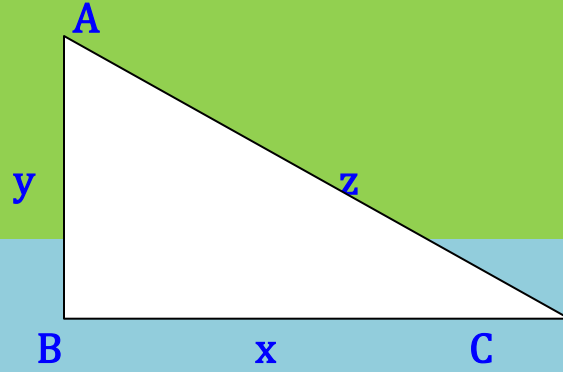


$$\frac{\pi}{10}$$

- गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्याकन पद्धति छत्तीसगढ़ की एक देन •

प्रखण्ड 3\3

त्रिकोणमिति एवं वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति



$$x^2 + y^2 = z^2$$

पंचराम केशरिया

■ गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्याकन पद्धति छत्तीसगढ़ की एक देन ■

प्रखण्ड 3\3

त्रिकोणमिति एवं वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति
लेखक एवं मुद्रक
पंचराम केशरिया

प्रकाशक

पुनः संशोधित एवं परिवर्धित प्रथम डिजिटल प्रिंट में प्रस्तुति रामनवमी दिनांक 27-03-2026

⊙ सर्वाधिकार सुरक्षित

आवरण सज्जा

संतोषकुमार मुन्देरा

सहयोग राशि 2551 रूपये मात्र



मेरे ईष्ट...

श्रीनिवास रामानुजन

(संसार के महान भारतीय गणितज्ञ)

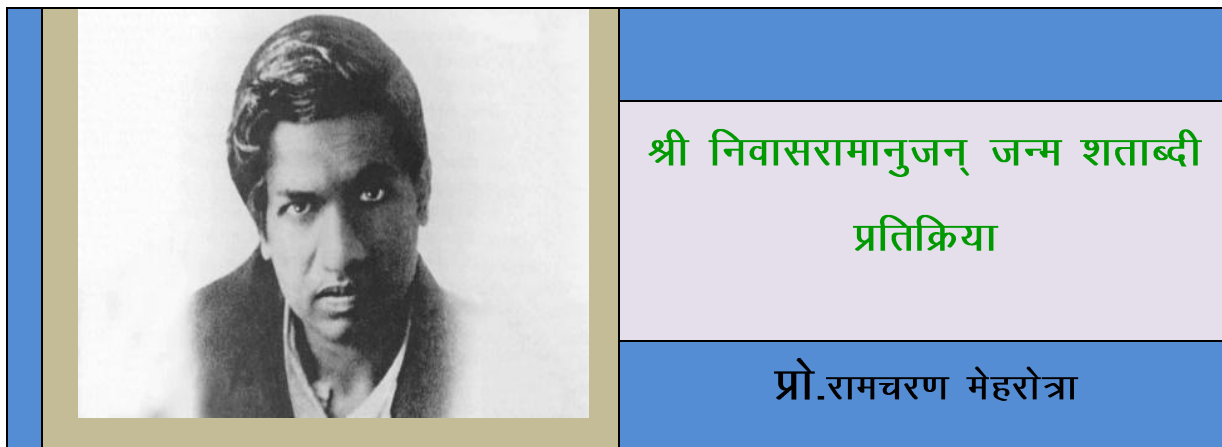
जन्म : 22 दिसम्बर 1887

मृत्यु : 26 अप्रैल 1920



सादर समर्पित...
पिताश्री स्व. जगतराम केशरिया
जन्म : 02 अक्टूबर 1932
मृत्यु : 02 जनवरी 1979

•श्रीनिवास रामानुजन्•



यह स्वाभाविक है कि रामानुजन् की जन्म शताब्दी के अवसर पर हम विशेष अनुराग तथा पैनी दृष्टि से उनके कार्यों का विश्लेषण करें। इसमें संदेह नहीं कि महान गणितज्ञ रामानुजन् की उपलब्धि को याद करके हम सबके हृदय में राष्ट्र अभिमान की भावना जागृत हो जाती है। इसमें भी संदेह नहीं कि प्राचीन काल में हमारे देश ने केवल दर्शनशास्त्र, समाजशास्त्र, और राजनीति आदि में ही विशेष योगदान नहीं दिया था वरन् विज्ञान की उन शाखाओं में भी जिन्हें " आधुनिक " कहा जाता है, अद्वितीय कार्य किया था। विज्ञान में इतनी प्रगति हो जाने के बाद आज भी संसार भर में त्रिकोण मिति आर्यभट्ट की विधि से ही पढ़ाई जाती है। हमारे देश में विकसित शून्य की अवधारणा पर आधारित दशमलव पद्धति मानव के समस्त क्रियाकलाप की आधारशिला बनी हुई है।

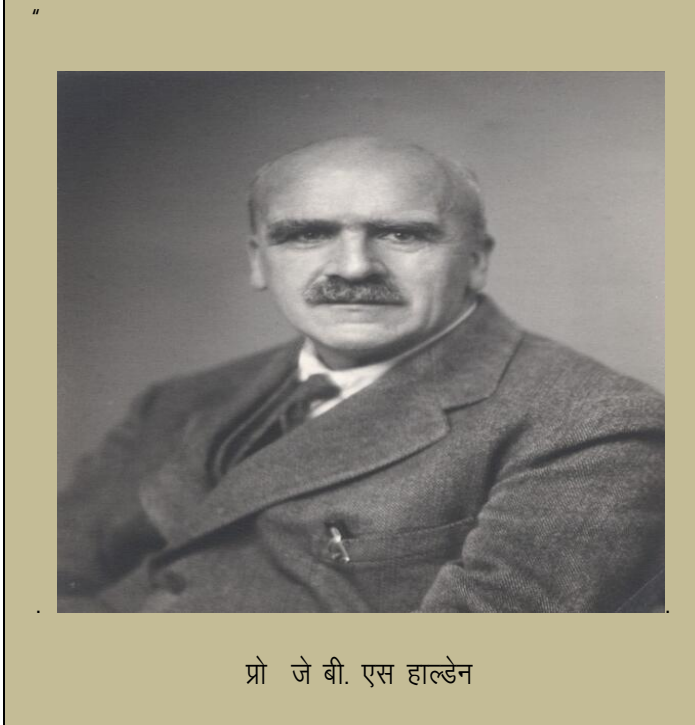
यद्यपि मेकाले की अंग्रेजी के माध्यम से शिक्षा देने की नीति से हमारी प्राचीन परम्पराओं को धक्का पहुँचा तथा हमारी सम्पूर्ण विचार-पद्धति बदलने लगी पर उससे हमारी ओजस्वी शक्ति समाप्त नहीं हुई। यद्यपि मेकाले की शिक्षा नीति का मुख्य उद्देश्य " केवल सफेद कालर वाले " बाबुओं एवं क्लर्कों की सहायता से गुलामी की जंजीरों को मजबूत करना था परन्तु उस काल में भी " रामानुजन्, रमन, मेघनाथ साहा, कृष्णन, साहनी, भामा, प्रफुल्लचन्द्र रे, सत्येन बोस जैसे वैज्ञानिक " उत्पन्न हुये जिन्होंने प्रतिकूल परिस्थियों पर विजय पाकर गणित तथा विज्ञान के अन्य क्षेत्रों में अपने योगदान से संसार को चकित कर दिया। अब 40 वर्षों से हम स्वतंत्र हैं परन्तु क्या मानसिक स्तर पर भी हम स्वतंत्र हो पाये हैं ? अपनी वर्तमान शिक्षा पद्धति की कमियों के लिये हम मेकाले को दोष देते हैं पर हमारे दोषारोपण पर मेकाले की आत्मा, कब्र में भी शायद मुस्कराती होगी।

यदि रामानुजन् के जन्म शताब्दी के इस अवसर पर हम अपने आसपास के वातावरण को देखे तो हमें कही न कही किसी गुदड़ी के लाल रामानुजन् जैसा छिपा मिल सकता है। पर क्या अब भी हमारे विद्वान ऐसी प्रतिभा को पहचान पायेंगे। आज भी हमारी शिक्षा पद्धति और नौकरी देन के तरीके ऐसे नहीं हैं कि रामानुजन् जैसे जन्मजात प्रतिभासम्पन्न पर बिना डिग्री धारी व्यक्ति को शिक्षक बना सकें या उन्हें किसी शोध संस्थान में प्रवेश दिला सके। ऐसी स्थिति में समुचित डिग्री के अभाव में आज भी कितने जीनियस उसी तरह दर-दर भटकते रहेंगे जैसे रामानुजन् भटके थे।

मुझे ब्रिटेन में जन्में, पर स्वेच्छा से भारत के नागरिक बन गये महान वैज्ञानिक प्रो. जे. बी. एस. हाल्डेन की उस श्रद्धांजली की याद आती है, जो उन्होंने अपनी मृत्यु से कुछ वर्ष पूर्व रामानुजन् को दी थी। निश्चय ही यह श्रद्धांजली प्रो. हाल्डेन की अपनी व्यंग्तात्मक शैली में है।

श्री निवास रामानुजन् के बारे में समारोह आयोजित करने का उस समय तक कोई लाभ नहीं है जब तक उनके जीवन से शिक्षा ग्रहण नहीं करते। पाँच वर्ष तक भारत में रहने के बाद मुझे एकदम स्पष्ट हो गया है कि भारतीय सरकारी संस्थानों और विश्वविद्यालयों ने इस बारे में कोई शिक्षा ग्रहण नहीं की है।

..... आज अगर रामानुजन भारत में होते तब गाँव के किसी कालेज में लेक्चरारशिप नहीं मिलती क्योंकि उनके पास कोई डिग्री नहीं थी। संघ लोक सेवा आयोग के माध्यम से कोई पद मिलने की कोई बात ही नहीं उठती। यह वास्तविकता भारत के लिये शर्म की बात है। मुझे मालूम है कि रायल सोसायटी के सदस्य मनोनीत हो जाने के बाद ही उन्हें भारत में प्राचार्य का पद प्रदान किया गया था। पर यह लज्जाजनक बात थी कि भारत की एक महान विभूति को विदेशी मान्यता प्राप्त होने तक इंतजार करना पड़ा। यदि रामानुजन के कार्यों को भारत में उतनी जल्दी मान्यता मिल जाती जितनी जल्दी इंग्लैण्ड में मिली थी, तब कदाचित वे



प्रो. जे. बी. एस. हाल्डेन

विदेश प्रवास में न जाते और आज भी जीवित होते। रामानुजन की प्रतिभा को मान्यता प्रदान न करने के लिये हम ब्रिटिशराज को दोष दे सकते हैं। पर हम ऐसा इसलिये नहीं कर सकते क्योंकि आज भी ऐसा होता है। रामानुजन के एक मित्र ने हाल में लिख था कि "रायल सोसायटी में उनका मनोनयन अनियमित था। पर ऐसा नहीं था। उनका मनोनयन नियमानुसार था। रायल सोसायटी डिग्रियों को अहमियत नहीं देती क्योंकि आरंभिक काल में उसके कुछ ही सदस्य डिग्रीधारी थे। रामानुजन के बाद, एक माली एम. बी. केन को, जिनके पास कोई डिग्री नहीं थी, फलदार वृक्षों पर की गई उनकी खोजों पर सदस्य मनोनीत कर दिया गया था।

"..... यदि भारत रामानुजन को सम्मानित करना चाहता है, जैसा कि उसे करना चाहिये, तब पहला कदम उन जैसे लोगों के लिये, जिनके पास कोई डिग्री नहीं है पर जिन्होंने महत्वपूर्ण योगदान दिया है, गणित और अन्य सैद्धांतिक विषयों में पद दिलाने के लिये उपाय करना चाहिये। जब तक ऐसा

नहीं करते तब तब हम ब्रिटिश साम्राज्यवादी परम्पराओं को जीवित रखेंगे और अपने अत्यंत गौरवशाली युवक युवतियों को हताश करते रहेंगे।

डॉ. रामशरण मेहरोत्रा. रसायन विभाग, राजस्थान विश्व विद्यालय जयपुर (राज),

●उन्होंने स्वयं अपना आविष्कार किया था●

गणित के आधुनिक इतिहास में रामानुजन रोमांचकारी व्यक्ति थे— एक ऐसे व्यक्ति जिनका पूरा जीवन विरोधाभासी और असंगतियों से भरा हुआ था। उन्होंने उन सब नियमों को झूठलाया था जिनसे हम एक-दूसरे को परखने के आदी हैं.....।

एक तरह से रामानुजन की खोज मैंने की भी, पर मैंने उनका आविष्कार नहीं किया था। अन्य महान विभूतियों की भाँति उन्होंने स्वयं अपना आविष्कार किया था। पर मुझे गर्व है कि मैं ही पहला वह व्यक्ति था जो उनके कार्यों को सही तरीके से समझा सका। मुझे जब भी यह याद आता है कि रामानुजन के रूप में कितनी अनमोल विभूति दूढ़ निकाली थी मेरा हृदय आनंद से भर उठता है।

" प्रो. जी. एच. हार्डी. टै. वल्व लेक्चर्स. रामानुजन " से

साभार— विज्ञान प्रगति पत्रिका कां रामानुजन, जन्म शताब्दी विशेषांक दिसम्बर 1987 में प्रकाशित लेख "रामानुजन का गणित" प्रस्तुति— गुणाकर मुले — वैज्ञानिक विषयों एवं कालजयी ग्रंथ कृति संसार के महान गणितज्ञ के महान लेखक ।

प्रस्तावना

प्राचीन छत्तीसगढ़ के वैभवशाली वास्तु कला विज्ञान में ज्यामिति (रेखागणित) के सरल एवं उच्चस्तरीय शाखाओं का अध्ययन यहाँ के राजमहलों एवं मंदिर देवालयों के हुये निर्माण में स्पष्टतः दृष्टि लाभ के साथ ज्ञान लाभ देता है। जो कि प्रमाणित करता है कि हमारे पूर्वज भी ज्यामिति अध्ययन में परांगत रहे हैं। ज्यामिति के विस्तारित उच्चस्तरीय अध्ययन त्रिकोणमिति के अध्ययन के बिना कदापि सम्भव नहीं है। कुआ- बावली, मुण्डा-तालाब एवं भवन निर्माण में राजमिस्त्री गुनिया गोली का प्रयोग करते हैं। आयताकार एवं वर्गाकार की तल काटने 3,4 एवं 5 इकाई भुजा माप के समकोण त्रिभुज त्रिक या त्रिभुजांक का अनुप्रयोग प्रमाण मिलता है। मिट्टी के वस्तु बनाने में कुम्हारो, ताँबा-पीतल बर्तन बनाने में कसेरों, लकड़ी के समान बनाने में बढई, लोहे के समान बनाने में लोहारों, बाँस से टोकरी सुपा जैसे आवश्यक साधन बनाने बसोडो, कपड़े को काट-छाट कर पहनने एवं ओढ़ने लायक कपड़ा सीने में दर्जी, सोने चाँदी का श्रृंगार सामग्री बनाने में सुनारों का ज्यामिति का सूक्ष्म अध्ययन को तद् विषयक वर्तमान कारखाना परिवेश में काम में प्रयुक्त मशीनों की रचना करने वाले इंजीयरों का ज्यामिति ज्ञान को उच्चतम मानना सोने की कलश चढ़े मंदिर-देवालयों की नींव एवं दीवाल को मिट्टी से रचना करने जैसे बताना ही होगा। कहने तात्पर्य वास्तव में हमारे स्वर्णाक्षरित ज्ञान कोष का आधार पूर्वज के सतत् अर्जित ज्ञान लाभ का एक स्तम्भिक मजबूत नींव एवं दीवाल ही है। ऐसे ही भाव शिखर में त्रिकोणमिति का सामान्य अण्ययन में त्रिभुजांक एवं बीजांक आधारित टिक्स तथा उच्चस्तरीय में $\text{Sin}x$, $\text{Cos}x$, $\text{Tan}^{-1}x$, $\text{Sin}hx$, $\text{Cosh}x$, $\text{Tanh}^{-1}x$ के विस्तार में उनागर संख्यांकन पद्धति का अनुप्रयोग गणित ज्ञान विकास में छत्तीसगढ़ की एक देन के रूप में स्वीकारा जाना विवाद से परे ही होगा। त्रिभुज के साधन अध्ययन में न्यूवता एवं बीजांक सूत्र का अनुप्रयोग बोधगम्य और आत्मसाती होगा। यह प्रस्तुति मूलतः गणना करने की टिक्स को ही स्पष्ट करता है। अतः कुछ प्रसंगों में परिभाषा की कमी को इंकार नहीं किया जा सकता। मैं उन सभी लेखको का हृदय से अभारी हूँ जिनका स्तम्भ लेख किताब एवं ग्रंथ के अभ्यास प्रश्नों का चयन किया हूँ। मेरा आदर्श संसार के महान गणितज्ञों में स्वर्णाक्षरित गुदड़ी के लाल भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन का आत्मीय वंदन करता हूँ जिनका दृश्यादृश्य कृपा प्रसाद स्वरूप मात्र आंग्ल (अंग्रेजी)भाषा के प्राथमिक ज्ञान लाभ के आधार पर ही पादपूज्य गुरुदेव डा. नरेन्द्रपुरी रीडर सिविल इंजीयररिंग विश्वविद्यालय रूडकी (भारत) एवं संचालक आध्यात्मिक अध्ययन संस्थान (आऽस) अमोद कुन्ज रूडकी के पत्राचार साधिन्य में उच्चस्तरीय वैदिक त्रिकोणमिति पत्राचार पाठ्यक्रम पूरा करने एवं उनके (गुरुदेव) मार्गदर्शन में आयोजित कार्यशाला में बतौर प्रशिक्षक सेवा करने का कर्मयोगी आशीष प्राप्त किया। इसी ज्ञान- गंगा को छत्तीसगढ़ के पावन सांस्कृतिक वैभवशाली धरोहर गणित ज्ञान में पिरोने का प्रयास क्रम में **त्रिभुजांक एवं बीजांक आधारित एक श्री सिद्ध (टिक्स) त्रिकोणमिति** प्रस्तुत है। जिसे पिरोने में उक्त उच्चस्तरीय वैदिक त्रिकोणमिति पत्राचार पाठ्यक्रम एवं श्री श्री 1008 श्री जगत गुरु शंकराचार्य स्वामी तीर्थराज जी महाराज की अमर कृति **वैदिक गणित अथवा वेदों से प्राप्त सोलह सरल गणितीय सूत्र** का अध्ययन लाभ एक कर्मयोगी की भाँति लिया है। जीवन संगनी श्रीमती श्यामा केशरिया की मीठी-कड़वी झिड़कियाँ एवं उलहाने का सतत् प्राप्त बल मेरे निज स्वानतः सुखाय कर्मयोग के प्रति योगमाया स्वरूप बनी रहती है और बनी रहेगी। त्रुटियों से इंकार नहीं किया जा सकता ।

अस्तु आपके मार्गदर्शन के अभिलाषा

आपका स्नेहकांक्षी
पंचराम केशरिया

विषय सूची

क्रमांक	अध्याय	विषय	पृष्ठ
1	2	3	4
1	----	पूर्वाध्ययन — ज्यामिति संकल्पना एवं उनके अध्ययन संकेत। रेखा के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति। बिन्दु के सापेक्ष रेखाएँ। किरण। कोण, कोण के प्रकार। त्रिभुज, त्रिभुज के प्रकार।	1-4
2	1	त्रिभुजांक — परिचय। सुलभ कत्यायन सूत्र। $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक। दो कोण माप के योग एवं अन्तर का त्रिभुजांक। $m\angle 0^\circ$ का त्रिभुजांक। $m\angle 90^\circ$ का त्रिभुजांक। पूरक कोण का त्रिभुजांक। $m\angle A$ का त्रिभुजांक। $m\angle 45^\circ$, $m\angle 30^\circ$ एवं $m\angle 60^\circ$ का त्रिभुजांक। $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक।	5-18
3	2	त्रिकोणमिति भाग 1 — त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ एवं अभ्यास उदाहरण।	19-28
4	3	त्रिकोणमिति विशिष्ट कोण मापों का त्रिकोणमिति फलन — परिचय प्रस्तावना। ऋणात्मक एवं अधिक कोण माप का त्रिकोणमिति फलन। $m\angle A^\circ$ के सापेक्ष $m\angle(90 - A)^\circ$, $m\angle(90 + A)^\circ$, $m\angle(180 - A)^\circ$, $m\angle 180^\circ$, $m\angle(180 - A)^\circ$, $m\angle(180 + A)^\circ$, $m\angle 270^\circ$, $m\angle(270 - A)^\circ$, $m\angle(270 + A)^\circ$, $m\angle 360^\circ$, $m\angle(360 - A)^\circ$, $m\angle(360 + A)^\circ$ का त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति फलन।	29-33
5	4	दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान मान त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ — $105^\circ, 15^\circ, 75^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ $m\angle A$ के त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ के सापेक्ष $m\angle A$, $m\angle A$ और $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ। $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ और 72° कोण माप त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ। $[22\frac{1}{2}]^\circ$ और $[7\frac{1}{2}]^\circ$ कोण माप का त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ। $36^\circ, 54^\circ$ और 72° कोण माप का त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ। $3^\circ, 6^\circ$ और 9° कोण माप का त्रिभुजांक एवं त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ। अभ्यास उदाहरण।	34-53
6	5	गुणन सूत्र SinA और CosA के गुणनफल का योग एवं अन्तर मान में रूपान्तर। अभ्यास उदाहरण	54-62
7	6	बीजांक — प्रस्तावना। $F[p] \geq 3$ के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक की विशेषताएँ। त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक (त्रि.स.बी.) योज्य प्रतिलोम का बीजांक। प्रमेय। पूरक कोण माप का बीजांक प्रमेय। अधिक कोण माप का बीजांक प्रमेय। सम्पूरक कोण माप $m\angle(180-A)$ का बीजांक प्रमेय। समधिक कोण माप $m\angle(180+A)$ का बीजांक प्रमेय। पुनर्युक्त कोण माप $m\angle(180+A)$ बीजांक प्रमेय। $m\angle(n*360-A)$ का बीजांक प्रमेय। $m\angle(n*360+A)$ का बीजांक प्रमेय। बीजांक का बीजांक। बीजांक का योग एवं अन्तर प्रमेय। दो कोण माप के त्रिभुजांक के सापेक्ष उनके योग एवं अन्तर माप का बीजांक। अभिगृहीत— (1) किसी आदर्श बीजांक F(c) को दो आदर्श बीजांक F(m) एवं F(n) के योग मान $[F(m)+F(n)]$ के प्रति। (2) किसी आदर्श बीजांक F(c) को दो आदर्श बीजांक F(a) एवं F(b) के अन्तर मान $[F(a)-F(b)]$ के प्रति। (3) अभिगृहीत (1) एवं (2) के सयुक्तकरण में $[b > a$ एवं $n > m]$ के प्रतिबंध पर। (4) व्यापकता में $[b > a, n > m]$ के प्रतिबंध पर दो क्रमागत k और $(k+1)$ के प्रति बीजांक का अन्तर एवं योग प्रमेय।	63-88

8	7	आदर्श बीजांक एवं त्रिभुजांक के सापेक्ष कोण माप आकलन— कोण माप इकाई रेडियन को कोण माप इकाई अंश बदलना। कोण माप इकाई अंश को कोण माप इकाई रेडियन बदलना। आदर्श बीजांक के सापेक्ष कोण माप आकलन प्रमेय। आदर्श बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष कोण माप आकलन।	89-98
9	8	$m\angle\theta$ के सापेक्ष $m\angle\theta$ का बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन— $m\angle\theta$ के सापेक्ष $m\angle\theta$ का बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन।	99-108
10	9	समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन— प्रस्तावना। योग-योग संख्या श्रेणी की उत्पत्ति की ओर। मूल योग-योग संख्या श्रेणी। योग-योग संख्या श्रेणी का स्तर। योग-योग संख्या श्रेणी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका। समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता।	109-123
11	10	$A_{r+4} * A_{r+2}$ आयत के अन्तःनिष्ठ समांतर चतुर्भुज रचना— $A_{r+4} * A_{r+2}$ के अन्तःनिष्ठ समांतर रचना प्रतिबंध। उदाहरण। गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी और समकोण त्रिभुज— गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी। अध्ययन संकेत और विस्तार— 1 ■ योग-योग संख्या श्रेणी के दृष्टि में— अध्ययन संकेत। श्रेणी विस्तार। 2 ■ गुणोत्तर संख्या श्रेणी के दृष्टि में— अध्ययन संकेत। श्रेणी विस्तार। गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी का n वाँपद। समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः M_r और M_{r+2} होने के प्रति $m\angle\beta$ का त्रिभुजांक गणना। समांतर चतुर्भुज दर्शन एवं विलोपन अध्ययन क्रम में योग-योग संख्या श्रेणी अर्थात् बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेणी। समकोण त्रिभुज समरूपता प्रमेय।	124-135
12	11	प्रतिलोमी त्रिकोणमिति — गुणन प्रतिलोम का नियम। दो प्रतिलोमी त्रिकोणमिति का योगान्तर प्रमेय— 1. $[\sin^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\sin^{-1} \frac{c}{d}]$ 2. $[\sin^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\cos^{-1} \frac{c}{d}]$ 3. $[\sin^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\tan^{-1} \frac{c}{d}]$ 4. $[\cos^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\cos^{-1} \frac{c}{d}]$ 5. $[\cos^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\sin^{-1} \frac{c}{d}]$ 6. $[\cos^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\tan^{-1} \frac{c}{d}]$ 7. $[\tan^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\tan^{-1} \frac{c}{d}]$ 8. $[\tan^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\sin^{-1} \frac{c}{d}]$ 9. $[\tan^{-1} \frac{a}{b}]$ और $[\cos^{-1} \frac{c}{d}]$	136-149
13	12	त्रिकोणमिति भाग 2 — प्रस्तावना। चरघांकी समीकरण। केपलर समीकरण। सर्वमान्य ग्रेगोरी श्रेणी का कथन। $\sin x, \cos x, \tan^{-1}$ का आकलन। गणना विस्तार में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या का निर्धारण प्रतिबंध। $\sin x$ का आकलन विस्तार का सरलीकरण। $\cos x$ का आकलन विस्तार का सरलीकरण। \tan^{-1} का आकलन विस्तार का सरलीकरण। उदाहरण	150-172
14	13	अतिपरवलय का त्रिकोणमिति— अति परवलयका चाप कोण $m\angle\theta$ का माप। कोण माप इकाई रेडियन $m\angle\theta^r$ में लिये जाने पर $\sinh\theta, \cosh\theta, \operatorname{Tanh}\theta, \operatorname{Tanh}\theta^{-1}$ के गणना के लिये चरघातांकी समीकरण।	173-203
15	14	सर्वोच्च समीकरण * —खगोल अन्तरिक्ष एवं भौतिक ज्योतिष विज्ञान में अध्ययन में प्रयुक्त केपलर समीकरण।	204- 212

16	15	<p>त्रिभुज के साधन— त्रिभुज के साधन। [1] कोण न्यूनता सूत्र । समतलीय त्रिभुज विषयक महत्वपूर्ण समिका। त्रिभुज के दो अन्त' कोण के त्रिकोणमिति मान ज्ञात होने पर तीसरे अन्त' कोण माप का त्रिकोणमिति मान ज्ञात करना। [2] आनुरूप्येण (अनुपात) सूत्र। समतलीय त्रिभुज के शीर्ष पर अन्तजित अन्तःकोण के त्रिकोणमिति निष्पत्ति और उनके सम्मुख भुजाओं का अनुपात प्रमेय। समतलीय त्रिभुज के दो शीर्ष पर अन्तरित अन्तः कोण के त्रिकोणमिति निष्पत्ति के ज्ञात मान के आधार पर तीनों शीर्षों के सम्मुख भुजाओं के मापों का मानक अनुपात मान ज्ञात करना। त्रिभुज के तीनों भुजाओं ज्ञात मान के आधार पर त्रिभुज का क्षेत्रफल गणना समिका प्रमेय। [3] बीजांक सूत्र— त्रिभुज के भुजाओं के सापेक्ष शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण का बीजांक। त्रिभुज के शीर्ष पर अन्तरित किन्हीं दो अन्तः कोण माप के योग एवं अन्तर मान का आदर्श बीजांक प्रमेय। किन्हीं दो अन्तः कोण माप के सापेक्ष तीसरे कोण माप का बीजांक।</p>	213-232
17	16	<p>वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति— * प्रस्तावना। वैश्लेषिक ज्यामिति प्रमेय। वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति प्रमेय। वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति समीकरण। सामान्य सीकरण तथा दो रेखाएँ।</p>	233-241