - (A_6 * A_7 * A_8) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 7 \text{ तक योगमान}) - (A_7 * A_8 * A_9) = a^2b + ab^2$
$2*(\text{ पद } 8 \text{ तक योगमान}) - (A_8 * A_9 * A_{10}) = a^2b + ab^2$

-------- -------- ------- ------- ---------- ---------- ---------

-------- -------- ------- ------- ---------- ---------- ---------

$2*(\text{ पद } n \text{ तक योगमान}) - (A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) = a^2b - ab^2$

निष्कर्ष

$2*(\text{ पद } n \text{ तक योगमान}) - (A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) = a^2b - ab^2 = -[ab(b - a)]$
$= -A_1 * A_2(A_2 - A_1)$ से

$\text{पद } n \text{ तक योगमान} = \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - A_1 * A_2(A_2 - A_1)]$

$=\frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)]$ होगा। प्रमाणित।

उक्त प्रमेय 22-8 के द्वारा–

1■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $F_r^2 * F_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[F_1^2 * F_2 + F_2^2 * F_3 + F_3^2 * F_4 - - - - + F_{n-2}^2 * F_{n-1} + F_{n-1}^2 * F_n + F_n^2 * F_{n+1}]$का योग मान $=\frac{1}{2}[(F_n * F_{n+1} * F_{n+2})]$ होगा।

2■ लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $L_r^2 * L_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[L_1^2 * L_2 + L_2^2 * L_3 + L_3^2 * F_4 - - - - + L_{n-2}^2 * L_{n-1} + L_{n-1}^2 * L_n + L_n^2 * L_{n+1}]$का योग मान $=\frac{1}{2}[(L_n * L_{n+1} * L_{n+2}) - 6]$ होगा।

22-9 योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $A_r * A_{r+1}^2$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[A_1 * A_2^2 + A_2 * A_3^2 + A_3 * A_4^2 + - - - - - + A_{n-2} * A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n^2 + A_n * A_{n+1}^2]$ का योग मान–

1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

योग मान $=\frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0\}]$ होगा।

2■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

योग मान $=\frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0]$ होगा।

प्रमाण– अवलोकन एवं विश्लेषण विधि द्वारा–

प्रक्रम 1• पदमान गणना–

पद 1 $= A_1 * A_2^2 = a * b^2 = ab^2$

पद 2 $= A_2 * A_3^2 = b * (a+b)^2 = b * (a^2 + 2ab + b^2) = a^2b + 2ab^2 + b^3$

पद 3 $= A_3 * A_4^2 = (a+b) * (a+2b)^2 = (a+b) * (a^2 + 4ab + 4b^2)$
$= a^3 + 5a^2b + 8ab^2 + 4b^3$

पद 4 $= A_4 * A_5^2 = (a+2b) * (2a+3b)^2 = (a+2b) * (4a^2 + 12ab + 9b^2)$
$= 4a^3 + 20a^2b + 33ab^2 + 18b^3$

पद 5 $= A_5 * A_6^2 = (2a+3b) * (3a+5b)^2 = (2a+3b) * (9a^2 + 30ab + 25b^2)$
$= 18a^3 + 87a^2b + 140ab^2 + 75b^3$

पद 6 $= A_6 * A_7^2 = (3a+5b) * (5a+8b)^2 = (3a+5b) * (25a^2 + 80ab + 64b^2)$
$= 75a^3 + 365a^2b + 592ab^2 + 320b^3$

पद 7 $= A_7 * A_8^2 = (5a+8b) * (8a+13b)^2 = (5a+8b) * (64a^2 + 208ab + 169b^2)$
$= 320a^3 + 1552a^2b + 2509ab^2 + 1352b^3$

पद 8 $= A_8 * A_9^2 = (8a+13b) * (13a+21b)^2 = (8a+13b) * (169a^2 + 546ab + 441b^2)$
$= 1352a^3 + 6565a^2b + 10626ab^2 + 6733b^3$

पद 9 $= A_9 * A_{10}^2 = (13a+21b) * (21a+34b)^2$
$= (13a+21b) * (441a^2 + 1428ab + 1156b^2)$
$= 5733a^3 + 27825a^2b + 45016ab^2 + 24276b^3$

पद 10 $= A_{10} * A_{11}^2 = (21a+34b) * (34a+55b)^2$
$= (21a+34b) * (1156a^2 + 3740ab + 3025b^2)$

$= 24276a^3 + 117844a^2b + 190685ab^2 + 102850b^3$

प्रक्रम 2• पदांत तक योगमान गणना–

पद 1 तक योगमान $= ab^2$

पद 2 तक योगमान $= a^2b + 3ab^2 + b^3$

पद 3 तक योगमान $= a^3 + 6a^2b + 11ab^2 + 5b^3$

पद 4 तक योगमान $= 5a^3 + 26a^2b + 44ab^2 + 23b^3$

पद 5 तक योगमान $= 23a^3 + 113a^2b + 184ab^2 + 98b^3$

पद 6 तक योगमान $= 98a^3 + 478a^2b + 776ab^2 + 418b^3$

पद 7 तक योगमान $= 418a^3 + 2030a^2b + 3285ab^2 + 1770b^3$

पद 8 तक योगमान $= 1770a^3 + 8595a^2b + 13911ab^2 + 7503b^3$

पद 9 तक योगमान $= 7503a^3 + 36420a^2b + 58927ab^2 + 31779b^3$

पद 10 तक योगमान $= 31779a^3 + 154264a^2b + 249612ab^2 + 134629b^3$

प्रक्रम 3• 2*(पदांत तक योगमान) गणना–

2*( पद 1 तक योगमान ) $= 2ab^2$

2*( पद 2 तक योगमान ) $= 2a^2b + 6ab^2 + 2b^3$

2*(पद 3 तक योगमान ) $= 2a^3 + 12a^2b + 22ab^2 + 10b^3$

2*(पद 4 तक योगमान ) $= 10a^3 + 52a^2b + 88ab^2 + 46b^3$

2*(पद 5 तक योगमान ) $= 46a^3 + 226a^2b + 368ab^2 + 196b^3$

2*(पद 6 तक योगमान ) $= 196a^3 + 956a^2b + 1552ab^2 + 836b^3$

2*(पद 7 तक योगमान ) $= 836a^3 + 4060a^2b + 6570ab^2 + 3540b^3$

2*(पद 8 तक योगमान ) $= 3540a^3 + 17190a^2b + 27822ab^2 + 15006b^3$

2*(पद 9 तक योगमान ) $= 15006a^3 + 72840a^2b + 117854ab^2 + 63558b^3$

2*(पद 10 तक योगमान ) $= 63558a^3 + 308528a^2b + 499224ab^2 + 269258b^3$

प्रक्रम 4• पद क्रमांक r के प्रति $A_{r+1}^2A_{r+2}$ का हल मान

पद 1 के प्रति $A_2^2A_3 = b^2(a+b) = ab^2 + b^3$

पद 2 के प्रति $A_3^2A_4 = (a+b)^2(a+2b) = (a^2 + 2ab + b^2) * (a+2b)$

$= a^3 + 4a^2b + 5ab^2 + 2b^3$

पद 3 के प्रति $A_4^2A_5 = (a+2b)^2(2a+3b) = (a^2 + 4ab + 4b^2) * (2a+3b)$

$= 2a^3 + 11a^2b + 20ab^2 + 12b^3$

पद 4 के प्रति $A_5^2A_6 = (2a+3b)^2(3a+5b) = (4a^2 + 12ab + 9b^2) * (3a+5b)$

$= 12a^3 + 56a^2b + 87ab^2 + 45b^3$

पद 5 के प्रति $A_6^2A_7 = (3a+5b)^2(5a+8b) = (9a^2 + 30ab + 25b^2) * (5a+8b)$

$= 45a^3 + 222a^2b + 365ab^2 + 200b^3$

पद 6 के प्रति $A_7^2A_8 = (5a+8b)^2(8a+13b) = (25a^2 + 80ab + 64b^2) * (8a+13b)$

$= 200a^3 + 965a^2b + 1552ab^2 + 832b^3$

पद 7 के प्रति $A_8^2A_9 = (8a+13b)^2(13a+21b)$

$= (64a^2 + 208ab + 169b^2) * (13a+21b)$

$= 832a^3 + 4048a^2b + 6565ab^2 + 3549b^3$

पद 8 के प्रति $A_9^2A_{10} = (13a+21b)^2(21a+34b)$

$= (169a^2 + 546ab + 441b^2) * (21a+34b)$

$= 3549a^3 + 17212a^2b + 27825ab^2 + 14994b^3$

पद 9 के प्रति $A_{10}^2 A_{11} = (21a + 34b)^2(34a + 55b)$

$= (441a^2 + 1428ab + 1156b^2) * (34a + 55b)$

$= 14994a^3 + 72807a^2b + 117844ab^2 + 63580b^3$

पद 10के प्रति $A_{11}^2 A_{12} = (34a + 55b)^2(55a + 87b)$

$= (1156a^2 + 3740ab + 3025b^2) * (55a + 89b)$

$= 63580a^3 + 308584a^2b + 499235ab^2 + 269225b^3$

प्रक्रम 5• विषम पद क्रमांक के प्रति [( प्रक्रम 3 का विषम पद क्रमांक) −( प्रक्रम 4 का विषम पद क्रमांक)]

=2*(पदांत रतक योगमान)−( पद क्रमांक r के प्रति $A_{r+1}^2 A_{r+2}$ का हल मान)

2*( पद1 तक योगमान ) − ( $A_2^2 A_3$) $= ab^2 - b^3$

$= [\{a(a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

$= [\{A_1 (a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

2*( पद3 तक योगमान ) − ( $A_4^2 A_5$) $= a^2b + 2ab^2 - 2b^3$

$= [\{(a+b)(a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

$= [\{A_3 (a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

2*( पद5 तक योगमान ) − ( $A_6^2 A_7$) $= a^3 + 4a^2b + 3ab^2 - 4b^3$

$= [\{(2a+3b)(a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

$= [\{A_5 (a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

2*( पद7 तक योगमान ) − ( $A_8^2 A_9$) $= 4a^3 + 12a^2b + 5ab^2 - 9b^3$

$= [\{(5a+8b)(a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

$= [\{A_7 (a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

2*( पद9 तक योगमान ) − ( $A_{10}^2 A_{11}$) $= 12a^3 + 33a^2b + 10ab^2 - 22b^3$

$= [\{(13a+21b)(a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

$= [\{A_9 (a^2 + ab - b^2)\} - \{(a + b)(a^2 + b^2) - 3ab^2\}]$

− − − −

$$= -[\{b(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$
$$= -[\{A_2(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$

2*( पद4 तक योगमान ) − ( $A_5^2A_6$) = $-[2a^3+4a^2b-ab^2-b^3]$

$$= -[\{(a+2b)(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$
$$= -[\{A_4(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$

2*( पद6 तक योगमान ) − ( $A_7^2A_8$) = $-[4a^3+9a^2b-0ab^2-4b^3]$

$$= -[\{(3a+5b)(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$
$$= -[\{A_6(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$

2*( पद8 तक योगमान ) − ( $A_9^2A_{10}$) = $-[9a^3+22a^2b+3ab^2-12b^3]$

$$= -[\{(8a+13b)(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$
$$= -[\{A_8(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$

2*( पद10 तक योगमान ) − ( $A_{11}^2A_{12}$) = $-[22a^3+56a^2b+11ab^2-33b^3]$

$$= -[\{(21a+34b)(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$
$$= -[\{A_{10}(a^2+ab-b^2)\}+\{(a+b)(a^2+b^2)-3ab^2\}]$$

− − − −

**22-10** योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $A_r * A_{r+1} * A_{r+2}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 + A_4 * A_5 * A_6 - - - - - - - - - - A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1} + A_n * A_{n+1} * A_{n+2}]$ का योगमान–

1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

$\frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}^2\} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 * A_2 * A_3]$ होगा।

2■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

$\frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}^2\} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 * A_2 * A_3]$ होगा।

प्रमाण– प्रमेय 21-8 एवं 21-9 से का अनुप्रयोग–

प्रमाणित हो चुका है। –

1■ प्रमय 21-8 के तहत् पदों की संख्या n केविषम एवं सम दोनों मानों के प्रति–

$\{(A_1^2 * A_2 + A_2^2 * A_3 + A_3^2 * A_4 - - - - + A_{n-2}^2 * A_{n-1} + A_{n-1}^2 * A_n + A_n^2 * A_{n+1}) = \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)]$ एवं

2■ प्रमय 20-9 केतहत्

$[A_1 * A_2^2 + A_2 * A_3^2 + A_3 * A_4^2 + - - - - + A_{n-2} * A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n^2 + A_n * A_{n+1}^2]$ का योग मान–

1• श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

योग मान $= \frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0]$ होगा।

2•श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

योग मान $= \frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0]$ होगा।

प्रक्रम 1• श्रेढ़ी का r वाँ पद $= A_r * A_{r+1} * A_{r+2}$

$= A_r * A_{r+1}(A_r + A_{r+1}) = A_r^2 * A_{r+1} + A_r * A_{r+1}^2$

$\therefore [A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 + A_4 * A_5 * A_6 - - - - - - - - - - A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1} + A_n * A_{n+1} * A_{n+2}]$ का योगमान $=$

$[\{(A_1^2 * A_2 + A_2^2 * A_3 + A_3^2 * A_4 - - - - + A_{n-2}^2 * A_{n-1} + A_{n-1}^2 * A_n + A_n^2 * A_{n+1}] +$

$[A_1 * A_2^2 + A_2 * A_3^2 + A_3 * A_4^2 + - - - - + A_{n-2} * A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n^2 + A_n * A_{n+1}^2]$ कायोग मान–

1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

योग मान $= \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)] +$

$\frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0]$

$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}(A_n + A_{n+1})\} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 A_2(A_2 + A_1)]$

$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}^2\} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 * A_2 * A_3]$ होगा। प्रमाणित।

2■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

योग मान $= \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)] +$

$\frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0]$

$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}(A_n + A_{n+1})\} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 A_2(A_2 + A_1)]$

$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1} * A_{n+2}^2\} - \{(A_n + A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_0 * A_2 * A_3]$ होगा। प्रमाणित।

उक्त प्रमेय 21-10 के द्वारा–

1■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $F_r * F_{r+1} * F_{r+2}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$$[F_1 * F_2 * F_3 + F_2 * F_3 * F_4 + F_3 * F_4 * F_5 + - - - - + F_{n-2} * F_{n-1} * F_n + F_{n-1} * F_n * F_{n-1} + F_n * F_{n+1} * F_{n+2}]$$ का योग मान

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[F_{n+1*}F_{n+2}^2 + (F_n - 1)]$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[F_{n+1*}F_{n+2}^2 - (F_n + 1)]$ होगा।

2■ लुकस संख्या श्रेढ़ी (13)L से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $L_r * L_{r+1} * L_{r+2}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$$[L_1 * L_2 * L_3 + L_2 * L_3 * L_4 + L_3 * L_4 * L_5 + - - - - + L_{n-2} * L_{n-1} * L_n + L_{n-1} * L_n * L_{n-1} + L_n * L_{n+1} * L_{n+2}]$$ का योग पदों की

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[L_{n+1*}L_{n+2}^2 - (5L_n + 19)]$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[L_{n+1*}L_{n+2}^2 + (5L_n - 19)]$ होगा।

**21-11** योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $A_r^3$ होने के प्रति प्राप्त श्रेढ़ी $A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + - - - - + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^{*3}]$ का योगमान–

प्रथम प्रतिरूपण

1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–योग मान

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + (A_{n-1} + 3A_1 - A_2) * (A_1 * A_2 - A_0 * A_3) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$ होगा।

2 ■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–योग मान

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + (A_{n-1} - 3A_1 + A_2) * (A_1 * A_2 - A_0 * A_3) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$ होगा।

**प्रमाण** प्रमेय 21-6 के द्वारा प्रमाणित प्रमेय (3), प्रमेय 21-4 एवं प्रमेय 21-10 का अनुप्रयोग–

**प्रक्रम 1•** प्रमेय 20-6 के द्वारा प्रमाणित प्रमेय (3) से

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$$A_{n+1}^2 - A_2(A_2 - A_1) = A_n * A_{n+2} - A_1^2$$
$$\Rightarrow A_{n+1}^2 - A_2^2 + A_1 * A_2 = A_n * A_{n+2} - A_1^2$$
$$\Rightarrow A_{n+1}^2 = A_n * A_{n+2} - (A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2)$$
$$\Rightarrow A_{n+1}^2 = A_n * A_{n+2} - K\,\Psi$$

**Ψ K** $= (A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2) = (A_1 * A_2 - A_0 * A_3)$ के **सापेक्ष** $(A_0 * A_1 - A_{\bar{1}} * A_2)$ का हल मान K का योज्य प्रतिलोम $\bar{K} = (-K)$ ;होगा।

**प्रमाण**– योग–योग संख्या श्रेढ़ी (a b)A के प्रति–

$A_1 * A_2 - A_0 * A_3 = a * b - (b - a) * (b + a) = a^2 + ab - b^2$

2• $A_0 * A_1 - A_{\bar{1}} * A_2 = (b - a) * a - (2a - b) * b = -a^2 - ab + b^2 = -(a^2 + ab - b^2) = -k$

1• एवं 2• से प्रमाणित।

$\Rightarrow A^3_{n+1} = A_n * A_{n+1} * A_{n+2} - K * A_{n+1} \quad - - - - (1)$ **एवं**

2■ **पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति–**

$$A^2_{n+1} - A^2_1 = A_n * A_{n+2} - A_2(A_2 - A_1)$$
$$\Rightarrow A^2_{n+1} - A^2_1 = A_n * A_{n+2} - A^2_2 + A_1 * A_2$$
$$\Rightarrow A^2_{n+1} = A_n * A_{n+2} + (A^2_1 + A_1 * A_2 - A^2_2)$$
$$\Rightarrow A^2_{n+1} = A_n * A_{n+2} + K$$
$$\Rightarrow A^3_{n+1} = A_n * A_{n+1} * A_{n+2} + K * A_{n+1} \quad - - - - (2)$$ **प्रमाणित होगा।**

**प्रक्रम 2•** प्रक्रम 1 से प्राप्त समिका (1) में $n =$ क्रमशः 1,3,5,7 -------- विषम संख्या एवं
समिका (2) में $n =$ क्रमश 0,2,4,6,8- - ---- सम संख्या के प्रतिस्थापन से–

समिका (2) में $n = 0$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_1 = A_0 * A_1 * A_2 + K * A_1$
समिका (1) में $n = 1$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_2 = A_1 * A_2 * A_3 - K * A_2$
समिका (2) में $n = 2$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_3 = A_2 * A_3 * A_4 + K * A_3$
समिका (1) में $n = 3$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_4 = A_3 * A_4 * A_5 - K * A_4$

समिका (2) में $n = 4$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_5 = A_4 * A_5 * A_6 + K * A_5$
समिका (1) में $n = 5$ के प्रतिस्थापन से–$A^3_{n+1} = A^3_6 = A_5 * A_6 * A_7 - K * A_6$

--- --- --- --- --- ---

--- --- --- --- --- ---

उपरोक्त विस्तार से– $[A^3_1 + A^3_2 + A^3_3 + - - - - - + A^3_{n-2} + A^3_{n-1} + A^3_n] =$

$$[\{A_0 * A_1 * A_2 + A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 \quad - - - - -$$
$$- - - A_{n-3} * A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1}\}$$
$$+K\{A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \quad - - - - - n \text{ पद तक}\}]$$ का हल मान होगा।

जिसके हल मान के लिये– **प्रमेय 20-4 से**

$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \quad - - - - - n$ पद तक हल मान

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $[(2A_1 - A_2) + A_{n-1}]$

2■ पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $[(2A_1 - A_2) - A_{n-1}]$ प्रमाणित है।

**प्रमेय 21-10 से** $\{A_0 * A_1 * A_2 + A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 \quad - - - - -$
$- - - A_{n-3} * A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1}\}$ n पद तक हल मान

**1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–**

$$\frac{1}{2}[A_n * A^2_{n+1} + \{(A_{n-1} - A_0)(A_0 * A_1 - A_{\bar{1}} * A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$$
$$= \frac{1}{2}[A_n * A^2_{n+1} - K(A_{n-1} - A_0) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$$ प्रमाणित होगा।

**2■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–**

$$\frac{1}{2}[A_n * A^2_{n+1} + \{(A_{n-1} - A_0)(A_0 * A_1 - A_{\bar{1}} * A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$$
$$= \frac{1}{2}[A_n * A^2_{n+1} + K(A_{n-1} + A_0) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$$प्रमाणित होग

प्रमेय 21-4 एवं 21-10 से प्राप्त मानों को विस्तारित समिका–

$[A^3_1 + A^3_2 + A^3_3 + - - - - - + A^3_{n-2} + A^3_{n-1} + A^3_n] =$

$$[\{A_0 * A_1 * A_2 + A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 \quad - - - - -$$
$$- - - A_{n-3} * A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1}\}$$
$$+K\{A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \quad - - - - - n \text{ पद तक}\}]$$ में प्रतिस्थापन से

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या में होने के प्रति–

$[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + - - - - - + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^3]$ का योगमान

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 - K(A_{n-1} - A_0) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2] + K[(2A_1 - A_2) + A_{n-1}]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 - K(A_{n-1} - A_0) + 2K(2A_1 - A_2 + A_{n-1}) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + K(A_{n-1} + A_0 + 4A_1 - 2A_2) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + K(A_{n-1} + 3A_1 - A_2) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + (A_{n-1} + 3A_1 - A_2) * (A_1 * A_2 - A_0 * A_3) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

2■ पदों की संख्या n सम संख्या में होने के प्रति11

$[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + - - - - - + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^3]$ का योगमान

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + K(A_{n-1} + A_0) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2] + K[(2A_1 - A_2) - A_{n-1}]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + K(A_{n-1} + A_0) + 2K(2A_1 - A_2 - A_{n-1}) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 - K(A_{n-1} - A_0 - 4A_1 + 2A_2) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

$= \frac{1}{2}[A_n * A_{n+1}^2 + (A_{n-1} - 3A_1 + A_2) * (A_1 * A_2 - A_0 * A_3) - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$

उक्त प्रमेय 21-11 के प्रथम प्रतिरूपण द्वारा–

1■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $F_r^3$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[F_1^3 + F_2^3 + F_3^3 + - - - - - + F_{n-2}^3 + F_{n-1}^3 + F_n^3]$ का योगमान

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[F_n * F_{n+1}^2 + (F_{n-1} + 1)]$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[F_n * F_{n+1}^2 - (F_{n-1} - 1)]$ होगा।

2■ लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $L_r^3$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + - - - - - + L_{n-2}^3 + L_{n-1}^3 + L_n^3]$ का योगमान

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[L_n * L_{n+1}^2 - (5L_{n-1} - 3)]$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $\frac{1}{2}[L_n * L_{n+1}^2 + (5L_{n-1} + 3)]$ होगा।

द्वितीय प्रतिरूपण–

$[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + - - - - + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^3]$ का योगमान–

1■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–योग मान

$= \frac{1}{2}[\{A_{n-1} * A_{n+1} * A_{n+2}\} + K\{(A_{n-1} + A_{n+1}) + (3A_1 - A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$ होगा।

2 ■ श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–योग मान

$= \frac{1}{2}[\{A_{n-1} * A_{n+1} * A_{n+2}\} - K\{(A_{n-1} + A_{n+1}) - (3A_1 - A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$ होगा।

जहाँ $K = (A_1 * A_2 - A_0 * A_3)$ है।

**प्रमाण**

**प्रथम प्रतिरूपण से–**

$$[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + \ - \ - - - - \ - \ + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^3] =$$
$$[\{A_0 * A_1 * A_2 + A_1 * A_2 * A_3 + A_2 * A_3 * A_4 + A_3 * A_4 * A_5 \ - - - - -$$
$$- \ - \ - A_{n-3} * A_{n-2} * A_{n-1} + A_{n-2} * A_{n-1} * A_n + A_{n-1} * A_n * A_{n+1}\}$$
$$+K\{(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \ - - - - - \text{n पद तक}\}]\text{का हल मान होगा। में–}$$

(1) $*A_{r-1} * A_r * A_{f+1} = \ (A_{f+1} - A_r)A_r * A_{f+1} = A_r * A_{r+1}^2 - A_r^2 * A_{r+1}$ का प्रतिरूपण

(2) **प्रमेय 21-4 से**

$A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \ - - - - - \text{n पद तक}$ हल मान

1■ iदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति– $[(2A_1 - A_2) + A_{n-1}]$

2■ पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति– $[(2A_1 - A_2) - A_{n-1}]$ प्रमाणित है।

(3) **प्रमेय 21-8 से**

$[A_1^2 * A_2 + A_2^2 * A_3 + A_3^2 * A_4 - - - - + A_{n-2}^2 * A_{n-1} + A_{n-1}^2 * A_n + A_n^2 * A_{n+1}]$का योग मान

$$= \frac{1}{2}[(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - \ (A_0 * A_1 * A_2)] \text{ होगा।}$$

(4) **प्रमेय 21-9 से**

$[A_1 * A_2^2 + A_2 * A_3^2 + A_3 * A_4^2 \ + \ - \ - \ - \ - + A_{n-2} * A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n^2 + A_n * A_{n+1}^2]$ का योग मान–

1■ पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

योग मान $= \frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} + \{(A_n - A_1)(A_1 * A_2 - A_0 * A_3)\} - A_2^2 * A_0\}]$

$= \frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} + K(A_n - A_1) - A_2^2 * A_0\}]$ होगा।

2■ **श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–**

योग मान $= \frac{1}{2}[A_{n+1}^2 * A_{n+2} - K(A_n + A_1) - A_2^2 * A_0]$ होगा।

**के प्रतिस्थापन स्वरूपण से**

$$[A_1^3 + A_2^3 + A_3^3 + \ - \ - - - - \ - \ + A_{n-2}^3 + A_{n-1}^3 + A_n^3] =$$
$$[\{(A_1 * A_2^2 + A_2 * A_3^2 + A_3 * A_4^2 \ + \ - \ - \ - \ - + A_{n-2} * A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n^2 + A_n * A_{n+1}^2) - (A_1^2 *$$
$$A_2 + A_2^2 * A_3 + A_3^2 * A_4 - - - - + A_{n-2}^2 * A_{n-1} + A_{n-1}^2 * A_n + A_n^2 * A_{n+1})\} + K\{(A_1 -$$
$$A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + A_7 \ - - - - - \text{n पद तक}\}] \ \textbf{होगा। जिसका हल मान}$$

1■ **श्रेढ़ी में पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–**

$$[\frac{1}{2}\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} + K(A_n - A_1) - A_2^2 * A_0\} - \frac{1}{2}\{(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)\}$$
$$+K\{\ (2A_1 - A_2) + A_{n-1}\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} + K(A_n - A_1) - A_2^2 * A_0\} - \{(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)\} +$$
$$2K\{\ (2A_1 - A_2) + A_{n-1}\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} - A_n * A_{n+1} * A_{n+2}\} + K\{(A_n - A_1) + (4A_1 - 2A_2 + 2A_{n-1})\}$$
$$-\{A_0 * A_1 * A_2 + A_2^2 * A_0\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n-1} * A_{n+1} * A_{n+2}\} + K\{(A_{n-1} + A_{n+1}) + (3A_1 - A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2] \quad \text{प्रमाणित।}$$

2■ **श्रेढ़ी में पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–**

$$[\frac{1}{2}\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} - K(A_n + A_1) - A_2^2 * A_0\} - \frac{1}{2}\{(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)\}$$
$$+K\{(2A_1 - A_2) - A_{n-1}\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} - K(A_n + A_1) - A_2^2 * A_0\} - \{(A_n * A_{n+1} * A_{n+2}) - (A_0 * A_1 * A_2)\} +$$
$$2K\{(2A_1 - A_2) - A_{n-1}\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n+1}^2 * A_{n+2} - A_n * A_{n+1} * A_{n+2}\} - K\{(A_n + A_1) - (4A_1 - 2A_2 - 2A_{n-1})\}$$
$$-\{A_0 * A_1 * A_2 + A_2^2 * A_0\}]$$
$$= \frac{1}{2}[\{A_{n-1} * A_{n+1} * A_{n+2}\} - K\{(A_{n-1} + A_{n+1}) - (3A_1 - A_2)\} - A_{\bar{1}} * A_1 * A_2]$$ प्रमाणित

उक्त प्रमेय **21-11** के द्वितीय प्रतिरूपण द्वारा–

1■ फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(1\ 1)F$ से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $F_r^3$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[F_1^3 + F_2^3 + F_3^3 + \ - \ - - - - \ - \ + F_{n-2}^3 + F_{n-1}^3 + F_n^3]$ का योगमान

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

$$\frac{1}{2}[F_{n-1} * F_{n+1} * F_{n+2} + (F_{n-1} + F_{n+1} + 1)]$$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

$$\frac{1}{2}[F_{n-1} * F_{n+1} * F_{n+2} - (F_{n-1} + F_{n+1} - 1)]$$ होगा।

2■ लुकस संख्या श्रेढ़ी $(1\ 3)L$ से विस्तारित n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $L_r^3$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[L_1^3 + L_2^3 + L_3^3 + \ - \ - - - - \ - \ + L_{n-2}^3 + L_{n-1}^3 + L_n^3]$ का योगमान

(1) पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

$$\frac{1}{2}[L_{n-1} * L_{n+1} * L_{n+2} - 5(L_{n-1} + L_{n+1}) + 3]$$ होगा।

(2) पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

$$\frac{1}{2}[L_{n-1} * L_{n+1} * L_{n+2} + 5(L_{n-1} + L_{n+1}) + 3]$$ होगा।

----------22----------

# अध्याय–23
## गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी
## ( अद्वितीय स्वर्णानुपातिक योग–योग संख्या श्रेढ़ी)

23-1 अध्याय **15** में समांतर चतुर्भुज दर्शन एवं विलोपन अध्ययन क्रम में योग–योग संख्या श्रेढ़ी (पद क्रमांक $\mathbf{r \geq 3}$ के प्रति प्रत्येक पदमान अपने पूर्व के दो पदमानों का योगमान होता है।) प्राप्त किया गया है । जिसके सरल विस्तार में

1. फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1) F का सरल विस्तार [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 21, 34, 55 - - - - - - - -]
2. लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3) L का सरल विस्तार [1, 3, 4, 7 11, 18, 29, 47, 76 . 123, - - - - - - - -]
3. बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (a b ) A का सरल विस्तार [a, b, (a+b), (a+2b), (2a+3b), (3a+5b), (5a+8b), (8a+13b), (13a+21b), - - - - - - ] दर्शित है।

इनके प्रति यह भी विदित कराया है कि – पद क्रमांक r के बढ़ते मानों के क्रमागत दो अवयव (r+1)वाँ एवँ r वाँ पदमान का मानक अनुपात – [(r+1) वाँ पदमान ]:[ r वाँ पदमान ] का हलमान **स्वर्णानुपात** ($\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339$) के निकटतर होने की ओर अग्रसर होता है।

### गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी

श्रेढ़ी अध्ययन विकास क्रम में फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के अचयवं संयोजन से ऐसे संख्या श्रेढ़ी से परिचित होने जा रहे है जिसका rवाँ पदमान ($L_{r-1} + \sqrt{5} * F_{r-1}$) होगा। जो श्रेढ़ी विस्तार में योग–योग श्रेढ़ी होने के साथ स्वर्णानुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **के** सर्वानुपात में गुणोत्तर श्रेढ़ी भी होता है। अतः गुणोत्तर सह योग–योग सख्य श्रेढ़ी नाम से परिभाषित करना यथेष्ठ होगा। **सख्या जगत में यह** गुणोत्तर **सह योग–योग संख्य श्रेढी केवल और केवल अद्वितीय स्वर्णानुपातिक सर्वानुपात की स्वर्णिक श्रेढ़ी ही सिद्ध होगा।**

### अध्ययन संकेत और विस्तार–

**1■योग–योग संख्या श्रेढ़ी के दृष्टि में–**

अध्ययन संकेत– [ 2 $(1 + \sqrt{5})$]M **प्रथम पद** $\mathbf{= M_1 = 2, = (L_0 + \sqrt{5} * F_0)}$

**दूसरा पद** $\mathbf{= M_2 =} (1 + \sqrt{5}) = \mathbf{(L_1 + \sqrt{5} * F_1)}$ **तीसरा पद** $\mathbf{M_3 =} (3 + \sqrt{5}) = \mathbf{(L_2 + \sqrt{5} * F_2)}$ **-------**

**– n वाँपद** $\mathbf{= M_n} = (\mathbf{L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1}})$

श्रेढ़ी विस्तार–$[M_1, M_2, , M_3, , M_4, . M_5, , M_6, - - - - - M_n]$ के प्रति क्रमशः–

$\mathbf{[2, (1 + \sqrt{5}), (3 + \sqrt{5}), (4 + 2 * \sqrt{5}), (7 + 3 * \sqrt{5}), (11 + 5 * \sqrt{5})}$--------

$\mathbf{(L_{r-1} + \sqrt{5} * F_{r-1}),}$ ---------- $\mathbf{(L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1})\ ]}$

**2■गुणोत्तर संख्या श्रेढ़ी के दृष्टि में–**

अध्ययन संकेत **प्रथम पद** $\mathbf{= a = 2}$ **सर्वानुपात** $\mathbf{r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ **n वाँपद** $\mathbf{= M_n = 2 * r^{n-1}}$

श्रेढ़ी विस्तार–

$[M_1, M_2, , M_3, , M_4, . M_5, , M_6, - - - - - M_n]$ के प्रति क्रमशः–

$\mathbf{[2 * r^0\ \ 2 * r^1, 2 * r^2, - - - - - - - 2 * r^{n-3}\ \ 2 * r^{n-2}, 2 * r^{n-1}]}$

**उपरोक्त विश्लेषण के तहत् गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी का n वाँपद**

$\mathbf{= M_n = 2 * r^{n-1} = 2 * [\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^{n-1} = (L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1})}$ **स्पष्टतः सिद्ध होता है।**

गुणोत्तर सह यो'ग–योग संख्या श्रेझी के प्रतिरूपण में है।

### श्रेढ़ी के प्रगुण प्रमेय–

**प्रमेय–1■ श्रेढ़ी का स्वर्णानुपातिक सर्वानुपात की गुणोत्तर श्रेढ़ी होने विषयक।**

क्रमागत दो अवयव rवाँ एवं (r+1)वाँ पदमान के प्रति – [(r+1) वाँ पदमान ]:[ r वाँ पदमान ] का हलमान **स्वर्णानुपात** ($\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339$) होता है। अर्थात $\frac{M_{r+1}}{M_r} = \frac{L_r + \sqrt{5} * F_r}{L_{r-1} + \sqrt{5} * F_{r-1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **(स्वर्णानुपात)**

प्रमाणन के संदर्भ प्राप्त अभिगृहीत–

(1) $\mathbf{L_r = F_{r-2} + 3F_{r-1} = F_r + 2F_{r-1} = F_{r+1} + F_{r-1}}$

**(2)** योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के तुल्य कमांक में अवयव के वर्ग मानों के प्रति –

**1•** r = 0, 2, 4 , 6, 8 ,10 ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ होगा।

**2•** r=1 , 3 ,5 , 7 ,9, 11 -------- (विषम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ होगा।

अध्याय 15 अनुच्छेद 15.9 2■पृष्ठ 270

**(3)** योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के तुल्य कमांक में दो क्रमागत अवयव के गुणनफल मानों के प्रति –

**1•** r = 0, 2, 4 , 6 8 ,10 ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2}$ होगा।

**2•** r=1 , 3 ,5 , 7 ,9, 11 ----- (विषम मानो) के प्रति $\mathbf{L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \bar{2}}$ होगा।

अध्याय 15 अनुच्छेद 15.9 3■पृष्ठ 271

**(4)** फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (1 ,1)F और लुकस संख्या श्रेढ़ी (1 ,3)L के प्रति–तुल्यता साम्य समीकरण –

1• पद मान r के सम संख्या हौने के प्रति– $L_{r+1} * F_r - F_{r+1} * L_r = \bar{2}$ होगा।

2• पद मान r के विषम संख्या हौने के प्रति– $L_{r+1} * F_r - F_{r+1} * L_r = 2$ होगा।

अध्याय 21 पृष्ठ 326

ध्यानाकर्षण r सम संख्या होने के प्रति (r+1) एवं (r−1) विषम संख्या होगा
r विषम संख्या होने के प्रति (r+1) एवं (r−1) सम संख्या होगा ।

प्रमाण $\frac{M_{r+1}}{M_r} = \frac{L_r+\sqrt{5}*F_r}{L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}}$

$= \frac{L_r+\sqrt{5}*F_r}{L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}} * \frac{L_{r-1}-\sqrt{5}*F_{r-1}}{L_{r-1}-\sqrt{5}*F_{r-1}}$

$= \frac{[L_r*L_{r-1}-5*F_r*F_{r-1}]-\sqrt{5}[F_{r-1}*L_r-L_{r-1}*F_r]}{[L_{r-1}^2-5*F_{r-1}^2]}$

पद क्रमांक r सम संख्या होने के प्रति पद क्रमांक (r-1) विषम संख्या होगा। अतः

$\frac{M_{r+1}}{M_r} = A = \frac{[\bar{2}]+\sqrt{5}[\bar{2}]}{\bar{4}} = \frac{\bar{2}[1+\sqrt{5}]}{\bar{4}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (स्वर्णानुपात) प्रमाणित।

पद क्रमांक r विषम संख्या होने के प्रति पद क्रमांक(r-1) ' (r−1) सम संख्या होगा। अतः

$\frac{M_{r+1}}{M_r} = A = \frac{[2]+\sqrt{5}[2]}{4} = \frac{2[1+\sqrt{5}]}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (स्वर्णानुपात) प्रमाणित।

ध्यानाकर्षण $\frac{M_{r+1}}{M_r}$ का प्रतिलोमानुपात या गुणनप्रतिलोम $= \frac{M_r}{M_{r+1}} = A^{\bar{1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ का प्रतिलोमानुपात या गुणनप्रतिलोम $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ होगा।

अथवा सरल गणितीय प्रमाण

ज्ञात है कि– योग–योग संख्या श्रेढ़ी – $\mathbf{A_1, A_2, A_3 - - - -A_{n-2}, A_{n-1}, A_n}$ का प्रथम पद $\boldsymbol{A_1 = a}$ और द्वितीय पद $\mathbf{A_2 = b}$ होने के प्रति श्रेढी विस्तार

a, b, (a+b),(a+2b)------− − का r वाँपद $(a*F_{r-2} + b*F_{1-1})$ होगा।

तब योग–योग संख्या श्रेढ़ी – $\mathbf{A_1, A_2, A_3 - - - -A_{n-2}, A_{n-1}, A_n}$ को गुणोत्तर श्रेढ़ी ∴ $[M_1, M_2, , M_3, , M_4, . M_5, , M_6, - - - - -M_n]$ के प्रतिरूपण में लिये जाने पर–

गुणोत्तर श्रेढ़ी अनुपात नियम से सर्वानुपात $k = \frac{M_{r+1}}{M_r} = \frac{M_2}{M_1}$ होगा ।

$\therefore k = \frac{M_3}{M_2} = \frac{M_{r+1}}{M_r} \Rightarrow k = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_{r+1}}{A_r} \Rightarrow k = \frac{b}{a} = \frac{aF_{r-1}+bF_r}{aF_{r-2}+bF_{r-1}}$

$\Rightarrow k = \frac{aF_{r-1}+akF_r}{aF_{r-2}+akF_{r-1}} = \frac{F_{r-1}+kF_r}{F_{r-2}+kF_{r-1}}$ b=ak के प्रतिस्थापन बाद a का विलोपन से ।

$\Rightarrow k^2F_{r-1} - k(F_r - F_{r-2}) - F_{r-1} = 0 \Rightarrow k^2F_{r-1} - kF_{r-1} - F_{r-1} = 0$

$\Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$ के प्रति–

$k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ स्वर्णानुपात और $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (स्वर्णानुपात के गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का योज्य प्रतिलोम ) होगा।

धनात्मक श्रेढ़ी विस्तार के प्रति सर्वानुपात $k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ स्वर्णानुपात मान्य होगा।

टतः गुणोत्तर / योग–योग श्रेढो का प्रथम पद $M_1 / (A_1 = a) = 2$

द्वितीय पद $M_2 / (A_2 = b) = (\sqrt{5}+1)$

गुणोत्तर श्रेढी का r वाँ पद $= M_1 * k^{r-1} = 2*(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{r-1} =$ योग–योग श्रेढ़ी का r वाँ पद $A_r$

$= \{A_1 *F_{r-2} + A_2 *F_{r-1}\}$

$= \{2F_{r-2} + (\sqrt{5}+1) *F_{r-1}\}$

$= [\{2F_{r-2} + F_{r-1}) + \sqrt{5} *F_{r-1}]$

$= [\{F_{r-2} + F_r) + \sqrt{5} *F_{r-1}]$

$= [L_{r-1} + \sqrt{5} *F_{r-1}]$ प्रमाणित

**ध्यानार्कण–** $k = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (स्वर्णानुपात के गुणन प्रतिलोम $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ का योज्य प्रतिलोम के प्रति–

गुणोत्तर / योग–योग श्रेढ़ी का प्रथम पद $M_1 / (A_1 = a) = 2$

द्वितीय पद $M_2 / (A_2 = b) = (1 - \sqrt{5})$

गुणोत्तर श्रेढी का r वाँ पद $= M_1 * k^{r-1} = 2*(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{r-1} =$ योग–योग श्रेढ़ी का r वाँ पद $A_r$

$= \{A_1 *F_{r-2} + A_2 *F_{r-1}\}$

$= \{2F_{r-2} + (1-\sqrt{5}) *F_{r-1}\}$

$= [\{2F_{r-2} + F_{r-1}) - \sqrt{5} *F_{r-1}]$

$= [\{F_{r-2} + F_r) - \sqrt{5} *F_{r-1}]$

$= [L_{r-1} - \sqrt{5} *F_{r-1}]$ प्रमाणित होगा

श्रो कि– r के सम मानों कें प्रति ऋणात्मक तथा r **के विषम** मानों कें प्रति **धनात्मक** हल देगा।

**प्रमेय–2■** $(x-r) \geq 2$ होने के प्रति $\frac{M_x}{M_r} = A = \frac{M_{x-r+1}}{2}$ होगा।

**प्रमाणन के सदर्भ में प्राप्त समिका–**

**(1)** योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के तुल्य क्रमांक में अवयव के वर्ग मानों के प्रति –

**1•** $r = 0, 2, 4, 6\ 8, 10$ ----- ( 0 और सम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ होगा।

**2•** $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ -------- ( विषम मानो) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ होगा।

अध्याय 15 अनुच्छेद 15.9 2■पृष्ठ 270

**(2)** $(r < x)$ के प्रति योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग–याग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के rवें और xवें क्रमांक के युग्मीय अवयव के $(F_r, L_r)$ और $(F_x, L_x)$ के प्रति –

| r | X | $L_x * L_r - 5 * F_x * F_r$ का हलमान | $L_x * F_r - F_x * L_r$ का हलमान |
|---|---|---|---|
| विषम | विषम | $\bar{2} * L_{x-r}$ | $2 * F_{x-r}$ |
| सम | सम | $2 * L_{x-r}$ | $\bar{2} * F_{x-r}$ |
| विषम | सम | $2 * L_{x-r}$ | $\bar{2} * F_{x-r}$ |
| सम | विषम | $\bar{2} * L_{x-r}$ | $2 * F_{x-r}$ |

अध्याय 15 अनुच्छेद 15.9 4■पृष्ठ 271

प्रमाण– बाँया पक्ष $= \frac{M_x}{M_r} = A = \frac{L_{x-1}+\sqrt{5}*F_{x-1}}{L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}} = \frac{L_{x-1}+\sqrt{5}*F_{x-1}}{L_{r-1}+\sqrt{5}*F_{r-1}} * \frac{L_{r-1}-\sqrt{5}*F_{r-1}}{L_{r-1}-\sqrt{5}*F_{r-1}}$

$= \frac{(L_{x-1}*L_{r=1}-5*F_{x-1}*F_{r-1})-\sqrt{5}*(L_{x-1}*F_{r-1}-F_{x-1}*L_{r-1})}{L_{r-1}^2-5*F_{r-1}^2}$ हल समिका होगा।

उक्त हल समिका में प्रमाणन के सदर्भ समिका से प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर उभयनिष्ट हल मान $= \frac{2*L_{x-r}+2*\sqrt{5}*F_{x=r}}{4} = \frac{L_{x-r}+\sqrt{5}*F_{x-r}}{2} = \frac{M_{x-r+1}}{2}$ –प्रमाणित होगा।

प्रमेय–3■ दो क्रमागत अवयव के प्रति–

$M_x^2 + M_x * M_{x+1} - M_{x+1}^2 = 0$ होगा।

प्रमाण– बाँया पक्ष $= M_x^2 + M_x * M_{x+1} - M_{x+1}^2$

$= M_x * M_{x+1}[\frac{M_x}{M_{x+1}} + 1 - \frac{M_{x+1}}{M_x}]$

$= M_x * M_{x+1}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$ प्रमेय 1 के अनुसार

$= M_x * M_{x+1}[1 - (\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})]$

$= M_x * M_{x+1}[1 - (1)]$ स्वर्णानुपात एवं उसके गुणन प्रतिलोम के अन्तर मान=1

$= M_x * M_{x+1}[0] = 0 =$ दाँया पक्ष प्रमाणित।

प्रमेय–4■ तीन क्रमागत अवयव के प्रति–

$M_{x+1}^2 - M_x * M_{x+2} = 0$ होगा।

प्रमाण– बाँया पक्ष $= M_{x+1}^2 - M_x * M_{x+2}$

$= M_x * M_{x+2}[\frac{M_{x+1}}{M_x} * \frac{M_{x+1}}{M_{x+2}} - 1]$

$= M_x * M_{x+2}[\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1]$

$= M_x * M_{x+2}[1 - 1]$

$= M_x * M_{x+2}[0] = 0 =$ दाँया पक्ष प्रमाणित।

प्रमेय–5■ चार क्रमागत अवयव के प्रति– $M_x * M_{x+3} - M_{x+1} * M_{x+2} = 0$ होगा।

प्रमाण– बाँया पक्ष $= M_x * M_{x+3} - M_{x+1} * M_{x+2}$

$= M_{x+1} * M_{x+2}[\frac{M_x}{M_{x+1}} * \frac{M_{x+3}}{M_{x+2}} - 1]$

$= M_{x+1} * M_{x+2}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1]$

$= M_{x+1} * M_{x+2}[1 - 1]$

$M_{x+1} * M_{x+2}[0] = 0 =$ दाँया पक्ष प्रमाणित।

प्रमेय–6■ सरल क्रमांक में दो क्रमागत अवयव के वर्गमानों का योगमान प्रमेय–

$M_r^2 + M_{r+1}^2 = \sqrt{5} * M_r * M_{r+1}$ होगा।

प्रमाण– बाँया पक्ष $= M_r^2 + M_{r+1}^2 = M_r * M_{r+1}[\frac{M_r}{M_{r+1}} + \frac{M_{r+1}}{M_r}]$

$$= M_r * M_{r+1}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$$

$$= \sqrt{5} * M_r * M_{r+1} =$$ **दाँया पक्ष प्रमाणित।**

**प्रमेय–7■** **एकान्तर क्रमांक में दो क्रमागत अवयव के वर्गमानों का योगमान प्रमेय–**

$$M_r^2 + M_{r+2}^2 = 3 * M_r * M_{r+2} = 3 * M_{r+1}^2$$ **होगा।**

**प्रमाण– बाँया पक्ष** $= M_r^2 + M_{r+2}^2 = M_r * M_{r+2}[\frac{M_r}{M_{r+2}} + \frac{M_{r+2}}{M_r}]$

$$= M_r * M_{r+2}[\frac{M_{r+2}-M_{r+1}}{M_{r+2}} + \frac{M_r+M_{r+1}}{M_r}]$$

$$= M_r * M_{r+2}[1 - \frac{M_{r+1}}{M_{r+2}} + 1 + \frac{M_{r+1}}{M_r}]$$

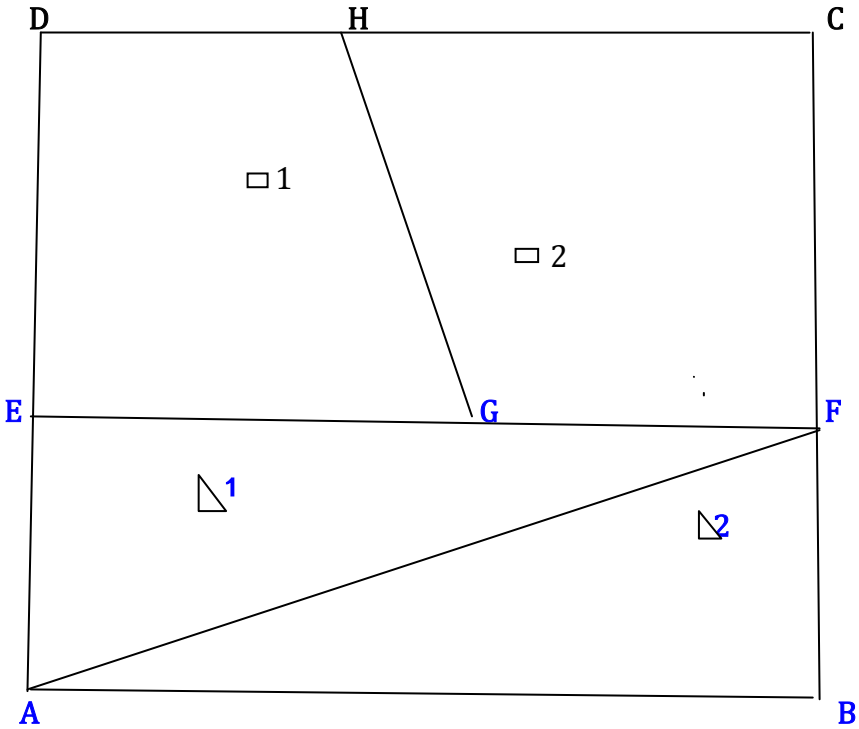
$$= M_r * M_{r+2}\{2 + (\frac{M_{r+1}}{M_r} - \frac{M_{r+1}}{M_{r+2}})]$$

$$= M_r * M_{r+2}\{2 + (\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2})]$$

$$= M_r * M_{r+2}\{2 + (1)]$$

$$= 3\, M_r * M_{r+2} = 3M_{r+1}^2$$ **दाँया पक्ष प्रमाणित।**

**ध्यानाकर्षण** 1■ उपरोक्त प्रमेय 2, 3 एवं 4 से स्पष्ट होता है कि – अध्याय 13 अनुच्छेद 13-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की अध्ययन व्यापकता में फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी F(1 1), लुकस संख्या श्रेढ़ी L(1 3) **एवं** बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (a b)A के प्रति क्रमशः 1 इकाई वर्ग नाप , 5 इकाई वर्ग नाप **एवं** $|a^2 + a * b - b^2|$ इकाई वर्ग नाप पर **समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं** विलोपन विषयक उदाहरण प्रस्तुत है। **इस प्रकार का समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं** विलोपन **गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी** के $M[2\ (1+\sqrt{5})]$ के प्रति दर्शित नहीं होगा। अवलोकित कीजिये।




**आकृति 23-1**

**य**दि **आकृति** 22-1 □ABCD की भुजा $M_{r+4}$ इकाई नाप भुजा का वर्गाकार क्षेत्र है। जिसे–

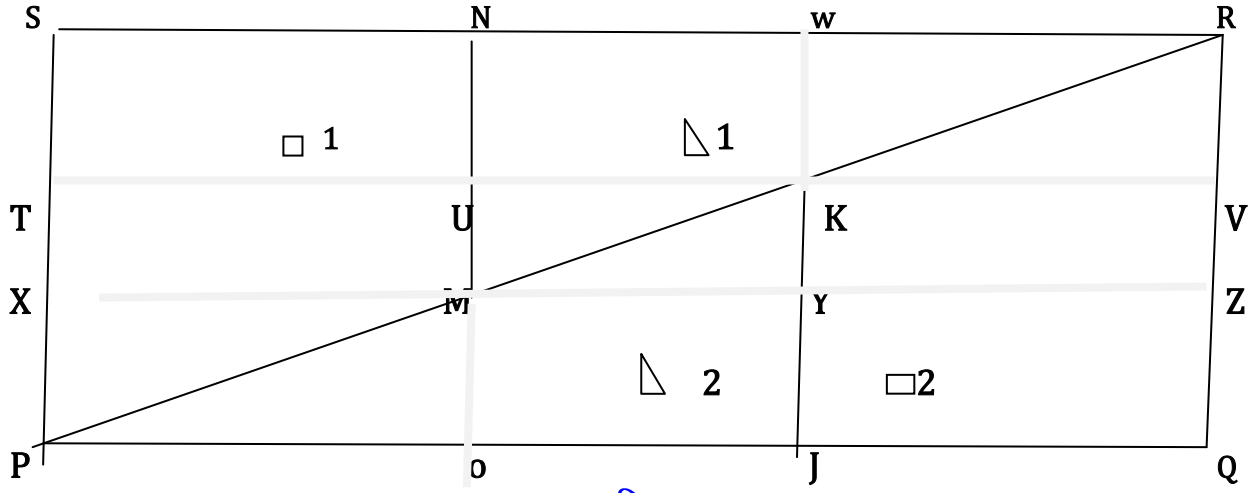
1■ सम्मुख भुजा युग्म AD और BG को क्रमशः बिन्दु E और F पर $FD = FC = M_{r+3}$ इकाई नाप तथा $AE = BF = M_{r+2}$ इकाई नाप में विभाजित करता है।

2■ बिन्दु E और F को मिलाकर दो आयत EFCD और ABFE प्राप्त है।

3■ आयत EFCD के सम्मु.ख भुजा युग्म EF और CD को क्रमशः बिन्दु G और H पर $EG = CH = M_{r+3}$ इकाई नाप तथा $GF = DH = M_{r+2}$ इकाई नाप में विभाजित करता ळें

4■ * बिन्दु G और H को मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज EGHD और GFCH प्राप्त है।

5■ आयत ABFE के सम्मुख शीर्ष A और F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज ABF और AEF सम्मु.ख प्राप्त है।




आकृति 23-2

**आकृति** 23-2 **आयत** PQRS $M_{r+5} * M_{r+3}$ इकाई नाप भुजा का आयताकार क्षेत्र है। जिसके –

लम्बाई नाप की सम्मुख भुजा $PQ=RS = M_{r+5}$ इकाई नाप भुजा है।

चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा $PS=QR = M_{r+3}$ इकाई नाप भुजा है।

उक्त आयत में –

1■ **आकृति** 23-1 में बिन्दु 4■से प्राप्त दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज EGHD और GFCH प्राप्त है। को यथावत सर्वांगसमता प्रतिरूपण में क्रमशः समलम्ब चतुर्भुज PMNS और JQRK प्राप्त है।

2■ **आकृति** 23-1 में बिन्दु 5■से प्राप्त दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज ABF और AEF प्राप्त है। को यथावत सर्वांगसमता प्रतिरूपण में क्रमशः समकोण त्रिभुज MNR और PJK प्राप्त है।

3■ रचना क्रम में –

a. भुजा MN को भुजा PQ के बिन्दु O तक बढ़ाया।

b. भुजा JK को भुजा SR के बिन्दु W तक बढ़ाया।

C. बिन्दु M से होती हुई लम्बाई की सम्मुख भुजा PQ अथवा RS के समांतर अन्तरित रेखा आयत की चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा PS और QR के बिन्दु भुजा X और Z से होकर रेखा JK को बिन्दु Y पर प्रतिच्छेद करता है।

d. बिन्दु K से होती हुई लम्बाई की सम्मुख भुजा PQ अथवा RS के समांतर अन्तरित रेखा आयत की चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा PS और QR के बिन्दु भुजा T और V से होकर रेखा MN को बिन्दु U पर प्रतिच्छेद करता है।

**उक्त प्रकार के प्रतिरूपण एवं रचना के परिणाम स्वस्प–**

1. $PQ = RS = M_{r+5}$ 2. $NR = PJ = OQ = SW = UV = MZ = TK = XY = M_{r+4}$
3. $PS = SN = JQ = QR = PO = XM = TU = WR = KV = YZ = M_{r+3}$
4. $NW = OJ = UK = MY = XS = MN = YW = ZR = PT = OU = JK = QV = M_{r+2}$
5. $PX = OM = JY = QZ = TS = UN = KW = VR = M_{r+1}$
6. $XT = MU = YK = ZV = M_r$

आयत **PQRS** का विकर्ण **PR** का नाप $= \sqrt{RS^2 + AS^2} = \sqrt{M_{r+5}^2 + M_{r+3}^2}$

$= \sqrt{3} * M_{r+4}$ ----------(1)

$= PM + MR = \sqrt{PX^2 + XM^2} = \sqrt{MZ^2 + ZR^2}$

$$= \sqrt{M_{r+1}^2 + M_{r+3}^2} + \sqrt{M_{r+2}^2 + M_{r+4}^2}$$
$$\sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+3}$$
$$= \sqrt{3} * M_{r+4} \quad \text{----------(2)}$$
$$= PM + MK + KR = 2PM + MK$$
$$= 2^* \sqrt{PX^2 + XM^2} + \sqrt{MU^2 + UK^2}$$
$$= 2^* \sqrt{M_{r+1}^2 + M_{r+3}^2} + \sqrt{M_r^2 + M_{r+2}^2}$$
$$= 2^* \sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+1}$$
$$\sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3}(M_{r+2} + M_{r+1})$$
$$\sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+3}$$
$$= \sqrt{3} * M_{r+4} \quad \text{----------(3)}$$

**उक्त विकर्ण विषयक हल क्रम** (1),-(2), 3) स्पष्ट करता है कि– बिन्दु P.M, K,R विकर्ण PR पर संमरेंख है।

## 23-2 निष्कर्ष की ओर–

1■ आयताकार क्षेत्र के संदर्भ में

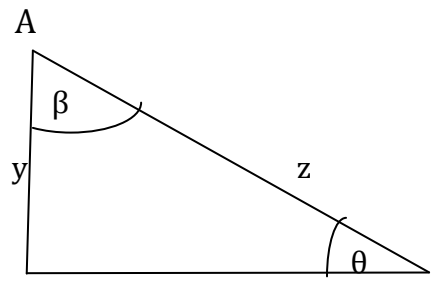
$M_{r+2} * M_r$ इकाई नाप का आयताकार क्षेत्र का विकर्ण $\sqrt{3} * M_{r+1}$ इकाई नाप में होगा।

2■ समकोण त्रिभुज क्षेत्र के संदर्भ में

समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः $M_{r+2}$ और $M_r$ **अथवा** $M_r$ और $M_{r+2}$ इकाई नाप में होने के प्रति समकोण त्रिभुज क्षेत्र का कर्ण $\sqrt{3} * M_{r+1}$ इकाई नाप में होगा।

**3■ समकोण त्रिभुज क्षेत्र के आधार जिसमें समकोण शीर्ष अन्तरित होता है पर अन्तरित न्यून कोण माप $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक गणना के संदर्भ में –**

1॰ समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः $M_{r+2}$ और $M_r$ होने के प्रति $m\angle\theta$ **का त्रिभुजांक गणना–**




| | **आधार x** | **लम्ब y** | **कर्ण z** |
|---|---|---|---|
| | $M_{r+2}$ | $M_r$ | $\sqrt{3} * M_{r+1}$ |
| | $= \frac{M_{r+2}}{M_{r+1}}$ | $\frac{M_r}{M_r+1}$ | $\sqrt{3}$ |
| $=$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $=$ | $(\sqrt{5}+1)$ | $(\sqrt{5}-1)$ | $2^* \sqrt{3}$ |
| $=$ | $M_2$ | $M_0$ | $\sqrt{3}*M_1$ |

**∴ $m\angle\theta$ का बीजांक (p q)=** $[\ (\sqrt{3}*M_1 + M_2)\quad M_0\ ]$

**$m\angle\theta$ का त्रिभुजांक =** $(\sqrt{5}+1)$ $(\sqrt{5}-1)$ $2^* \sqrt{3}$ **से**

**स $m\angle\theta$ का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ** $\text{Sin}\,\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}}$ $\text{Cos}\,\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}}$ $\text{Tan}\,\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\text{Cot}\,\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\text{Sec}\,\theta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}-1)}{2}$ $\text{Cosec}\,\theta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$

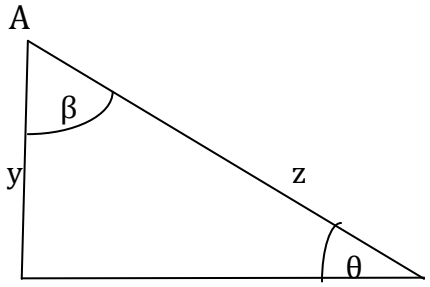
$$\text{Sin}\,\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}} = \frac{1.2361}{3.4641} = 0.3568315$$

$$\therefore\ m\angle\theta = A\text{Sin}\,\theta = \text{Sin}^{\bar{1}}(0.3568315) = 0.3648739 \text{ रेडियन} = 20.897323 \text{ अंशमान}$$

2॰ समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः $M_r$ और $M_{r+2}$ होने के प्रति $m\angle\beta$ **का त्रिभुजांक गणना–**

$m\angle\beta = m\angle\theta$ **का पूरक कोण होगा।**

∴ $m\angle\beta$ का त्रिभुजांक =




| | आधार y | लम्ब x | कर्ण z |
|---|---|---|---|
| | $M_r$ | $M_{r+2}$ | $\sqrt{3} * M_{r+1}$ |
| $=$ | $\frac{M_r}{M_{r+1}}$ | $\frac{M_{r+2}}{M_{r+1}}$ | $\sqrt{3}$ |
| $=$ | $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $=$ | $(\sqrt{5}-1)$ | $(\sqrt{5}+1)$ | $2^* \sqrt{3}$ |
| $=$ | $M_0$ | $M_2$ | $\sqrt{3}*M_1$ |

∴ $m\angle\beta$ का बीजांक $(p\ q) = [\ (\sqrt{3}*M_1 + M_o)\ \ M_2\ ]$

∴ $m\angle\beta$ का त्रिभुजांक $= (\sqrt{5}-1)\ \ (\sqrt{5}+1)\ \ 2^*\sqrt{3}$ से

सेm$\angle\beta$ का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ $\text{Sin}\,\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}}$ $\text{Cos}\,\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}}$ $\text{Tan}\,\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\text{Cot}\,\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{+-1} = \frac{3=\sqrt{5}}{2}$ $\text{Sec}\beta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}+1)}{2}$ $\text{Cosec}\,\beta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}-1)}{2}$

$\text{Sin}\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}} = \frac{3.2361}{3.4641} = 0.9341820$

∴ $m\angle\beta = \text{ASin}\,\beta = \text{Sin}^{\bar{1}}(0.9341820) = 1.2059595$ रेडियन $= 69.0685895$ अंशमान

जाच $m\angle\theta + m\angle\beta = 20.897323 + 69.0685895 = 89.96590889 = 90$ अंशमान

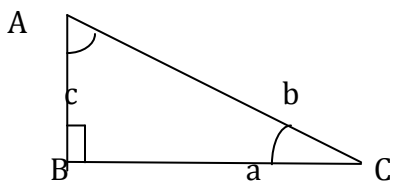
सिद्ध करता है $m\angle\theta$ और $m\angle\beta$ एक दूसरे के प्रति पूरक कोण युग्म है।

4■ अध्याय 13 में समांतर चतुर्भुज दर्शन एवं विलोपन अध्ययन क्रम में योग–योग संख्या श्रेढ़ी अर्थात बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी (a b) A के संदर्भ में पद क्रमांक r के बढ़ते मानों के प्रति दो क्रमागत पद $A_r, A_{r+1}$ के

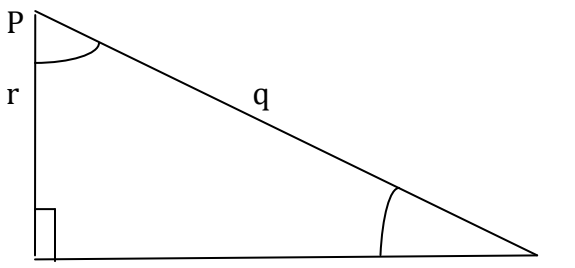
( दीर्घ पद मान $A_{r+1}$ ) :(लघु पद मान$A_r$ ) $= \frac{A_{r+1}}{A_r}$ का हलमान **स्वर्णानुपात** $(\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339)$ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होता है।" का स्पष्टीकरण यह है कि r के बढ़ते मानों के प्रति आयत के अन्तःनिष्ठ विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज के वे सम्मुख शीर्ष जो आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित होता है का कोण माप $m\angle\theta$ 0( शून्य) )कोण इकाई माप की ओर होने होता है। अर्थात विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज एवं आयत के उभयनिष्टिक विकर्ण के नाप का वर्गमान विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज के आसन्न भुजाओं के नापों का वर्गमानों का योगमान के निकटतर होने की ओर होते ऐसा प्रतीत कराता है कि विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाये विलोपन की ओर होते हुये उक्त उभयनिष्टिक विकर्ण पर ही है। गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी के परिपालन की ओर आकृति 21.1 एवं 21.2 दृष्टिगत होता प्रतीत कराता है।

## 23-3 समकोण त्रिभुज समरूपता प्रमेय–

**$(r < x)$ के प्रति तीन क्रमागत अवयव के दो त्रिगुट $(M_r, M_{r+1}, M_{r+2})$ एवं $(M_x, M_{x+1}, M_{x+2})$ की इकाईनाप भुजा पर–** चूँकि समरूप त्रिभुजों के संगत कोण माप बराबर होते है। तथा संगत भुजाओं का अनुपात या परिमेय निरूपण हल मान बराबर होते है।




**समकोण त्रिभुज$_1$**




**समकोण। त्रिभुज$_2$**

यदि समकोण त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR समरूप है तो $m\angle A = m\angle P$ , $m\angle B = m\angle Q =$ समकोण

एवं $m\angle C = m\angle R$ होंगे तथा $a:p = b:q = c:r$ या $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ होंगे।

**रचित समकोण त्रिभुज$_1$** ABC में $m\angle C$ के प्रति भुजा माप [आधार.a लम्ब b कर्ण.c= $M_r$ , $M_{r+2}$, $\sqrt{3}*$ $M_{r+1}$]

**समकोण त्रिभुज$_2$** PQR में $m\angle R$ के प्रति भुजा माप [आधार.p लम्ब q कर्ण.r= $M_x$ , $M_{x+2}$ , $\sqrt{3} * M_{x+1}$ ]

**अथवा**

**रचित समकोण त्रिभुज$_1$** ABC में $m\angle A$ के प्रति भुजा माप [आधार.b लम्ब a कर्ण.c= $M_{r+2}$ , $M_r$, $\sqrt{3}*$ $M_{r+1}$]

**समकोणा त्रिभुज$_2$** ?PQR में $m\angle P$ के प्रति भुजा माप [आधारq. लम्ब p कर्ण.r= $M_{x+2}$ , $M_x$ , $\sqrt{3} * M_{x+1}$]

**समरूप त्रिभुज**

**होगा।**

**समरूप त्रिभुज के प्रतिबंधानुसार संगत भुजा अनुपात मान** $k = \frac{M_x}{M_r} = \frac{M_{x+2}}{M_{r+2}} = \{\frac{\sqrt{3}* M_{x+1}}{\sqrt{3}* M_{r+1}} = \frac{M_{x+1}}{M_{r+1}}\}$

$= \frac{M_{x-r+1}}{2} = [\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^{x-r} = \frac{L_{x-r}+\sqrt{5}*F_{x-r}}{2}$ **होगा।**

## 23-4 गुणोत्तर सह योग.योग यंख्या श्रेढ़ी का द्विघात समीकरण प्रमेय–

अध्याय 17 पृष्ठ 247 प्रमेय 1 एवं पृष्ठ 249 अनुच्छेद 17-5 में योग.योग यंख्या श्रेढ़ी का द्विघात समीकरण प्रमेय में पदमान r के बढ़ते मानों के प्रति हल मानों को सन्निकट होने की ओर अग्रसर होना सुझाया गया है। जबकि गुणोत्तर सह योग.योग यंख्या श्रेढ़ी का द्विघात समीकरण प्रमेय में पदमान r के बढ़ते मानों के प्रति हल मानों को सन्निकट होने की ओर अग्रसर होना सुझाय गया है। विलोपित है। सुनिश्चिता के शब्दों सुझाया गया है। अतः अध्याय 17 पृष्ठ 247 प्रमेय 1 एवं पृष्ठ 249 अनुच्छेद 17-5 में योग.योग यंख्या श्रेढ़ी का द्विघात समीकरण प्रमेय को गुणोत्तर सह योग.योग यंख्या श्रेढ़ी के संकेतन में द्विघात समीकरण प्रमेय कर इसके प्रति प्रमाणन को योग.योग यंख्या श्रेढ़ी का द्विघात समीकरण प्रमेय के प्रमाणन की संगता में सुनिश्चिता के शब्दों में लिया जाना यथेष्ठ होगा।

**प्रमय 1■ गुणोत्तर सह** योग.योग यंख्या श्रेढ़ी $[2 , (1+\sqrt{5})M$ के कोई क्रमागत चार अवयव $M_r$ , $M_{r+1}$, $M_{r+2}$, $M_{r+3}$ से द्विघात समीकरण युग्म– समीकरण$_1$ $ax^2+bx+c=0$ समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0$ के प्रति $a = M_{r+2}$ , $b = M_{r+3}$ तथा $c = M_{r+1}$ लिये जाने पर–

1• दोनों समीकरण का उभय निष्ठ विवेचक $D=M_r^2$ होगा । अतः: दोंनों समीकरण के मूल परिमेय संख्या में प्राप्त होंगे।

2• समीकरण$_1$ $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow M_{r+2}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+1} = 0$ का हल मान–

मूल $\alpha = \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -0.6180339$ होगा। तथा

मूल $\beta = -1$ होगा।

3• समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0 \Rightarrow M_{r+2}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+1} = 0$ का हल मान–

मूल $\alpha = 1$ होगा। तथा मूल $\beta = -\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -1.6180339$ (दशमलव बाद सात स्थान तक) होगा।

**प्रमाण** 1• समीकरण$_1$ $\Rightarrow M_{r+2}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+1} = 0$ का

विवेचक $D = M_{r+3}^2 - 4M_{r+1}M_{r+2} = (M_{r+2}+M_{r+1})^2 - 4M_{r+2}*M_{r+1}$

$= (M_{r+2}-M_{r+1})^2 = M_r^2$ **प्रमाणित।**

समीकरण$_2$ $cx^2+bx+a=0 \Rightarrow M_{r+1}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+2} = 0$ का

विवेचक $D = M_{r+3}^2 - 4M_{r+1}M_{r+2} = M_{r+3}^2 - 4M_{r+1} * M_{r+2} = (M_{r+2}+M_{r+1})^2 - 4M_{r+2}M_{r+1}$

$= (M_{r+2}-M_{r+1})^2 = M_r^2$ **प्रमाणित।**

**प्रमाण** 2• समीकरण$_1$ $M_{r+2}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+1} = 0$ का हल–

मूल $\alpha = \frac{-M_{r+3}+M_r}{2M_{r+2}} = \frac{-(M_{r+2}+M_{r+1})+(M_{r+2}-M_{r+1})}{2A_{r+2}}$

$= \frac{-2M_{r+1}}{2M_{r+2}} = -\frac{M_{r+1}}{M_{r+2}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$= -0.6180339$ के सन्निकट होने अग्रसर होगा। तथा

मूल $\beta = \frac{-M_{r+3}-M_r}{2A_{r+2}} = \frac{-(M_{r+2}+M_{r+1})-(M_{r+2}-M_{r+1})}{2M_{r+2}}$

$= \frac{-2M_{r+2}}{2M_{r+2}} = -1$ **प्रमाणित।**

**प्रमाण** 3• समीकरण$_2$ $M_{r+1}x^2 + M_{r+3}x + M_{r+2} = 0$ का हल–

मूल $\alpha = \frac{-M_{r+3}+M_r}{2M_{r+1}} = \frac{-(M_{r+2}+M_{r+1})+(M_{r+2}-M_{r+1})}{2M_{r+1}}$

$= \frac{-2M_{r+1}}{2M_{r+1}} = -1$ तथा

मूल $\beta = \frac{-M_{r+3}-M_r}{2M_{r+1}} = \frac{-(M_{r+2}+M_{r+1})-(M_{r+2}-M_{r+1})}{2A_{r+1}} = \frac{-2M_{r+2}}{2M_{r+1}}$

$= -\frac{M_{r+2}}{M_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1.6180339$ होगा। **प्रमाणित।**

**प्रमय 2■**

**1•** समीकरण $M_r^2x^2 + M_r * M_{r+1}x - M_{r+1}^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = 1$ तथा मूल $\beta = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $M_r^2x^2 + M_r * M_{r+1}x - M_{r+1}^2 = 0$ का

विवेचक $D = (M_r * M_{r+1})^2 - 4M_r^2 * (-M_{r+1}^2) = 5M_r^2M_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ M_rM_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{-M_rM_{r+1}+\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_r^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{M_{r+1}}{M_r} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$

तथा मूल $= \frac{-M_rM_{r+1}-\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_r^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{M_{r+1}}{M_r} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -[\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2 = -\left[\frac{M_2}{M_1}\right]^2$

$= -\frac{3+\sqrt{5}}{2} = -\frac{M_3}{2}$ होगा।

**2•** समीकरण $M_r^2x^2 - M_r * M_{r+1}x - M_{r+1}^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ तथा मूल $\beta = -1$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $M_r^2x^2 - M_r * M_{r+1}x - M_{r+1}^2 = 0$ का

विवेचक $D = (-M_r * M_{r+1})^2 - 4M_r^2 * (-M_{r+1}^2) = 5M_r^2M_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ M_rM_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{M_rM_{r+1}+\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_r^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{M_{r+1}}{M_r} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = [\frac{\sqrt{5}+1}{2}]^2 = \left[\frac{M_2}{M_1}\right]^2$

$= \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{M_3}{2}$ होगा।

तथा मूल $\beta = \frac{M_rM_{r+1}-\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_r^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{M_{r+1}}{M_r} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1$ होगा।

**3•** समीकरण $M_{r+1}^2x^2 + M_r * M_{r+1}x - M_r^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ तथा मूल $\beta = -1$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $M_{r+1}^2x^2 + M_r * M_{r+1}x - M_r^2 = 0$ का

विवेचक $D = (M_r * M_{r+1})^2 - 4M_{r+1}^2 * (-M_r^2) = 5M_r^2M_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ M_rM_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{-M_rM_{r+1}+\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_{r+1}^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ होगा।

तथा मूल $\beta = \frac{-M_rM_{r+1}-\sqrt{5}M_rM_{r+1}}{2M_{r+1}^2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -1$ होगा।

**4•** समीकरण $M_{r+1}^2x^2 - M_r * M_{r+1}x - M_r^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = 1$ तथा मूल $\beta = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ होगा।

**प्रमाण** समीकरण $M_{r+1}^2x^2 - M_r * M_{r+1}x - M_r^2 = 0$ का

विवेचक $D = (-M_r * M_{r+1})^2 - 4M_{r+1}^2 * (-M_r^2) = 5M_r^2M_{r+1}^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ M_rM_{r+1}$ से

मूल $\alpha = \frac{M_rM_{r+1}+\sqrt{5}M_r M_{r+1}}{2M_{r+1}^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$ होगा।

तथा मूल $\beta = \frac{M_rM_{r+1}-\sqrt{5}M_r M_{r+1}}{2M_{r+1}^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ होगा।

समीकरण $M_{r+1}^2x^2 - M_{r+1} * M_rx - M_r^2 = 0$ के दो हल–

मूल $\alpha = 1$ के सन्निकट तथा मूल $\beta = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ के सन्निकट अग्रसर होगा।

**प्रमाण** समीकरण$M_r^2x^2 - M_{r+1} * M_rx - M_r^2 = 0$ का

विवेचक $D = (-M_{r+1} * M_r)^2 - 4M_{r+1}^2 * (-M_r^2) = 5M_{r+1}^2M_r^2 \therefore \sqrt{D} = \sqrt{5}\ A_{r+1} * A_r$ से

मूल $\alpha = \frac{M_{r+1}M_r+\sqrt{5}MA_{r+1}M_r}{2A_{r+1}^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1$

तथा मूल $\beta = \frac{M_{r+1}M_r-\sqrt{5}M_{r+1}M_r}{2A_{r+1}^2} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{M_r}{M_{r+1}} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ होगा।

23-5 अध्याय19 में उल्लेखित फिबोनिकी स्वरूप संख्या (a b)A श्रेढ़ी विषयक महत्वपूर्ण प्रमेय प्रतिपादित है, जिनमें से मापांक विषयक प्रमेय के अतिरिक्त शेष प्रमेय को $[2\ ,\ (1+\sqrt{5})M$ श्रेढ़ी के प्रति यथावत शब्दों में प्रतिपादित किये जा सकते हैं। इनका वैकल्पिक हल प्रमेय–**1**■ स्वर्णानुपात प्रमेय का अनुप्रयोग कर प्रतिपादित किये जा सकते हैं।
जिनमें से निम्नानुसार विश्लेषित किया गया है। अवलोकित कीजिये।

प्रमेय–**1**■ $(m< n)$ **होन के प्रति गुणोत्तर सह योग–योग संख्या** $[2\ ,\ (1+\sqrt{5})M$ **के दो क्रमागत जोड़े का प्रमेय–**

**गुणोत्तर सह योग–योग संख्या** $[2\ ,(1+\sqrt{5})M$ **श्रैढ़ी के दो क्रमागत जोड़े** $(M_m\ ,M_{m+1})$ **और** $(M_n, M_{n+1})$ **के प्रति–**

[1] $(M_m * M_n) + (M_{m+1} * M_{n+1}) = 2M_{m+n-1} + (1+\sqrt{5}) * M_{m+n}$

योग–योग श्रेढ़ी । (a b)A श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल – 21-1 प्रमेय–**1**■ स्वर्णानुपात प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$(M_m * M_n) + (M_{m+1} * M_{n+1}) = M_m * M_n[1 + \frac{M_{m+1}}{M_m} * \frac{M_{n+1}}{M_n}]$$
$$= M_m * M_n[1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$$
$$= M_m * M_n[1 + \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$$
$$= \frac{1}{2}[(5+\sqrt{5})*] = \sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})M_m * M_n$$

**अथवा**

$$(M_m * M_n) + (M_{m+1} * M_{n+1}) = M_{m+1} * M_{n+1}[1 + \frac{M_m}{M_{m+1}} * \frac{M_n}{M_{n+1}}]$$
$$= M_{m+1} * M_{n+1}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1]$$

$$= M_{m+1} * M_{n+1}[1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2}]$$

$$= \frac{1}{2}[(5 - \sqrt{5}) * M_{m+1} * M_{n+1}] = \sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) M_{m+1} * M_{n+1}$$ होगा।

[2] $(M_m * M_{n+1}) + (M_n * M_{m+1}) = [2M_{m+n-1} + (1 + \sqrt{5}) * M_{m+n}] - (M_{m-1} * M_{n-1})$

योग–योग श्रेढ़ी ।  (a b)A श्रेढ़ी  के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल –  21-1 प्रमेय–1■  स्वर्णानुपात  प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$(M_m * M_{n+1}) + (M_n * M_{m+1}) = M_m * M_{n+1}[1 + \frac{M_n}{M_{n+1}} * \frac{M_{m+1}}{M_m}]$$

$$= M_m * M_{n+1}\left[1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = 2M_m * M_{n+1}$$

**अथवा**

$$(M_m * M_{n+1}) + (M_n * M_{m+1}) = M_n * M_{m+1}[\frac{M_m}{M_{m+1}} * \frac{M_{n+1}}{M_n} + 1]$$

$$= M_n * M_{m+1}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} * \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1] = 2M_n * M_{m+1}$$होगा।

[3] $M_n^2 + M_{n+1}^2 = 2M_{2n-1} + (1 + \sqrt{5}) * M_{2n} = \sqrt{5} * M_n * M_{n+1}$

योग–योग श्रेढ़ी (a b)A श्रेढ़ी  के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल –  21-1 प्रमेय–1■  स्वर्णानुपात  प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$M_n^2 + M_{n+1}^2 = M_n * M_{n+1}[\frac{M_n}{M_{n+1}} + \frac{M_{n+1}}{M_n}]$$

$$= M_n * M_{n+1}[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}]$$

$$= \sqrt{5} * M_n * M_{n+1}$$

[4] $(M_{m-1} * M_{n-1}) + (M_{m+2} * M_{n+2}) = 2[\, 2M_{m+n-1} + (1 + \sqrt{5})M_{m+n}]$

योग–योग श्रेढ़ी ।  (a b)A श्रेढ़ी  के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल –  21-1 प्रमेय–1■  स्वर्णानुपात  प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$(M_{m-1} * M_{n-1}) + (M_{m+2} * M_{n+2}) = M_{m-1} * M_{n-1}[\, 1 + \frac{M_{m+2}}{M_{m-1}} * \frac{M_{n+2}}{M_{n-1}}]$$

$$= M_{m-1} * M_{n-1}[\, 1 + \frac{M_{m-1}+2M_m}{M_{m-1}} * \frac{M_{n-1}+2M_n}{M_{n-1}}]$$

$$= M_{m-1} * M_{n-1}[\, 1 + \left\{1 + \frac{2M_m}{M_{m-1}}\right\} * \{1 + \frac{2M_n}{M_{n-1}}\}]$$

$$= M_{m-1} * M_{n-1}[\, 1 + \{1 + (1 + \sqrt{5})\} * \{1 + (1 + \sqrt{5})\}]$$

$$= M_{m-1} * M_{n-1}[\, 1 + \{2 + \sqrt{5}\} * \{2 + \sqrt{5}\}]$$

$$= M_{m-1} * M_{n-1}[\, 10 + 4\sqrt{5}]$$

$$= 2 * M_{m-1} * M_{n-1}[\, 5 + 2 * \sqrt{5}]$$

[5] तीन क्रमागत अवयव $M_r, M_{r+1}, M_{r+2}$ का प्रमेय –

$$(M_r * M_{r+1}) + (M_{r+1} * M_{r+2}) = M_{r+1}(M_r + M_{r+2})$$

$$= 2 * M_{2r} + (1 + \sqrt{5})\, M_{2r+1}$$

योग–योग श्रेढ़ी ।  (a b)A श्रेढ़ी  के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल –  23-1 प्रमेय–1■  स्वर्णानुपात  प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$(M_r * M_{r+1}) + (M_{r+1} * M_{r+2}) = M_{r+1}(M_r + M_{r+2})$$
$$= M_{r+1}^2[\frac{M_r}{M_{r+1}} + \frac{M_{r+2}}{M_{r+1}}]$$
$$= M_{r+1}^2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = \sqrt{5} * M_{r+1}^2$$

**[6] तीन क्रमागत अवयव के दो त्रिगुटों $(M_m, M_{m+1}, M_{m+2})$ और $(M_n, M_{n+1}, M_{n+2})$ का प्रमेय –**

**(1) योग तुल्यता का प्रमेय**

$M_m + M_{m+1} + M_{n+2} = M_n + M_{n+1} + M_{m+2} = M_{n+2} + M_{m+2}$ होगा।

**प्रमाण** बाँया पक्ष $= M_m + M_{m+1} + M_{n+2} = M_{m+2} + M_{n+2}$

दाँया पक्ष $= M_n + M_{n+1} + M_{m+2} = M_{n+2} + M_{m+2}$

बाँया पक्ष = दाँया पक्ष $= M_{n+2} + M_{m+2}$ **प्रमाणित।**

**[7] चार क्रमागत अवयव का प्रमेय –**

(1) योग–योग संख्या $[2, (1\ \sqrt{5})]M$ श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव $M_r, M_{r+1}, M_{r+2}, M_{r+3}$ के प्रति– अन्त्य पदो के वर्गों का योग मान मध्य पदो के वर्गो के योग मान का दुगुना होता है। अर्थात् $(M_r^2 + M_{r+3}^2) = 2(M_{r+1}^2 + M_{r+2}^2)$

योग–योग श्रेढ़ी । $(a\ b)A$ श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल – 23-1 प्रमेय–1■ स्वर्णानुपात प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$(M_r^2 + M_{r+3}^2) = 2 * \sqrt{5} * M_r * M_{r+3} = 2 * \sqrt{5} * M_{r+1} * M_{r+2} \text{ से}$$
$$M_r * M_{r+3} = M_{r+1} * M_{r+2}$$

(2) $M_r^2 + M_{r+1}^2 + M_{r+2}^2 + M_{r+3}^2 = 3[2M_{2r+1} + (1+\sqrt{5})M_{2r+2})$ **होगा।**

योग–योग श्रेढ़ी । $(a\ b)A$ श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

वैकल्पिक हल – 23-1 प्रमेय–1■ स्वर्णानुपात प्रमेय का अनुप्रयोग से–

$$M_r^2 + M_{r+1}^2 + M_{r+2}^2 + M_{r+3}^2 = 2 * \sqrt{5} * [M_r * M_{r+3} + M_{r+1} * M_{r+2}]$$
$$= \sqrt{5} * [M_r * M_{r+1} + M_{r+2} * M_{r+3}] \text{ से}$$
$$M_r * M_{r+1} + M_{r+2} * M_{r+3} = 2 * [M_r * M_{r+3} + M_{r+1} * M_{r+2}]]$$

**[8] एकान्तर क्रमांक में स्थित क्रमागत तीन पद $M_r, M_{r+2}, M_{r+4}$ के प्रति–**

$M_{r+2}^2 - M_r * M_{r+4} = 0$ होगा।

**प्रमाण बाँया पक्ष** $= M_{r+2}^2 - M_r * M_{r+4} = M_{r+2}^2[1 - \frac{M_r}{M_{r+2}} * \frac{M_{r+4}}{M_{r+2}}]$

$$= M_{r+2}^2[1 - (\frac{M_{r+2}-M_{r+1}}{M_{r+2}}) * (\frac{M_{r+2}+M_{r+3}}{M_{r+2}})]$$
$$= M_{r+2}^2[1 - (1 - \frac{M_{r+1}}{M_{r+2}}) * (1 + \frac{M_{r+3}}{M_{r+2}})]$$
$$= M_{r+2}^2[1 - (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}) * (1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2})]$$
$$= M_{r+2}^2[1 - (\frac{3-\sqrt{5}}{2}) * (\frac{3+\sqrt{5}}{2})]$$
$$= M_{r+2}^2[1 - 1]$$
$$= M_{r+2}^2[0] = 0 = \textbf{दाँया पक्ष प्रमाणित।}$$

**व्यापकता मं– a वाँ अन्तर क्रमांक में स्थित क्रमागत तीन पद $M_r, M_{r+a}, M_{r+2a}$ के प्रति–**

$M_{r+a}^2 - M_r * M_{r+2a} = 0$ होगा।

**[9] एकान्तर क्रमांक में स्थित क्रमागत चार पद $M_r, M_{r+2}, M_{r+4}, M_{r+6}$ के प्रति–**

**प्रमाण बाँया पक्ष** $=M_{r+2} * M_{r+4} - M_r * M_{r+6} = M_{r+2} * M_{r+4}[1 - \frac{M_r}{M_{r+2}} * \frac{M_{r+6}}{M_{r+4}}]$

$= M_{r+2} * M_{r+4}[1 - (\frac{M_{r+2}-M_{r+1}}{M_{r+2}}) * (\frac{M_{r+4}+M_{r+5}}{M_{r+4}})]$

$= M_{r+2} * M_{r+4}[1 - (1 - \frac{M_{r+1}}{M_{r+2}}) * (1 + \frac{M_{r+5}}{M_{r+4}})]$

$=M_{r+2} * M_{r+4}[1 - (1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}) * (1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2})]$

$=M_{r+2} * M_{r+4}[1 - (\frac{3-\sqrt{5}}{2}) * (\frac{3+\sqrt{5}}{2})]$

$=M_{r+2} * M_{r+4}[1 - 1]$

$=M_{r+2} * M_{r+4}[0] = 0 =$ **दाँया पक्ष प'माणित**

**व्यापकता मं– a वाँ अन्तर क्रमांक में स्थित क्रमागत चार पद** $M_r, M_{r+a}, M_{r+2a}, M_{r+3a}$ **के प्रति–**

$M_{r+a} * M_{r+2a} - M_r * M_{r+3a} = 0$ होगा।

## 23-6 गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी $[2, (1+\sqrt{5})]M$ का योगमान प्रमेय–

उपरोक्त अध्याय **20** में दिये योग–योग संख्या $(a\ b)A$ के प्रति प्रतिपादित विभिन्न स्तर की श्रेढ़ियों का योगमान प्रमेय के परिपेक्ष्य में गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी $[2, (1+\sqrt{5})]M$ का यथा संगत श्रेढ़ियों का योगमान प्रमेय प्रस्तुत है, जिनके प्रमाण के संदर्भ में योग–योग संख्या $(a\ b)A$ प्रमेय के परिपेक्ष्य में प्राप्त निष्कर्ष में

$K=[A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2] = [A_1 * A_2 - A_0 * A_3]$ के प्रति गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी $[2, (1+\sqrt{5})]M$ के यथा संगत $K=[M_1^2 + M_1 * M_2 - M_2^2] = [M_1 * M_2 - M_0 * M_3]$ प्रतिस्थापित होगा, जिसका हलमान अनुच्छेद 21-1 प्रमेय 3 और 5 के अनुसार 0 (शून्य) होगा। जिसके अनुपालन में– गुणोत्तर सह योग–योग संख्या श्रेढ़ी $[2, (1+\sqrt{5})]M$ निम्नानुसार प्रस्तुत है।

### [1] क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–

पद क्रमांक 1 से क्रमागत n पदों का योग फल श्रेढ़ी के $(n+2)$ वाँ पद और 2रे पद मान का अन्तर मान होगा। जहाँ $M_{n+2} = (M_{n-1} + 2M_n)$ होगा।

अर्थात् $[M_1 + M_2 + M_3 + - + - + M_{n-2} + M_{n-1} + M_n] = M_{n+2} - M_2 = M_{n+2} - (1+\sqrt{5})$ **होगा।**

योग–योग श्रेढ़ी । $(a\ b)A$ श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

### [2] विषम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–

पद क्रमांक 1 से विषम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$[M_1 + M_3 + M_5 + - + -+ M_{2n-5} + M_{2n-3} + M_{2n-1}] = M_{2n} - (M_2 - M_1)$

$] = M_{2n} - (\sqrt{5} - 1)$

$= [(2M_{2n+1} - M_{2n-1}) - (\sqrt{5} - 1)]$ होगा।

योग–योग श्रेढ़ी । $(a\ b)A$ श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

### [3] सम क्रमांक के क्रमागत n पदों का योगमान प्रमेय–

पद क्रमांक 2 से सम क्रमांकों में स्थित n पदी संख्या श्रेढ़ी का योगमान =

$[M_2 + M_4 + M_6 + - + -+ M_{2n-4} + M_{2n-2} + M_{2n}] = M_{2n+1} - M_1$

$] = M_{2n} - 2$

$= [(2M_{2n} - M_{2n-2}) - 2]$ होगा।

योग–योग श्रेढ़ी । $(a\ b)A$ श्रेढ़ी के यथावत शब्दों में।

### [4] $[M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - M_6 + - +$ का n पदी विस्तार में–

1■ पदों की संख्या n सम संख्या होने के प्रति–

$[M_1 - M_2 + M_3 - M_4 + M_5 - M_6 \ + - + \text{ का } n \text{ पदी विस्तार में}$

हल मान $= [(2M_1 - M_2) - M_{n-1}] = [(3-\sqrt{5}) - M_{n-1}]$ ] होगा।

2■ पदों की संख्या n विषम संख्या होने के प्रति–

∴ हल मान $= [(2M_1 - M_2) + M_{n-1}] = [(3-\sqrt{5}) + M_{n-1}]$

[5] पद क्रमांक 1 से क्रमागत n पद मानो के वर्ग मानों का योगमान प्रमेय–

$[M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 + - - - - + M_{n-2}^2 + M_{n-1}^2 + M_n^2]$ का योगमान =

$[(M_n * M_{n+1}) - M_1(M_2 - M_1] = [(M_n * M_{n+1}) - 2(\sqrt{5} - 1]$ होगा।

[6] n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $M_r * M_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[M_1 * M_2 + M_2 * M_3 + M_3 * M_4 + - - - + M_{n-2} * M_{n-1} + M_{n-1} * M_n + M_n * M_{n+1}]$का योग मान $= [M_n * M_{n+2} - M_0 * M_2] = [M_{n+1}^2 - M_1^2]$

$= [M_{n+1}^2 - 4] = [(M_{n+1} + 2) * (M_{n+1} - 2)]$

[7] n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $M_r^2 * M_{r+1}$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[M_1^2 * M_2 + M_2^2 * M_3 + M_3^2 * M_4 - - - - + M_{n-2}^2 * M_{n-1} + M_{n-1}^2 * M_n + M_n^2 * M_{n+1}]$का

योग मान $= \frac{1}{2}[(M_n * M_{n+1} * M_{n+2}) - (M_0 * M_1 * M_2)]$

$= \frac{1}{2}[M_{n+1}^3 - M_1^3)] = \frac{1}{2}[M_{n+1}^3 - 8)]$ होगा।

[8] n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $M_r * M_{r+1}^2$ होने के प्रति प्राप्तश्रेढ़ी–

$[M_1 * M_2^2 + M_2 * M_3^2 + M_3 * M_4^2 + - - - - + M_{n-2} * M_{n-1}^2 + M_{n-1} * M_n^2 + M_n * M_{n+1}^2]$ का

याग मान $= \frac{1}{2}[M_{n+1}^2 * M_{n+2} - M_2^2 * M_0\}] = \frac{1}{2}[M_{n+1}^2 * M_{n+2} - 4 * M_2\}]$ होगा।

[9] n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $M_r * M_{r+1} * M_{r+2}$ होने के प्रति प्राप्त श्रेढ़ी–

$[M_1 * M_2 * M_3 + M_2 * M_3 * M_4 + M_3 * M_4 * M_5 + M_4 * M_5 *$ $_6 - - - - - - - -$

$- - M_{n-2} * M_{n-1} * M_n + M_{n-1} * M_n * M_{n+1} + M_n * M_{n+1} * M_{n+2}]$ का योगमान–

$= \frac{1}{2}[\{M_{n+1} * M_{n+2}^2\} - M_0 * M_2 * M_3] = \frac{1}{2}[\{M_{n+1} * M_{n+2}^2\} - 4 * M_3]$ होगा।

[10] n पदी श्रेढ़ी जिसका r वाँ पदमान $M_r^3$ होने के प्रति प्राप्त श्रेढ़ी

$M_1^3 + M_2^3 + M_3^3 + - - - - + M_{n-2}^3 + M_{n-1}^3 + M_n^3]$ का योगमान–

प्रथम प्रतिरूपण में

योग मान= $= \frac{1}{2}[M_n * M_{n+1}^2 - M_0^2 * M_2]$होगा।

द्वितीय प्रतिरूपण में

$[M_1^3 + M_2^3 + M_3^3 + - - - - + M_{n-2}^3 + M_{n-1}^3 + M_n^3]$ का योगमान–

$= \frac{1}{2}[\{M_{n-1} * M_{n+1} * M_{n+2}\} - M_{\bar{0}} * M_1 * M_2] = \frac{1}{2}[M_n^2 * M_{n+2} - M_0^2 * M_2]$ होगा।

# अध्याय–24
## उनागर संख्या पध्दत्ति

**24-1 उनागर संख्या की ओर** आधुनिक गणित में संख्यांकन की दो पद्धत्ति है। पहला भारतीय संख्यांकन या हिन्दू अरेबिक दाशमिक पद्धत्ति और दूसरा बिट्रिश संख्यांकन पद्धत्ति या अन्तर राष्ट्रीय पद्धत्ति। भारतीय संख्यांकन पद्धत्ति देवनागरी (संस्कृत)और बिट्रिश संख्यांकन पद्धत्ति ऑग्ल (इंगलिश) भाषा लिपि से लिया गया है। इन तीनों भाषाओं संस्कृत, हिन्दी और ऑग्ल में अधो संख्यांकन तालिका से स्पष्ट है। संख्याएँ १६ ,२६ , ३६ , ४६ ,५६ , ६६ , और ७६ का अंकीय लेखन का वाचन (पाठन) हिन्दी भाषा के समृद्धिता[x] के अनुरूप नहीं है।

### तालिका 22-1
### भाषावार संख्या का लेखन प्रस्तुती और उनका वाचन

| क्रमांक | संस्कृत भाषा | | | हिन्दीं भाषा | | ऑग्ल (अंग्रेजी) भाषा | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | संख्या | वाचन (पाठन) | | संख्या | वाचन (पाठन) | संख्या | वाचन (पाठन) |
| 1 | १६ | नवदशः | एकोनविंशतिः | १६ | उन्नीस | 19 | नइनटीन |
| 2 | २६ | नवविंशति | एकोनत्रिंशत् | २६ | डनतीस | 29 | ट्वन्टीनाइन |
| 3 | ३६ | नवत्रिंशत् | एकोनचत्वारिंशत् | ३६ | डनचालीस | 39 | थर्टीनाइन |
| 4 | ४६ | नवचत्वारिशत् | एकोनपंचाशत् | ४६ | डनचास | 49 | फोर्टीनाइन |
| 5 | ५६ | नवपंचाशत | एकोनषष्टिः | ५६ | उनसठ | 59 | थ्फप्टीनाइन |
| 6 | ६६ | नवषष्टिः | एकोनसप्ततिः | ६६ | उन्हत्तर | 69 | थ्सक्सटीनाइन |
| 7 | ७६ | नवसप्ततिः | एकोनाशीतिः | ७६ | उन्यासी | 79 | स्वेन्टीनाइन |
| 8 | ८६ | नवाशीतिः | एकोननवतिः | ८६ | नवासी | 89 | एट्टीनाइन |
| 9 | ६६ | नवनवतिः | एकोनशतम् | ६६ | निन्यानबे | 99 | नइन्टीनाइन |

**व्याख्या प्रसारित संकेतन नियम से** 19 =10+9 के लिए संस्कृत भाषा में लेखन १६ = १० + ६ है जिसका वाचन नवदशः=नव +दशः से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। ऑग्ल भाषा में लेखन 19 =10+9 जिसका वाचन नाइनटीनः=नाइन +टेन := टेन + नाइन से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

29 =20+9 के लिए संस्कृत भाषा में लेखन २६ = २० + ६ है जिसका वाचन नवविंशतिः=नव +विंशति से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। ऑग्ल भाषा में लेखन 29 =20+9 जिसका वाचन ट्वन्टीनाइनः=ट्वन्टी +नाइन से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

इसी प्रकार 39, 49, 59,69,79 के लिए संस्कृत भाषा एवं ऑग्ल भाषा में लेखन के अनुरूप है। इसी तारतम्य में 89 के लिए हिन्दी भाषा में लेखन ८६ का वाचन नवासी नव अस्सी का त्वरित क्रमोत्तर वाचन नवास्सी का नवासी है तब ८६ = ८ 0 + ६ का वाचन नवास्सी (त्वरित उच्चारण में नवासी) = नव +अस्सी = अस्सी + नव से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है। एवं 99 के लिए हिन्दी भाषा में लेखन६६ का वाचन निन्यानबे जो कि नवनब्बे मे नव का अर्थ निया निन्यानबें लयात्मक त्वरित वाचन होता है। अतएव ६६ का वाचन निन्यानबें = नव (निया) +नब्बे = नब्बे + नव से स्पष्ट है लेखन के अनुरूप वाचन है।

**पुनः 1■ संस्कृत भाषा में** १६ , २६ , ३६ .....८६ ,६६. **का वाचन विश्लेषण**

१६ का वाचन एकोनविंशतिः = एक उन/उना विंशतिः, २६ का वाचन एकोनत्रिंशत् = एक. उन/उना. त्रिंशत ,

**३६** का वाचन एकोनचत्वारिंशत्: =एक. उन/उना +चत्वारिंशत्:, ४६ का वाचन एकोनपंचाशत् = एक. उन/उना. पंचाशत् , ५६ का वाचन एकोनष षष्टिः = एक .उन/उना. षष्टिः, ६६ का वाचन एकोनसप्ततिः= एक .उन/उना. सप्ततिः , ७६ का वाचन एकोनाशीतिः = एक .उन/उना. आशीतिः , ८६ का वाचन एकोननवतिः = एक .उन/उना. नवति , ६६ का वाचन एकोनशतम् = एक उना .शतम् ।

**x समृद्धि भाषा–** पूरी दुनिया में अनेक भाषाएँ हैं। सभी भाषाओं का अपना–अपना भाषा विज्ञान एवं व्याकरण है। जिसके अनुसार पूर्णतः समृद्धि भाषा वहीं भाषा है जिसमें लिखे गये शब्दों का वाचन (पठन–पाठन) शब्द मे सम्मिलित अक्षर के प्रति स्फुटित मुखध्वनि उच्चारण (वाणी या बोल) के अनुसार किया जाता है। आपको यह जानकर आश्चर्य होगा कि समृद्धि भाषा होने के क्रम में हिन्दीं भाषा ही प्रथम स्थान प्राप्त करने की ओर अग्रसर मानी जा रहीं हैं। जहाँ केवल स (आधा स) से प्रारंभ शब्द (जेसे – स्तर, स्त्री, स्कूल, स्पष्ट.....) का वाचन ईस होता है। इस प्रकार दुनिया की कोई भी भाषा समृद्धिता के परिपालन में शत–प्रतिशत समृद्ध सिद्ध नहीं हैं किसी –किसी संदर्भ में यह कथन सत्य है।

**2■ हिन्दी भाषा में** १६ ,२६ , ३६ .....६६ ,७६ **का वाचन विश्लेषण**

१६ का वाचन उन्नीस– उनबीस/उनाबीस का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से प्राप्त है। इसी प्रकार २६ का वाचन उनतीस – उनतीस/उनातीस, ३६ का वाचन उनचालीस– उनचालीस/उनाचालीस ४६ का वाचन उनचास – उनपचास/उनापचास, ५६ का वाचन उनसठ– उनसाठ/उनासाठ, ६६ का वाचन उनहत्तर – उनसत्तर/उनासत्तर, ७६ का वाचन उन्यासी– उनअस्सी/उनाअस्सी का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से क्रमशः प्राप्त है।

उपरोक्त पुनः व्याख्या बिन्दु 1 में उपसर्गित एकोन/एकोना का अर्थ एक उन/उना है एकन्यून का त्वरित क्रमोत्तर वाचन से प्राप्त है। जबकि बिन्दु 2 में उपसर्गित उन/उना का अर्थ भी एक उन/उना से ही है। क्योकि गणित लेखन में $1*x^1$ (एक गुणित एक्स का घात एक) को केवल x ही लिखे एवं पढ़े जाने का नियम है।

उना शब्द मूलतः छत्तीसगढ़ी भाषा से लिया गया है। जिसका प्रमाणिक प्रयोग हमारे पूर्वजों के बोल–चाल में रहा है।सन् 1950 के बाद हिन्दी एवं ऑग्ल भाषा के बढ़ते प्रभाव में विलोपन की ओर है।

**जैसे 1•** दुद ह दुहना अे छलकथ हे थोरिक **उना** करके गोरसी आगी म दुहना ल मढ़ाव।

**2•** एसों के अंकाल में पाँच गाड़ा ले आगर होवैया धान ह पाँच खाड़ी तक नी होइस उहू म चार काठा **उना** होगे।

**3•** बने–बने जिये कमाय के हे तब नरेटी के आवत ले झन खाव ,दु कँवरा के **उना** खाव।

**4•** कइसे गा छुहीवाला हमर धान ल सीग–सीग ले टुकनी भर–भर के नापे अउ तेहा पिवरी छूही तक ल सपटा के भरत ले तक नी नापत हस उहू म **उना–उना** करके देवत हस अउ हाँका पार थस तिन खूँट– तिन खूँट । तोर नपइ म दुवे खूँट तो परत हावे।

उपरोक्त व्याख्या से स्पष्ट है उन/उना का अर्थ एकन्यून या एक कम है। तब –

19 उन्नीस = उना +बीस = बीस में से एक कम $= 20-1$ के लिए $2\bar{1}$

29 उनतीस = उना +तीस = तीस में से एक कम $= 30-1$ के लिए $3\bar{1}$

39 उनचालीस = उना +चालीस = चालीस में से एक कम $= 40-1$ के लिए $4\bar{1}$

49 उनचास = उना +पचास = पचास में से एक कम $= 50-1$ के लिए $5\bar{1}$

59 उनसठ = उना +साठ = साठ में से एक कम $= 60-1$ के लिए $6\bar{1}$

69 उनहत्तर = उना +सत्तर = सत्तर में से एक कम $= 70-1$ के लिए $7\bar{1}$

79 उनयासी = उना +अस्सी = अस्सी में से एक कम = $80-1$ के लिए $8\bar{1}$( वाचन के अनुरूप संख्यांकन (संख्या लिखना ) होगा।

उपरोक्त विश्लेषित व्याख्या का उद्देश्य सम्बंधित भाषाओं की सार्वभौमिकता एवं समृद्धदता को ठेस पहुचाना कदापि नही है। वरन इस प्रकार के वाचन एवं संख्यांकन (संख्या लिखना) की असंगता को ही नवीन ज्ञान विकास भाषा की ओर अग्रसर होने विस्तारित करना है। छत्तीसगढ़ियों के क्रिया कलापो, व बोल –चाल की भाषा की ओर अग्रसर होने विस्तारित करना है। छत्तीसगढ़ियों के क्रिया कलापो, व बोल –चाल की भाषा में उनके गणित ज्ञान की समृद्धता का स्पष्ट झलक मिलता है। गणित ज्ञान विकास में नये आयाम देने उत्सुक करता है।

उपरोक्तानुसार उन/उना के लिए संस्कृत भाषा में एकोन का अर्थ एक न्यून और हिन्दी भाषा के गणित अध्ययन में पूर्ववर्ती (जो इसके पहले आ गया है ) शब्द लिया गया है। जिसका अर्थ .....से एक कम हे। न्यून का भावार्थ घटाने(ऋणात्मक) से है।

**उन/उना अंक संख्याएँ** $2\bar{1}, 3\bar{1}, 4\bar{1}, 5\bar{1}, 6\bar{1}, 7\bar{1}, 8\bar{1},$ का इकाई अंक $\bar{1}$ एक उन/उना अंकन के रूप में प्रयुक्त हैं। इसी प्रकार $\bar{2}$ को दो उन/उना , $\bar{3}$ को तीन उन/उना. .....$\bar{8}$ को आठ उन/उना , $\bar{9}$ को नव उन/उना. के रूप में प्रयुक्त होगा। अर्थात् $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ उन/उना. अंक के रूप में प्रयुक्त होंगे। हिन्दीं भाषा में रेखाबंधनी अंक के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

**आगर अंक** छत्तीसगढ़ी भाषा में उना का विरूद्धार्थी शब्द आगर है। जिसका अभिप्राय आगू के (आगे का), उपराहा (अधिक)का गणितीय अर्थ..... से एक अधिक से है। संस्कृत में एकाधिकेणपूर्वेण = पूर्व (पहले) से एक अधिक और हिन्दी में भाषा में परवर्ती (जो इसके बाद आयेगा) लिया गया है। अधिक का भावार्थ जोड़ने (धनात्मक) से है। अतः आगर अंक रेखाबंधनी मुक्त प्राकृत अंक 1,2.3,4,5,6,7,8,9 ही होगा। इस आगर शब्द का अनुप्रयोग छत्तीसगढ़ियों के सामान्य बोल–चाल के साथ इनके गणित ज्ञान विकास मे झलकता है।

**जैसे 1• आगर–आगर** लुहे सहि का गोठियाथस थोरिकिन का बात कहा थे तेला तो सुन ले।

**2•** 6 आना बनी के हिसाब ले 24 बनिहार के 8 दिन के पूरा घान लुवइ बनी दु **आगर** अउठ कोरी रूपिया होही।

**3•** सुका **आगर** चार रूपिया प्रति तोला चांदी के भाव से चार **आगर** दुइ कोरी तोला चाँदी के पूरा किम्मत सात **आगर** नवकोरी रूपिया होही।

**शब्दार्थ** आगर–आगर = आगू–आगू = आगे–आगे। लुवे सहि = काटने जैसा । गोठियाथस = बात कर रहे हो । थोरकिन = थोड़ा सा। का = क्या। तेला= उसको। 16 आना = 1रूपिया। बनी =मजदूरी। बनिहार =मजदूर । 1 कोरी = 20 इकाई। अडठ = साड़ेतीन( तीन

और आधा) $3\frac{1}{2} = 3.5$ । घान लुवइ = धान काटने का। सुका = चार आना (रूपये का चौथाई भाग) तोला = वजन मापने का एक प्राचीन इकाई जिसका आधुनिक तौल माप $11.304$ ग्राम के बराबर है। पूरा किम्मत = कुलमूल्य या कुल कीमत।

**24-2 उनागर संख्या**[x] दो या दो से अधिक अंकीय संख्याएँ जिसके संख्यांकन में कम से कम एक अंक उना और एक अंक आगर हो उनागर संख्या कहलाता है। **जैसे** $1\bar{7}, 2\bar{4}, \bar{7}7, 1\bar{8}2, 1000\bar{1}, 9\bar{2}\bar{3}880\bar{9}31$

**उनागर संख्या का प्रसार** उनागर संख्या का प्रसार सामान्य संख्या प्रसार नियम के अनुसार प्रत्येक अंक स्थानीय मान को पंक्ति योग के रूप में प्रसारित करना ही है, जिसमें उना अंकों का स्थानीय मान प्रसार ऋणात्मक संख्या के रूप में होगा।

**जैसे** $5\bar{3}2866\bar{9}9\bar{4}01 = 50000000000 - 3000000000 - 200000000 + 80000000 + 6000000 - 600000 + 90000 - 9000 - 400 + 00 + 1$

**24-3 आदर्श उनागर संख्या** प्रचलित संख्यांकन पद्धत्तियाँ हिन्दु अरेबिक एव ब्रिट्रिश दोनों ही दशाधारी है। जिनमें प्रयुक्त अंक $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ (कुल दस प्रकार की) है। इन दस अंक मे से केवल $0,1,2,3,4,5$ (कुल छः प्रकार की) के अनुप्रयोग नियम में $0$ (शून्य) को उनागर से परे मानकर $1,2,3,4,5$ को आगर तथा $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}$ को उन/उना अंक के रूप में प्रयुक्त कर प्रचलित दशाधारी संख्यांकन पद्धत्ति के अन्तर्गत की संख्या के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। इस प्रकार प्राप्त उनागर संख्या को आदर्श उनागर संख्या कहते हैं। अर्थात् $0$, आगर अंक $(1,2,3,4,5)$ एवं उना अंक $(\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})$ के अनुप्रयोग से दर्शित संख्या को ही आदर्श उनागर संख्या कहते है।

**आदर्श उनागर संख्या के अनुप्रयोग से लाभ** मूलभूत गणितीय संक्रिया {संकलन(जोड़ना), व्यवकलन(घटाना),गुणा एवं भाग } में अंकों $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ का अनुप्रयोग होता है। अतः इनके बीच सम्बंधित गणन तालिका का कंठस्थ होना अनिवार्य माना जाता है। शिक्षा मनोविज्ञान के विपरीत नवनिहाल नन्हे बच्चों को रटने की ओर बाध्य करता है। समस्त कला एवं विज्ञानों की सोलह श्रृंगार से श्रृंगारित रानी जैसी ज्ञान को सिखने –सिखाने की विधा से दूर ले जा रहा है। जिसका परिणाम सामने है पूरा विश्व गणित के मास्टरों की कमी से जूझ रहा है। उना आगर संख्यांकन पद्धत्ति में मात्र $0,1,2,3,4,5$ का अनुप्रयोग होता है। अतः इनके बीच सम्बंधित गणन तालिका को सरलता से रचना करने की विधा जागृत कर शिक्षा मनोविज्ञान के अनकुल सिखने –सिखाने की कला में माहिर करने नये आयाम दिया जा कर हमारी भावी पीढ़ी में गणित ज्ञान का सतत् गुरूतर भाव को बनाये रखने हमारे पूर्वजों की भाँति कामयाब होंगे।

**24-4 उनागर संख्या के अनुप्रयोग विस्तार** आदर्श उनागर की भाँति समस्त मूलभूत संक्रिया में $0$ सहित उनागर अंक {(आगर अंक– $1,2,3,4,5,6,7,8,9$), (उना अंक–$\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ )} का अनुप्रयोग गणित के समस्त मूलभूत संक्रिया {संकलन(योग या जोड़), व्यवकलन(घटाना), गुणा एवं भाग}को नये आयाम में प्रस्तुत करने की ओर अग्रसर करेगा। सभी क्षेत्र और शाखाओं में शिक्षा मनोविज्ञान के अनकुल सीखने –सिखाने की कला में माहिर करने और भी नये आयाम विस्तारित करने का मार्ग प्रशस्त करेगा। हमारी भावी पीढ़ी में हमारे पूर्वजों की भाँति गणित ज्ञान का सतत् गुरूतर भाव को बनाये रखने की भावना से **गणित ज्ञान विकास में उनागर संख्या पद्धत्ति छत्तीसगढ़ की एक देन** नाम की ग्रंथ कृति में तालिका (पहाड़ा)बनाने , मूलभूत संक्रियों के प्रति विविध आयाम , आर्वत – – –) ज्ञात करने, बीजगणित के अन्तर्गत द घातांकी समीकरण (वर्ग, त्रिघात.– –. – ),स्वर्णानुपात समीकरण, श्रीनिवासरामानुजन का समीकरण– – – आदि के प्रस्तुती हेतू द्वितीय बीजगणित सोपान, कोण माप ग रेडियन में हो तो पदगए ब्वेगए $\mathrm{Tan}^{-1}x$ए $\mathrm{Sin}^{-1}x, \mathrm{Cos}^{-1}x,$ ज्दंग एवंअतिपरवलय त्रिकोणमिति अध्ययन में $\mathrm{Sinh}x,$ $\mathrm{Cosh}x, \mathrm{Tan}^{-1}hx,$ के साथ खगोल विज्ञान के अन्तर्गत सर्वोच्च समिका का आकलनकरनें उक्त ग्रंथ के तीसरे सोपान केरूप में त्रिभुजांक एवं बीजांक आघारित त्रिकोणमिति एक TRIX TRIGONOMTRY है।

**24-5 दसपुरनी एवं नवपुरनी अंक युग्म** जिन दो अंक जिनका योग 10 होता है वे एक दूसरे के प्रति दसपुरनी अंक युग्म तथा जिन दो अंक जिनका योग 9 होता है वे एक दूसरे के प्रति नवपुरनी अंक युग्म कहलाते है। अंक गणितीय मूलभूत संक्रिया ,सरल दशमलव भिन्न का आवर्त दशमलव निरूपण ,सामान्य संख्या को उनागर संख्या में तथा उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलने में स्पष्टतः अनुप्रयोग दर्शित होने के अतिरिक्त गणित अन्य शाखाओं, प्रशाखाओं में अनुप्रयोग दर्शित हो सकते है। अध्ययन क्रम में अवलोकित कीजिए। **दसपुरनी अंक युग्म** ;$1\leftrightarrow9), (2\leftrightarrow8), (3\leftrightarrow7), (4\leftrightarrow6), (5\leftrightarrow5),$ एवं **नवपुरनी अंक युग्म** $(0\leftrightarrow9), (1\leftrightarrow8), (2\leftrightarrow7), (3\leftrightarrow6), (4\leftrightarrow5),$ होंगे।

**24-6 सामान्य संख्या को उनागर संख्या में बदलना**[x] सामान्य संख्या को उनागर संख्या में बदलने के लिए–

[x] उन/उना अंकन के लिए आध्यात्मिक अध्ययन संसथान अमोद कुंज रूड़की (भारत) द्वारा प्रकाशित वेदिक गणित पुष्पमाला किताब श्रृंखला में विनकुलम शब्द लिया गया है जो वास्तव में इंगलिश शब्दकोष से लिया शब्द VINCULUM ही है। जिसका अर्थ रेखाबंधनी है जिसका अभिप्राय गणित में अंको के ऊपर खींची गई रेखा से है, जिससे उनका एक ही क्रिया में निर्दिष्ट होना सुझाया गया है। उनागर संख्यांकन पद्धत्ति में गणित संक्रिया अन्तर्गत उन/उना (कम)होना ही निर्दिष्ट होगा।

**1•** वह अंक या अंक समूह के अंकों को दृष्टिगत करें जो 6,78,9 हो। दर्शित सामान्य संख्या के अंक स्थान विस्तार में यें अलग–अलग दो या दो से अधिक स्थान या समूह में हो सकते हैं।

**2A•** उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार एकैक अंक में ही हो तो इन अंकों का दसपुरनी अंक का उना मान दर्शित करें और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति दसपुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे।

**2B•** उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार समूह में हो तो समूह अंकों के प्रथम दाँये अंक का दसपुरनी अंक का उना मान तथा शेष अंकों के नवपुरनी का उना मान दर्शित करें और इस प्रकार समूह के दाँये से बाँये अंतिम अंक के प्रति नवपुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे।

2A और 2B के बाद पुनः यदि यह बाँये अंक जिसका आगर 6,7 8, या 9 होने को होता है तो इसका नवपुरनी का उना मान दर्शित करें। और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति नव पुरनी अंक का उना मान दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को आगर (एक अधिक) कर दर्शित करे। पुनः और पुनः का क्रम तब तक जारी रखे जब तक उक्त पुनः की स्थिति में बाँये अंक को आगर (एक अधिक) करने पर 6,7,8, या 9 होने को होता है ।

**जैसे** $8=08\ =1\bar{2}$, $85=\ 085\ =1\bar{2}\bar{5}=1\bar{1}\bar{5}$, $258=\ 3\bar{4}\bar{2}$, $658=\ 1\bar{3}\bar{4}\bar{2}$, $1392=14\bar{1}2$, $184739=2\bar{2}5\bar{3}4\bar{1}$

, $55555786=1\,\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{2}\bar{1}\bar{4}$, $29563299991=30\bar{4}\bar{4}3300\bar{1}1$

**टीप 1•** $54978=55\bar{0}\bar{2}\bar{2}$, $988888888=10\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}$, $99999999999=100000000001$, में शून्य (0) $\pm$ से परे है। **2•** आवश्यकतानुसार आंशिक उनागर संख्या प्राप्त कर सकते है। **3•** व्याापक अध्ययन में उना अंक $\bar{9},\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5}$ भी लिये जा सकते है।

**24-7 उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलना** उनागर संख्या को सामान्य संख्या में बदलने के लिए–

**1•** वह अंक या अंक समूह के अंकों को दृष्टिगत करें जो $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{4},\bar{5},\bar{6},\bar{7},\bar{8},\bar{9}$ हो । दर्शित उनागर संख्या के अंक स्थान विस्तार में यें अलग–अलग दो या दो से अधिक स्थान या समूह में हो सकते ।

**2A•** उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार एकैक अंक में ही हो तो इन के योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित करें और इस प्रकार जिन उना अंकों के प्रति उनके योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित दसपुरनी अंक किया जा चुका के बाँये अंक को उना(एक न्यून) कर दर्शित करे।

**2B•** उपरोक्त अंक बिन्दु 1 के अनुसार समूह में हो तो समूह अंकों के प्रथम दाँये उना अंक के योज्य प्रतिलोम का दसपुरनी मान दर्शित करें तथा शेष उना अंकों के योज्य प्रतिलोम का नवपुरनी मान दर्शित करें और इस प्रकार समूह के दाँये से बाँये अंतिम उना अंक के योज्य प्रतिलोम के प्रति नवपुरनी अंक दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को उना (एक न्यून) कर दर्शित करे।

2A और 2B के बाद पुनः यदि यह बाँये अंक 0 (शून्य) जिसका उना $\bar{1}$ होगा के प्रति 0 (शून्य)का योज्य प्रतिलोम 0 का नवपुरनी 9 दर्शित करें। और इस प्रकार जिन अंकों के प्रति नव पुरनी अंक दर्शित किया जा चुका के बाँये अंक को उना (एक न्यून) कर दर्शित करे। पुनः और पुनः का क्रम तब तक जारी रखे जब तक उक्त पुनः की स्थिति में बाँये अंक जिसे उना करना है वह 0 (शून्य) हो ।

**जैसे** $1\bar{2}=08$, $1\bar{2}\bar{5}=85$ , $258=\ 3\bar{4}\bar{2}=258$ , $1\bar{3}\bar{4}\bar{2}=658$, $14\bar{1}2=1392$, $184739=2\bar{2}5\bar{3}4\bar{1}=184739$, $550\ \bar{2}\bar{2}=54978$, $1\ \bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{4}\bar{2}\bar{1}\bar{4}=55555786$, $10\ \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{2}=988888888$, $100000000001=99999999999$, $30\bar{4}\bar{4}3300\bar{1}1=29563299991$

**24-8 छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार** छत्तीसगढ की अपनी लोक लुभावन संस्कृति है। जो लेखनी के अभाव में पीढ़ी दर पीढ़ी हस्तान्तरित एवं मुखान्तरित ही होते आ रहा है। जिन–जिन विधा का हस्तान्तण एवं मुखान्तरण का क्रम सतत् जारी रहा है वे विधाएँ फलीभूत हो रही है। जिसे लेखबद्ध करने की ओर हमारे मनीषी अपने–अपने विधा क्षेत्र भाव में समर्पित है। जिसका प्रभाव आप सब के सामने है। छत्तीसगढ़ राज्य बना और लुप्त होती छत्तीसगढ़ी बोली ( समय चक्र में हिन्दीं, अंग्रेजी भाषा के बढ़ते प्रभाव में छत्तीसगढ़ी बोलने वालों को हीन भाव से भी देखा जाने लगा) को राजभाषा का सम्मान मिला। वर्तमान परिदृश्य में हमें गर्वान्तित कर रहा है। छत्तीसगढ की गणित विधा भी अपने आप में एक विशिष्ट विधा है। आप पूर्व अध्ययन से अवलोकित कर रहे है। आगे अध्ययन में भी अवलोकित करेंगे। इसी क्रम में छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार भी विशिष्ट अध्ययन का विषय वस्तु है।

संख्याओं के आधारमिति विश्लेषण से प्रमाणित हो चुका है कि प्रचलित हिन्दु–अरेबिक एवं ब्रिट्रिश संख्यांकन पद्धत्तियाँ का आधार दस ;10द्ध है। अतः इसे दशाधारी संख्या कहते हैं। दशाधारी संख्या को दो या दो से अधिक n आधारी संख्यांकन में दर्शित किया जा सकता है। जिसका

⧗ किसी संख्या के पूरे अंक उना ( रेखाबंधनी ) मुक्त हो तो वह संख्या प्राकृत संख्या तथा पूरे अंक उना ( रेखाबंधनी ) युक्त हो तोणात्मक पूर्ण संऋ ख्या होगा।

वाचन बाँये से दाँये एकअंकीय वाचन क्रम ही यथेष्ठ होगा और लेखन के लिए प्रयुक्त अंक $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, \underline{10}, \underline{11}, \underline{12}, - - - - - \underline{n-3}, \underline{n-2}, \underline{n-1}$ होंगे। जैसा कि आपको विदित है कि कम्प्यूटर टेक्नालाजी में समस्त प्रोग्रामिंग दो आधारी संख्यांकन पर ही आधारित है। जिसके लेखन में 0 या 1 का ही प्रयोग होता है।

## 1 से 40 तक की 10 आधारी संख्या का 2 आधारी एवं 3 आधारी में निरूपण

| 10 आ. | 2 आ. | 3 आ. | 10 आ. | 2आ. | 3 आ. | 10 आ. | 2आ. | 3 आ. | 10 आ. | 2आ. | 3 आ. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 11 | 1011 | 102 | 21 | 10101 | 210 | 31 | 11111 | 1011 |
| 2 | 10 | 2 | 12 | 1100 | 110 | 22 | 10110 | 211 | 32 | 100000 | 1012 |
| 3 | 11 | 10 | 13 | 1101 | 111 | 23 | 10111 | 212 | 33 | 100001 | 1020 |
| 4 | 100 | 11 | 14 | 1110 | 112 | 24 | 11000 | 220 | 34 | 100010 | 1021 |
| 5 | 101 | 12 | 15 | 1111 | 120 | 25 | 11001 | 221 | 35 | 100011 | 1022 |
| 6 | 110 | 20 | 16 | 10000 | 121 | 26 | 11010 | 222 | 36 | 100100 | 1100 |
| 7 | 111 | 21 | 17 | 10001 | 122 | 27 | 11011 | 1000 | 37 | 100101 | 1101 |
| 8 | 1000 | 22 | 18 | 10010 | 200 | 28 | 11100 | 1001 | 38 | 100110 | 1102 |
| 9 | 1001 | 100 | 19 | 10011 | 201 | 29 | 11101 | 1002 | 39 | 100111 | 1110 |
| 10 | 1010 | 101 | 20 | 10100 | 202 | 30 | 11110 | 1010 | 40 | 101000 | 1111 |

## प्राकृत संख्याकन का आधार10 और छत्तीसगढ़ संख्यांकन का आधार बीस(कोरी/कोड़ी) चुनने का तर्क

छत्तीसगढ़ संख्यांकन का आधार बीस को कोरी (कोड़ी) कहने में कौड़ी बीज चित्र





प्राकृत संख्या का आधार 10 चुनने का संयोग भूगोल,खगोल एवं ज्योतिष विज्ञान में स्थान विशेष के सीमांकन की 10 दिशाएँ है। इसी प्रकार छत्तीसगढियों ने अपने गणित विधा की विकास यात्रा में प्रत्यक्ष भाव सें अपने दोनों हाथ (कर) एवं पाँव या पैर (गोड़) के उंगली (अंगरी) की कुल संख्या 20 चुनने का एक पक्ष बनाया है। इसका दूसरा पक्ष कौडी बीज है। जिसे व्यवसायिक पृष्ठभूमि में प्रथम और प्रथम बार मुद्रा के रूप स्वीकरा गया। आज भी अति गरीबी का अंतिम आकलन फुट्टी कौडी तक नहीं होने से ही करते है। चिकित्सा विज्ञान ज्योतिषविज्ञान, वास्तु विज्ञान तंत्र, मंत्र, यंत्र में कौड़ी के प्रकारों एवं उनके उपयोगों का अध्ययन एक अलग विषय है। आदिवासी स्वयं अपने और अपने देवी देवता के श्रृंगार में कौड़ी का उपयोग करते है। छत्तीसगढ़ी राऊतनाचा श्रृंगाार साधन में कौड़ी माला का विशेष महत्व है। आधुनिक परिदृश्य में विशेष अध्ययन का विषय हो गया है। कौड़ी बीज के विशिष्ट प्रकारों में से एक ऐसा कौड़ी बीज होता है जिसके मध्य चीरे के दोनों ओर बने स्पष्ट पलक सदृश्य उभारों के मध्य ऊपर–नीचे मिलाकर भागों की कुल संख्या 20 बनती है। इन विशिष्ट प्रकार के कौडी बीजों में अति विशिष्ट प्रकार के कौड़ी बीज के मध्य चीरे के दोनों ओर बने स्पष्ट स्केली उभारों के मध्य भागों की संख्या बराबर–बराबर 10-10 की भी बनती है। ऐसे विशिष्ट एवं अतिविशिष्ट कौड़ी के मध्य भागों की कुल संख्या 20 को ही कौड़ी से कोरी कहा जाने लगा। इस प्रकार छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति का आधार बीसाधारी या कोरी आधारी मे स्वीकारा जाना चाहिए। BHARGAV'S STANDARD ILLUSTRATED D1CTIONARY OF THE ENGLISH LANGUAGE (Anglo – Hindi Edition) Compiled & Edited by prof R.C. PATHAK, B.A.L.T के पृष्ठ 1140 में संख्यांकन की एक गणना प्रणाली (पद्धत्ति) में 20 इकाई = 1 कोड़ी माना गया है।जिसका अपभ्रंश कोरी निश्चित ही उक्त पद्धति छत्तीसगढ़ संख्यांकन पद्धत्ति है। ज्योतिष विद्या में वर्षा होने का मूल्यांकन मानक वर्षा की इकाई का बीस भाग कर एक बीसवाँ, दो बीसवाँ, तीनबीसवाँ, चारबीसवाँ, पाँचबीसवाँ छःबीसवाँ .....जैसे आकलन कर वर्षा से होने वाले लाभ हानि का अध्ययन किया जाता है। हमारे छत्तीसगढिया पूर्वज पाव (इकाई का चौथाई मान) = । (एक काड़ी) अध ( इकाई का आधा मान )=।। (दो काड़ी ) पौन ( इकाई का तीनचौथाई मान ) = ।।। (तीन काड़ी ) सवैया (सवा गुना) = १। , डेवढ़ा (डेढ़ गुना) = १।। , अड़ैया (अड़ई या ढाई गुना)= 2।। , उंठा (अउठ या साड़े तीनगुना) = 3।। , ढेउचा (ढेउच या साड़ेचार गुना)= ४।। , पउचा (साड़े पाच गुना)= ५।। तक की तालिका (पहाड़ा) उसी तरह कंठस्थ रखते जैसे दो से बीस का पहाड़ा।

10 इकाई = अध (आधा) कोरी , 30 इकाई = डेढ़ कोरी ,50 इकाई = ढाई (अड़ई) कोरी, 70 इकाई = अउठ (साड़ेतीन) कोरी, 90 इकाई = ढेउच (साड़ेचार) कोरी, 100 इकाई =1 सौ एवं उना–आगर का उपयोग शैली में कोरी आधारमिति विश्लेषण के आधार पर 1 से 100 तक संख्या लिखना पढ़ना निम्नानुसार अवलोकित कीजिए।

| 1 से 10 तक | | | | 11से 20 तक | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| दशाधारी | | कोरी आधारी | | दशाधारी | | कोरी आधारी | |
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 1 | एक | १ | एक | 11 | ग्यारह | ११ या ।।१ | ग्यारह या ।।१ अधकोरी एक |
| 2 | दो | २ | दु | 12 | बारह | १२ या ।।,२ | बारा/अधकोरी दु |
| 3 | तिन | ३ | तिन | 13 | तेरह | १३ या ।।,३ | तेरा/अधकोरी तिन |
| 4 | चार | ४ | चार | 14 | चौदह | १४ या ।।,४ | चौदा/अधकोरी चार |
| 5 | पाँच | ५ | पाच | 15 | पंद्रह | १५या ।।,५ या १$\bar{५}$ | पंदरा/अधकोरी पाच/पाच उना एक कोरी |
| 6 | छह | ६ | छे | 16 | सोलह | १६या ।।,६या १$\bar{४}$ | सोला/ अधकोरी छे/चार उना एक कोरी |
| 7 | सत | ७ | सात | 17 | सत्रह | १७ या ।।,७या १$\bar{३}$ | सतरा/अधकोरी सात/तिन उना एक कोरी |
| 8 | आठ | ८ | आठ | 18 | अठारह | १८या ।।,८या १$\bar{२}$ | अठरा/अधकोरी आठ/ दुउनाएक कोरी |
| 9 | नव | ९ | नव | 19 | उन्नीस | १९ या ।।,९या १$\bar{१}$ | उंनाइस/अधकोरी नव /एकउना एक कोरी |
| 10 | दस | १० | दस/अधकोरी | 20 | बिस | १० | बीस/ कोरी |

## 21 से 30 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 21 | इक्कीस | ११ | एक कोरी एक या एकआगर एक कोरी |
| 22 | बाइस | १२ | एक कोरी दुया दु आगर एक कोरी |
| 23 | तेइस | १३ | एक कोरी तिन या तिन आगर एक कोरी |
| 24 | चौबीस | १४ | एक कोरी चार या चार आगर एक कोरी |
| 25 | पच्चीस | १५या १।।,$\bar{५}$ | एक कोरी पाच या पाच आगर एक कोरीया पाचउना डेढ़ कोरी |
| 26 | छब्बीस | १६या १।।,$\bar{४}$ | एक कोरी छे या छे आगर एक कोरीया चार उना डेढ़ कोरी |
| 27 | सत्ताइस | १७या १।।,$\bar{३}$ | एक कोरी सातया सात आगर एक कोरी या तीनउना डेढ़ कोरी |
| 28 | अठाइस | १८या १।।,$\bar{२}$ | एक कोरी आठ या आठ आगर एक कोरी या दुउना डेढ़ कोरी |
| 29 | उनतीस | १९या १।।,$\bar{१}$ | एक कोरी नव या नव आगर एक कोरी या एक उना डेढ़ कोरी |
| 30 | तीस | १,१० या १।। | एक कोरी दस या डेढ़ कोरी |

## 31 से 40 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 31 | एकतीस | १,११ या १।।,१ | एक कोरी ग्यारा या डेढ़ कोरी एक या एक आगर ड़ेढ़ कोरी |
| 32 | बत्तीस | १,१२ या १।।,२ | एक कोरी बारारा या डेढ़ कोरी दुया दु आगर ड़ेढ़ कोरी |
| 33 | तैतीस | १,१३ या १।।,३ | एक कोरी तेरा या डेढ़ कोरी तिनया तिन आगर ड़ेढ़ कोरी |
| 34 | चौतीस | १,१४ या १।।,४ | एक कोरी चौदा या डेढ़ कोरी चार या चार आगर ड़ेढ़ कोरी |
| 35 | पैतीस | १,१५ या १।।,५ या २,$\bar{५}$ | एक कोरी पंदरा या डेढ़ कोरी पाच या पाच आगर ड़ेढ़ कोरी या पाच उना दुकोरी |
| 36 | छत्तीस | १,१६ या १।।,६या २,$\bar{४}$ | एक कोरी सोला या डेढ़ कोरी छे या छे आगर ड़ेढ़ कोरी या चार उना दुकोरी |
| 37 | सैतीस | १,१७ या १।।,७ या २,$\bar{३}$ | एक कोरी सतरा या डेढ़ कोरी या सात आगर ड़ेढ़ कोरी सात या तिन उना दुकोरी |
| 38 | अड़तीस | १,१८ या १।।,८या २,$\bar{२}$ | एक कोरी अठरा या डेढ़ कोरी आठया आठ आगर ड़ेढ़ कोरी या दु उना दुकोरी |
| 39 | उनचालीस | १,१९ या १।।,९ या २,$\bar{१}$ | एक कोरी उन्नाइस या डेढ़ कोरी नव या नव आगर ड़ेढ़ कोरीया एक उना दुकोरी |
| 40 | चालीस | २,० | छुकोरी |

## 41से 50 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 41 | एकचालिस | २१ | दु कोरी एक या एक आगर दु कोरी |
| 42 | बियालिस | २२ | दु कोरी दु या दु आगर दु कोरी |
| 43 | तिरालिस | २३ | दु कोरी तिन या तिन आगर दु कोरी |
| 44 | चौवालिस | २४ | दु कोरी चार या चार आगर दु कोरी |
| 45 | पैतालिस | २५या २।।,$\bar{५}$ | दु कोरी पाच या पाच आगर दु कोरी या पाचउना अड़इ. कोरी |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 46 | छियालिस | २६या २।।,४̄ | दुकोरी छे या छे आगर दु कोरी या चार उना अड़इ कोरी |
| 47 | सैतालिस | २७या २।।,३̄ | दुकोरी सातया सात आगर दु कोरी या तिन उना अड़इ कोरी |
| 48 | अड़तालिस | २८या २।।,2̄ | दु कोरी आठ या आठ आगर दु कोरी या दु उना अड़इ कोरी |
| 49 | उनचास | २९या २।।,1̄ | दु कोरी नव या नव आगर दु कोरी या एक उना अड़इ कोरी |
| 50 | पचास | २,१0 या 2।। | दु कोरी दस या अड़इ कोरी |

## 51 से 60 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 51 | इक्यावन | २,११ या २।।,१ | दु कोरी ग्यारा या अड़इ कोरी एक या एक आगर अड़इ कोरी |
| 52 | बावन | २,१२ या २।।,२ | दु कोरी बारारा या अड़इ. कोरी दुया दु आगर अड़इ कोरी |
| 53 | तिरपन | २,१३ या २।।,३ | दु कोरी तेरा या अड़इ कोरी तिन या तिन आगर अड़इ कोरी |
| 54 | चौवन | २,१४ या २।।,४ | दु कोरी चौदा या अड़इ कोरी चार या चार आगर अड़इ कोरी |
| 55 | पचपन | २,१५ या २।।,५या ३,५̄ | दु कोरी पंदरा या अड़इ कोरी पाच या पाच आगर अड़इ कोरी या पाच उना तिनकोरी |
| 56 | छप्पन | २,१६ या २।।,६या ३,४̄ | दुकोरी सोला या अड़इ. कोरी छे या छे आगर अड़इ कोरी या चार उनातिनकोरी |
| 57 | सन्तावन | २,१७ या २।।,७ या३,३̄ | दु कोरी सतरा या अड़इ कोरी सात या सात आगर अड़इ कोरी या तिन उना तिनकोरी |
| 58 | अन्ठावन | २,१८ या २।।,८या ३,२̄ | दु कोरी अठरा या अड़इ कोरी आठया आठ आगर अड़इ कोरी या दु उना तिनकोरी |
| 59 | उनसठ | २,१९ या २।।,९ या ३,१̄ | दु कोरी उन्नाइस या अड़इ कोरी नव या नव आगर अड़इ कोरी या एकउना तिनकोरी |
| 60 | साठ | ३,0 | थ्तनकोरी |

## 61 से 70 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 61 | एकसठ | ३,१ | तिन कोरी एक या एक आगर तिनकोरी |
| 62 | बासठ | ३२ | तिन कोरी दु या दु आगर तिनकोरी |
| 63 | तिरसठ | ३३ | तिन कोरी तिन या तिन आगर तिनकोरी |
| 64 | चौसठ | ३४ | तिन कोरी चार या चार आगर तिनकोरी |
| 65 | पैसठ | ३,५या ३।।,५̄ | तिन कोरी पाच या पाच आगर तिनकोरी या पाचउना अउठ. कोरी |
| 66 | छियासठ | ३,६या ३।।,४̄ | तिन कोरी छेया छे आगर तिनकोरी या चार उना अउठ कोरी |
| 67 | सड़सठ | ३,७या ३।।,३̄ | तिनकोरी सात या सात आगर तिनकोरी या तीनउना अउठ कोरी |
| 68 | अड़सठ | ३८या ३।।,२̄ | तिन कोरी आठ या आठ आगर तिनकोरी या दुउना अउठ कोरी |
| 69 | उनहत्तर | ३९या ३।।,१̄ | तिनकोरी नव या नव आगर तिनकोरी या एक उना अउठ कोरी |
| 70 | सत्तर | ३,१0 या ३।। | तिनकोरी दस या अउठ़ कोरी |

## 71से 80 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |
| 71 | एकहत्तर | 3,११ या ३।।,१ | तिन कोरी ग्यारा या अउठ़ कोरी एक या एक आगर अउठ कोरी |
| 72 | बहहत्तर | ३,१२ या ३।।,२ | तिन कोरी बारारा या अउठ़ कोरी दुया दु आगर अउठ कोरी |
| 73 | तिहहत्तर | ३,१३ या ३।।,३ | तिन कोरी तेरा या अउठ कोरी तिनया तिन आगर अउठ कोरी |
| 74 | चौहत्तर | ३,१४ या ३।।,४ | तिन कोरी चौदा या अउठ़ कोरी चारया चार आगर अउठ कोरी |
| 75 | पचहत्तर | ३,१५ या ३।।,५ या ४,५̄ | तिन कोरी पंदरा या अउठकोरी पाच या पाच आगर अउठकोरी या पाच उना चारकोरी |
| 76 | छिहत्तर | ३,१६ या ३।।,६या ४,४̄ | तिन कोरी सोला या अउठ़ कोरी छे या छे आगर अउठ कोरी या चार उना चारकोरी |
| 77 | सतहत्तर | ३,१७ या ३।।,७या ४,३̄ | तिन कोरी सतरा या अउठ़ कोरी सात या सात आगर अउठ कोरी या तिन उना चारकोरी |
| 78 | अठहत्तर | ३,१८ या ३।।,८या ४,२̄ | तिन कोरी अठरा या अउठ़ कोरी आठ या आठ आगर अउठ कोरी या दु उना चारकोरी |
| 79 | उन्यासी | ३,१९ या ३।।,९ या ४,१̄ | तिन कोरी उन्नाइस या अउठकोरी नव या नवआगर अउठ कोरी या एक उना चारकोरी |
| 80 | अस्सी | ४,0 | चारकोरी |

## 81स 90 तक

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढ़ना | लिखना | पढ़ना |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 81 | इक्यासी | ४,१ | चार कोरी एक या एक आगर चार कोरी |
| 82 | बियासी | ४,२ | चार कोरी दु या दु आगर चार कोरी |
| 83 | तिरासी | ४,३ | चार कोरी तिन या तिन आगर चार कोरी |
| 84 | चौरासी | ४,४ | चार कोरी चार या चार आगर चार कोरी |
| 85 | पचयासी | ४,५या ४।।,$\overline{५}$ | चारकोरी पाच या पाच आगर चार कोरी ा पाचउना ढेउच कोरी |
| 86 | छियासी | ४,६या ४।।,$\overline{४}$ | चारकोरी छे या छे आगर चार कोरी या चार उना ढेउच कोरी |
| 87 | सतयासी | ४,७या ४।।,$\overline{३}$ | चारकोरी सात या सात आगर चार कोरी या तीनउना ढेउच कोरी |
| 88 | अठयासी | ४,८या ४।।,$\overline{२}$ | चारकोरी आठ या आठ आगर चार कोरी या दुउना ढेउच कोरी |
| 89 | नवयासी | ४,९या ४।।,$\overline{१}$ | चार कोरी नव या नवआगर चार कोरी या एक उना ढेउच कोरी |
| 90 | नब्बे | ४,$\underline{१०}$ या ४।। | चार कोरी दस या ढेउच कोरी |

**91 से 100 तक**

| दशाधारी | | कोरी आधारी | |
|---|---|---|---|
| लिखना | पढना | लिखना | पढ़ना |
| 91 | इन्कानबे | ४,$\underline{११}$ या ४।।,१ | चार कोरी ग्यारा या ढेउच कोरी एक या एक आगर ढेउच कोरी |
| 92 | बिन्यानबे | ४,$\underline{१२}$ या ४।।,२ | चार कोरी बाराा या ढेउच कोरी दु या दु आगर ढेउच कोरी |
| 93 | तिरानबे | ४,$\underline{१३}$ या ४।।,३ | चार कोरी तेरा या ढेउच कोरी तिन या तिन आगर ढेउच कोरी |
| 94 | चौरानबे | ४,$\underline{१४}$ या ४।।,४ | चार कोरी चौदा या ढेउच कोरी चार या चार आगर ढेउच कोरी |
| 95 | पंचानबे | ४,$\underline{१५}$ या ४।।,५या ५,$\overline{५}$ | चार कोरी पंदरा या ढेउच कोरी पाच या पाच आगर ढेउच कोरीया पाच उना पाच कोरी |
| 96 | छियानबे | ४,$\underline{१६}$ या ४।।,६या ५,$\overline{४}$ | चार कोरी सोला या ढेउच कोरी छेया छे आगर ढेउच कोरी या चार उना पाच कोरी |
| 97 | संतानबे | ४,$\underline{१७}$ या ४।।,७या ५,$\overline{३}$ | चार कोरी सतरा या ढेउचकोरी सात या सात आगर ढेउच कोरी या तिन उना पाच कोरी |
| 98 | अन्ठानबे | ४,$\underline{१८}$ या ४।।,८या ५ ,$\overline{२}$ | चार कोरी अठरा या ढेउच कोरी आठ या आठआगर ढेउच कोरी या दु उना पाचकोरी |
| 99 | निन्यानबे | ४,$\underline{१९}$ या ४।।,९या ५,$\overline{१}$ | चार कोरी उन्नाइस या ढेउच कोरी नव या नव आगर ढेउच कोरी या एक उना पाच कोरी |
| 100 | सौ | ५,0 | पाचकोरी |

-

**टीप 1•** संख्या तालिका में कोरी आधारी छत्तीसगढ़ संख्यांकन लिपि पाली संस्कृत से ली गई हिन्दी लिपि है। आधुनिक अध्ययन में ब्रिट्रिश संख्यांकन लिपि ही अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन लिपि के रूप में स्वीकार हो चुका है। अतः अन्तर्राष्ट्रीय संख्यांकन लिपि में दर्शित करने को विडम्बना के श्रेणी में नहीं लिया जाना यथेष्ठ होगा। आगे ऐसा ही जाने।

**2•** चूँकि n आधारी संख्यांकन पद्धत्ति में 0 सहित n अंक प्रयुक्त होंगे। 2 ,3,4--- ---8,9,10 आधारी संख्यांकन में प्रयुक्त अंक संकेतन क्रमशः {0,1},{0,1,2},{0,1,2,3},-------{0,1,2----5,6,7},{0,1,2,------6,7,8},{0,1,2----7,8,9}एक स्थानिक होंगे। जबकि दश10 के लिए अंक संकेतन 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 के बाद अंक संकेतन ;11),(12),(13)---------(n-3),(n-2),(n-1) दो या दो अधिक स्थानिक होंगे। जिन्हें स्पष्टतः अलग–अलग अंक संकेतन के दृष्टि से नीचे रेखांकित कर $\underline{10},\underline{11},\underline{12}---\underline{n-3},\underline{n-2},\underline{n-1}$ दर्शित करना चाहिए। तद्अनुसार कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन के स्पष्टतः अलग–अलग अंक संकेतन के 20 अंक 0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9,$\underline{10},\underline{11},\underline{12},\underline{13},\underline{14},\underline{15},\underline{17},\underline{18},\underline{19}$ होंगे।

**24-9 कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या को स्पष्टतः दर्शित करना** आधारमिति विश्लेषण के अनुसार दशाधारी संख्यांकन के संख्या के अतिरिक्त किसी भी n आधारी संख्यांकन की संख्या को स्पष्टतः दर्शित करने द आधारी संख्यांकन की संख्या को छोटे कोष्टक में बंदकर कोष्टक के बाहर दाँये नीचे किनारे में आधार संख्यांक n दर्शित करते हैं। तदानुसार कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या को छोटे कोष्टक में बंदकर कोष्टक के बाहर दाँये नीचे किनारे में आधार संख्यांक 20 दर्शित करते हैं। जैसे कोरी (बीस) आधारी संख्यांकन की संख्या $5\underline{17}\,\underline{19}$ को स्पष्टतः $(5\underline{17}\,\underline{19})_{20}$ दर्शित करेंगे।

**24-10 कोरी या बीस आधारी (छत्तीसगढ़) संख्यांकन पद्धति की संख्या को दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन की संख्या में बदलना** आधारमिति विश्लेषण के अनुसार n आधारी संख्यांकन की संख्या $(x_r\ x_{r-1}\ x_{r-2}x_{r-3}---x_4\ x_3x_2\ x)_n$ का प्रसारित संकेतन हल मान $= x_r * n^{r-1} + x_{r-1} * n^{r-2} + x_{r-2} * n^{r-3} + x_{r-3} * n^{r-4} + ---x_4 * n^3 + x_3 * n^2 + x_2 * n + x$ का योग मान होगा। तदानुसार 20 आधारी संख्यांकन की संख्या ; $x_r\ x_{r-1}\ x_{r-2}x_{r-3}---x_4\ x_3x_2\ x)_{20}$ का प्रसारित संकेतन हल मान $= x_r * 20^{r-1} + x_{r-1} * 20^{r-2} + x_{r-2} * 20^{r-3} + x_{r-3} * 20^{r-4} + ---x_4 * 20^3 + x_3 * 20^2 + x_2 * 20 + x$ का योग मान होगा।

**उदाहरण■** **1•** $;23)_{20} = 2*20+3 = 43$ **2•** $(4\ \underline{15}\ )_{20} = 4*20+15 = 95$,

**3•** $(5\ \underline{17}\ 3\ \underline{19})_{20} = 5*20^3 + 5*20^2 + 5*20 + 19 = 40000 + 2000 + 100 + 19$
$= 42119$

**4•** $(1111111111)_{20} = 20^9+20^8+20^7+20^6+20^5+20^4+20^3+20^2+20+1$
$= 512000000000+25600000000+1280000000+64000000+$
$3200000+160000+8000+400+20+1 = 5,38,94,73,68,421$

शब्दों में पाँच खरब, अड़तीस अरब, चौरानबे करोड, तिहत्तरलाख, अड़सठहजार चार सौ इक्कीस ।

**24-11 दशाधारी (अन्तराष्ट्रोय) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या को कोरी या बीस आधारी (छत्तीसगढ़) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या में बदलना**

**प्रक्रम 1** दशाधारी (अन्तराष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धत्ति की संख्या को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को प्रथम पंक्ति में पंक्तिबंद्ध कीजिए।

**प्रक्रम 2** प्रक्रम 1 से प्राप्त भागफल को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को दूसरे पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

.....

.....

**प्रक्रम r** प्रक्रम $(r-1)$ से प्राप्त भागफल को आधार मान 20 द्वारा विभाजित कर प्राप्त भागफल एवं शेषफल को त वें पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिये।

| प्रक्रम | भाजक | भागफल | शेषफल |
|---|---|---|---|
| दशाधारी संख्या → | | 37,94,73,68,421 | |
| 1 | 20 | 1897368421 | 1 |
| 2 | 20 | 94868421 | 1 |
| 3 | 20 | 4743421 | 1 |
| 4 | 20 | 23171 | 1 |
| 5 | 20 | 11858 | 11 |
| 6 | 20 | 592 | 18 |
| 7 | 20 | 29 | 12 |
| 8 | 20 | 1 | 9 |
| 9 | 20 | 0 | 1 |

ऐसा हल प्रक्रम शून्य (0) भागफल प्राप्त होने तक जारी रखें ।अंतिम भागफल शून्य एवं अंतिम शेषफल को अंतिम पंक्ति में पंक्तिबद्ध कीजिए।

**ध्यानाकर्षण** दो स्थानिक शेषफलों को नीचे रेखांकित कीजिए।

**अभीष्ट** प्राप्त अंतिम से प्रथम प्रक्रम तक के शेषफलों को बाँये से दाँये छोटे कोष्टक में बदकर दर्शित कीजिए। और दर्शित करने के नियम में के बाहर दाँये नीचे किनारे में आघार संख्यांक 20 दर्शित कर अभीष्ट हल मान प्राप्त कीजिए।

उदाहरण से– $37,94,73,68,421 = (1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1111)_{20}$ अभीष्ट हल मान होगा।

**हल जाँच** $;1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1111)_{20}$
$= 1*\ 20^8 + 9*20^7 + \underline{12}*20^6 + \underline{18}*2^5 + \underline{11}*20^4 + 1*20^3 + 1*20^2 + 1*20 + 1$
$= 25600000000+11520000000+768000000+57600000+1760000+8000+400+20+1$
$= 37,94,73,68,421$ प्रश्नांकित संख्या।

**24=12 कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार** अध्ययन क्रम में कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार के अभाव **-** को दृष्टिगत करते हुये मेरे अपने व्यक्तिगत विचार में कोरी आधारी संख्याओं का वाचन विस्तार **कोरिच /कोरित/कोरिद/कोरिन/रीठ/रिस/रिछ/रिप/रिच/रित/ रीद/कोरी/इकाई** लिया है। जिसके अनुसार दशाधारी संख्याकन की संख्या 37,94,73,68,421 का वाचन सैतीस अरब, चौरानबें करोड, तिहत्तर ..... लाख, अड़सठ हजार ,चार सौ इक्कीस = कोरीआधारी संख्याकन की संख्वा $(1\ 9\ \underline{12}\ \underline{18}\ \underline{11}\ 1\ 1\ 1\ 1)_{20}$ का वाचन **एकरीठ, नवरिस, बारहरिछ, अठ्ठारह रिप, ग्यारहरिच, एकरित, एकरीद, एककोरी, एक** होगा।

**24-13 कोरी आधारी संख्याओं में गणितीय रांक्रिया** अध्याय 2 से 24 तक के शीर्षक में प्रस्तुत दशाधारी सख्यांकन मैं गणितीय रांक्रिया के नियमों को परिपालन में लिया जाने में संशय नहीं किया जाना चाहिए है। हासिल/शेषफल /मूलाधार /उपाधार /;उनागर प्रचालको एवं आश्लेषकों द्ध की गणना कोरी आधारी संख्यांकन नियम के प्रति केवल और केवल दश ाधरी नियम के अधीन प्रयुक्त 9 एवं 10 का नियम क्रमशः$\underline{19}$ एवं $\underline{20}$ का नियम हो जाता है।तदनुसार एक अलग कृति **कोरी**

**X** घारी संख्यांकन की संख्या ही अन्तर्राष्ट्रीय संख्या होने से आधार संख्यांक 10 को दर्शित करने का नियम नहीं है। अतः एक स्थानिक अंक (0,1,2, दशा 3,4,5,6,7,8,9) संकेतन द्वारा दर्शित स्वतंत्र संख्या दशाधारी संख्यांकन की संख्या होंगे।

**आधारी संख्याओं में गणितीय रांक्रिया** के नाम पर प्रस्तुत किया जा सकता है।

**23-14 आधारमिति संख्यांकन में z,m,n का गोपनीय रहस्य** आधार n के प्रति $z < n$ एक अंक $\underline{n-r}$ के रूप में मान्य होगा। जहाँ त प्राकृत संख्या समुच्चय [1,2,3,4,5,6,7,8,9, -------(n-3),(n-2),(n-1) ] का एक अवयव है। इस प्रकार लिए गये, की बारंबारता m हो तो आधारमिति संख्यांकन में z,m,n का गोपनीय रहस्य (z,z,z ------m बार $)_n$ का मान दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धति मे प्राप्त संख्या से है।

**जैसे** $\underline{13}$,7,20 का गोपनीय रहस्य ;$\underline{13}$ $\underline{13}$ $\underline{13}$ .....7 बार $)_{20}$ का मान दशाधारी (अन्तर्राष्ट्रीय) संख्यांकन पद्धति मे प्राप्त संख्या $= [13*20^6 + 13*20^5 + 13*20^4 + 13*20^3 + 13*20^2 + 13*20^1 + 1*20^0] =$ 87,57,89,473 है। अति गोपनीयता में z,m,n में से किसी एक अथवा दो को मानक गोपनीयता के श्रेणी में रखा जा सकता है। जैसे संख्या 87,57,89,473 को अति गोपनीयता में –

1• **मानक गोपनीयता** $z = \underline{13}$ में 7,20
2• **मानक गोपनीयता** $m = 7$ में 13,20
3• **मानक गोपनीयता** $z = 20$ में 7, $\underline{13}$
4• **मानक गोपनीयता** $z = \underline{13}$ एवं $m = 7$ में केवल $n = 20$
5• **मानक गोपनीयता** $z = \underline{13}$ एवं $n = 20$ **में केवल** $m = 7$
6• **मानक गोपनीयता** $m = 7$ एवं $n = 20$ में केवल $z = 13$

प्रयुक्त होगा।

**- --24--- --**

# परिशिष्टियाँ

**नापना, मापना, तौलना तथा देखना अथवा बताना**– सामान्यतः वस्तुओं के आयतन को किसी पात्र की धारिता इकाई मान में नापते है। किसी तल की लम्बाई , चौड़ाई एवं क्षेत्रफल,, वस्तुओं के लम्बाई , चौड़ाई , मोटाई तथा एक स्थान से दूसरे स्थान की दूरी को स्केल पट्टी या फीता(टेप) से मापते हैं। वस्तु के भार (वजन) एवं मात्रा को तराजू (तुला) द्वारा तौलते हैं। कमानीदार तुला द्वारा वस्तु का भार भार इकाई माप में एवं वस्तु की मात्रा दो पलड़े वाले तुला से मात्रा इकाई माप में ज्ञात किया जाता है। उक्त तुलाओं प्राप्त क्रमश भार एवं मात्रा की मूल इकाई शब्दावली समान ही है। जिसमें भार के लिये भार और मात्रा प्रत्यय जोड़ा जाता है। जैसे 5 किलोग्राम भार वस्तु के भार को और 5 किलोग्राम मात्रा। दिशा एवं समय को देखा अथवा बताया जाता है। विज्ञान प्रयोगशाला में भार एवं मात्रा ज्ञात करने क्रमशः कमानीदार एवं भौतिक तुला, द्रवीय पदार्थ के आयतन ज्ञात करने नपना गिलास, समय निर्धारण के लिये बंद घड़ी (स्टाप वॉच), और दिशा निर्धारण के लिये दिक्सूचक यंत्र रखा होता है।

सामान्यतः द्रवीय (तरल) पदार्थ का आयतन एवं ठोस पदार्थ की मात्रा ज्ञात किया ताता है। लेकिन छत्तीसगढ़िया वस्तुओं के भण्डारण एवं आदान–प्रदान के लिये ऐसे पात्र को चुन रखे थे जिससे आयतन एवं मात्रा का संयोजन किया जा सके। इसका आधार छत्तीसगढ़ में बहुलता से उत्पादित अन्न चॉवल चुना गया, जैसे– आयतन इकाई में एक पायली चॉवल मात्रा ईकाई में एक सेर = दो पाउण्ड होता है। आयतन इकाई में एक काठा धान मात्रा ईकाई में तीन सेर होता है। आयतन इकाई में एक पायली घी मात्रा ईकाई में चार पाउण्ड होता है। (एक पाउण्ड=453.6ग्राम है) आयतन इकाई में एक सोली चॉवल मात्रा ईकाई में एक पाउण्ड होता है।

## परिशिष्ट –1 अनाज नापने की इकाई

| छत्तीसगढ़िया | | | | बस्तरिया | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | फोहाई | = 1 | पायली / सेर | 4 | सोर्ली | = 1 | पायली |
| 4 | पायली | = 1 | काठा | 4 | पायली | = 1 | खण्डी |
| 20 | काठा | = 1 | खण्डी | 10 | खण्डी | = 1 | ढूसी |
| 20 | खण्डी | = 1 | गाड़ा | 5 | ढूसी | = 1 | गाडा |

**काठा**–प्राचीन छत्तीसगढ़ मे अनाज भण्डारण की मात्रा ज्ञात करने न्यूनतम इकाई काठा माना गया है। जो सर्व प्रथम काठ (लकड़ी) का चौकोर पात्र के रूप में बनाया गया। जिसका शाही (राजसी)स्वरूप पीतल का बेलनाकार पात्र चुना गया जिसमें मानकीकृत करने राजकीय दर्शित होने का प्रमाण दृष्टिगत होता है। छत्तीसगढ़ में 36 राजघराने होने का प्रमाण है। अतः मानक धारिता की विभिन्नता देखने को मिलता है। जैसा कि बस्तर में पायली सोली जिसमें राजकीय चिन्ह त्रिशूल दर्शित है। रायपुर अंचल में मुरकट्टी और तीन सेरिया , कॉकेर अंचल में पाँच सेरिया काठा प्रपलित रहा है। प्रसतुत काठा का चित्र अविभाजित दुर्ग जिले में काठा इकाई का है। जो प्रथम काठ (लकड़ी) के चौकोर पात्र काठा जिसका अन्तःतल 6 इंच का वर्ग और ऊँचाई 8 इंच के प्रति आयतन 6*6*8 = 288 घन इंच होगा, के विकल्प में लिया गया है। इस बेलनाकार लोह पात्र काठा का अन्त तल 7.4 इंच ब्यास माप का वृत्ताकार और ऊँचाई 6.7 इंच के प्रति आयतन 3.142857* 3.7*3.7 *6.7 = 288.272272611 के लिये 288 घन इंच मान्य होगा, को मानकीकृत किया है। पूरा–पूरा सीग भराव (छलकते तक) पर 11 पाउण्ड = 453.6*11 =4989.6 ग्राम =4.9896 किलो ग्राम के प्रति 5किलो ग्राम चॉवल की मात्रा को माना गया है। सपाटमाप 288 घन इंच = 288*2.5*2.5*2.5=4500 घन से.मी. =4.500 लीटर = 4.500 किलोगाम के प्रति 10 पाउण्ड शुद्ध जल की मात्रा मान्य है। नापने ,मापने एवं तौलने के नये इकाई के साथ विलुत्त होने की ओर अग्रसर होते– होते आधुनिक परिदृश्य में विलुप्त सा ही हो गया है।



अविभाजित दुर्ग जिला अंचल का गाँव सुमारी पटेली काठा

## परिशिष्ट –2 मुद्रा इकाई

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | पाई | = | 1 पैसा |
| 4 | पैसा | = | 1 आना |

4 आना = 1 चवन्नी
2 चवन्नी = 1 अवन्नी / 8 आना
2 अठन्नी = 1 रूपिया / 16 आना

## परिशिष्ट –3 मात्रा एवं तौल इकाई

3 खसखस = 1 खड़ा चॉवल
8 खड़े चॉवल = 1 रत्ती
8 रत्ती = 1 माशा
12 माशा = 1 तोला
5 तोला = 1 छटॉक
5 छटॉक = 1 पाव
4 पाव = 1 सेर
40 सेर = 1 मन

## परिशिष्ट –4 लम्बाई मापने की इकाई

1 अंगुल = वयस्क पुरूष के मध्यमा ऊँगुली के नीचे पोर की चौड़ाई ।
3 अंगुल = 1 गिरह =2.25 इंच$^{\Psi}$
8 गिरह = 1 हाथ = 1. 5 फुट
2 हाथ = 1 गज = 3. 0 फुट
220 गज = 1 फर्लांग
8 फर्लांग = 1 मील = 1.6 किलोमीटर
3 मील = 1 कोस
12 कोस = 1 योजन

## परिशिष्ट –4 क्षेत्रफल की इकाई

1 गिरह वर्ग = 9 अंगुल वर्ग
1 हाथ वर्ग = 64 गिरह वर्ग = 2.25 फुटवर्ग
1 गज वर्ग = 4 हाथ वर्ग= 9 फुटवर्ग
1 डिसमिल = 435.6 फुटवर्ग= 48.4 गज वर्ग
1 एकड़ = 4840 गज वर्ग = 43560 फुटवर्ग

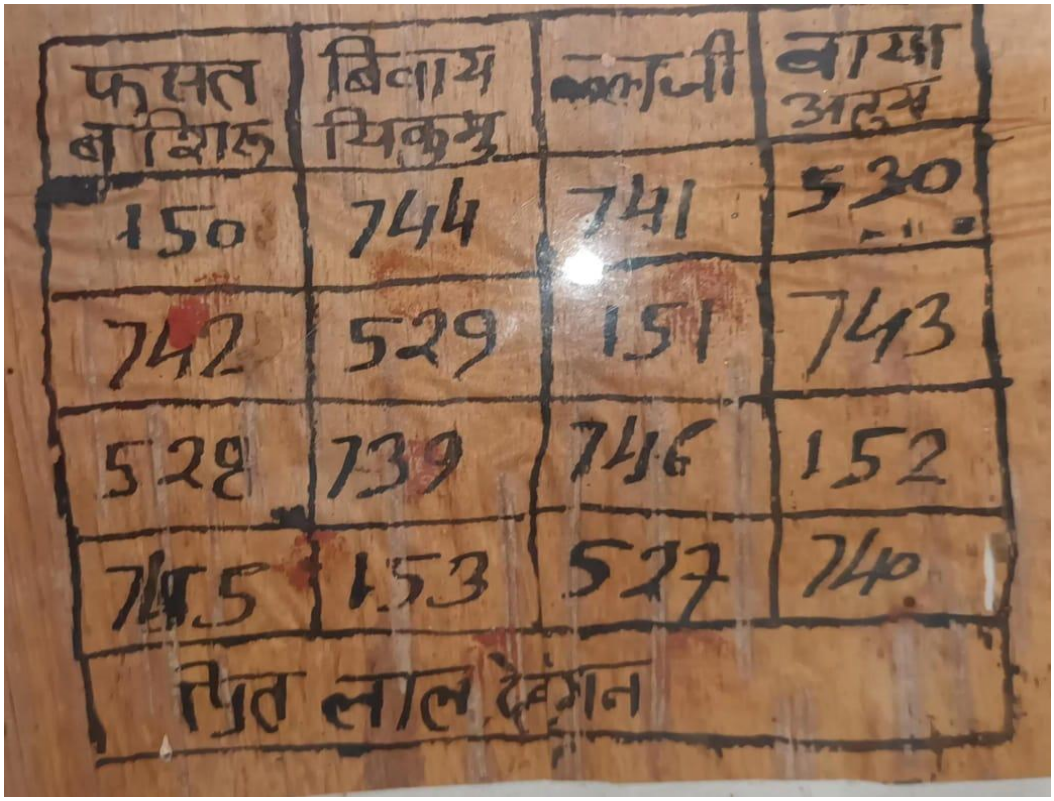
----- परिशिष्ट------

# संदर्भ ग्रंथ सूची

| क्र. | ग्रंथ के अंश | लेख / प्रत्रिका / ग्रंथ का नाम | लेखक | प्रकाशक | ग्रंथ से लीगई साम्रग्री का विवरण |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | अध्याय–2 जनडला | अड़हा मन के गणित (लेख) | कुम्हारीवाले श्री मुरारीलाल जीसाव | दैनिक–देशबन्धु रायपुर (छग.) | अंकं 29 जून 2002 में प्रकाशित लेख अड़हा मन के गणित |
| 2 | अध्याय–7 मितानी गणित के हल क्रम में लघुत्तम समापवर्त्य विधि के प्रति। | लीलावती गणित (ग्रंथ) | श्री युतगणक चक्र चूड़ामणि भास्कराचार्य | श्री खेमराज श्री कृष्णदास बम्बई | पृष्ठ 84-85 |
| 3 | अध्याय–9 केवल शीर्षक नाम के प्रति। | संसार के महान गणितज्ञ (ग्रंथ) | श्री गुणाकर मुलेजी | राजकमल प्रकाशन नईदिल्ली | पृष्ठ 336 में दिये श्रीनिवासरामानुजन् के नोटबुक का एक पृझठ। |
| 4 | अध्याय–12 मॉ दुर्गा के अंशावतार कथा के प्रति। | दुर्गा–सप्तणती (ग्रंथ) | श्री पंडित शशिमोहन जी | राज पाकेटबुक्स बुराड़ी नईदिल्ली | लेख शीर्षक – अथवैकृत रहस्य पृष्ठ 192-199 तक |
| 5 | अध्याय–12 सर्वसिद्ध दशानन तारक दशरथनंदन श्रीरामयंत्र के प्रति | वैदिक गणित पत्राचार पाठ्यक्रम साम्रग्री | श्री नरेन्द्रपुरी रीडर विश्वविद्यालय रूड़की (यू. पी उत्तराचल) | आध्यात्मिक अध्ययन संस्थान रूड़की (यू. पी) उत्तराचल) | श्लोक– गोपी भागयम् ध्रुवात् ..... श्रसंधरः। का कूटमान। |
| 6 | अध्याय–13 समान्तर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन के अन्तर्गत आधुनिक विकास क्रम में योग–योग संख्या श्रेढ़ी का व्यापक अध्ययन विस्ताार के प्रति। | विज्ञान प्रगति प्रत्रिका श्रीनिवासरामानुजन् जन्म शताब्दी विशेषांक 22 दिसम्बर 1987 | श्री गुणाकर मुलेजी | | गणितज्ञ द्वय लियोनार्दो फिबोनिकी एवं लुकस कें नाम पर –फिबोनिकी संख्या [1,1,2,3,5------]एवं लुकस संख्या [1,3,4,7,11------] श्रेढ़ी। |

---------- संदर्भ ग्रंथ सूची----------

## अध्यायः 11 चिशिष्ट प्रकार के जादुई–चर्ग अध्ययन विस्तार को प्ररित करता भिलाई टेलर्स अर्जुन्दा को सुख–समृद्धि एचं संतोष प्रदान करने के स्वरूपण में उनके दुकान में रखे भोजपत्र में हस्तलिपि में दर्ज जादुई–चर्ग की छाया प्रति




समाप्त

आपके मार्गदर्शन की अभिलाषा में
• आपका स्नेहकांक्षी •
पंचराम केशरिया
चाँदनी चौक नगर अर्जुन्दा जिला बालोद (छ.ग.) भारत
p.in 491225 mn 96300-86128• 96852-67495