अध्याय -1
अनुपात

1-1 अनुपात दो सजातीय राशियों a और b के प्रति तुलना संबंध के परिपेक्ष्य में विदित है कि– (1) a बराबर b का गणितीय अध्ययन संकेत $a = b$ (2) a छोटा है b से गणितीय अध्ययन संकेत $a<b$ (3) a बड़ा है b से गणितीय अध्ययन संकेत $a>b$ उक्त तीनों तुलना सम्बंध से अलग हटकर तुलना के चौथे स्वरूप में नवीन तुलना संबंध में यह बतलाना कि राशि b राशि a की कितनी गुनी अथवा a का कौन सा भाग है a अनुपात b कहलाता है। अध्ययन संकेत a:b है। जिसका मूलार्थ $a \div b = \frac{a}{b}$ है। गणितीय संकेत $a : b$ है। a और b को अनुपात पद विभाजन में क्रमशः पूर्वपद (पहले का पद) और परपद (बाद का पद) कहते है।

1-2 दो अनुपातों में तुलना दो अनुपात a:b तथा c:d में निम्नानुसार तुलना संबंध स्थापित होंगे–

(1) यदि $a : b = c : d \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a * d = b * c$

(2) यदि $a : b < c : d \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow a * d < b * c$

(3) यदि $a : b > c : d \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow a * d > b * c$

1-3 पूर्वपद और परपद का अनुपात दर्शन

1• दर्शित अनुपात चयनित पूर्वपद और परपद का यथावत अनुपात निरूपण दर्शित अनुपात कहलाता है।

जैसे पूर्वपद 5 और परपद 8 का दर्शित अनुपात 5 : 8 , पूर्वपद 45 और परपद 60 का सरल अनुपात 45 : 60 ,

2• मानक अनुपात वे सभी दर्शित अनुपात जिनके पूर्वपद और परपद का महत्तम समापवर्तक (उभयनिष्ठ यथार्थ् भाजक) 1 हो है मानक अनुपात कहलाते हैं।

जैसे पूर्वपद 5 और परपद 8 का दर्शित अनुपात 5 : 8 मानक अनुपात है।

3• दर्शित अनुपात का मानक अनुपात निरूपण वे सरल अनुपात जिनके पूर्वपद और परपद के प्रति संख्या एक [1] के अतिरिक्त और अन्य कोई उभयनिष्ट गुणनखण्ड होते है को मानक अनुपात में निरूपित करने का मूल नियम दर्शित अनुपात के पूर्वपद और परपद को इनके महत्तम समापवर्तक द्वारा भाग देकर प्राप्त करना है।

अर्थात् a:b का मानक अनुपात निरूपण $(a \div m) : (b \div m)$ होगा जहाँ m a और b का महत्तम समापवर्तक है।

जैसे दर्शित अनुपात 45:60 का मानक अनुपात $= (45 \div 15) : (60 \div 15) = 3 : 4$ होगा।

जहाँ 15 45 और 60 का महत्तम समापवर्तक है।

दर्शित अनुपात 150:400 का मानक अनुपात $= (150 \div 50) : (400 \div 50) = 3 : 8$ होगा।

जहाँ 50 150 और 400 का महत्तम समापवर्तक है।

एक दर्जन : एक कोरी का मानक अनुपात $= 12:20$ का मानक अनुपात$= (12 \div 4) : (20 \div 4) = 3 : 5$ होगा।

जहाँ 4 12 और 20 का महत्तम समापवर्तक है।

4• प्रतिलोम अनुपात a:b का प्रतिलोम अनुपात मान = b:a होगा ।

जैसे 5:8 का प्रतिलोम अनुपात मान = 8:5 होगा । 150:400 का प्रतिलोम अनुपात मान = 400:150 होगा ।

अनुपात गुणक a:b का अनुपात गुणक से तात्पर्य a:b का परिमेय निरूपण $\frac{a}{b}$ के प्रति प्राप्त मानक भिन्न $\frac{x}{y}$ से है।

अथवा a:b का मानक अनुपात मान x:y का परिमेय निरूपण $\frac{x}{y}$ से है।

5• अनुपात गुणक समिका यदि a:b का अनुपात गुणक $\frac{x}{y} = g$ हो तो समिका $g = \frac{a}{b}$ को अनुपात गुणक समिका कहते है।

जैसे 250 ग्राम : 5 किलोग्राम का अनुपात गुणक मान अनुपात गुणक g

= 250 ग्राम : 5 *1000 ग्राम का अनुपात गुणक मान अनुपात गुणक $= \frac{250}{5*1000} = \frac{1}{20}$ होगा।

जबकि 250 ग्राम: 5 किलोग्राम का प्रतिलोम अनुपात 5 किलोग्राम: 250 ग्राम क गुणक मान अनुपात गुणक g

$= 5 *1000$ ग्राम : 250 ग्राम का अनुपात गुणक मान अनुपात गुणक $= \frac{5*1000}{250} = \frac{20}{1} = 20$ होगा।

अनुपात गुणक का अनुप्रयोग विस्तार अनुपात गुणक अनुप्रयोग विस्तार किसी दो या दो से अधिक अंकीय संख्याओं के वर्ग, घन चतुर्थ घात ....n घाती मान प्राप्त करने होता है।

1-4 अनुपातों का संयोजन अनुपातों का संयोजन मूलतः चार स्थितियों में दर्शित होता है –

1• मिश्र या संयोजित अनुपात 2• घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात

3• प्रतिलोम घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात 4• मूलानुपात संयोजन

1• मिश्र या संयोजित अनुपात दो या दो अधिक अनुपातों के संगत पदो का गुणा के प्रतिरूपण में दर्शित अनुपात को मिश्र या संयोजित अनुपात कहते हैं।

जैसे $a_1 : b_1$ और $a_2 : b_2$ से प्राप्त मिश्र या संयोजित अनुपात $(a_1 * a_2) : (b_1 * b_2)$ का हल मान होगा।

$a_1 : b_1$, $a_2 : b_2$ तथा $a_3 : b_3$ से प्राप्त मिश्र या संयोजित अनुपात$(a_1 * a_2 * a_3) : (b_1 * b_2 * b_3)$ का हल मान होगा।

2• घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात किसी अनुपात के दोनों पदों का समान घात मान n में दर्शित अनुपात घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात कहलाता है। **यथा** a:b का घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात–

(a*a*a----n बार तक): (b*b*b----n बार तक) $= a^n : b^n$ होगा।

इस प्रकार के संयोजन में n=2 के प्रति वर्गानुपात संयोजन तथा n=3 के प्रति घनानुपात संयोजन कहलाता है।

3• प्रतिलोम घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात किसी अनुपात के प्रतिलोम अनुपात का समान घात मान n में दर्शित अनुपात प्रतिलोम घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात कहलाता है। **यथा** a:b का प्रतिलोम अनुपात b:a का घातांकी अनुपात में संयोजित अनुपात– (b*b*b----n बार तक): (a*a*a----n बार तक)$=b^n : a^n$ होगा।

इस प्रकार के संयोजन में n=2 के प्रति प्रतिलोम वर्गानुपात संयोजन तथा n=3 के प्रति घनानुपात संयोजन कहलाता है।

4• मूलानुपात संयोजन किसी अनुपात के दोनां पदों का समान करणी मान n में दर्शित अनुपात मूलानुपात में संयोजित अनुपात कहलाता है। **यथा** a:b का मूलानुपात में संयोजित अनुपात– $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$ होंगा।

इस प्रकार के संयोजन में n=2 के प्रति $\sqrt[2]{a} : \sqrt[2]{b}$ को $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ में दर्शित किया जाता है वर्गमूलानुपात तथा n=3 के प्रति $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ घनमूलानुपात संयोजन कहलाता है।

चर राशि x , y एवं अचर राशियाँ a, b, c,d, m, n के प्रति

1■ समिका $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{m}{n} \Rightarrow (ax+by):(cx+dy)=m:n$ हो तो –

$x:y = (d*m - b*n) : (a*n - c*m)$ का मानक अनुपात हल होगा।

2■ समिका $\frac{ax-by}{cx-dy} = \frac{m}{n} \Rightarrow (ax-by):(cx-dy)=m:n$ हो तो–

$x:y = -(d*m - b*n) : (a*n - c*m)$ का मानक अनुपात हल होगा।

3■ समिका $\frac{ax+by}{cx-dy} = \frac{m}{n} \Rightarrow (ax+by):(cx-dy)=m:n$ हो तो–

$x:y = -(d*m + bn) : (a*n - c*m)$ का मानक अनुपात हल होगा।

4■ समिका $\frac{ax-by}{cx+dy} = \frac{m}{n} \Rightarrow (ax-by):(cx+dy)=m:n$ हो तो–

$x:y = (d*m + b*n) : (a*n - c*m)$ का मानक अनुपात हल होगा।

5■ $x:y = m:n$ हो तो –

$(ax \pm by) : (cx \pm dy) = (a*m \pm b*n) : (c*m \pm d*n)$ का मानक अनुपात हल होगा।

6■ $x:y = m:n$ हो तो $(x+a) : (y+a) = p:q$ हो जाने के लिए – $a = n*p - m*q$ होगा।
7■ $x:y = m:n$ हो तो $(x-a) : (y-a) = p:q$ हो जाने के लिए – $a = -(n*p - m*q)$ होगा।
8■ $x:y = m:n$ तथा $(x+a) : (y+a) = p:q$ हो तो–
$x:y = m:n$ से $x = mk$ और $y = nk$ होगा। तथा
$(x+a) : (y+a) = p:q \Rightarrow (mk-a):(nk-a) = p:q$ से $k = \frac{a(p-q)}{m*q-n*p}$
9■ $x:y = m:n$ तथा $(x-a) : (y-a) = p:q$ हो तो–
$x:y = m:n$ से $x = mk$ और $y = nk$ होगा । तथा
$(x-a) : (y-a) = p:q \Rightarrow (mk-a):(nk-a) = p:q$ से $k = \frac{-a(p-q)}{m*q-n*p}$
10■ $A:B = m:n$ तथा $B:C = p:q$ हो तो $A:C = m*p : nq$ तथा
$A:B:C = m : n : \frac{n*q}{p} \Rightarrow m*p : n*p : nq$ का मानक हल होगा।

समिका द्वारा प्रश्नोत्तर

1■ $\frac{x+y}{x-y} = \frac{2}{3} \Rightarrow (x+y):(x-y) = 2:3$ हो तो $x:y$ का हल ज्ञात करने–
हल समिका 3 $\Rightarrow$ $x:y = -(d*m + b*n) : (a*n - c*m)$ में –
$a=1, b=1, c=1, d=1, m=2, n=3$ प्रस्थिापित करने पर
$x:y = -(1*2 + 1*3) : (1*3 - 1*2) = -5:1 = \bar{5}:1$ होगा।
2■ $\frac{5x-3y}{10x-7y} = \frac{2}{3} \Rightarrow (5x-3y):(10x-7y) = 2:3$ हो तो $x:y$ का हल ज्ञात करने–
हल समिका 2 $\Rightarrow$ $x:y = -(d*m - b*n) : (a*n - c*m)$ में –
$a=5, b=3, c=10, d=7, m=2, n=3$ प्रस्थिापित करने पर
$x:y = -(7*2 - 3*3) : (5*3 - 10*2) = -5:-5 = 1:1$ मानक अनुपात हल होगा।
3■ $(2x+3y):(3x+5y) = 18:29$ हो तो $x:y$ का हल ज्ञात करने–
हल समिका 3 $\Rightarrow$ $x:y = (d*m - b*n) : (a*n - c*m)$ में –
$a=2, b=3, c=3, d=5, m=18, n=29$ प्रस्थिापित करने पर
$x:y = (5*18 - 3*29) : (2*29 - 3*18) = 3:4$ होगा।
4■ $x:y = 2:3$ हो तो $(6x+5y) : (3x+17y)$ का मान ज्ञात करने–
हल समिका 5 $\Rightarrow$ $(ax \pm by) : (cx \pm dy) = (a*m \pm b*n) : (c*m \pm d*n)$ में –
$a=6, b=5, c=3, d=17, m=2, n=3$ प्रतिस्थापित करने पर–
$(6x+5y) : (3x+17y) = (6*2+5*3):(3*2+17*3) = 27:57 = 9:19$ का मानक अनुपात हल होगा।
5■ दो संख्याओं का अनुपात 11:16 है । इनमें एक समान संख्या क्या जोड़े कि प्राप्त योगफलों का अनुपात 3:4 हो जाए।
के हल लिए – दो संख्याएँ x और y का अनुपात $m:n$ तथा इनमें एक समान संख्या a जोडें जाने पर प्राप्त योगफलों का अनुपात $(x+a) : (y+a) = p:q$ हो जाने के प्रति प्रात हल समिका– $a = np - mq$ में $m=11, n=16, p=3, q=4$ प्रतिस्थापित करने पर – $a = 16*3 - 11*4 = 48-44 = 4$ होगा।
6■ दो संख्याओं का अनुपात 11:16 है । इनमें एक समान संख्या क्या घटायें कि प्राप्त अन्तर मानों का अनुपात 3:4 हो जाए।
के हल लिए – दो संख्याएँ x और y का अनुपात $m:n$ तथा इनमें एक समान संख्या a घटाये जाने पर प्राप्त अन्तरमानों का अनुपात$(x-a) : (y-a) = p:q$ हो जाने के प्रति प्रात हल समिका – $a = -(np - mq)$ में $m=11, n=16$, $p=3, q=4$ प्रतिस्थापित करने पर – $a = -(16*3 - 11:4) = -4$ होगा।

7■ यदि A:B = 2 :3 तथा B:C =4: 5 हो तो – हल समिका 10 के तहत् A:C = 2*4 : 3*5 = 8 :15 तथा

$$A : B : C = 2:3 : \frac{3*5}{4} = 8 \;:\; 12 \;:\; 15$$ होगा।

8■ वे दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए ,जिनका मानक अनुपात 1 :2 है और इनमें एक समान संख्या 4 जोड़ने पर प्राप्त योगमान संख्याओं का मानक अनुपात 2:3 हो जाता है। के हल के लिए – माना कि संख्याएँ x और y है।

प्रश्नानुसार x : y = 1:2 से x= k और y=2k माने जाने पर– (x+4): (y+4)=(k+4) ; (2k+4) =2:3 से समिका 8 के तहत् $k = \frac{4(2-3)}{1*3-2*2} = 4$ से .संख्याएँ x =k =4 और y= 2k = 2*4 =8 होगा ।

9■ वे दो संख्याओं को ज्ञात कीजिए ,जिनका मानक अनुपात 3:4 है और इनमें एक समान संख्या 8 घटाने पर प्राप्त घटामान संख्याओं का मानक अनुपात 2:3 हो जाता है। के हल के लिए – माना कि संख्याएँ x और y है।

प्रश्नानुसार x : y = 3:4 से x= 3k और y=4k माने जाने पर–

$$(x-8):(y-8) = (3k-8);\ (4k-8) = 2 : 3$$ से

समिका 9 के तहत् $k = \frac{-8(2-3)}{3*3-4*2} = 8$ से .संख्याएँ x =3k =3*8 =24 और y= 4k = 4*8 =32 होगा।

----------01----------

अध्याय -2
अनुक्रमानुपाती एव व्युत्क्रमानुपाती विचरण

2-1 प्रस्तावना आइये कुछ अनुभव जनित वाणिज्य (व्यापारिक) क्रियाओं का अध्ययन करते हैं।

1■ समान दर कीमत मान पर वस्तुओ की संख्यामान घटते /बढ़ने के क्रम में कुल कीमत सरल अनुपात के तहत घटता/ बढ़ता जाता है।

जैसे समान दर कीमत मान पर 5 किलो आलू का कीमत 20 रूपये है। तो उसी कीमत मान पर 2 किलों/ 15 किलो आलू का कीमत 8रूपये/60 रूपये होगा।

इसी प्रकार–

2■ राशन की समान दर खपत मान पर भोजन करने वालों की संख्यामान घटते /बढ़ने के क्रम में कुल राशन के खपत मान सरल अनुपात के तहत घटता/ बढ़ता जाता है।

3■ सुनिश्चित काम को पूरा करनें के संदर्भ में समान शक्तिमान पर काम करने की संख्या घटाये/ बढ़ायें पर काम पूरा होने का अवधि मान सरल अनुपात के तहत बढ़ता/ घटता जाता है।

4■ प्रतिदिन काम करने की अवधि घटाये /बढ़ाये जाने पर काम पूरा होने की दिनों का संख्यामान सरल अनुपात के तहत बढ़ता/ घटता जाता है।

5■ सरल ब्याज गण्ना नियम में सुनिश्चित ब्याज दर मान पर कुल ब्याज राशि कम/अधिक होना मूलधन के सरल अनुपात के तहत घटते/बढ़ते मानों पर निर्भर करता है।।

6■ कुल ब्याज राशि के निश्चिता के प्रति मूलधन कम/अधिक होने पर समयमान को सरल अनुपात के तहत बढ़ाना/घटाना होगा।

2-2 विचरण उपरोक्तानुसार वाणिज्य (व्यापारिक) क्रियाओं का अध्ययन करने पर स्पष्ट होता हमारी दैनिक जीवन की वाणिज्य (व्यापारिक) क्रियाओं में सरल अनुपात संगता पाई जाती है। जिसे दों चर राशियों के व्यापारिक या वाणिज्य निर्भरता के रूप में अध्ययन किया जाता है। इस प्रकार के दों चर राशियों के व्यापारिक या वाणिज्य निर्भरता सम्बंध को उनके प्रति विचरण कहते है।

विचरण के प्रकार विचरण के दो प्रकार होते है। 1• अनुक्रमुपाती विचरण 2• व्युत्क्रमानुपाती या प्रतिलोमानुपाती विचरण

(1) अनुक्रमानुपाती विचरण जब दो चर राशियाँ x और y में परस्पर इस प्रकार सम्बंध हो कि इनमें से पहली चर राशि x के घटने/बढ़ने के गुणित दर मान पर दूसरी राशि y घटता/बढता हो तो ये परस्पर दो राशियाँ अनुक्रमानुपाती विचरण में होना कहलाता है। सांकेतिक रूप में – $x \propto y$ (x अनुक्रमानुपात y) या $x = k*y$ या $\frac{x}{y} = k$ (जहाँ k कोई अचर राशि है।)

उदाहरण 1■ चली दूरी, समय एवं चाल विषयक

A• निश्चित समयमान पर चली दूरी चाल के अनुक्रमानुपाती होगा।

B• निश्चित चाल पर चली दूरी समय के अनुक्रमानुपाती होगा।

2■ कुल कीमत, वस्तु की मात्रा एवं दर मान विषयक

A• निश्चित मात्रा के प्रति कुल कीमत दर मान के अनुक्रमानुपाती होगा।

B• निश्चित दर मान के प्रति कुल कीमत वस्तु की मात्रा के अनुक्रमानुपाती होगा।

3■ आवश्यक खाद्यान्न का कुल मात्रा, खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा एवं खाने वालों की कुल संख्या विषयक

A• खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा निश्चित होने पर आवश्यक खाद्यान्न का कुल मात्रा खाने वालों की कुल संख्या के अनुक्रमानुपाती होगा।

B• खाने वालों की कुल संख्या निश्चित होने पर आवश्यक खाद्यान्न का कुल मात्रा खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा के अनुक्रमानुपाती होगा।

4■ .मूलधन ब्याज और समय विषयक

A• निश्चित मूल धन पर ब्याज समय के अनुक्रमानुपाती होगा।

B• निश्चित समय पर ब्याज मूलधन के अनुक्रमानुपाती होगा।

इसी प्रकार अन्य कई व्यवहारिक ज्ञान एवं विज्ञान में अनुक्रमानुपाती विषयक अध्ययन विस्तार प्राप्त होते है।

अनुक्रमुपाती विचरण विषयक प्रश्नों का हल समीकरण प्राप्त करना एक प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान x_1, x_2 के प्रति दूसरे प्रकार की सजातीय राशियों संगत अनुक्रमानुपाती युग्म संख्या मान y_1, y_2 हो तो हल समीकरण प्राप्त करने निम्नानुसार दर्शित करे।

एक प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान	x_1	x_2
दूसरे प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान	y_1	y_2

तब तिरछा (तिर्यक) गुणा संकेतन नियम से हल समीकरण $x_1 * y_2 = x_2 * y_1$ होगा।

प्रमाण– अनुक्रमानुपात नियम से $x_1 = k * y_1$ तथा $x_2 = k * y_2$ जहाँ k एक स्थिरांक है।

$\therefore \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = k \Rightarrow x_1 * y_2 = x_2 * y_1$ प्रमाणित।

उदाहरण 1■ टंकन की गति विषयक

सुनीता एक घंटा में 1080 शब्दों को टंकित करती है। वह 21 मिनट में कितने शब्दों को टंकित करेगी।

हल 1घंटा = 60 मिनट

टंकन का समय मान	60 मिनट	21 मिनट
टंकित शब्दों की संख्या	1080 शब्द	माना कि x शब्द

अनुक्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

60 *x = 1080*21 को हल करने पर

X= 378 शब्द अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ वस्तु के कीमत विषयक

97 किताबों को 2425 रूपये खरीदा गया है। 3025 रूपये में खरीदे गये किताबों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल

खरीदे गये किताबों की संख्या	97 नग	माना कि x किताब
खरीद कीमत	2425 रू.	3025 रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

97 *3025 =2425 *x को हल करने पर

X= 121 किताब अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ वाहन किराया विषयक

60 किलोमीटर दूरी का रेल किराया 15 रूपये है। 372 किलोमीटर दूरी का रेल किराया ज्ञात कीजिए।

हल

चली दूरी	60 कि. मी.	372 कि. मी.
रेल किराया	15 रू.	माना कि x रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

60 *x = 372 *15 को हल करने पर

X= 93 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ काम विषयक

एक दिन मे 3 एकड़ खेत के धान को 27 मजदूर काट लेते हैं। बताइये एक ही दिन में 11 एकड़ खेत के धान को कटवाने कितने मजदूरों की आवश्यकता होगी।

हल

खेत का माप	3 एकड़	11 एकड़
मजदूर संख्या	27 मजदूर	माना कि x एकड़

अनुक्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

3 *x = 27 *11 को हल करने पर

x= 99 मजदूर अभीष्ट उत्तर होगा।

(2) व्युत्क्रमानुपाती विचरण जब दो चर राशियाँ x और y में परस्पर इस प्रकार सम्बंध हो कि इनमें से पहली चर राशि x के घटने/बढ़ने के प्रतिलोम गुणित दर मान पर दूसरी राशि y घटता/ बढता हो तो ये परस्पर दो राशियाँ व्युत्क्रमानुपाती विचरण में होना कहलाता है। सांकेतिक रूप में – $x \propto \frac{1}{y}$ (x व्युत्क्रमानुपात y) या $x = k*\frac{1}{y}$ या $x*y = k$ (जहाँ k कोई अचर राशि है।)

उदाहरण 1■ चली दूरी, समय एवं चाल विषयक

निश्चित दूरी के प्रति चाल और समय एक दूसरे के व्यूत्क्रमानुपाती होंगे।

उदाहरण 2■ कुल कीमत, वस्तु की मात्रा एवं दर मान विषयक

निश्चित कुल कीमत के प्रति वस्मु की मात्रा और दर मान एक दूसरे के व्यत्क्रमानुपाती होंगे।

उदाहरण 3■ खाद्यान्न का कुल मात्रा खाने वालों की प्रति इकाई मान पर भोजन की मात्रा, खाने वालों की कुल संख्या एवं भोजन आपूर्ति के दिनों की संख्या विषयक

A• खाद्यान्न के निश्चित मात्रा के प्रति खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा एवं खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होंगे।

B• खाद्यान्न के निश्चित मात्रा के प्रति खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा एवं भोजन आपूर्ति के दिनों की संख्या एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होंगा।

C• खाद्यान्न के निश्चित मात्रा एवं खाने वालों की प्रति इकाईमान पर भोजन की मात्रा एवं भोजन के प्रति भोजन आपूर्ति के दिनों की संख्या और खाने वालों की कुल संख्या एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होंगे।

उदाहरण 4■ मूल धन ब्याज और समय विषयक निश्चित ब्याज के प्रति मूलधन और समय एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होंगे।

उदाहरण 5■ काम का स्वरूप मान, काम पूरा करने आवश्यक व्यक्ति की संख्या एवं काम पूरा होने के दिनों की संख्या विषयक

काम का निश्चित स्वरूप मान के प्रति काम पूरा करने आवश्यक व्यक्ति की संख्या और काम पूरा होने के दिनों की संख्या एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती होंगे।

इसी प्रकार अन्य कई व्यवहारिक ज्ञान एवं विज्ञान में व्यत्क्रमानुपाती विषयक अध्ययन विस्तार प्राप्त होते है।

व्युत्क्रमाुपाती विचरण विषयक प्रश्नों का हल समीकरण प्राप्त करना एक प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान x_1, x_2 के प्रति दूसरे प्रकार की सजातीय राशियों संगत अनुक्रमानुपाती युग्म संख्या मान y_1, y_2 हो तो हल समीकरण प्राप्त करने निम्नानुसार दर्शित करे।

एक प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान	x_1	x_2
दूसरे प्रकार की सजातीय राशियों के प्रति एक युग्म संख्या मान	y_1	y_2

तब खड़ा गुणा संकेतन नियम से हल समीकरण $x_1 * y_1 = x_2 * y_2$ होगा।

प्रमाण व्युत्क्रमानुपात नियम से $x_1 = k * \frac{1}{y_1}$ तथा $x_2 = k * \frac{1}{y_2}$ जहाँ k एक स्थिरांक है।

$\therefore x_1 * y_1 = x_2 * y_2 = k \Rightarrow x_1 * y_1 = x_2 * y_2$ प्रमाणित।

उदाहरण 1■ समय और चाल विषयक

शीला सायकिल सें 12 कि,मी,/घण्टा की चाल से अपनी पाठशाला 20 मिनट में पहुचती है। 15 मिनट में पहुँचने के लिए कितने कि.मी.प्रति घण्टा की चाल अपनाना होगा।

हल 1घंटा = 60 मिनट

चाल प्रति घण्टा	12 कि. मी	माना कि x कि. मी
पृहुचने में लगा समय	20 मिनट	15 मिनट

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

$12*20 = x*15$ को हल करने पर

$x = 16$ कि. मी/घण्टा अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ कीमत दर और वस्तु की संख्या विषयक

एक सायकिल दुकनदार 3528 रूपये / सायकिल दर से 50 सायकिल खरीदने सायकिल कम्पनी के शो रूम गया है। लेकिन कम्पनी द्वारा सायकिल के कीमत दर में वृद्धि किये जाने के कारण 49 सायकिल ही खरीद लाता है। बताइये सायकिल के शो रूम में प्रति सायकिल मूल्य वृद्धि कितने रूपये कर लिया है।

हल माना कि प्रति सायकिल मूल्य वृद्धि x रूपये है।

प्रति सायकिल मूल्य	3528 रू.	(3528+x) रू.
खरीदे गये सायकिलों की संख्या।	50 नग	49 नग

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

3528*50 =(3528+x) *49 को हल करने पर – x= 72 रूपये. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ प्रतिदिन काम करने का समय और काम पूरा होने में लगे दिनो की संख्या विषयक

एक महिला प्रतिदिन 4 घण्टे बुनाई करके 10 दिन में एक स्वेटर बना लेती है। 8 दिन मे वेसा ही स्वेटर बनाने प्रतिदिन कितने घण्टे बुनाई करना होगा ?

हल

प्रतिदिन बुनाई करने का समय	4 घण्टे	माना कि x घण्टे
एक स्वेटर बनने में लगे दिनों की संख्या	10 दिन	8 दिन

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

4*10 =8 *x को हल करने पर –

x= 5 घण्टे अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ मजदूरों की संख्या और काम पूरा होने में लगा समय विषयक

सड़क परिवहन विभाग एक निश्चित दूरी माप का सड़क निर्माण का कार्य 9 माह में पूरा करने 560 मजदूर की आवश्यकता है। उसी सड़क निर्माण कार्य को 7 माह में पूरा करने कितने और मजदूर बढ़ाने होंगे ?

हल माना कि x मजदूर बड़ाने होंगे।

कार्य पूरा होने का समय	9 माह	7 माह
लगे मजदूरों की संख्या	560	(560+x)

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

9*560 =(560+x) *7

$\Rightarrow$ 560 + x = 720 को हल करने पर –

x= 160 मजदूर अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 5■ खाने वालों की संख्या और राशन स्टाक आपूर्ति दिनों की संख्या

एक परिवार में 5 सदस्य हैं। गृहणी ने माह के 30 दिनों के लिए राशन खरीद लिया है। एक मेहमान के आ जाने पर राशन कितने दिनां में समाप्त हो जायेगा ?

हल

खाने वालों की संख्या	5 सदस्य	(5+1)=6 सदस्य
राशन स्टाक आपूर्ति दिनों की संख्या	30 दिन	माना कि x दिन

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

5*30 =6 *x को हल करने पर –

x= 25 दिन अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 6■ वितरण की दर एवं प्राप्त कर्ता (उपभोक्ता) की संख्या

एक कन्या माध्यमिक विद्यालय में 400 छात्राएँ अध्ययनरत है । प्राचार्य महोदिया ने स्वतंत्रता दिवस के स्वर्ण जयंती समारोह पर प्रति छात्रा 4 नग रसगुल्ला बाँटने की व्यवस्था दी थी। वर्षा होने के कारण 80 छात्राएँ समारोह में सम्मिलित नहीं हो सकी। सम्मिलित छात्राओं में ही पूरे सगुल्ले वितरित किया गया। सम्मिलित छात्राओं में प्रति छात्रा कितने नग रसगुल्ला वितरित किया गया।

हल

छात्राओं की संख्या	400	(400-80)=320
प्रति छात्रा वितरित रसगुल्ला का नग	4 नग	माना कि x नग

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियमानुसार हल समिका –

400*4 =32 *x को हल करने पर –

$x = 5$ नग रसगुल्ला अभीष्ट उत्तर होगा।

2-3 बहु विचरण गुणा समिका का प्रतिपादन

विचरण के प्रकारो की संख्या $r \geq 3$ के प्रति बहु विचरण की राशियाँ a,b,c ----- के दो प्रतिबंध $(a_1, b_1, c_1 - --)$ और $(a_2, b_2, c_2 - --)$ के प्रति किन्हीं एक विचरण की राशि के प्रति शेष (r-1) विचरण राशि में से प्रत्येक के लिए विचरण नियम (अनुक्रमानुपाती/व्युत्क्रमानुपाती) प्रस्थिापित करने शेष (r-2) विचरण राशि को स्थिर भाव में लिया जाकर संगत विचरणों का बहु विचरण गुणा हल समिका का प्रतिपादन किया जा सकता है। जिसकी प्रस्तुति 1• पूर्ण स्तम्भिक बहु विचरण गुणा समिका , 2• कोणीय बहु विचरण गुणा समिका में दर्शित होता है।

a_1 ■	■ a_2
b_1 ■	■ b_2
c_1 ■	■ c_2
... ■	■ ...
...■	■ ....
..q_1 ■	■ q_2
r_1 ■	■ r_2

(1) पूर्ण स्तम्भिक बहु विचरण गुणा समिका

r प्रकार की बहु विचरण की राशियाँ a,b,c--- q,r में से एक प्रकार की विचरण की राशि a के प्रति दूसरे , तीसरे ,चौथे.........r वें। (r-1) प्रकार की विचरणों की राशियाँ $b, c, d - - - q, r$ सभी व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियम के परिपालन में हों तो– विचरण के दो प्रतिबंध $(a_1, b_1, c_1 - - - q_1, r_1)$ और $(a_2, b_2, c_2 - - - q_2, r_2)$ के प्रति

$a_1 * b_1 * c_1 * - * - * q_1 * r_1 = a_2 * b_2 * c_2 * - * - * q_2 * r_2$ पूर्ण स्तम्भिक गुणा हल समिका का प्रतिपादन होता है।

उदाहरण■ ज्ञात कीजिए कि 600 ग्राम/सिपाही/दिन के खुराक के हिसाब से 400 सिपाहियों के लिए 50 दिनों का रखा खाद्यान्न का भण्डारण (स्टाक) 500 ग्राम/सिपाही/दिन खुराक के खुराक के हिसाब से 500 सिपाहियों के लिए कितने दिनों का भण्डारण होगा।

हल

प्रति सिपाही प्रतिदिन का खुराक मात्रा u	u_1 =600 ग्राम	u_2 =500 ग्राम
सिपाहियों की संख्या p	p_1 =400 सिपाही	p_2 =500 सिपाही
भण्डारण अवधि d	d_1 =50 दिन	d_2 =माना कि x दिन

व्याख्या d को स्थिर भाव में लेने पर– u और p व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। तथा p को स्थिर भाव में लेने पर– u और d व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

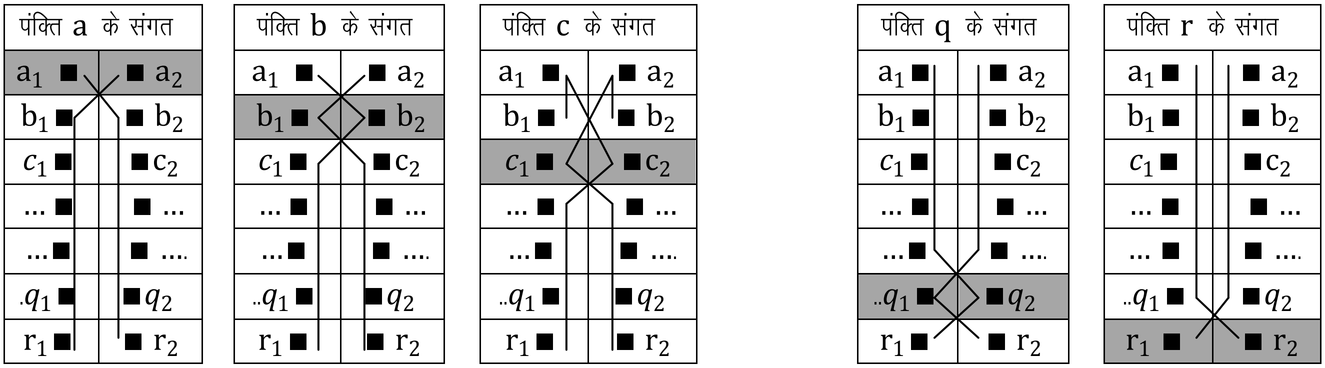
अथवा d को स्थिर भाव में लेने पर – p और u व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। तथा u को स्थिर भाव में लेने पर – p और d व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अथवा u को स्थिर भाव में लेने पर – p और d व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। p को स्थिर भाव में लेने पर – u और d व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

उक्त तीनो स्थितियों पर एक मात्र प्राप्त पूर्ण स्तम्भिक गुणा समिका – $u_1 * p_1 * d_1 = u_2 * p_2 * d_2$ में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर – 600*400*50 = 500*500*x को हल करने पर x =48 दिन अभीष्ट उत्तर होगा।

(2)कोणीय गुणा समिका• 1■ केवल अनुक्रमानुपाती विचरण अनुपालन में r प्रकार की बहु विचरण की राशियाँ a,b,c--- q,r में से एक प्रकार की विचरण की राशि a के प्रति दूसरे , तीसरे , चौथे.........r वें। (r-1) प्रकार की विचरणों की राशियाँ $b, c, d - - - q, r$ सभी अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के परिपालन में हों तो – विचरण के दो प्रतिबंध $(a_1, b_1, c_1 - - - q_1, r_1)$ और $(a_2, b_2, c_2 - - - q_2, r_2)$ के प्रति $a_1 * b_1 * c_1 * - * - * q_1 * r_1 = a_2 * b_2 * c_2 * - * - * q_2 * r_2$ पूर्ण स्तम्भिक गुणा हल समिका का प्रतिपादन होता है।

वैकल्पिक हल तालिका



पंक्ति a के संगत – $a_1 * b_2 * c_2 * - * - * q_2 * r_2 = a_2 * b_1 * c_1 * - * - * q_1 * r_1$

पंक्ति b के संगत – $a_2 * b_1 * c_2 * - * - * q_2 * r_2 = a_1 * b_2 * c_1 * - * - * q_1 * r_1$

पंक्ति c के संगत – $a_2 * b_2 * c_1 * - * - * q_2 * r_2 = a_1 * b_1 * c_2 * - * - * q_1 * r_1$

....

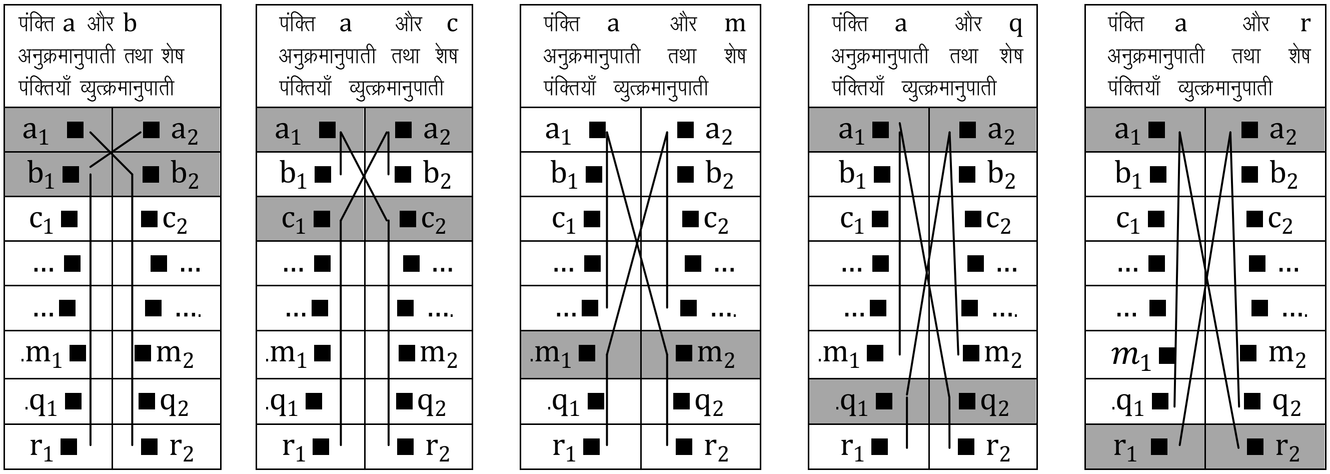
....

पंक्ति q के संगत – $a_2 * b_2 * c_2 * - * - * q_1 * r_2 = a_1 * b_1 * c_1 * - * - * q_2 * r_1$

पंक्ति r के संगत – $a_2 * b_2 * c_2 * - * - * q_2 * r_1 = a_1 * b_1 * c_1 * - * - * q_1 * r_2$ में से कोई एक अवश्य ही हल विकल्प होंगे।

2■ अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण के संयुक्त अनुपालन में r प्रकार की बहु विचरण की राशियाँ a,b,c---q,r में से एक प्रकार की विचरण की राशि a के प्रति दूसरे , तीसरे , चौथे........r वें। (r-1) प्रकार की विचरणों की राशियाँ $b, c, d - - - q, r$ में से कोई 1पंक्ति की चर राशि अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियों की चर राशि व्युत्क्रमानुपाती हो तो– विचरण के दो प्रतिबंध $(a_1, b_1, c_1 - - - m_1, q_1, r_1)$ और $(a_2, b_2, c_2 - - - m_2 q_2, r_2)$ के प्रति $a_1 * b_2 * c_2 * - * - * m_2 * q_2 * r_2 = a_2 * b_1 * c_1 * - * - * m_{1*} q_1 * r_1$ कोणीय गुणा हल समिका का प्रतिपादन होता है।

वैकल्पिक हल तालिका



पंक्ति a और b अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियाँ व्युत्क्रमानुपाती –

$\mathbf{a_1} * \mathbf{b_2} * c_1 * - * - -* - m_1 * q_1 * r_1 = \mathbf{a_2} * \mathbf{b_1} * c_2 * - * - * m_2 * q_2 * r_1$

पंक्ति a और c अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियाँ व्युत्क्रमानुपाती –

$b_1 * \mathbf{a_1} * \mathbf{c_2} * - * - * m_1 * q_1 * r_1 =* b_2 * \mathbf{c_1} * \mathbf{a_2} * - * - * m_2 * q_2 * r_2$

पंक्ति a और m अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियाँ व्युत्क्रमानुपाती –

$$- * - c_1 * b_1 * \mathbf{a_1} * \mathbf{m_2} * q_1 * r_1 = - * - * c_2 * b_2 * \mathbf{m_1} * \mathbf{a_2} * q_2 * r_2$$

पंक्ति a और q अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियाँ व्युत्क्रमानुपाती –

$$m_1 -* - * \; c_1 * b_1 * \mathbf{a_1} * \mathbf{q_2} * r_1 = m_2 -* - * c_2 * b_2 * \mathbf{q_1} * \mathbf{a_2} * r_2$$

पंक्ति a और r अनुक्रमानुपाती तथा शेष पंक्तियाँ व्युत्क्रमानुपाती –

$$q_1 * m_1 * - * - * c_1 * b_1 * \mathbf{a_1} * \mathbf{r_2} = q_2 * m_2 * - * - * c_2 * b_2 * \mathbf{r_1} * \mathbf{a_2}$$

इसी प्रकार पंक्ति b , c - - -m,q, r को अलग–अलग प्रथमोत्तर लेकर प्रस्तुतियाँ विस्तारित होने के सम्भावित विकल्प है।

पंक्तियों की संखा r के प्रति यथा 1 और 2 के तहत कुल मिलाकर हलों के विकल्प की कुल संख्या $= \frac{1}{2} r(r-1)$ होगा।

उदाहरण 1■ 40 मीटर लम्बे और 30 मीटर चौड़े धरातल पर फर्श लगाने का खर्च 1500 रूपये है। तो इसी दर पर 70 मीटर लम्बे और 50 मीटर चौड़े धरातल पर फर्श लगाने खर्च ज्ञात कीजिए।

हल

धरातल की लम्बाई L	L_1=40 मीटर	L_2 = 70 मीटर
ध्रातल की चौड़ाई Y	Y_1 = 30 मीटर	Y_2 = 50 मीटर
फर्श लगााने का खर्च R	R_1 =1500 रूपये	माना कि R_2 =x रूपये

व्याख्या 1■ केवल अनुक्रमानुपाती विचरण अनुपालन में R के प्रति L को स्थिर भाव में लेने पर – R और Y अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। तथा

R के प्रति Y को स्थिर भाव में लेने पर – Rऔर L अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $R_1 * Y_2 * L_2 = R_2 * Y_1 * L_1 \Rightarrow$ 1500*50*70 = X*30*40 से x=4375 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

2■ अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण के संयुक्त अनुपालन में L के प्रति R को स्थिर भाव में लेने पर L और Y व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। तथा

L के प्रति Y को स्थिर भाव में लेने पर – L और R अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $L_1 * Y_1 * R_2 = L_2 * Y_2 * R_1 \Rightarrow$ 40*30*x = 70*50*1500 से x=4375 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

अथवा Y के प्रति R को स्थिर भाव में लेने पर – Y और L व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे। तथा

Y के प्रति L को स्थिर भाव में लेने पर – Yऔर R अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $y_1 * L_1 * R_2 = Y_2 * L_2 * R_1 \Rightarrow$ 30*40*x = 50*70*1500 से x=4375 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ 4 हेक्टेयर के रकबा में उपजित घान की फसल की कटाई 8 मजदूर 5 घण्टे प्रतिदिन काम करके 12 दिन में कर लेते है। ज्ञात कीजिए 8 आदमी 5 घण्टा प्रतिदिन काम करके 12 दिन में कितने हेक्टेयर के रकबा में उपजित घान की फसल की कटाई पूरा करेंगे ?

हल व्याख्या 1■ केवल अनुक्रमानुपाती विचरण अनुपालन में

A के प्रति H और D को स्थिर भाव में लेने पर – A और M अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

A के प्रति M और D को स्थिर भाव में लेने पर – A और H अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

A के प्रति M और H को स्थिर भाव में लेने पर – A और D अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $A_1 * M_2 * H_2 * D_2 = A_2 * M_1 * H_1 * D_1 \Rightarrow$ 4* 6*8*15 = x*8*5*12

से x= 6 हेक्टेयर अभीष्ट उत्तर होगा।

कार्य का नाम– उपजित धान की फसल की कटाई

रकबा A	$A_1 = 4$ हेक्टेयर	माना कि $A_2 = x$ हेक्टेयर
मजदूर M	$M_1 = 8$ मजदूर	$M_2 = 6$ मजदूर
प्रतिदिन किये गये काम की अवधि H	$H_1 = 5$ घण्टे	$H_2 = 8$ घण्टे
कटाई में लगे दिनों की संख्या D	$D_1 = 12$ दिन	$D_2 = 15$ दिन

2■ अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण के संयुक्त अनुपालन में

M के प्रति H और D को स्थिर भाव में लेने पर – M और A अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
M के प्रति A और D को स्थिर भाव में लेने पर – M और H व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
M के प्रति A और H को स्थिर भाव में लेने पर – Mऔर D व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $M_1 * A_2 * H_1 * D_1 = M_2 * A_1 * H_2 * D_2 \Rightarrow$ 8* x*5*12= 6*4*8*15

से x= 6 हेक्टेयर अभीष्ट उत्तर होगा।

अथवा H के प्रति D और A को स्थिर भाव में लेने पर – H और M व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
H के प्रति D और M को स्थिर भाव में लेने पर – H और A अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
H के प्रति A और M को स्थिर भाव में लेने पर – Hऔर D व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $H_1 * M_1 * A_2 * D_1 = H_2 * M_2 * A_1 * D_2 \Rightarrow$ 5* 8*x*12= 8*15*4*15

से x= 6 हेक्टेयर अभीष्ट उत्तर होगा।

अथवा D के प्रति A और M को स्थिर भाव में लेने पर – D और H व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
D के प्रति A और H को स्थिर भाव में लेने पर – D और M व्युत्क्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।
D के प्रति M और H को स्थिर भाव में लेने पर – Dऔर A अनुक्रमानुपाती विचरण के परिपालन मे होंगे।

अतः $D_1 * H_1 * M_1 * A_2 = D_2 * H_2 * M_2 * A_1 \Rightarrow$ 12* 5*8*x= 15*18*6*4

से x= 6 हेक्टेयर अभीष्ट उत्तर होगा।

अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण का अनुप्रयोग विस्तार

वाणिज्य गणित (व्यावसायिक गणित) जिसे सरल शब्दों में व्यापार गणित कहा जाता है। जिसके अन्तर्गत अनुपात ,समानुपात, प्रतिशतता , काम (कार्य), लाभ–हानि ,ब्याज, करारापेण, एवं औसत विषयक सरल एवं विस्तारित अध्ययन किया जाता है। सामान्य अनुपात ,समानुपात, प्रतिशतता , काम (कार्य), लाभ–हानि ,ब्याज, करारापेण विषयक गणितीय हल का आघार प्राचीन भारतीय गणितज्ञों का ब्रमहगुप्त एवं भास्कराचार्य के द्वारा सुझाया गया ऐकिक नियम एवं त्रैराशिक नियम ही अनुप्रयोगिक है। जिसके मूल में, अनुक्रमानुपाती के संदर्भ में तिरछा (तिर्यक) गुणा नियम तथा युत्क्रमानुपाती विचरण के संदर्भ मे खड़ी (स्तम्भिक) समिका के नियम ही है। त्रैराशिक नियम के उच्च विस्तार के प्रति अनुक्रमानुपाती एवं व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियम का सँयुक्त अनुप्रयोग हल समिका कोणीय गुणा समिका के रूप में प्रतिपादित होता है ।

2-4 दो निश्चित स्थानों के बीच की निश्चित दूरी ज्ञात करने विषयक महत्वपूर्ण प्रमेय

यदि एक निश्चित स्थान (अपने घर) A से दूसरे निश्चित स्थान B पर पहुँचने के निर्धारित समय (जैसे–किसी आफिस के खुलने का समय, किसी वाहन /यान का स्टेशन से छूटने का समय) में पहुँचना। हो तो एक महत्वपूर्ण प्रमेय का प्रतिपादन निम्नानुसार होता है। ,

प्रमेय यदि स्थान A से प्रस्थान करने के सुनिश्चित समय से x कि.मी./घण्टे की चाल से जाने पर स्थान B पर पहुँचने के निश्चित समय के प्रति a घण्टा पहले तथा y कि.मी./घण्टे की चाल से जाने पर निश्चित समय के प्रति b घण्टा बाद पहुँचना होता हो तो

1• स्थान A और B के बीच दूरी $S = \frac{x*y*(a+b)}{x-y}$ कि.मी. होगा।

2• स्थान A से B तक पहुँचने तक की निश्चित अवधि $H = \frac{a*x+b*y}{x-y}$ घण्टा होगा।

3• स्थान A से B तक पहुँचने का की निश्चित चाल $V = \frac{x*y*(a+b)}{a*x+b*y}$ कि.मी./ घण्टा होगा।

प्रमाण 1• $\because$ x कि.मी./घण्टे की चाल जाने पर निश्चित समय के प्रति a घण्टा पहले पहुँचना होता है ।

$\therefore$ निर्धारित समयावधि $H = \frac{s}{x} + a$ घण्टा ------------(1)

पुनः $\because$ y कि.मी./घण्टे की चाल जाने पर निश्चित समय के प्रति b घण्टा बाद पहुँचना होता है ।

$\therefore$ निर्धारित समयावधि $H = \frac{s}{y} - b$ घण्टा ------------(2)

समिका(1) और (2) से $\frac{s}{x} + a = \frac{s}{y} - b \Rightarrow \frac{s}{y} - \frac{s}{x} = a + b \Rightarrow s(\frac{x-y}{x*y}) = a + b$ से

$$\mathbf{s = \frac{x*y(a+b)}{x-y}}$$ **प्रमाणित।**

प्रमाण 2• स्थान A से B तक पहुँचने तक की निश्चित अवधि $H = \frac{s}{x} + a$ में $\mathbf{s = \frac{x*y(a+b)}{x-y}}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$H = \frac{\frac{x*y(a+b)}{x-y}}{x} + a = \frac{y(a+b)}{x-y} + a = \frac{ay+by+ax-ay}{x-y} = \frac{a*x+b*y}{x-y}$$ **प्रमाणित।**

अथवा स्थान A से B तक पहुँचने तक की निश्चित अवधि $H = \frac{s}{y} - b$ में $\mathbf{s = \frac{x*y(a+b)}{x-y}}$ प्रतिस्थापित करने पर

$$H = \frac{\frac{x*y(a+b)}{x-y}}{y} - b = \frac{x*(a+b)}{x-y} - b = \frac{ax+bx-bx+by}{x-y} = \frac{a*x+b*y}{x-y}$$ **प्रमाणित।**

प्रमाण 3• स्थान A से B तक पहुँचने की निश्चित चाल $V = \frac{S}{H} = \frac{\frac{x*y(a+b)}{x-y}}{\frac{a*x+b*y}{x-y}} = \frac{x*y*(a+b)}{a*x+b*y}$ कि.मी./ घण्टा **प्रमााणित।**

उदाहरण■ देवशंकर अपने घर से प्रतिदिन सुनिश्चित समय पर विद्यालय की ओर प्रस्थान करता है। जिसके लिए वह 5 कि.मी./घण्टा की चाल अपनाता है, तो उसे विद्यालय खुलनें के निर्धारित समय के 12 मिनट पहले विद्यालय पहुँचना होता है। और जब वह 4 कि.मी./घण्टा की चाल अपनाता है, तो उसे विद्यालय खुलनें के निर्धारित समय के 15 मिनट बाद विद्यालय पहुँचना होता है। ज्ञात कीजिए–

1• देवशंकर के घर से उसके विद्वालय की दूरी।

2• घर से विद्यालय तक पहुँचने तक की निश्चित अवधि।

3• सुनिश्चित समय पर घर से विद्यालय तक पहुँचने में अपनायी गई निश्चित चाल।

हल प्रश्नानुसार– समय के पहले पहुँचने की चाल $x = 5$ कि.मी./घण्टा। समय के बाद पहुँचने की चाल $y = 4$ कि.मी./घण्टा

पहले पहुँचने का समय $a = 12$ मिनट $= \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ घण्टा बाद पहुँचने का समय $b = 15$ मिनट $= \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ घण्टा

$\therefore$ 1• देवशंकर के घर से उसके विद्वालय की दूरी $S = \frac{x*y(a+b)}{x-y} = \frac{5*4(\frac{1}{5}+\frac{1}{4})}{5-4} = 9$ कि.मी. अभीष्ट उत्तर होगा।

2• घर से विद्यालय तक पहुँचने तक की निश्चित अवधि $H = \frac{a*x+b*y}{x-y} = \frac{\frac{1}{5}*5+\frac{1}{4}*4}{5-4} = 2$ घण्टे अभीष्ट उत्तर होगा।

3• सुनिश्चित समय पर घर से विद्यालय तक पहुँचने में अपनायी गई निश्चित चाल $v = \frac{S}{H} = \frac{9}{2} = 4.5$ कि.मी./घण्टा अभीष्ट उत्तर होगा।

2-5 किसी सुनिश्चित काम को पूरा करने के प्रति व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A का शक्तिमान किसी सुनिश्चित काम को व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A T इकाई समयमान पर पूरा करता है तो उस व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A का उस काम के प्रति शक्तिमान $= \frac{1}{T}$ काम/इकाई समयमान होगा।

जैसे किसी सुनिश्चित काम को व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A 15 दिनों में पूरा कर सकता है तो उस व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A का उस काम के प्रति शक्तिमान $= \frac{1}{15}$ काम/दिन होगा।

2-6 अलग–अलग शक्तिमान वाले दो या दो से अधिक व्यक्ति या व्यक्ति समूह द्वारा काम पूरा करने का समय मान

अलग–अलग शक्तिमान वाले दो या दो से अधिक व्यक्ति या व्यक्तिसमूह द्वारा काम पूरा करने का समय मान = सभी व्यक्ति या समूह का सँयुक्त शक्तिमान का गुणन प्रतिलोम होगा।

उदाहरण■ अलग–अलग व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A,B और C किसी काम को अपने–अपने स्तर पर क्रमशः 10,12 और 15 दिनों में पूरा कर सकते है। बताइये उसी काम को तीनों मिलकर कितने दिनों मं पूरा करेंगे।

हल व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A काम को 10 दिनों पूरा कर सकता है।∴व्यक्ति या व्यक्तिसमूह A का शक्तिमान $= \frac{1}{10}$ काम/दिन

व्यक्ति या व्यक्तिसमूह B काम को 12 दिनों पूरा कर सकता है।∴व्यक्ति या व्यक्तिसमूह B का शक्तिमान $= \frac{1}{12}$ काम/दिन

व्यक्ति या व्यक्तिसमूह C काम को 15 दिनों पूरा कर सकता है।∴व्यक्ति या व्यक्तिसमूह C का शक्तिमान $= \frac{1}{15}$ काम/दिन

अतः सभी तीनों यक्ति या व्यक्तिसमूह A,B और C का सँयुक्त शक्तिमान $= (\frac{15}{60} = \frac{1}{4})$काम/दिन

∴ तीनों यक्ति या व्यक्तिसमूह A,B और C मिलकर (सँयुक्त होकर) उसी काम को अपने सँयुक्त शक्तिमान $= (\frac{15}{60} = \frac{1}{4})$काम/दिन के गुणन प्रतिलोम $= 4$ दिनों में पूरा करेंगे।

----------02----------

अध्याय -3
समानुपात

3-1 समानुपात दो अलग–अलग दर्शित अनुपातों का मानक अनुपात मान समान हो तो ये दोनों दर्शित अनुपात को समानुपात कहते हैं। **विस्तार मं** यदि दो सजातीय राशियाँ का दर्शित अनुपात अन्य दो सजातीय राशियाँ के दर्शित अनुपात का मानक अनुपात मान समान हो तो ये दोनों अलग–अलग दर्शित अनुपात के सम्बंध को समानुपात कहते है।

बीजीय संकेतन मे यदि a:b का मानक अनुपात मान = c:d का मानक अनुपात मान हो तो a:b तथा c:d के सम्बंध को समानुपात कहते है।

समानुपात सम्बंध संकेतन a:b समानुपात c:d का अध्ययन संकेत a:b :: c:d है।

a:b :: c:d का पद वर्गीकरण a:b :: c:d में a ,b, c तथा d को क्रमशः समानुपात सम्बंध के प्रथम पद ,द्वितीय पद, तृतीय पद,तथा चतुर्थ पद,कहते है। सरल गणितीय अध्ययन में प्रथम एवं चतुर्थ पद, को अन्त्य या चरम पद युग्म और द्वितीय एवं तृतीय पद को मध्य पद युग्म कहते है।

3-2 समानुपात विषयक महत्वपूर्ण अभिगृहीत समिका

अभिगृहीत 1■ किसी समानुपात के अन्त्य या चरम पदो का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् a:b :: c:d के प्रति अभिगृहीत समिका 1- $a \div b = c \div d \Rightarrow b \div a = d \div c$ होगा।

जिसे परिमेय निरूपण में $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ किये जाने का नियम है।

अभिगृहीत 2■ किसी समानुपात के अन्त्य या चरम पदो का गुणनफल मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् a:b :: c:d के प्रति अभिगृहीत समिका 2- a*d= b*c होगी।

अभिगृहीत 3■ a:b :: b:c को a:b:c दर्शित किया जाता है। तब a:b:c के प्रति b को a और c का मध्यानुपाती पद कहते है। तथा c को तृतीयानुपाती पद कहते है। तब a:b:c के प्रति अभिगृहीत समिका 3- $b^2 = a * c$ होगी। से मध्यानुपाती पद $b = \sqrt{a * c}$ होगा। तथा तृतीयानुपाती पद $c = b^2 \div a = \frac{b^2}{a}$ होगा।

अभ्यास माला –

(1) **तृतीयानुपाती ज्ञात करना** नियम a और b का तृतीयानुपाती c $= b^2 \div a = \frac{b^2}{a}$ होगा।

उदाहरण 1■ $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a})$ और $\sqrt{a^2 + b^2}$ का

तृतीयानुपाती $= \sqrt{a^2 + b^2}^2 \div \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = (a^2 + b^2) \div \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right) = ab$ होगा।

उदाहरण 2■ 5 और 10 का तृतीयानुपाती $= 10^2 \div 5 = 100 \div 5 = 20$ होगा।

(2) **चतुर्थानुपाती ज्ञात करना** नियम a ,b और c का चतुर्थानुपाती d $= b * c \div a = \frac{b*c}{a}$

उदाहरण 1■ 8 ,14 और 16 का चतुर्थानुपाती $= 14 * 16 \div 8 = \frac{14*16}{8} = 28$ होगा।

उदाहरण 2■ 2xy ,x^2 और y^2 का चतुर्थानुपाती $= \frac{x^2 * y^2}{2xy} = \frac{xy}{2}$ होगा।

उदाहरण 3■ 14:35::16:x हो तो चतुर्थानुपाती $x = \frac{35*16}{14} = 40$ होगा।

(3) **मध्यानुपाती ज्ञात करना .** नियम a और c का मध्यानुपाती b $= \sqrt{a * c}$

उदाहरण 1■ $4x^2y$ और $9yz^2$ का मध्यालुपाती $= \sqrt{(4x^2y) * (9yz^2)} = 6xyz$ होगा।

उदाहरण 2■ $49x^2$और $100y^2$ का मध्यालुपाती $= \sqrt{(49x^2) * (100y^2)} = 70xy$ होगा।

3-3 समानुपात विषयक महत्वपूर्ण अभिगृहीत एवं समानुपात के नियम के तहत प्रमेय

प्रमेय 1 $(a+x):(b+x):(c+x)$ हो तो $x = \frac{b^2-ac}{a+c-2b}$ होगा।

प्रमाण $(a+x):(b+x):(c+x)$ का समानुपात विस्तार $(a+x):(b+x) :: (b+x):(c+x)$ होगा।

तब अभिगृहीत 2 के तहत्– $(a+x)*(c+x) = (b+x)*(b+x) \Rightarrow ac+(a+c)x+x^2 = b^2+2bx+x^2$

$\Rightarrow (a+c-2b)x = b^2 - ac \quad \therefore x = \frac{b^2-ac}{a+c-2b}$ होगा । **प्रमाणित।**

प्रमेय 2 $a+c = 2b$ और $\frac{1}{b}+\frac{1}{d} = \frac{2}{c}$ हो तो $a:b :: c:d$ होगा।

प्रमाण $\frac{1}{b}+\frac{1}{d} = \frac{2}{c}$ से $dc+bc = 2bd \Rightarrow (d+b)c = (a+c)d$ ------ $2b = (a+c)$ प्रतिस्थापित करने पर।

$\Rightarrow dc+bc = ad+cd \quad \Rightarrow bc = ad \quad \therefore$ अभिगृहीत समिका 2 के तहत $a:b :: c:d$ होगा। **प्रमाणित।**

प्रमेय 3 a तथा c का मध्यानुपती b हो तो $\frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}} = b^4$ होगा।

प्रमाण a तथा c का मध्यानुपती b है $\therefore b^2 = ac$ -----------(1)

$$a^{-2}-b^{-2}+c^{-2} = \frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2-a^2c^2+a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{b^2c^2-(ac)^2+a^2b^2}{b^2(ac)^2} = \frac{b^2c^2-(b^2)^2+a^2b^2}{b^2(b^2)^2}$$

$= \frac{c^2-b^2+a^2}{b^4} \quad \therefore \frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}} = \frac{a^2-b^2+c^2}{\frac{c^2-b^2+a^2}{b^4}} = b^4$ होगा। **प्रमाणित।**

प्रमेय 4 यदि p तथा r का मध्यानुपती q हो तो $pqr(p+q+r)^3 = (pq+qr+rp)^3$ होगा।

प्रमाण p तथा r का मध्यानुपती q है $\therefore q^2 = pr \Rightarrow pqr = q^3$ -----------(1)

$pqr(p+q+r)^3 = q^3(p+q+r)^3 = \{q(p+q+r)\}^3$

$= (pq+q^2+qr)^3 = (pq+rp+qr)^3 = (pq+qr+rp)^3$ होगा। **प्रमाणित।**

प्रमेय 5 यदि अलग–अलग चार संख्याएँ a,b,c और d में एक उभयनिष्ठ संख्या x जोड़ने पर प्राप्त योगमान संख्याएँ समानुपात नियम में $(a+x):(b+x)::(c+x):(d+x)$ हो तो $x = \frac{bc-ad}{(a+b)-(b+c)}$ होगा ।

प्रमाण– $(a+x):(b+x)::(c+x):(d+x)$ से $(a+x)*(d+x) = (b+x)*(c+x)$

$\Rightarrow ad+(a+d)x+x^2 = bc+(b+c)x+x^2 \Rightarrow \{(a+d)-(b+c)\}x = bc-ad$

$\therefore x = \frac{bc-ad}{(a+d)-(b+c)}$ होगा। **प्रमाणित।**

उदाहरण■ यदि अलग–अलग चार संख्याएँ 10,18,22 और 38 में एक उभयनिष्ठ संख्या x जोड़ने पर प्राप्त योगमान संख्याएँ समानुपात नियम में $(10+x):(18+x)::(22+x):(38+x)$ हो तो–

$$x = \frac{18*22-10*38}{(10+38)-(18+22)} = \frac{396-380}{48-40} = \frac{16}{8} = 2 \text{ होगा ।}$$

प्रमेय 6 यदि अलग–अलग चार संख्याएँ a,b,c और d में एक उभयनिष्ठ संख्या x घटाने पर प्राप्त शेष मान संख्याएँ समानुपात नियम में $(a-x):(b-x)::(c-x):(d-x)$ हो तो $x = \frac{bc-ad}{(b+c)-(a+d)}$ होगा ।

प्रमाण $(a-x):(b-x)::(c-x):(d-x)$ से $(a-x)*(d-x) = (b-x)*(c-x)$

$\Rightarrow ad-(a+d)x+x^2 = bc-(b+c)x+x^2 \Rightarrow \{(b+c)-(a+d)\}x = bc-ad$

$\therefore x = \frac{bc-ad}{(b+c)-(a+d)}$ होगा। **प्रमाणित।**

उदाहरण 1■ यदि अलग–अलग चार संख्याएँ 11,20,26 और 50 में एक उभयनिष्ठ संख्या x घटाने पर प्राप्त शेष मान संख्याएँ समानुपात नियम में $(11-x):(20-x)::(26-x):(50-x)$ हो तो–

$x = \frac{20*26-11*50}{(20+26)-(11+50)} = \frac{520-550}{46-61} = \frac{-30}{-15} = 2$ होगा ।

उदाहरण 2■ यदि अलग–अलग चार संख्याएँ 23,30,57 और 78 में एक उभयनिष्ठ संख्या x घटाने पर प्राप्त शेष मान संख्याएँ समानुपात नियम में $(23-x):(30-x)::(57-x):(78-x)$ हो तो–

$x = \frac{30*57-23*78}{(30+57)-(23+78)} = \frac{1710-1794}{87-101} = \frac{-84}{-14} = 6$ होगा ।

प्रमेय 7 दो संख्याएँ x और y जिनका मध्यानुपाती p और तृतीयानुपाती q हो तो

संख्या $y=\sqrt[3]{p^2 * q}$ संख्या $x = \frac{p^2}{y} = \sqrt[3]{\frac{p^4}{q}}$ होगा।

प्रमाण संख्याएँ x और y जिनका मध्यानुपाती p है। $\therefore x*y=p^2 \Rightarrow x = \frac{p^2}{y}$ --------- (1)

पुनः संख्याएँ x और y जिनका तृतीयानुपाती q है। $\therefore x*q=y^2 \Rightarrow x = \frac{y^2}{q}$ ---------(2)

समिका (1)**और** (2) से $\frac{p^2}{y} = \frac{y^2}{q} \Rightarrow y^3 = p^2 q \therefore y = \sqrt[3]{p^2 * q}$ समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर–

$x = \frac{p^2}{y} = \frac{p^2}{\sqrt[3]{p^2*q}} = \sqrt[3]{\frac{p^4}{q}}$ होगा। **प्रमाणित।**

उदाहरण 1■ वे दो संख्या ज्ञात कीजिए जिनका मध्यानुपाती 8 और तृतीयानुपाती 64 है।

हल माना कि संख्याएँ x और y है जिनका मध्यानुपाती p=8 और तृतीयानुपाती q =64 है।

$\therefore$ संख्या $y=\sqrt[3]{p^2 * q} \Rightarrow$ संख्या $y=\sqrt[3]{8^2 * 64} = \sqrt[3]{(2^3)^2 * 4^3} = 2^2 * 4 = 4*4 = 16$

और संख्या $x= \frac{p^2}{y} = \frac{8^2}{16} = \frac{8*8}{4*4} = 2*2 = 4$

अभीष्ट संख्याएँ 4 ओर 16 होगा।

उदाहरण 2■ वे दो संख्या ज्ञात कीजिए जिनका मध्यानुपाती 24 और तृतीयानुपाती 1536 है।

हल माना कि संख्याएँ x और y है जिनका मध्यानुपाती p=24 और तृतीयानुपाती q =1536 है।

$\therefore$ संख्या $y=\sqrt[3]{p^2 * q} \Rightarrow$ संख्या $y=\sqrt[3]{24^2 * 1536} = \sqrt[3]{24^2 * (24*8*8)}$

$= \sqrt[3]{24^3 * 2^3 * 2^3} = 24*2*2 = 96$ और संख्या $x= \frac{p^2}{y} = \frac{24^2}{96} = \frac{24*24}{4*24} = 6$

अभीष्ट संख्याएँ 6 ओर 96 होगा।

3-4 समानुपात के नियम a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ के प्रति–

1• **एकान्तर अनुपात** के नियम में a:c :: b:d $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$होगा।

2• **व्युत्क्रमानुपात या उल्टानुपात** के नियम में b:a :: d:c $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ होगा।

3• **योगानुपात** के नियम में (a+b):b :: (c+d):d $\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ होगा।

4• **अन्तरानुपात** के नियम में $(a-b):b :: (c-d):d \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ होगा।

5• **योगान्तरानुपात** के नियम में (a+b):(a-b) :: (c+d) : (c-d) $\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ होगा।

6• **k का नियम में** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ से c=dk , a= bk

3-5 समानुपात के नियम के तहत बीजीय समिका विस्तारों को सिद्ध करने अभ्यास माला■

(1) यदि a:b :: c:d हो तो सिद्ध कर सकते है।

1■ $\frac{ma-nb}{b}=\frac{mc-nd}{d}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ के दोनों पक्षों में $\frac{m}{n}$ का गुणा करने पर

$\Rightarrow \frac{a}{b}*\frac{m}{n}=\frac{c}{d}*\frac{m}{n} \Rightarrow \frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$ के प्रति अन्तरानुपात नियम से।

$\Rightarrow \frac{ma-nb}{nb}=\frac{mc-nd}{nd}$ के दोनों पक्ष के हरों का समान गुणांक n का विलोपन करने पर $\frac{ma-nb}{b}=\frac{mc-nd}{d}$ सिद्ध।

2■ $\frac{3a+4b}{3c+4d}=\frac{5a+6b}{5c+6d}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ के दोनों पक्षों में $\frac{3}{4}$ का गुणा करने पर

$\Rightarrow \frac{3a}{4b}=\frac{3c}{4d}$ के प्रति अन्तरानुपात नियम से।

$\Rightarrow \frac{3a+4b}{4b}=\frac{3c+4d}{4d} \Rightarrow \frac{3a+4b}{b}=\frac{3c+4d}{d} \Rightarrow \frac{3a+4b}{3c+4d}=\frac{b}{d}$ --------(A)

इसी प्रकार $\frac{5a+6b}{5c+6d}=\frac{b}{d}$ --------(B)

∴ समिका (A) और (B) से $\frac{3a+4b}{3c+4d}=\frac{5a+6b}{5c+6d}$ सिद्ध।

3■ $\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ के प्रति अन्तरानुपात नियम से $\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ के दोनों पक्षें का वर्ग मान लिए जानें पर $\Rightarrow$ $\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2}{d^2}$ के प्रति योगान्तरानुपात नियम से $\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$ सिद्ध।

4■ $\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{c^2-d^2}{cd}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ से a=kb , c=kd से –

बाँया पक्ष $=\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{b^2k^2-b^2}{kb^2}=\frac{b^2(k^2-1)}{b^2k}=\frac{k^2-1}{k}$ ------------(A)

दाँया पक्ष $=\frac{c^2-d^2}{cd}=\frac{d^2k^2-d^2}{kd^2}=\frac{d^2(k^2-1)}{d^2k}=\frac{k^2-1}{k}$ ------------(B)

समिका (A) और (B) से $\frac{a^2-b^2}{ab}=\frac{c^2-d^2}{cd}$ सिद्ध।

5■ $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ से a=kb , c=kd से –

बाँया पक्ष $=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{k^2b^2+kb^2+b^2}{k^2b^2-kb^2+b^2}=\frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$------------(A)

दाँया पक्ष $=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}=\frac{k^2d^2+kd^2+d^2}{k^2d^2-kd^2+d^2}=\frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$------------(B)

समिका (A) और (B) से $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ सिद्ध।

6■ $\frac{(a+c)^3}{(b+d)^3}=\frac{a(a-c)^2}{b(b-d)^2}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ से a=kb , c=kd से –

बाँया पक्ष $= \frac{(a+c)^3}{(b+d)^3} = \frac{(bk+dk)^3}{(b+d)^3} = \frac{k^3\,(b+d)^3}{(b+d)^3} = k^3$ ------------(A)

दाँया पक्ष $= \frac{\mathbf{a(a-c)^2}}{\mathbf{b(b-d)^2}} = \frac{\mathbf{bk(bk-dk)^2}}{\mathbf{b(b-d)^2}} = \frac{\mathbf{bk*k^2(b-d)^2}}{\mathbf{b(b-d)^2}} = \mathbf{k^3}$ ------------(B)

समिका (A) और (B) से $\frac{\mathbf{(a+c)^3}}{\mathbf{(b+d)^3}} = \frac{\mathbf{a(a-c)^2}}{\mathbf{b(b-d)^2}}$ **सिद्ध।**

7■ $\text{abcd}[\frac{1}{a^2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d^2}}] = \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

प्रमाण a:b :: c:d $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ से a=kb , c=kd से

बाँया पक्ष $\text{abcd}[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2}] = b^2d^2k^2[\frac{1}{b^2k^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{d^2k^2} + \frac{1}{d^2}]$

$= d^2 + d^2k^2 + b^2 + b^2k^2 = (b^2 + d^2)(k^2 + 1)$ ------(A)

दाँया पक्ष $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = b^2k^2 + b^2 + d^2k^2 + d^2 = (b^2 + d^2)(k^2 + 1)$ ------(B)

समिका (A) और (B) से $\text{abcd}[\frac{1}{a^2} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{b^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c^2}} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d^2}}] = \mathbf{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ **सिद्ध।**

(2) यदि $\frac{\boldsymbol{3a+4b}}{\boldsymbol{3c+4d}} = \frac{\boldsymbol{3a-4b}}{\boldsymbol{3c-4d}}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है।** $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{d}}$

प्रमाण $\frac{3a+4b}{3c+4d} = \frac{3a-4b}{3c-4d}$ के प्रति एकान्तर अनुपात नियम से $\Rightarrow \frac{3a+4b}{3a-4b} = \frac{3c+4d}{3c-4d}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$\Rightarrow \frac{(3a+4b)+(3a-4b)}{(3a+4b)-(3a-4b)} = \frac{(3c+4d)+(3c-4d)}{(3c+4d)-(3c-4d)} \Rightarrow \frac{6a}{8b} = \frac{6c}{8d}$ से दोनों पक्ष के समान अचर गुणांक $\frac{6}{8}$ का विलोपन करने पर

$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **सिद्ध।**

(3) यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है**

1■ $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ce}{df}$

प्रमाण माना कि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ है। तब a=bk , c=dk. e=fk से

बाँया पक्ष $\frac{(bk)^2+(dk)^2}{b^2+d^2} = \frac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2} = k^2 - - - (A)$ तथा दाँया पक्ष $\frac{ce}{df} = \frac{(dk)*(fk)}{df} = \frac{k^2df}{df} = k^2 - - - (A)$

. समिका (A) और (B) से $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2} = \frac{ce}{df}$ **सिद्ध।**

2■ $\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3} = \frac{a^3}{b^3}$

प्रमाण ाना कि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ है। तब a=bk , c=dk. e=fk से

बाँया पक्ष $\frac{(bk)^3+(dk)^3+(fk)^3}{b^3+d^3+f^3} = \frac{k^3(b^3+d^3+f^3)}{b^3+d^3+f^3} = k^3 - - - (A)$ तथा दाँया पक्ष $\frac{a^3}{b^3} = \frac{(kb)^3}{b^3} = k^3 - - - (A)$

. समिका (A) और (B) से $\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3} = \frac{a^3}{b^3}$ **सिद्ध।**

(4) 1■ यदि $\mathbf{x = \frac{(2n+1)ab}{a+b}}$ हो तो **सिद्ध कर सकते है** $\mathbf{\frac{2x+(2n+1)a}{2x-(2n+1)a} + \frac{2x+(2n+1)\,b}{2x-(2n+1)b} = 2}$

प्रमाण $\mathbf{x = \frac{(2n+1)ab}{a+b}} \Rightarrow \frac{2x}{(2n+1)a} = \frac{2b}{a+b}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$\Rightarrow \frac{2x+(2n+1)a}{2x-(2n+1)a} = \frac{2b+(a+b)}{2b-(a+b)} \Rightarrow \frac{2x+(2n+1)a}{2x-(2n+1)a} = \frac{3b+a}{b-a} - - - - - (A)$

पुन : $\mathbf{x=\frac{(2n+1)ab}{a+b}}$ $\Rightarrow \frac{2x}{(2n+1)b}=\frac{2a}{a+b}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$$\Rightarrow \frac{2x+(2n+1)b}{2x-(2n+1)b}=\frac{2a+(a+b)}{2a-(a+b)} \Rightarrow \frac{2x+(2n+1)b}{2x-(2n+1)b}=\frac{3a+b}{a-b} ------(B)$$

समिका (A) और (B) का पक्षवार योग करने पर –

$$\frac{2x+(2n+1)a}{2x-(2n+1)a}+\frac{2x+(2n+1)b}{2x-(2n+1)b}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{3b+a-(3a+b)}{b-a}=\frac{2a-2b}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$$ सिद्ध।

उदाहरण■ $\mathbf{x=\frac{5ab}{a+b}}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है** $\mathbf{\frac{2x+5a}{2x-5a}+\frac{2x+5b}{2x-5b}}=2$

$x=\frac{5ab}{a+b}$ में अंश गुणांक 5 को (2n+1) के प्रतिरूपण में (2*2+1) होगा। अतः (4)1■ सिद्ध करने के प्रक्रमों में (2n+1) =5 प्रतिस्थापित करें।

2■ यदि $\mathbf{x=\frac{\sqrt{p+(2n+1)q}+\sqrt{p-(2n+1)}}{\sqrt{\sqrt{p+(2n+1)q}-\sqrt{\sqrt{p+(2n+1)q}}}}}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है** $(2n-1)x^2-2px+(2n+1)q=0$

प्रमाण $\mathbf{x=\frac{\sqrt{p+(2n+1)q}+\sqrt{p-(2n+1)q}}{\sqrt{p+(2n+1)q}-\sqrt{p-(2n+1)q}}}$ $\Rightarrow \mathbf{\frac{x}{1}}=\mathbf{\frac{\sqrt{p+(2n+1)q}+\sqrt{p-(2n+1)q}}{\sqrt{p+(2n+1)q}-\sqrt{p-(2n+1)q}}}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$$\Rightarrow \mathbf{\frac{x+1}{x-1}=\frac{\{\sqrt{p+(2n+1)q}+\sqrt{p-(2n+1)q}\}+\{\sqrt{p+(2n+1)q}-\sqrt{p-(2n+1)q}\}}{\{\sqrt{p+(2n+1)q}+\sqrt{p-(2n+1)q}\}-\{\sqrt{p+(2n+1)q}-\sqrt{p-(2n+1)q}\}}=\frac{2\sqrt{p+(2n+1))q}}{2\sqrt{p-(2n+1))q}}=\frac{\sqrt{p+(2n+1))q}}{\sqrt{p-(2n+1))q}}}$$

$\Rightarrow \mathbf{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2=\frac{p+(2n+1)q}{p-(2n+1)q}} \Rightarrow \mathbf{\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{p+(2n+1)q}{p-(2n+1)q}} \Rightarrow \mathbf{\frac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)-2x}=\frac{p+(2n+1)q}{p-(2n+1)q}}$ यह समिका मूल समिका $\mathbf{\frac{(x^2+1)}{2x}=\frac{p}{(2n+1)q}}$ के योगान्तर नियम से विस्तारित है। ∴ $\mathbf{\frac{(x^2+1)}{2x}=\frac{p}{(2n+1)q}}$ के प्रति तिर्यक गुणा एवं पक्षांतर नियम से $(2n+1)qx^2-2px+(2n+1)q=0$ सिद्ध।

(5) **1■ यदि** $\mathbf{x=\frac{2n\,ab}{a+b}}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है** $\mathbf{\frac{x+na}{x-na}+\frac{x+n\,b}{x-nb}=2}$

$\mathbf{x=\frac{2nab}{a+b}} \Rightarrow \frac{x}{na}=\frac{2b}{a+b}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$$\Rightarrow \frac{x+na}{x-na}=\frac{2b+(a+b)}{2b-(a+b)} \Rightarrow \frac{x+na}{x-na}=\frac{3b+a}{b-a} ------(A)$$

पुनः : $\mathbf{x=\frac{2nab}{a+b}}$ $\frac{x}{nb}=\frac{2a}{a+b}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से

$$\frac{x+nb}{x-nb}=\frac{2a+(a+b)}{2a-(a+b)} \Rightarrow \frac{2x+(2n+1)b}{2x-(2n+1)b}=\frac{3a+b}{a-b} ------(B)$$

समिका (A) और (B) का पक्षवार योग करने पर –

$$\frac{x+na}{x-na}+\frac{x+nb}{x-nb}=\frac{3b+a}{b-a}+\frac{3a+b}{a-b}=\frac{3b+a-(3a+b)}{b-a}=\frac{2b-2a}{b-a}=\frac{2(b-a)}{b-a}=2$$ सिद्ध।

उदाहरण■ $x=\frac{10ab}{a+b}$ **हो तो** $\mathbf{\frac{x+5a}{x-5a}+\frac{x+5b}{x-5b}}=2$ सिद्ध करने का प्रमाण के लिए $x=\frac{10ab}{a+b}$ में 10 को 2n के प्रतिरूपण में 2*5 हैं। अतः उपरोक्तानुसार सिद्ध करने के प्रक्रमों में n=5 प्रतिस्थापित करें।

2■ यदि $\mathbf{x=\frac{\sqrt{p+2nq}+\sqrt{p-2nq}}{\sqrt{p+2nq}-\sqrt{p-2nq}}}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है** $\mathbf{nx^2-px+nq=0}$

प्रमाण $\mathbf{x=\frac{\sqrt{p+2nq}+\sqrt{p-2nq}}{\sqrt{p+2nq}-\sqrt{p-2nq}}}$ $\Rightarrow \mathbf{\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{p+2nq}+\sqrt{p-2nq}}{\sqrt{p+2nq}-\sqrt{p-2nq}}}$ के प्रति योगान्तर$\Rightarrow$ अनुपात नियम से

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{\{\sqrt{p+2nq}+\sqrt{p-2nq}\}+\{\sqrt{p+2nq}-\sqrt{p-2nq}\}}{\{\sqrt{p+2nq}+\sqrt{p-2nq}\}-\{\sqrt{p+2nq}-\sqrt{p-2nq}\}} \qquad = \frac{2\sqrt{p+2nq}}{2\sqrt{p-2nq}} = \frac{\sqrt{p+2nq}}{\sqrt{p-2nq}}$

$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \frac{p+2nq}{p-2nq} \quad \Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{p+2nq}{p-2nq} \quad \Rightarrow \frac{(x^2+1)+2x}{(x^2+1)-2x} = \frac{p+2nq}{p-2nq}$ यह समिका मूल समिका $\frac{(x^2+1)}{2x} = \frac{p}{2nq}$ के योगान्तर नियम से विस्तारित है।

$\therefore \frac{(x^2+1)}{2x} = \frac{p}{2nq} \Rightarrow \frac{(x^2+1)}{x} = \frac{p}{nq}$ के प्रति तिर्यक गुणा एवं पक्षांतर नियम से

$nqx^2 - px + nq = 0$ **सिद्ध।**

(6) यदि $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$ **हो तो सिद्ध कर सकते है** $(b-c)x+(c-a)y+(a+b)z = 0$

प्रमाण माना कि $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b} = k$ तब $x = (b+c)k, y = (c+a)k, z = (a+b)k$

$\therefore$ बाँया पक्ष तो $(b-c)x+(c-a)y+(a+b)z = (b-c)(b+c)k+(c-a)(c-a)k+(a+b)(a+b)k$

$= k(b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2) = k(0) = 0$ दाँया पक्ष। **सिद्ध।**

(7) यदि $\frac{a}{y+z} = \frac{b}{z+x} = \frac{c}{x+y}$ **हो तो** $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2} = \frac{b(c-a)}{z^2-x^2} = \frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$ **सिद्ध करना**

प्रमाण माना कि $\frac{a}{y+z} = \frac{b}{z+x} = \frac{c}{x+y} = k$ तब $a = (y+z)k, b = (z+x)k, c = (x+y)k$

$\therefore \quad \frac{a(b-c)}{y^2-z^2} = \frac{(y+z)k\{(z+x)k-(x+y)k\}}{y^2-z^2} = \frac{k^2(y+z)(z-y)}{y^2-z^2} = \frac{-k^2(y^2-z^2)}{y^2-z^2} = -k^2$ --------(A)

$\frac{b(c-a)}{z^2-x^2} = \frac{(z+x)k\{(x+y)k-(y+z)k\}}{z^2-x^2} = \frac{k^2(z+x)(x-z)}{z^2-x^2} = \frac{-k^2(y^2-z^2)}{z^2-x^2} = -k^2$ --------(B)

$\frac{c(a-b)}{x^2-y^2} = \frac{(x+y)k\{(y+z)k-(z+x)k\}}{x^2-y^2} = \frac{k^2(x+y)(y-x)}{x^2-y^2} = \frac{-k^2(y^2-z^2)}{x^2-y^2} = -k^2$ --------(C)

हल समिकाएँ(A), (B) और (C) से $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2} = \frac{b(c-a)}{z^2-x^2} = \frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$ **सिद्ध।**

(8) यदि $\frac{x}{bc(b-c)} = \frac{y}{ca(c-a)} = \frac{z}{Ab(a-b)}$ **हो तो** $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z = 0$ **सिद्ध करना**

प्रमाण माना कि $\frac{x}{bc(b-c)} = \frac{y}{ca(c-a)} = \frac{z}{Ab(a-b)} = \mathbf{k}$ तब $x = bc(b-c)k, y = ca(c-a)k, z = ab(a-b)k$

$\therefore$ बाँया पक्ष $a(b+c)x+b(c+a)y+c(a+b)z = abc(b^2 - c^2)k + abc(c^2 - a^2)k + abc(a^2 - b^2)k$

$= abck(b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$= abck(0) = 0$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

(9) यदि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ **हो तो**

1■ $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = \frac{xyz}{abc}$ **सिद्ध करना**

प्रमाण माना कि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ तब $x = ak, y = bk, z = ck$

$\therefore$ बाँया पक्ष $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = \frac{(ak)^3}{a^3} - \frac{(bk)^3}{b^3} + \frac{(ck)^3}{c^3} = k^3 - k^3 + k^3 = k^3$ ------(A)

तथा दाँया पक्ष $\frac{xyz}{abc} = \frac{(ak)*(bk)*(ck)}{abc} = k^3$ ------------(B)

हल समिकाएँ(A), और (B) से $\frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = \frac{xyz}{abc}$ **सिद्ध।**

2■ $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = [\frac{lx+my+nz}{la+mb+cn}]^2$ सिद्ध करना

प्रमाण माना कि $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k$ तब $x= ak , y=bk , z= ck$ $a^x = y$ $\log y = x\log a$

$\therefore$ बाँया पक्ष $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{k^2(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2} = k^2$ ------(A)

तथा दाँया पक्ष $[\frac{lx+my+nz}{la+mb+cn}]^2 = [\frac{(lak+mbk+cnk}{la+mb+nc}]^2 \; k^2[\frac{(la+mb+nc}{la+mb+nc}]^2 = k^2$ ------------(B)

हल समिकाएँ(A), और (B) से $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} = [\frac{lx+my+nz}{la+mb+cn}]^2$ सिद्ध।

(10) $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y}$ हो तो $xyz = 1$ सिद्ध करना

प्रमाण माना कि $\frac{\log x}{y-z} = \frac{\log y}{z-x} = \frac{\log z}{x-y} = k$ तब $\log x= k(y-z) \Rightarrow x=\text{antilog}[k(y-z)]$

$\log y = k(z-x) \Rightarrow y = \text{antilog}[k(z-x)], \log z = k(x-y) \Rightarrow z = \text{antilog}[k(x-y)]$

$\therefore$ बाँया पक्ष $xyz = \text{anti}[k(y-z)] * \text{antilog}[k(z-x)] + k(x-y)] * \text{antilog}[k(x-y)]$

$= \text{antilog}[k(y-z) + k(z-x) + k(x-y)] = \text{antilog}(0) = 1 =$बाँयापक्ष। सिद्ध।

3-6 समानुपात के नियम के तहत एक चरीय बीजीय समीकरणों का हल

उदाहरण 1■. समीकरण $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b$ के लिए हल गणना –

$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = b \Rightarrow \frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}} = \frac{b}{1}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से–

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} = \frac{b+1}{b-1}$ के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$\Rightarrow \frac{a+x}{a-x} = \frac{b^2+2b+1}{b^2-2b+1} \Rightarrow \frac{a+x}{a-x} = \frac{(b^2+1)+2b}{(b^2+1)-2b}$ यह समिका मूल समिका

$\frac{a}{x} = \frac{(b^2+1)}{2b}$ के योगान्तर नियम से विस्तारित है।

$\therefore \frac{a}{x} = \frac{(b^2+1)}{2b}$ को हल करने पर $x= \frac{2ab}{b^2+1}$ होगा।

उदाहरण 2■. समीकरण $\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}} = 5$ के लिए हल गणना –

$\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}} = 5 \Rightarrow \frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}} = \frac{5}{1}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से–

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{3x}}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{5+1}{5-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{2x+1}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर–

$\Rightarrow \frac{3x}{2x+1} = \frac{9}{4}$ में तिर्यक गुणा नियम से

$\Rightarrow 12x= 18x+9 \Rightarrow 12x- 18x =9 \Rightarrow -6x =9 \therefore x = -\frac{3}{2}$ होगा।

उदाहरण 3■. समीकरण $\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = \frac{341}{91}$ के लिए हल गणना –

$\frac{x^3+3x}{3x^2+1} = \frac{341}{91}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से–

$\Rightarrow \frac{(x^3+3x)+(3x^2+1)}{(x^3+3x)-(3x^2+1)} = \frac{341+91}{341-91} \Rightarrow (\frac{x+1}{x-1})^3 = \frac{432}{250} = \frac{216}{125} = (\frac{6}{5})^3$ से समान घात मान का विलोपन करने पर

$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} = \frac{6}{5}$ में तिर्यक गुणा नियम से

$\Rightarrow 5x+5 = 6x-6$ को हल करने पर $x = 11$ होगा।

उदाहरण 4■. समीकरण $\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}} = \frac{c}{d}$ हो ,तो $x = \frac{b(c+d)^2-a(c-d)^2}{-4cd}$ सिद्ध करना –

$\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}} = \frac{c}{d}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से– $\Rightarrow \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}} = \frac{c+d}{c-d}$ के दोनों पक्षां का वर्ग करने पर–

$\Rightarrow \frac{x+a}{x+b} = \frac{(c+d)^2}{(c-d)^2} \Rightarrow x = \frac{b(c+d)^2-a(c-d)^2}{(c-d)^2-(c+d)^2} = x = \frac{b(c+d)^2-a(c-d)^2}{(c-d)^2-(c+d)^2} = \frac{b(c+d)^2-a(c-d)^2}{-4cd}$ **सिद्ध।**

उदाहरण 5■. $\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+16}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+16}} = \frac{7}{3}$ का हल

$\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+16}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+16}} = \frac{7}{3}$ के प्रति योगान्तर अनुपात नियम से– $\frac{2\sqrt{x+5}}{2\sqrt{x+16}} = \frac{10}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+16}} = \frac{5}{2}$ के दोनों पक्षां का वर्ग करने पर– $\frac{x+5}{x+16} = \frac{25}{4} \therefore x = \frac{25*16-5*4}{4-25} = \frac{400-20}{-21} = -\frac{380}{21}$ उत्तर

अथवा

$x = \frac{16(7+3)^2-5(7-3)^2}{(7-3)^2-(7+3)^2} = \frac{16*10^2-5*4^2}{-4*7*3} = \frac{1600-80}{-4*7*3} = \frac{1520}{-4*7*3} = -\frac{380}{21}$ उत्तर

जाँच बाँया पक्ष $\frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{x+16}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{x+16}}$ में $x = -\frac{380}{21}$ रखने पर $\frac{\sqrt{-\frac{380}{21}+5}+\sqrt{-\frac{380}{21}+16}}{\sqrt{-\frac{380}{21}+5}-\sqrt{-\frac{380}{21}+16}} = \frac{\sqrt{-380+105}+\sqrt{-380+336}}{\sqrt{-380+105}-\sqrt{-380+336}}$

$= \frac{\sqrt{-275}+\sqrt{-44}}{\sqrt{-275}-\sqrt{-44}} = \frac{i\sqrt{275}+i\sqrt{44}}{i\sqrt{-275}-i\sqrt{-44}}$ से काल्पनिक संख्या⧗ गुणांक i अलग करने पर

$= \frac{i\sqrt{275}+i\sqrt{44}}{i\sqrt{-275}-i\sqrt{-44}} = \frac{i\sqrt{275}+i\sqrt{44}}{i\sqrt{-275}-i\sqrt{-44}} * \frac{i\sqrt{275}+i\sqrt{44}}{i\sqrt{-275}+i\sqrt{44}} = \frac{-275-44-2\sqrt{275*44}}{-275+44}$

$= \frac{-319-2\sqrt{(5*5*11)*(2*2*11)}}{-231} = \frac{-319-2*5*11*2}{-231} = \frac{-319-220}{-231} = \frac{-539}{-231} = \frac{7*7*11}{3*7*11} = \frac{7}{3}$

⧗ काल्पनिक संख्या धनात्मक परिमेय संख्या x के प्रति $\sqrt{x} = \sqrt{1} * \sqrt{x}$ में $\sqrt{1}$ को गणित अध्ययन को विस्तार देने काल्पनिक संख्या कहा गया है। जिसका अध्ययन संकेत i है। $\therefore [i^{\pm 2} = -1], [i^{\pm 3} = -i], [i^{\pm 4} = 1], [i^{\pm 5} = i]$ होगा। व्यापकता में पूर्ण संख्या समुच्चय z=[0,1,2,3 ------] के प्रत्येक अवयव के प्रति $[i^{\pm(4z)} = 1], [i^{\pm(4z+1)} = i], [i^{\pm(4z+2)} = -1 =$ $1, i\pm(4z+3) = -i$ होगा।

-----------03----------

अध्याय -4
विततानुपाती

4-1 विततानुपात और विततानुपात में k का नियम तीन से अधिक राशियाँ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ------ में समानुपात समिकाएँ–

$a_1 : a_2 :: a_2 : a_3,\ a_2 : a_3 :: a_3 : a_4,\ a_3 : a_4 :: a_4 : a_5$ ------

अर्थात् $a_1 : a_2 : a_2,\ \ a_2 : a_3 : a_4,\ \ a_3 : a_4 : d_5$ -----------दर्शित हो तो राशियाँ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 के अनुपात पद विस्तार $(a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5 : - : - : - :)$ को विततानुपात कहते है। जिसका अर्थ समानुपात नियम के तहत् $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{a_4}{a_5} = - = - = k$ होना है।।

तब ------ $a_4 = a_5 * k,\ \ a_3 = a_4 * k = a_5 * k^2,\ \ a_2 = a_3 * k = a_4 * k^2 = a_5 * k^3,\ \ a_1 = a_2 * k = a_3 * k^2 = a_4 * k^3 = a_5 * k^4$ के प्रतिरूपण में विस्तारित होता जावेगा। जो कि समानुपात नियम में प्रस्तुत k का नियम का विस्तारित प्रस्तुती ही है। विततानुपात में k का नियम कहलाता है।

4-2 विततानुपात के नियम के तहत बीजीय समिका विस्तारों को सिद्ध करने अभ्यास माला।

(1) यदि a,b,c विततानुपाती हो तो सिद्ध कर सकते है

1■ $a:c = (a^2 + b^2):(b^2 + c^2)$

प्रमाण a,b,c विततानुपाती है $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ माने जाने पर $b = ck$ तथा $a = bk = ck^2$ होगा। तब प्रतिस्थापन नियम सै–

बाँया पक्ष $= a:c = \frac{a}{c} = \frac{ck^2}{c} = k^2$ ------(1)

दाँया पक्ष $= (a^2 + b^2):(b^2 + c^2) \ = \frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{(ck^2)^2+(ck)^2}{(ck)^2+c^2} = \frac{c^2k^2(k^2+1)}{c^2(k^2+1)} = k^2$ ------(2)

हल समिका (1) और (2) सें $a:c = (a^2 + b^2):(b^2 + c^2)$ **सिद्ध।**

2■ $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

प्रमाण a,b,c विततानुपाती है $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ माने जाने पर $b = ck$ तथा $a = bk = ck^2$ होगा। तब प्रतिस्थापन नियम सै–

बाँया पक्ष $= \frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{(ck^2)^3+(ck)^3+c^3}{(ck^2)^2(ck)^2c^2} = \frac{c^3(k^6+k^3+1)}{c^6k^6} = = \frac{k^6+k^3+1}{c^3k^6}$ ------(1)

दाँया पक्ष $= \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{(ck^2)^3} + \frac{1}{(ck)^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1+k^3+k^6}{c^3k^6} = \frac{k^6+k^3+1}{c^3k^6}$

हल समिका (1) और (2) सें $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$ **सिद्ध।**

(2) यदि a,b,c,d विततानुपाती हो तो सिद्ध कर सकते है $\frac{a^2-b^2+c^2}{b^2-c^2+d^2} = \frac{a}{c}$

प्रमाण a,b,c विततानुपाती है $\therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$ माने जाने पर $c = dk$, $b = ck = dk^2$ तथा $a = bk = dk^3$ होगा। तब प्रतिस्थापन नियम सै– बाँया पक्ष $= \frac{a^2-b^2+c^2}{b^2-c^2+d^2} = \frac{(dk^3)^2-(dk^2)^2+(dk)^2}{(dk^2)^2-(dk)^2+d^2} = \frac{d^2k^2(k^4+k^2+1)}{d^2(k^4+k^2+1)} = k^2$------(1)

दाँया पक्ष $= \frac{a}{c} = \frac{dk^3}{dk} = k^2$------(2)

हल समिका (1) और (2) से $\frac{a^2-b^2+c^2}{b^2-c^2+d^2} = \frac{a}{c}$ **सिद्ध**

----------04----------

अध्याय -5
प्रतिशतता संकल्पना

5-1 प्रस्तावना जीवन–यापन के कई क्षेत्रों में प्रतिशतता की संकल्पना आकलन देखने –सुनने को मिलता है। उदाहरणार्थ–

1• सुनील ने गणित में 94 प्रतिशत अंक प्राप्त किया है।

2• दीपावली त्योहार के अवसर पर खादी ग्रामोद्योग के उत्पाद विक्रय में 20 प्रतिशत की छूट देय है।

3• देश की कुल आबादी का 70 प्रतिशत गावों में निवास करता है।

4• सावधि योजना में ग्रामीण बैंक 11 प्रतिशत वार्षिक ब्याज देता है।

5• एक परीक्षा में 81 प्रतिशत छात्राओं एव 76 प्रतिशत छात्रों उत्तीर्ण हुए। .... आदि आदि।

उपर्युक्त सभी कथनों में एक प्रकार तुलना की गई जिसके प्रस्तुति का आधार **प्रतिशत** है। प्रतिशत समासिक विच्छेद प्रति+शत है। जिनके अलग–अलग शाब्दिक अर्थ क्रमशः प्रति का अर्थ प्रत्येक और शत का अर्थ सौ है। अतः **प्रतिशत का अर्थ प्रत्येक सौ पर** से है।

आइये निम्नलिखित उदाहरणो पर पुनः विचार करें।–

मानलों हाई स्कूल सर्टिफिकेट परीक्षा में एक विद्यालय A में प्रविष्ठ 320 विद्यार्थियों में से 256 विद्यार्थी तथा दुसरे विद्यालय B में प्रविष्ठ 400 विद्यार्थियों में से 300 विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए। उत्तीर्ण होने वालों की संख्या को देखते हुए विद्यालय B का परिणाम अच्छा होना सुझाया जा सकता है। जो अमान्य तरीका में से एक है। गलत निष्कर्ष की ओर अग्रेषित करता है।

विद्यालय वार परीक्षा में उत्तीर्ण विद्यार्थियों की संख्या औरं परीक्षा में प्रविष्ट विद्यार्थियों की संख्या का अनुपातिक अध्ययन सें भी

{विद्यालय A के प्रति $256 : 320 = 4 : 5 = \frac{4}{5}$ विद्यालय B के प्रति $300 : 400 = 3 : 4 = \frac{3}{4}$} सरलता से स्पष्ट नहीं हो पा रहा है। लेकिन अनुपात मानों के भिन्न प्रतिरूपण के तुलना नियम के अनुसार भिन्नों के तुल्य हर के सापेक्ष प्राप्त अंश मानों की तुलना कर स्पष्टतः कर सकते कि जिस विद्यालय के प्रति अंश मान बड़ा है उस विद्यालय का परीक्षा परिणाम अच्छा है।

$\frac{4}{5}, \frac{3}{4}$ के लिए $\frac{16}{20}, \frac{15}{20}$ के अंश मानों में $16>15$ है। $\therefore$ विद्यालय A का परीक्षा परिणाम अच्छा है।

अनुक्रमानुपात विचरण के अनुसार प्रत्येक विद्यालय में 100 की प्रविष्ट पर उत्तीर्ण विद्यार्थी की गणना से जिस विद्यालय के प्रति प्राप्त मान बड़ा है उस विद्यालय का परीक्षा परिणाम अच्छा है।

विद्यालय →	A		B	
परीक्षा में प्रविष्टि विद्यार्थी की संख्या	320	100	400	100
परीक्षा में उत्तीर्ण विद्यार्थी की संख्या	256	80	300	75

$80>75$ $\therefore$ विद्यालय A का परीक्षा परिणाम अच्छा है।

विद्यालय के बढ़ते संख्या मानों के प्रति 100 की प्रविष्ट पर उत्तीर्ण मानों की प्राप्ति का आधार अनुपात के भिन्न प्रतिरूपण के आधार केअपेक्षा सरल है। ऐसी ही कई विशेष परिस्थिजन्य गणित अध्ययनों 100 का आधार चुनना यथेष्ठ माना गया ह। प्रतिशतता (प्रत्येक 100 के आधार पर) का अध्ययन को बल प्रान करता है। आइये इस प्रतिशतता के अध्ययन की ओर बढते चले।

5-2 प्रतिशतता की परिभाषा एवं अध्ययन संकेत

प्रतिशतता = प्रति + शत्+ अता जहाँ प्रति का अर्थ प्रति या प्रत्येक शत् का अर्थ सौ या सैकड़ा अता का अर्थ पर से है। इस प्रकार प्रतिशतता का अर्थ प्रति सौ या प्रत्येक सौ या प्रति सैकड़ा या प्रत्येक सैकड़ा पर से है। सामान्य अध्ययन में प्रतिशतता के लिए प्रतिशत ही मान्य है। जिसका अध्ययन संकेत % है।

प्रतिशत निरूपण

1• भिन्न के रूप में वह भिन्न जिसका हर 100 हो प्रतिशत भिन्न या केवल प्रतिशत कहलाती है।

जैसे x का $\frac{a}{100} = x$ का $a\%$ x का, $\frac{15}{100} = x$ का, 15%

2• भिन्न $\frac{a}{b}$ का प्रतिशत निरूपण भिन्न $\frac{a}{b}$ का प्रतिशत निरूपण $\frac{100*a}{b}$ का हलमान होगा।

जैसे x का, $\frac{4}{5} = \frac{100*4}{5}$ = x का, 80% x का, $\frac{5}{12} = \frac{100*5}{12} = \frac{125}{3}$ = x का, $41\frac{2}{3}\%$

3• **अनुपात के रूप में** वह अनुपात जिसका दूसरा पद 100 हो प्रतिशत अनुपात या केवल प्रतिशत कहलाती है।

जैसे a:100= a % , 15:100= 15 %

4• **अनुपात a:b का प्रतिशत निरूपण** a:b $= \frac{a}{b} = \frac{100*a}{b}$ का हलमान होगा।

जैसे $4:5 = \frac{4}{5} = \frac{100*4}{5} = 80\%$ $5:12 = \frac{5}{12} = \frac{100*5}{12} = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}\%$

5• **प्रतिशत का भिन्न निरूपण** प्रतिशत का भिन्न निरूपण के लिए प्रतिशत मान को भिन्न का अंश और हर को 100 मानकर प्राप्त भिन्न का मानक निरूपण करें।

जैसे x का a % = − x का $\frac{a}{100}$, x का 5 % = x का $\frac{5}{100}$ = x का $\frac{1}{20}$

6• **प्रतिशत का दशमलव भिन्न निरूपण** प्रतिशत का दशमलव भिन्न निरूपण के लिए प्रतिशत मान राशि के दशमलव बिन्दु को दाँयी से बाँयी ओर दो स्थान बाद चिन्हाँकित कीजिए।

जैसे $15\% = \frac{15}{100} = 0.15$, $12.5 == \frac{12.5}{100} = 0.125$

7• **प्रतिशत का अनुपात निरूपण** प्रतिशत मान राशि को अनुपात का प्रथम पद मानकर द्वितीय पद 100 दर्ज कीजिए। इस प्राप्त अनुपात का मानक अनुपात हल प्रतिशत का अनुपात निरूपण होगा।

जैसे 15% = 15 : 100= 3 : 20, 12.5 =12.5 :100 =125 : 1000 =1:8

5-3 प्रतिशतता हल समीकरण

तीन चर राशियाँ 1• सकलराशि a 2• प्रतिशत मान b 3•सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c। में से –

(A) निश्चित सकलराशि a के प्रति प्रतिशत मान b और सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c अनुक्रमानुपाती विचरण में होते है। अतः उक्त नियमानुसार प्रतिशत मान और सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि के दो युग्म (b_1, c_1) और (b_2, c_2) के प्रति हल समीकरण–

निश्चित सकल राशि a के प्रति

प्रतिशत मान b	b_1	b_2
सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c	c_1	c_2

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण– $b_1 * c_2 = b_2 * c_1$ होगा।

उदाहरण■ किसी राशि का 25% पर देय राशि 350 है तो उसी राशि का 45% पर देय राशि ज्ञात कीजिए।

हल निश्चित सकल राशि a के प्रति

प्रतिशत मान b	b_1=25	b_2=45
सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि y	$c_1 = 350$	$c_2 = ?$

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–$b_1 * c_2 = b_2 * c_1$

$\Rightarrow$ $25*c_2 = 350 * 45$ से $c_2 = 630$ अभीष्ट उत्तर होगा।

(B) निश्चित प्रतिशत मान b के प्रति सकल राशि a और सकल राशि का देय प्रतिशत मान राशि c अनुक्रमानुपाती विचरण में होते है। अतः उक्त नियमानुसार प्रतिशत मान और सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि के दो युग्म के प्रति हल समीकरण–

निश्चित प्रतिशत मान b के प्रति

सकल राशि a	a_1	a_2
सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c	c_1	c_2

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण– $a_1 * c_2 = a_2 * c_1$ होगा।

उदाहरण ■ 700 रूपये का जिस प्रतिशत मान पर 140 रूपये देय है उसी प्रतिशत मान पर कितने रूपये का देय राशि 400 रूपये होगा ?

हल निश्चित प्रतिशत मान b के प्रति

सकल राशि a	a_1 =700	a_2=?
सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c	c_1=140	c_2=400

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–
$a_1 * c_2 = a_2 * c_1$

$\Rightarrow$ 700*400 = $a_2 * 140$ से a_2= 2000 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

(C) सकल राशि का देय प्रतिशत मान राशि c की निश्चितता के प्रति सकल राशि a और प्रतिशत मान b व्यत्क्रमानुपाती विचरण में होते है। अतः उक्त नियमानुसार प्रतिशत मान और सकल राशि का देय प्रतिशत मान राशि के दो युग्म (a_1, b_1) और (a_2, b_2) के प्रति हल समीकरण–

सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c की निश्चितता के प्रति

सकल राशि a	a_1	a_2
प्रतिशत मान b	b_1	b_2

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–
$a_1 * b_1 = a_2 * b_2$ होगा।

उदाहरण ■ 600 रूपये का 25% कितने रूपये के 40% के बराबर होगा ?

सकलराशि का देय प्रतिशत मान राशि c की निश्चितता के प्रति

सकल राशि a	a_1 =600रू.	a_2=?
प्रतिशत मान b	b_1=25	b_2=40

व्युत्क्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–
$a_1 * b_1 = a_2 * b_2 \Rightarrow$ 600*25=$a_2 * 40$ से
a_2= 375 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

(D) सकलराशि a का b % पर मान राशि c हो तो– हल समीकरण 100*c = a*b होगा ।

उदाहरण 1■ 500 का 25% ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार सकलराशि a=500, b%=25% पर मान राशि c =?

अतः हल समीकरण 100*c = a*b $\Rightarrow$100*c= 500*25 से c=125 अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ कितने रूपये का 40 % मान राशि 75 रूपये होगा।

हल प्रश्नानुसार सकलराशि a=?, b%=40 % पर मान राशि c =75 रूपये

अतः हल समीकरण 100*c = a*b $\Rightarrow$100*75= a*40 से a=187.5 अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■. 950 का कितना % मान राशि 38 रूपये होगा।

हल प्रश्नानुसार सकलराशि a=950, b%=? पर मान राशि c =38 रूपये

अतः हल समीकरण 100*c = a*b $\Rightarrow$100*38= 950*b से b=4% अभीष्ट उत्तर होगा।

----------05----------

अध्याय -6
लाभ–हानि

6.1 क्रय–मूल्य, विक्रय–मूल्य एवं लाभ–हानि

एक विक्रेता समान या तो सीधे निर्माता से या किसी थोक दुकानदार से ख्रीदता है। सामान खरीदने के लिए दिया गया धन क्रय मूल्य कहलाता है। और जिस मूल्य पर वह समान बेचता है वह दुकानदार का विक्रय मूल्य कहलाता है। यदि विक्रय मूल्य क्रयमूल्य से अधिक हो तो दुकानदार को लाभ होता है। यह लाभ राशि विक्रय मूल्य और क्रय मूल्य के अंतर के बराबर होता है और यदि विक्रय मूल्य क्रयमूल्य से कम हो तो दुकानदार को हानि होता है। यह हानि राशि क्रय मूल्य और विक्रयूल्य के अंतर के बराबर होता है।

∴ लाभ = विक्रय मूल्य − क्रय मूल्य ⇒ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य + लाभ ⇒ क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य − लाभ

हानि = क्रय मूल्य − विक्रय मूल्य ⇒ विक्रय मूल्य = क्रय मूल्य − हानि ⇒ क्रय मूल्य = विक्रय मूल्य + हानि

टीप प्रायः विक्रेता को सामान विक्रय करने के पूर्व इस पर अतिरिक्त व्यय जैसे मजदूरी, वाहन शुल्क, और अनुरक्षण शुल्क वहन करना पड़ता है।इन सबको ऊपरी या अतिक्ति व्यय–भार कहते है। जिसे क्रय–मूल्य में शामिल कर लिया जाता है।

6.2 प्रतिशत लाभ–हानि

दो वस्तुओं के अलग–अलग विक्रय–मूल्य पर प्राप्त लाभ–हानि की तुलना उनके क्रय–मूल्य के प्रति प्रतिशत लाभ–हानि को दृष्टिगत किया जाता है।

जैसे 500 रूपये में क्रय किया गया रेडियों 545 रूपये में बेचने पर 45 रूपये लाभ होता है को 9% लाभ पर बेचना कह लायेगा। इसी प्रकार 400 रूपये में क्रय किया गया रेडियों 380 रूपये में बेचने पर 20 रूपये हानि होता है को 5% हानि पर बेचना कहेंगे।

6.3 क्रय–मूल्य, विक्रय–मूल्य एवं लाभ–हानि पर अनुपात विचरण नियम• प्रमेय तथा हल समीकरण

(1) किसी वस्तु या वस्तुओं के समूह के क्रय–मूल्य, विक्रय–मूल्य पर %लाभ–हानि एवं कुल लाभ–हानि के अनुक्रमानुपाती होते है।

∴ %लाभ/हानि एवं कुलमान में क्रय–मूल्य तथा लाभ/हानि पर हल समीकरण

	प्रतिशत मान में	कुल मान में
क्रय–मूल्य	100 रू.	a रू.
लाभ/हानि	b रू.	c रू.

हल समीकरण $100*c = a*b$ होगा।

अर्थात् 100* कुल लाभ/हानि

= क्रय–मूल्य* %लाभ / हानि

उदाहरण■ एक रेडियो 700 रूपये में क्रयकर 11% लाभ पर विक्रय किये जाने पर कुल कितने रूपये का लाभ होगा ?

हल

	प्रतिशत मान में	कुल मान में
क्रय–मूल्य	100 रू.	a=700 रू.
लाभ/हानि	b=11 रू.	c=? रू.

हल समीकरण $100*c = a*b$

⇒ $100*c = 700*11$ से

c= 77 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

(2) निश्चित % लाभ–हानि की दर के प्रति क्रय–मूल्य और विक्रय–मूल्य एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती विचरण में होते हैं। अतः अतः उक्त नियमानुसार क्रय–मूल्य और विक्रय–मूल्य दो युग्म (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के प्रति हल समीकरण–

निश्चित % लाभ–हानि की दर के प्रति

क्रय–मूल्य x	x_1	x_2
विक्रयमूल्य y	y_1	y_2

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–

$x_1 * y_2 = x_2 * y_1$ होगा।

उदाहरण ■ आलु–प्याज का थोक व्यापारी दोनों व्स्तुओं को समान % लाभ की दर पर बेचता है। यदि 800 रूपये में क्रय किये गये आलू को 1000 रूपये में विक्रय करता है तो 1200 रूपये में क्रय किये गये प्याज को कितने रूपये में विक्रय करता है।

निश्चित % लाभ–हानि की दर के प्रति

	आलू	प्याज
क्रय–मूल्य x	x_1 =800 रू.	x_2 =1200रू.
विक्रयमूल्य y	y_1=1000रू.	y_2 =?

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–

$x_1 * y_2 = x_2 * y_1$

$\Rightarrow$ $800*y_2 = 1200 * 1000$ से

$y_2 = 1500$ रूपये. अभीष्ट उत्तर होगा।

(3) **लाभ–हानि के प्रति क्रय–मूल्य और विक्रय–मूल्य का हल समीकरण** चूँकि लाभ–हानि क्रय–मूल्य के प्रति होता है इसलिए कोई वस्तु a% लाभ पर विक्रय किया जाता है का अर्थ है 100 रूपये में क्रय की गई वस्तु पर a रूपये का लाभ मिलता है। अर्थात् प्रत्येक 100 रूपये के क्रय–मूल्य के प्रति विक्रय–मूल्य (100+a) रूपये है। इसी प्रकार कोई वस्तु a% हानि पर विक्रय किया जाता है का अर्थ है 100 रूपये में क्रय की गई वस्तु पर a रूपये का हानि होता है। अर्थात् प्रत्येक 100 रूपये के क्रय–मूल्य के प्रति विक्रय–मूल्य (100−a) रूपये है। तब मानलों कोई वस्तु x रूपये में क्रय कर a% लाभ पर y रूपये में विक्रय किये जाने पर क्रय–मूल्य और विक्रय–मूल्य के अनुक्रमानुपाती विचरण में होने का नियम के अनुसार हल तालिका से –

(A) a% लाभ पर

	प्रतिशत मान में	कुल मान में
क्रय–मूल्य	100 रू.	x रू.
विक्रय–मूल्य	(100+a)रू.	y रू.

हल समीकरण $100*y = x*(100+a)$ होगा।

अर्थात् 100* विक्रय–मूल्य = क्रय–मूल्य*(100+लाभ%)

(B) a% हानि पर

	प्रतिशत में	वास्तविक्ता में
क्रय–मूल्य	100 रू.	x रू.
विक्रय–मूल्य	(100−a) रू.	y रू.

हल समीकरण $100*y = x*(100-a)$ होगा।

अर्थात् 100* विक्रय–मूल्य = क्रय–मूल्य*(100−हानि%)

बीजगणित अध्ययन की दृष्टि में प्रत्येक क्रय–विक्रय में लाभ होता है। जो कि धनात्मक अथवा ऋणात्मक होगा। धनात्मक लाभ को लाभ तथा ऋणात्मक लाभ को हानि कहते है।

उदाहरण ■ एक सायकिल 2400 रूपये में क्रय किया गया। तिस पर कुछ खराबी आने के कारण 200 रूपये में सुधारने पर व्यय हुआ। तत् पश्चात् 2340 रूपये में विक्रय करना पड़ा। लाभ / हानि का प्रतिशत मान ज्ञात कीजिए ।

हल माना कि x % का लाभ होता है। तब

	प्रतिशत मान में	कुल मान में
क्रय–मूल्य	100 रू.	a=2400+200=2600रू.
विक्रय–मूल्य	(100+x)	c=2340 रू.

हल समीकरण $100*c = a*(100+x)$

$\Rightarrow$ $100*2340 = 2600*(100+x)$

$\Rightarrow$ $(100+x) = 90$ से

x= −10 %लाभ = 10% हानि अभीष्ट उत्तर होगा।

(4) **प्रमेय** किसी वस्तु या वस्तुओं के समूह का प्रतिशत विक्रय–मूल्य एवं कुल विक्रय–मूल्य एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती होते है। अर्थात् यदि ±x% लाभ पर किसी वस्तु या वस्तुओं के समूह का कुल विक्रय–मूल्य a रूपये तथा ±y% लाभ पर किसी वस्तु या वस्तुओं के समूह का कुल विक्रय–मूल्य b रूपये हो तो हल समीकरण–

	±x% लाभ पर	±y% लाभ पर
% विक्रय–मूल्य	(100 ±x) रू.	(100 ±y) रू.
कुलविक्रय–मूल्य	aरू.	b रू.

$(100 \pm x) * b = (100 \pm y) * a$ होगा।

उपपत्ति माना कि m रूपये में क्रय की गई वस्तु या वस्तुओं के समूह ±x% लाभ पर कुल a रूपये मे विक्रय किया गया। तो– उपरोक्त नियम 3 के अनुसार –

$100*a = m*(100 \pm x)$ -----------(1)

पुनः मानलो यही m रूपये में क्रय की गई वस्तु या वस्तुओं के समूह $\pm y\%$ लाभ पर कुल b रूपये मे विक्रय किया गया। तो– उपरोक्त नियम 3 के अनुसार – $100*b = m*(100 \pm y)$ -----------(2)

समीकरण (1)÷ (2) से $\frac{a}{b} = \frac{(100 \pm x)}{(100 \pm y)} \Rightarrow (100 \pm x) * b = (100 \pm y) * a$ प्रमाणित।

प्रमेय समिका का उपयोग लाभ उक्त समिका का उपयोग कर बिना $\pm x\%$ लाभ पर क्रय–मूल्य m प्राप्त किये सीधे $\pm y\%$ लाभ पर विक्रय–मूल्य प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण■ एक घड़ी 475 रूपये में विक्रय करने पर 5% की हानि होता है। ज्ञात कीजिए कि 10% का लाभ प्राप्त करने वह घड़ी कितने रूपये में विक्रय किया जाना चाहिए ?

हल

	5% की हानि पर	10% का लाभ पर
% विक्रय–मूल्य	$(100 \pm x) = (100 - 5) = 95$ रू.	$(100 \pm y) = (100 + 10) = 110$ रू.
कुलविक्रय–मूल्य	475 रू.	b= ? रू.

$(100 \pm x) * b = (100 \pm y) * a \Rightarrow 95*b = 110*475$ से $b = 550$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

6-4 एक ही प्रकार की दो वस्तु का विक्रय–मूल्य समान होने पर कुल % लाभ/हानि विषयक प्रमेय

प्रमेय 1 एक ही प्रकार की दो वस्तु का विक्रय–मूल्य समान रूप से a-a रूपये होने पर यदि एक वस्तु पर x% लाभ तथा दूसरे वस्तु पर x% हानि हो तो दोनों वस्तुओं के कुल क्रय मूल्य के प्रति $\frac{x^2}{100}$ % की हानि ही होगा।

विडम्बना विडम्बना यह है कि ऐसे सरल मौखिक हल श्रेणी के प्रश्न को दीर्घ उत्तरीय श्रेणी का प्रश्न मानकर व्यापक हल प्रस्तुति देना आधुनिक गणित की परम्परा में आज भी प्रचलित है। जो कि उक्त प्रमेय की उपपत्ति (प्रमाणन) ही है।

उपपत्ति नियम 3 के अनुसार – वस्तु $_1$ का क्रय–मूल्य $m_1 = \frac{100*a}{(100+x)}$ ------------(1)

वस्तु $_2$ का क्रय–मूल्य $m_2 = \frac{100*a}{(100-x)}$ ------------(2)

समीकरण (1)+ (2) से –दोनों वस्तुओं का कुल क्रय–मूल्य $(m_1 + m_2) = \frac{20000\ a}{10000 - x^2}$ -----------(3).

प्रश्नानुसार दोनों वस्तुओं का कुल विक्रय–मूल्य $= a + a = 2a$ ------------(4)

∴ समीकरण (4)– (3) से – दोनों वस्तुओं के क्रय–विक्रय से प्राप्त कुल लाभ $= \frac{-2x^2 a}{10000 - x^2}$ (ऋणात्मक है)

अतः दोनों वस्तुओं के क्रय–विक्रय से $\frac{2x^2 a}{1000 - x^2}$ रूपये का हानि ही होगा

प्रतिशत हानि की गणना के लिए समिका– 100* कुल हानि = कुल क्रय–मूल्य* %हानि

$$\Rightarrow 100* \frac{2x^2 a}{10000 - x^2} = \frac{20000\ a}{10000 - x^2} * \%\text{हानि}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100* \%\text{हानि} \text{ से } \%\text{हानि} = \frac{x^2}{100}$$ प्रमाणित हुआ।

उदाहरण■ दो मोटर सायकिल प्रत्येक 30-30 हजार रूपये में विक्रय करने पर एक पर 10% लाभ तथा दूसरे पर 10% हानि होता हो तो कुल लाभ/ हानि का % मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय के अनुसार उक्त प्रकार के कूल क्रय– विक्रय में हानि ही होगा जिसका प्रतिशत मान =

$\frac{x^2}{100} = \frac{10^2}{100} = \frac{100}{100} = 1\%$ हानि अभीष्ट उत्तर होगा।

प्रमेय 2 एक ही प्रकार की दो वस्तु का विक्रय–मूल्य समान रूप से a-a रूपये होने पर यदि एक वस्तु पर x% लाभ तथा दूसरे वस्तु पर y% हानि हो तो दोनों वस्तुओं के कुल क्रय मूल्य के प्रति $\frac{100x-100y-2xy}{200+x-y}$ % का लाभ होगा।

उपपत्ति नियम 3 के अनुसार – वस्तु $_1$ का क्रय–मूल्य $m_1 = \frac{100*a}{(100+x)}$ ------------(1)

वस्तु $_2$ का क्रय–मूल्य $m_2 = \frac{100*a}{(100-y)}$ ------------(2)

समीकरण (1)+ (2) से –दोनों वस्तुओं का कुल क्रय–मूल्य $(m_1 + m_2) = \frac{20000\ a+100ax-100ay}{10000+100x-100y-xy}$ -----------(3).

प्रश्नानुसार दोनों वस्तुओं का कुल विक्रय–मूल्य = a+a = 2a ------------(4)

∴ समीकरण (4)– (3) से – दोनों वस्तुओं के क्रय–विक्रय से प्राप्त कुल लाभ = $\frac{100ax-100ay-2axy}{10000+100x-100y-xy}$

प्रतिशत हानि की गणना के लिए समिका– 100* कुल हानि = कुल क्रय–मूल्य* %हानि

$$\Rightarrow\ 100*\frac{100ax-100ay-2axy}{10000+100x-100y-xy} = \frac{20000\ a+100ax-100ay}{10000+100x-100y-xy} * \%\ \text{लाभ}$$

$$\Rightarrow\ 100(x-y) - 2xy = (200+x-y) * \%\ \text{लाभ}$$

$$\therefore\ \%\ \text{लाभ} = \frac{100(x-y)-2xy}{200+x-y}\quad \text{प्रमाणित}$$

उदाहरण 1■ दो मोटर सायकिल प्रत्येक 30-30 हजार रूपये में विक्रय करने पर एक पर 12% लाभ तथा दूसरे पर 8% हानि होता हो तो कुल लाभ/ हानि का % मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय के अनुसार उक्त प्रकार के कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(x-y)-2xy}{200+x-y}$ में

x= एक पर हुये लाभ का % मान = 12 तथा y=दूसरे पर हुये हानि का % मान = 8 प्रतिस्थापित करने पर–

कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(12-8)-2*12*8}{200+12-8} = \frac{208}{204} = \frac{52}{51}\ \% = 1\frac{1}{51}\ \%$ लाभ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ दो मोटर सायकिल प्रत्येक 30-30 हजार रूपये में विक्रय करने पर एक पर 8% लाभ तथा दूसरे पर 12% हानि होता हो तो कुल लाभ/ हानि का % मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय के अनुसार उक्त प्रकार के कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(x-y)-2xy}{200+x-y}$ में

x=एक पर हुये लाभ का % मान = 8 तथा y=दूसरे पर हुये हानि का % मान = 12 प्रतिस्थापित करने पर–

कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(8-12)-2*8*12}{200+8-12} = \frac{-592}{196} = \frac{-148}{49}$ % लाभ ऋणात्मक है। अतः

कूल क्रय– विक्रय में हानि होगा जिसका % मान = $\frac{148}{49}\ \% = 3\frac{1}{49}$ %हानि अभीष्ट उत्तर होगा।

प्रमेय 3 एक ही प्रकार की दो वस्तु का विक्रय–मूल्य समान रूप से a-a रूपये होने पर यदि एक वस्तु पर x% लाभ तथा दूसरे वस्तु पर y% लाभ हो तो दोनों वस्तुओं के कुल क्रय मूल्य के प्रति $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}$ % का लाभ होगा।

उपपत्ति नियम 3 के अनुसार – वस्तु $_1$ का क्रय–मूल्य $m_1 = \frac{100*a}{(100+x)}$ ------------(1)

वस्तु $_2$ का क्रय–मूल्य $m_2 = \frac{100*a}{(100+y)}$ ------------(2)

समीकरण (1)+ (2) से –दोनों वस्तुओं का कुल क्रय–मूल्य $(m_1 + m_2) = \frac{20000\ a+100ax+100ay}{10000+100x+100y+xy}$ -----------(3).

प्रश्नानुसार दोनों वस्तुओं का कुल विक्रय–मूल्य = a+a = 2a ------------(4)

∴ समीकरण (4)− (3) से – दोनों वस्तुओं के क्रय–विक्रय से प्राप्त कुल लाभ = $\frac{100ax+100ay+2axy}{10000+100x+100y+xy}$

प्रतिशत लाभ की गणना के लिए समिका– 100* कुल लाभ = कुल क्रय–मूल्य* %लाभ

$$\Rightarrow 100*\frac{100ax+100ay+2axy}{10000+100x+100y+xy} = \frac{20000\ a+100ax+100ay}{10000+100x+100y+xy} * \%\text{ लाभ}$$

$$\Rightarrow 100(x+y)+2xy = (200+x+y) * \%\text{ लाभ}$$

$$\therefore \%\text{ लाभ} = \frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y} \quad \text{प्रमाणित}$$

उदाहरण ■ दो मोटर सायकिल प्रत्येक 30-30 हजार रूपये में विक्रय करने पर एक पर 8% लाभ तथा दूसरे पर 12% लाभ होता हो तो कुल लाभ/ हानि का % मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय के अनुसार उक्त प्रकार के कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}$ में

x=एक पर हुये लाभ का % मान = 8 तथा y=दूसरे पर हुये हानि का % मान = 12 प्रतिस्थापित करने पर–

कूल क्रय– विक्रय में % लाभ = $\frac{100(8+12)+2*8*12}{200+8+12} = \frac{2192}{220} = \frac{548}{55}\ \% = 9\frac{53}{55}$ %लाभ अभीष्ट उत्तर होगा।

प्रमेय 4 एक ही प्रकार की दो वस्तु का विक्रय–मूल्य समान रूप से a-a रूपये होने पर यदि एक वस्तु पर x% हानि तथा दूसरे वस्तु पर y% हानि हो तो दोनों वस्तुओं के कुल क्रय मूल्य के प्रति $\frac{100(x+y)+2xy}{200+x+y}$ % का हानि होगा।

उपपत्ति नियम 3 के अनुसार – वस्तु$_1$ का क्रय–मूल्य $m_1 = \frac{100*a}{(100-x)}$ ------------(1)

वस्तु$_2$ का क्रय–मूल्य $m_2 = \frac{100*a}{(100-y)}$ ------------(2)

समीकरण (1)+ (2) से –दोनों वस्तुओं का कुल क्रय–मूल्य $(m_1+m_2) = \frac{20000\ a-100ax-100ay}{10000-100x-100y+xy}$ -----------(3).

प्रश्नानुसार दोनों वस्तुओं का कुल विक्रय–मूल्य = a+a = 2a ------------(4)

∴ समीकरण (3)− (4) से – दोनों वस्तुओं के क्रय–विक्रय से प्राप्त कुल हानि = $\frac{100ax+100ay-2axy}{10000-100x-100y+xy}$

प्रतिशत हानि की गणना के लिए समिका– 100* कुल हानि = कुल क्रय–मूल्य* %हानि

$$\Rightarrow 100*\frac{100ax+100ay-2axy}{10000+100x+100y+xy} = \frac{20000\ a-100ax-100ay}{10000+100x+100y+xy} * \%\text{ हानि}$$

$$\Rightarrow 100(x+y)-2xy = (200-x-y) * \%\text{ हानि}$$

$$\therefore \text{कुल}\ \%\text{ हानि} = \frac{100(x+y)-2xy}{200-(x+y)} \quad \text{प्रमाणित}$$

उदाहरण■ दो मोटर सायकिल प्रत्येक 30-30 हजार रूपये में विक्रय करने पर एक पर 8% हानि तथा दूसरे पर 12% हानि होता हो तो कुल हानि का % मान ज्ञात कीजिए।

हल प्रमेय के अनुसार उक्त प्रकार के कूल क्रय– विक्रय में % हानि = $\frac{100(x+y)-2xy}{200-(x+y)}$ में

x=एक पर हुये हानि का % मान = 8 तथा y=दूसरे पर हुये हानि का % मान = 12 प्रतिस्थापित करने पर–

कूल क्रय– विक्रय में % हानि = $\frac{100(8+12)-2*8*12}{200-(8+12)} = \frac{1808}{180} = \frac{452}{45}\ \% = 10\frac{2}{45}$ %हानि अभीष्ट उत्तर होगा।

प्रमेय 5 x वस्तु का क्रय मूल्य = y वस्तु का विक्रय मूल्य होने पर–

(1) $x > y$ के प्रति $\frac{100*(x-y)}{y}$ % लाभ होगा।

(2) $x < y$ के प्रति $\frac{100*(y-x)}{y}$ % हानि होगा।

उपपत्ति (1) मानाकि x वस्तु का क्रय मूल्य $= y$ वस्तु का विक्रय मूल्य $= m$ इकाई मुद्रा है।

तब 1 वस्तु का क्रय मूल्य $= \frac{m}{x}$ इकाई मुद्रा तथा 1 वस्तु का विक्रय मूल्य $= \frac{m}{y}$ इकाई मुद्रा होगा।

$x > y$ के प्रति 1 वस्तु पर लाभ $= \frac{m}{y} - \frac{m}{x} = \frac{m*(x-y)}{x*y}$ इकाई मुद्रा होगा।

अर्थात $\frac{m}{x}$ क्रय मूल्य पर $\frac{m*(x-y)}{x*y}$ इकाई मुद्रा लाभ होता है। $\therefore$ % लाभ $= \frac{m*(x-y)}{x*y} * \frac{x}{m} * 100 = \frac{100*(x-y)}{y}$% **सिद्ध**

उपपत्ति (2) मानाकि x वस्तु का क्रय मूल्य $= y$ वस्तु का विक्रय मूल्य $= m$ इकाई मुद्रा है।

तब 1 वस्तु का क्रय मूल्य $= \frac{m}{x}$ इकाई मुद्रा । तथा 1 वस्तु का विक्रय मूल्य $= \frac{m}{y}$ इकाई मुद्रा होगा।

$x < y$ के प्रति 1 वस्तु पर हानि $= \frac{m}{x} - \frac{m}{y} = \frac{m*(y-x)}{x*y}$ इकाई मुद्रा

अर्थात $\frac{m}{x}$ क्रय मूल्य पर $\frac{m(y-x)}{x*y}$ इकाई मुद्रा होता है। $\therefore$ % हानि $= \frac{m*(y-x)}{x*y} * \frac{x}{m} * 100 = \frac{100*(y-x)}{y}$% **सिद्ध**

उदाहरण1■ 50 संतरे का क्रय मूल्य 40 संतरे के विक्रय मूल्य के बराबर होने के प्रति $(x=50) > (y = 40)$ है।

;$(x-y) = 10$ से– %लाभ $= \frac{100(x-y)}{y} = \frac{100*10}{40} = 25\%$ होगा।

उदाहरण2■ 40 संतरे का क्रय मूल्य 50 संतरे के विक्रय मूल्य के बराबर होने के प्रति $(x=40) < (y = 50)$ है।

;$(y-x) = 10$ से– % हानि $= \frac{100(y-x)}{y} = \frac{100*10}{50} = 20\%$ होगा।

उपप्रमेय 5 (1) x वस्तु का क्रय मूल्य $= y$ वस्तु का विक्रय मूल्य के प्रति r% लाभ हो तो अभीष्ट हल समिका–

$y*r = 100(x-y)$ होगा।

(2) x वस्तु का क्रय मूल्य $= y$ वस्तु का विक्रय मूल्य के प्रति r% हानि हो तो अभीष्ट हल समिका–

$y*r = 100(y-x)$ होगा।

अनुप्रयोग उदाहरण

उदाहरण1■ संतरे के व्यापार में 25 % लाभ प्राप्त करने 50 संतरे का क्रय मूल्य के बराबर कितने संतरे के विक्रय मूल्य रखना होगा?

हल **उपप्रमेय** 5 (1) हल समिका $y*r = 100(x-y)$ में प्रश्नानुसार दिया मान % लाभ $r = 25\%$, संतरों की क्रय संख्या$x = 50$, संतरों की विक्रय संख्या $y = ?$ प्रतिस्थापित करने पर– $y*25 = 100(50-y)$

$\Rightarrow y = 4(50-y) \Rightarrow y = 200-4y \Rightarrow 5y = 200 \Rightarrow y = 40$ संतरे **उत्तर।**

उदाहरण2■ संतरे के व्यापार में 25 % लाभ प्राप्त करता है। बताओ 40 संतरे का विक्रय मूल्य के बराबर कितने संतरे के क्रय मूल्य होगा?

हल उपप्रमेय 5 (1) हल समिका $y*r = 100(x-y)$ में प्रश्नानुसार दिया मान % लाभ $r = 25\%$, संतरों की क्रय संख्या $x = ?$, संतरों की विक्रय संख्या $y = 40$ प्रतिस्थापित करने पर– $40*25 = 100(x-40)$

$\Rightarrow 10 = x-40 \Rightarrow x = 50$ संतरे **उत्तर।**

उदाहरण3■ संतरे का आवक बढ़ जाने सें संतरे के व्यापार में 20 % हानि होता है। बताओं 40 संतरे का क्रय मूल्य के बराबर कितने संतरे के विक्रय मूल्य रखना होगा?

हल उपप्रमेय 5 (2) हल समिका $y*r = 100(y-x)$ में प्रश्नानुसार दिया मान % हानि $r = 20\%$, संतरों की क्रयसंख्या $x = 40$, संतरों की विक्रय संख्या $y = ?$ प्रतिस्थापित करने पर– $y*20 = 100(y-40)$

$\Rightarrow y = 5(y-40) \Rightarrow y = 5y-200 \Rightarrow 4y = 200 \Rightarrow y = 50$ संतरे **उत्तर।**

उदाहरण4■ संतरे का आवक बढ़ जाने सें संतरे के व्यापार में 20 % हानि होता है। बताओ 50 संतरे का विक्रय मूल्य के बराबर

कितने संतरे के क्रय मूल्य होगा?

हल **उपप्रमेय** 5 (2) हल समिका $y*r = 100(y-x)$ में प्रश्नानुसार दिया मान % लाभ $r = 20\%$, संतरों की क्रय संख्या$x = ?$, संतरों की विक्रय संख्या $y = 50$ प्रतिस्थापित करने पर– $50*20 = 100(50-x)$

$\Rightarrow\ 10 = 50 - x\ \Rightarrow\ x = 40$ संतरे **उत्तर।**

ध्यानाकर्षण प्रमेय 1,2,3 और 4 के सम्बंध में प्रथम दृष्टि में लाभ को धनात्मक तथा हानि को ऋणात्मक राशि मानकर के इनके योगमान का आधा या मध्यमान होने का भाव बनता है। जो सही नहीं है। सम्बंधित उदाहरणों में आकड़ों में समानता दिखाने का तात्पर्य प्रमेयानुसार वांछित उत्तर पर पड़ने वाले प्रभाव को मूलतः स्पष्ट करना ही है।

----------06----------

अध्याय -7
कमीशन

7-1 कमीशन पर व्यापार गणित एक दुकानदार अपना व्यापार बढाने ग्राहकों आकर्षित करने के विभिन्न तरीकों में एक तरीका वस्तुओं के दर्शित या अंकित मूल्य से कम कीमत पर बेचना है। जो छूट या कमीशन पर व्यापार करना कहलाता है। कमीशन पर व्यापार करने वाले व्यापारी का अपना एक गणित होता है। जिससे वह छूट या कमीशन देकर भी अपने लाभ को सुरक्षित बनाये रखता है। उसके लिए वह वस्तुओं के क्रय मूल्य, दर्शित या अंकित मूल्य का निर्धारण , कमीशन , प्राप्त विक्रय–मूल्य एवं लाभ का सामानजस्य स्थापन गणित का अध्ययन ,रखता है। कमीशन पर व्यापार गणित कहलाता है। अतः सर्व प्रथम दर्शित या अंकित मूल्य कमीशन , विक्रय–मूल्य एवं लाभ, को परिभाषित करना यथेष्ठ होगा।

1■ दर्शित या अंकित मूल्य वस्तुओं के पैंकिग (सुरक्षा कवच) अथवा मूल्य सूची पर वस्तुओं के दिया मूल्य दर्शित या अंकित मूल्य कहलाता है।

2■ क्रय–मूल्य (लागत–मूल्य) वस्तु को खरीदने एवं विक्रय केन्द्र तक लाने में लगा भाड़ा (लगेज) व्यय मिलाकर जो राशि दिया जाता वह वस्तु का क्रय–मूल्य कहलाता है। यह दर्शित या अंकित मूल्य से कम होता है।

3■ छूट या कमीशन विक्रय के लिए दिये दर्शित या अंकित मूल्य में की गई कमी छूट या कमीशन कहलाताहै।

4■ विक्रय–मूल्य दर्शित या अंकित मूल्य पर दिये छूट या कमीशन उपरांत प्राप्त मूल्य विक्रय–मूल्य कहलाता है। यह क्रय–मूल्य से अधिक एवं दर्शित या अंकित मूल्य से कम होता है।

5■ लाभ विक्रय मूल्य और क्रययूल्य के अंतर मान राशि लाभ कहलाता है।

टीप ध्यान रखे कि कमीशन गणना अंकित मूल्य के प्रति तथा लाभ गणना क्रय–मूल्य के प्रति किया जाता है। अतः

विक्रय मूल्य = (अंकित मूल्य − कमीशन) = (क्रय मूल्य + लाभ)

7-2 कमीशन पर व्यापार गणित में प्रतिशतता का अनुप्रयोग कमीशन पर व्यापार गणित में प्रतिशतता को अध्ययन आधार माना गया है। अतः प्रतिशतता के शब्दों मे –

1■ प्रतिशत कमीशन अंकित मूल्य के प्रति सौ इकाई मान पर दिया जाने वाला कमीशन को प्रतिशत कमीशन कहते है।

2■ प्रतिशत लाभ क्रय–मूल्य के प्रति सौ इकाई मान पर प्राप्त लाभ को प्रतिशत लाभ कहते है।

3■ अंकित मूल्य के प्रति :विक्रय मूल्य अंकित मूल्य के प्रति सौ इकाई मान पर प्राप्त विक्रय–मूल्य को <u>अंकित मूल्य के प्रति %विक्रयमूल्य</u> कहते है।

अंकित मूल्य के प्रति %विक्रय मूल्य = 100 − कमीशन का%मान

5■ क्रय मूल्य के प्रति विक्रय मूल्य क्रय मूल्य के प्रति सौ इकाई मान पर प्राप्त विक्रय मूल्य को प्रतिशत अंकित विक्रय मूल्य कहते है।

क्रय–मूल्य के प्रति %विक्रय मूल्य = 100+ लाभ का % मान

6■ कमीशन पर व्यापार गणित के प्रति व्यापक सरल गुणन समिका प्रमेय

यदि कोई वस्तु जिसका अंकित मूल्य R रूपये एवं क्रय मूल्य Q रूपये है, को x% कमीशन देकर y% लाभ पर विक्रय किये जाने पर $R*(100-x) = Q*(100+y)$ होगा।

प्रमाण अंकित–मूल्य R रूपये एवं x% कमीशन के प्रति वस्तु का विक्रय मूल्य $= \frac{R*(100-x)}{100}$ -------(1)

क्रय–मूल्य Q रूपये एवं y% लाभ के प्रति वस्तु का विक्रय मूल्य $= \frac{Q*(100+y)}{100}$ -------(2)

समीकरण (1) और (2) से $\frac{R*(100-x)}{100} = \frac{Q*(100+y)}{100} \Rightarrow R*(100-x) = Q*(100+y)$ प्रमाणित।

अर्थात् (अंकित मूल्य) * (अंकित मूल्य के प्रति %विक्रय मूल्य) = (क्रय मूल्य) * (क्रय मूल्य के प्रति %विक्रय मूल्य) होगा।

उदाहरण 1■ उस कुलर का क्रय–मूल्य ज्ञात कीजिए जिसका अंकित–मूल्य 5000 रूपये दर्ज कर 10% कमीशन देकर 25% लाभ प्राप्त करता है।

हल प्रश्नानुसार कुलर का अंकित मूल्य R=5000 रूपये कमीशन का % मान x=10 देकर लाभ का % मान y=20

क्रय मूल्य Q =?

गणना समिका $R*(100-x) = Q*(100+y)$ में उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$5000(100-10) = Q*(100+25) \Rightarrow 5000*90 = Q*125 \Rightarrow Q = 3600$ रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ 153 रूपये में क्रय की गयी वस्तु का अंकित–मूल्य कितना दर्शित किया जावे कि 15% कमीशन देने पर 20% लाभ प्राप्त किया जा सके।

हल प्रश्नानुसार वस्तु का क्रय–मूल्य Q =153 रूपये , कमीशन का % मान x=15 देकर लाभ का % मान y=20 अंकित–मूल्य R=? रूपये

गणना समिका $R*(100-x) = Q*(100+y)$ में उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$R*(100-15) = 153*(100+20) \Rightarrow R*85 = 153*120 \Rightarrow R = 216$ रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ सायकिलों का एक व्यापारी अंकित–मूल्य पर 2% कमीशन देकर 5% लाभ पर प्रति सायकल 196 रूपये लाभ प्राप्त कर लेता है। प्रति सायकल क्रय मूल्य , विक्रय मूल्य अंकित मूल्य एवं दिया गया कुल कमीशन राशि ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– प्रति सायकल पर प्राप्त लाभ P =196 रूपये , कमीशन का % मान x=2 , लाभ का % मान y=5 , क्रय मूल्य Q=? अंकित मूल्य R=? रूपये

$Q = \frac{100*P}{y}$ में P और y का मान रखने पर – क्रय मूल्य $Q = \frac{100*196}{5} = 3920$ रूपये।

विक्रय मूल्य = क्रयमूल्य + लाभ = 3920+196 =4116 रूपये

$R*(100-x) = Q*(100+y)$ में x, y और Q का मान प्रतिस्थापित करने पर–

$R*(100-2) = 3920*(100+5) \Rightarrow R*98 = 3920*105 \Rightarrow R = 4200$ रूपये

दिया गया कुल कमीशन $= \frac{R*x}{100} = \frac{4200*2}{100} = 84$ रूपये

पुनः : विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य – कुल दिया गया कमीशन = 4200 –84 =4116 रूपये

अतः– प्रति सायकल क्रय मूल्य 3920 रूपये विक्रय मूल्य 4116 रूपये , अंकित मूल्य 4200 रूपये एवं दिया गया कूल कमीशन 84 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

----------07----------

अध्याय -8
लघुग्णक एवं प्रतिलघुगुणक

8-1 लघुग्णक

गणित विकास यात्रा के इतिहास का आदिकालीन अध्ययन विदित कराता है कि हमारे आदिकालीन पूर्वज सामान्य गणन संक्रिया (जोड़ना,घटाना,गुणा एवं भाग) के प्रति क्रमशः अपना ज्ञान उन्नत करते रहे है। दीर्घ अंकीय संख्याओं के गुणा एवं भाग के प्रति छोटा गणक प्राप्त करने का सिद्धांत एवं नियम प्रतिपादित कर लिए। जिसे छोटा के स्थान पर श्रृंगारित शब्दार्थ लघु लेकर लघुगुणक कहा गया है। इसका अध्ययन गणित के शाखा एवं प्रशाखाओं में व्याप्त गणन संक्रिया का हल प्राप्त करने मेरूदण्ड (स्तम्भिक रीढ़) ही सिद्ध हुआ। जिसके बिना आज इक्कीसवीं सदी का ज्ञान–विज्ञान के विकास क्रम में गणक यंत्र केल्कुलेटर ,कम्प्यूटर,एवं मोबाइल के नित नवीन तकनीकों का विकास उपरांत भी उच्च स्तरीय गणितीय संसार में खड़ा हो पाना कदापि सम्भव नहीं होगा। जिसका अध्ययन संकेत log है।

8-2 log की व्याख्या किसी आधार संख्या a के प्रति संख्या $x = a^b$ हो तो $\log_a x = b$ होगा।

जैसे $8=2^3 \therefore \log_2 8 = 3$, $81=3^4 \therefore \log_3 81 = 4$, $5=625^{\frac{1}{4}} \therefore \log_{625} 5 = \frac{1}{4}=0.25$

$3=9^{\frac{1}{2}} \therefore \log_9 3 = \frac{1}{2} = 0.5$

log अध्ययन का मानक आधार सर्व प्रथम महान गणितज्ञ नेपोयिर ने log अध्ययन का मानक आधार **e** को चुना और log मान तालिका का निर्माण किया और $\log_e x = b$ का मान ज्ञात करने तालिका का अनुप्रयोग नियम प्रतिपादित किया। जहाँ –

$e = 1+\frac{1}{!1}+\frac{1}{!2}+\frac{1}{!3}+\frac{1}{!4}+\frac{1}{!5}+ - - - - - - - \infty$ पद तक के लिए –

17 पद तक का योग मान =2.718281828458914 दशमलव बाद 15 स्थान तक ।

वर्तमान में अन्तराष्ट्रीय संख्यांकन पद्धत्ति के आधार 10 को ही log का आधार चुना गया है। जिसे दर्शाने की आवश्यकता नहीं है। अर्थात् $\log_{10} x$ को केवल $\log x$ ही दर्शित किया जाता है। log अध्ययन का मानक आधार 10 पर log मान तालिका का निर्माण कर $\log x = b$ का मान ज्ञात करने तालिका का अनुप्रयोग नियम प्रतिपादित किया।

8-3 आघार संख्या e के प्रति log विषयक गणन की मूल समिका

1■ $x \le 1$ के प्रतिबंध पर– $\log_e(1+x) = [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - - - - - - - \infty]$

2■ $x<1$ के प्रतिबंध पर– $\log_e (\frac{1}{1+x}) = 1- [x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - - - - - - - \infty]$

27-4 $\log_a$ विषयक गणन समिका– 1■ $\log_a a^n = n$ 2■ $\log_a x^n = n*\log_a x$

3■ $\log_a m*n = \log_a m + \log_a n$ 4■ $\log_a (p \div q)$ या $\log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q$

27-5 $\log_{10}$ या log विषयक गणन समिका– 1■ $\log 10^n = n$ 2■ $\log x^n = n\log x$

3■ $\log(m * n) = \log m + \log n$ 4■ $\log(p \div q)$ या $\log \frac{p}{q} == \log m - \log n$

log पत्रक द्वारा logx का मान ज्ञात करने संख्या x का स्वरूप दशमलव संख्यांकन पद्धति में संख्या के दो प्रखण्ड होते है।

1• **पूर्णांश प्रखण्ड** दशमलव पूर्व (बाँयी ओर) की संख्या। 2• **अपूर्णांश प्रखण्ड** दशमलव पूर्व (दाँयी ओर) की संख्या। तब संख्या x केवल पूर्णांशी (पूर्णांश प्रखण्ड शून्येतर और अपूर्णांश प्रखण्ड शून्य मान में) **अथवा** पूर्णांश एवं अपूर्णांश युक्त **अथवा** केवल अपूर्णांशी (पूर्णांश प्रखण्ड शून्य और अपूर्णांश प्रखण्ड शून्येतर मान में) स्वरूप होगा।

log पत्रक द्वारा Logx का मान ज्ञात करना संख्या x को {एक अंकीय पूर्णांश और तीन अंकीय अपूर्णाश $(p.q_1\ q_2\ q_3)\}*10^n$ के मानक मान में दर्शित करें। जहां संख्या x का स्वरूप केवल पूर्णांशी अथवा पूर्णांश और अपूर्णांश युक्त हो तो – यदि

पूर्णांश प्रखण्ड q अंकीय के प्रति $n = q - 1$ तथा संख्या x का स्वरूप दशमलव बाद क्रमागत शून्य की स्थान संख्या r पर अपूर्णांशी हो तो r के प्रति $n = \bar{r}$ दर्शित होगा। पत्रक में पूर्णांश अंक . दशांश अंक $p.q_1$, शतांश अंक q_2 और हजारांश अंक q_3 को यथा सुनिश्चित करे। तब **logx** के हल मान के पूर्णांश प्रखण्ड में 10^n के प्रति प्राप्त n का मान दर्ज करे। अपूर्णंश प्रखण्ड चार स्थानिक प्राप्त करने प्राप्त पंक्ति $p.q_1$ स्तम्भ q_2 की संख्या में पंक्ति $p.q_1$ q_3 स्तम्भ की संख्या का योग करें।

टीप यदि किसी गणना क्रम में $\log x$ का मान ऋणात्मक (उना संख्यांकन) में हो तो उनागर संख्या के नियमों का प्रयोग कर अपूर्णंश प्रखण्ड को धनात्मक (आगर संख्यांकन) में बदल लेना चाहिए। जैसे $\log x = -(5.4687) = \bar{5}.\bar{4}\ \bar{6}\bar{8}\bar{7}$ के प्रति $\bar{6}.5313$ लिया जाना चाहिए।

(1≤x<10) के प्रतिबंध पर logx पत्रक)

$p.q_1$	शतांश अंक q_2 और $p.q_1 q_2$ का चार अकीय मान										हजारांश अंक q_3 के प्रति		
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1 2 3**	**4 5 6**	**7 8 9**
1.0	0000	0043	0086	0128	0178	0212	0253	0294	0334	0374	5 9 13 4 8 12	17 21 26 16 20 24	30 34 38 28 32 36
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 12 4 7 11	16 20 23 15 18 22	28 31 35 26 29 33
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 11 3 7 10	14 18 21 14 17 20	25 28 32 24 27 31
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 6 10 3 7 10	13 16 19 13 16 19	23 26 29 22 25 29
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9 3 6 9	12 15 19 12 14 17	22 25 28 20 23 26
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 9 3 6 8	11 14 17 11 14 17	20 23 26 19 22 25
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 6 8 3 5 8	11 14 16 10 13 16	19 22 24 18 21 23
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8 3 5 8	10 13 15 10 12 15	18 20 23 17 20 22
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7 2 4 7	9 12 14 9 11 14	17 19 21 16 18 21
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7 2 4 6	9 11 13 8 11 13	16 18 20 15 17 19
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	1729	3748	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 12
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	9 11 12
3.2	5051	5065	50079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 10 12
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 7 8	9 10 11
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 8	9 10 11
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 3	5 6 7	8 10 10
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	5 6 7	8 9 10
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 7	8 9 10
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 7	7 8 9

4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	6721	6730	6739	6749	6958	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	2	3	4	5	6	7	8
5.1	7076	7084	7073	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	2	3	4	5	6	7	8
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7451	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	6	7	7
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	6	7	7
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	4	5	6
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	4	5	6
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	2	2	3	3	4	4	5	6
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	2	2	3	3	4	4	5	6
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8123	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	2	2	2	3	4	4	5	5
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	2	2	2	3	4	4	5	5
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	8921	8927	8932	8938	9843	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	2	2	2	3	3	4	4	5
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	2	2	2	3	3	4	4	5
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9230	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9574	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4

9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4

विश्लेषित उदाहरण1■ $\log 345.7 = \log 3.457*10^2$ के हल मान का–

पूर्णांश $= 3 - 1 = 2$ (345.7 का पूर्णांश 3 अंकीय होने पर)

अथवा पूर्णांश $= 2$ ($345.6 = 3.457*10^2$ में 10 का घात मान 2 होने पर)

अपूर्णांश $= 5378 + 9 = 5387$ (गणना के लिए logx पत्रक से– चार स्थानिक प्राप्त करने प्राप्त पंक्ति $p.q_1 = 3.4$ स्तम्भ $q_2 = 5$की संख्या 5378 में पंक्ति $p.q_1$ q_3 स्तम्भ की संख्या 9 का योगमान)

अतः $\log 345.7 = \log 3.457*10^2 = 2.5387$ होगा

उदाहरण2■ $\log(7689 * 499.9) = \log 7689 + \log 499.9 = \log 7.689 * 10^3 + \log 4.999 * 10^2$

$= 3.8859 + 2.6989 = 6.5848$ ।

उदाहरण3■ $\log(7689 \div 499.9) = \log 7689 - \log 499.9 = \log 7.689 * 10^3 - \log 4.999 * 10^2$

$= 3.8859 - 2.6989 = 1.1870$ ।

उदाहरण4■ $\log(499.9 \div 7689) = \log 499.9 - \log 7689 = \log 4.999 * 10^2 - \log 7.689 * 10^3$

$= 2.6989 - 3.8859 = -(1.1870) = \bar{1}.\bar{1}8\bar{7}0 = \bar{2}.8130$

उदाहरण5■ $\log 10^{\bar{6}} = \bar{6}\,0000$

8-4 प्रति लघुगणक यदि logx= y हो तो y के प्रति x का अभीष्ट हलमान या अभीष्ट हलमान के निकटतर हलमान प्राप्त करने को y का प्रतिलघुगणक प्राप्त करना करना कहते है। गणितीय अध्ययन संकेत Antilog है।

तब अध्ययन संकेत में logx= y से $x = \text{Antilog}(\log x) = \text{Antilog}(y)$ होगा। $\bar{6}.0000$ $\frac{1}{1000000}$

8.5 Antilog (y) की गणना नियम

प्रक्रम1 Antilog **पत्रक में** $y = z.d_1d_2d_3d_4$ **अपूर्णांश** $= .d_1d_2d_3d_4, d_5$ के प्रति **Antilog मान सुनिश्चित करना – पत्रक** में दशमलव बाद अंक क्रमशः d_1दशांश d_2 शतांश d_3हजारांश अंक d_5 दसहजारांश को यथा सारिणी सुनिश्चित करे। तब $.d_1d_2d_3d_4$ के हल मान के लिए पूर्णांश बाद तीन स्थानिक मान प्राप्त करने पंक्ति $.d_1$ d_2 स्तम्भ d_3 की संख्या जो एक अंकीय पूर्णांश बाद तीनअंकीय पूर्णांश में होगा , में इसके हजारांश अंक ओर से पंक्ति $.d_1$ d_2 स्तम्भ d_4 की संख्या का योग करे और एक अंकीय पूर्णांश युक्त तीन अंकीय अपूर्णांश मे योगमान $w.k_1k_2k_3$ प्राप्त कीजिए। यह प्राप्त योगमान $w.k_1k_2k_3$ ही $.d_1d_2d_3d_4$ के प्रति Antilog हलमान होगा।

प्रक्रम2 तब **Antilog (y)** $= (w.k_1k_2k_3)*10^z$ होगा। जिसका सरल हल नियम– $w.k_1k_2k_3$ के दशमलव बिन्दु को– z के धनात्मक मान के प्रति z स्थान बाद दाँये तथा z के ऋणात्मक मान $\bar{z}$ के प्रति होने पर z स्थान पहले बाँये दर्शित करे। इस प्रकार दशमलव बिन्दु को दर्शित करने की प्रक्रिया में नियमानुसार आवश्यक शून्य (0) की स्थान संख्या बढाने के नियम का परिपालन किया जाना चाहिए।

(1≥logx≥ 0) के प्रतिबंध पर antilogx पत्रक)

$.d_1d_2$	दशांश शतांश अंक d_1d_2 और हजारांश अंक d_3सहित बनी संख्या के प्रति एक अंकीय पूर्णांश बाद चार अकीय अपूर्णांश मान									दस हजारांश अंक d_4 के प्रति								
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1.072	1.074	1.076	1.79	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	0	1	1	1	2	2	2	2
.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1.148	1.151	1.152	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2

.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1.202	1.205	1.208	1.201	1.213	1.216	1.219	1.212	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.466	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2,559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	3.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.44	2.754	2.761	2.767	2.777	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	2	3	4	5	5	6
.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2,944	1	1	2	2	3	4	5	5	6
.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	2	3	4	5	5	6
.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	5.083	1	1	2	2	4	4	5	5	6
.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	2	4	4	5	5	6
.50	3.162	2.170	3.177	3,184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	2	2	3	4	4	5	6	7
.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3,548	3.556	3.565	3.573	3.581	3,589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	2.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3.981	3990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4.169	4,178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	7.732	7.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11

.71	5.112	5.140	5.152	5.164	5,176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1 2 4	5 6 7	8 10 11
.72	5.248	5,260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5,346	5.358	1 2 4	5 6 7	9 10 11
.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1 3 4	5 6 8	9 10 11
.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1 3 4	5 6 8	9 10 12
.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1 3 4	5 7 8	9 10 12
.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1 3 4	5 7 8	9 11 12
.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1 3 4	5 7 8	10 11 12
.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.096	6.109	6.124	6.138	6.152	1 3 4	6 7 8	10 11 13
.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1 3 4	6 7 9	10 11 13
.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1 3 4	6 7 9	10 12 13
.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.82	6.607	6.652	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2 3 5	6 8 9	11 12 14
.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2 3 5	6 8 9	11 13 14
.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2 3 5	6 8 9	11 13 15
.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2 3 5	7 8 10	12 13 15
.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2 3 5	7 9 10	12 14 16
.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2 4 5	7 9 11	12 14 16
.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.725	2 4 5	7 9 11	13 14 16
.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2 4 6	8 9 11	13 15 17
.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2 4 6	8 10 12	13 15 17
.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2 4 6	8 10 12	14 15 17
.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2 4 6	8 10 12	14 16 18
.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2 4 6	8 10 12	15 17 19
.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2 4 6	8 11 13	15 17 19
.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2 4 7	9 11 13	15 17 20
.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2 4 7	9 11 13	16 18 20
.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9,886	9.908	9.931	9.954	9.977	2 5 7	9 11 14	16 18 20

1■ Antilog (2.5387) का हल व्याख्या – पूर्णांश z= 2 अपूर्णांश $d_1d_2d_3d_4$= .5387

∴ Antilog (2.5387) = ;(3.451+0.006)*10^2= 3.457* 10^2=345.7 होगा।

2■ Antilog (6.5848) का हल व्याख्या – पूर्णांश z= 6 अपूर्णांश $d_1d_2d_3d_4$= 5848

∴ Antilog (6.5848) = ;(3.837+0.007)*10^6= 3.844*10^6 =3844000.0 होगा।

3■ Antilog (1.1870) का हल व्याख्या – पूर्णांश z= 1 अपूर्णांश $d_1d_2d_3d_4$= 1870

∴ Antilog (1.1870) = ;(1.538)*10^1=1.538*10 =15.380 होगा।

4■ Antilog ($\bar{6}$.8139) का हल व्याख्या – पूर्णांश z= $\bar{6}$ अपूर्णांश $d_1d_2d_3d_4$= .8139

∴ Antilog ($\bar{6}$.8139) = ;(6.516+.0014)*$10^{\bar{6}}$ = 6.530*$10^{\bar{6}}$ = =0.000006530 होगा।

8.6 गुणा , भाग तथा घातांकी संक्रिया विस्तार का मानक मान ⁎ प्राप्त करने में log एवं Antilog का संक्रिया नियम और सारिणी पत्रक का अनुप्रयोग

प्रक्रम 1 गुणा , भाग तथा घातांकी संक्रिया के प्रति log गणना नियमों का अनुप्रयोग कर अंतिम log मान y प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 **Antilog** गणना नियमों का अनुप्रयोग कर प्रक्रम 1 से प्राप्त अंतिम log मान y के प्रति **Antilog(y) = M** मान प्राप्त कीजिए।

निष्कर्ष प्रक्रम 2 से प्राप्त Antilog(y) = M ही गुणा , भाग तथा घातांकी संक्रिया विस्तार का अभीष्ट मानक मान होगा।

उदाहरण 1■ 5555*7777 का लघुगुणकीय हल

माना कि 5555*7777 =y

∴ log y = log(5.555*10^3)+log(7.777*10^3)

= 3.7448 +3.8908

y = antilog7.63 56 = 4.321 *10^7 43210000 **होगा ।**

जबकि वास्तविक हल 43201235 **है।**

उदाहरण 2■ $0.0025 \div 56.25$ का लघुगुणकीय हल

माना कि $y = 0.0025 \div 56.25 \quad \therefore \log y = \log(0.0025 \div 56.25)$

$= \log(0.0025) - \log(56.25)$

$= \log(2.500 * 10^{\bar{3}}) - \log(5.625 * 10)$

$= \log(2.500) + \log(10^{\bar{3}}) - \log(5.625) - \log(10)$

$= (0.3979) + \bar{3} \quad - (0.7497 + 0.0004) - 1$

$= (0.3979) + \bar{3} \quad - (0.7501) - 1$

$= \bar{4}.\bar{3}\bar{5}\bar{2}\bar{2} = \bar{5}.6478$

$\therefore y = 0.0025 \div 56.25 = \text{Antilog}\ \bar{5}.6478$

$= 10^{\bar{5}} * \text{Antilog}\ 0.6478$

$= 10^{\bar{5}} * (4.406 + 0.008)$

$= 10^{\bar{5}} * (4.414) = 0.00004414$

जबकि अंकगणित गणना नियम में $0.0025 \div 56.25 = 0.0000\dot{4}$ होगा।

उदाहरण 3■ 8^7 का लघुगुणकीय हल

माना कि $y = 8^7 \quad 7 * \text{iog} 8.000 = 7 * 0.9031 = 6.3217$

$\therefore \quad y = 8^7 = \text{Antilog}\ 6.3217 \qquad = 10^6 * \text{Antilog}\ 0.3217$

$= 10^6 * (2.094 + 0.003)$

$= 10^6 * (2.097) = 2.097000$

जबकि अंकगणित गणना नियम में $8^7 = 2097152$ होगा।

उदाहरण 4■ $8^{\bar{7}}$ का लघुगुणकीय हल

माना कि $y = 8^{\bar{7}} \quad \bar{7} * \text{iog} 8.000 = \bar{7} * 0.9031 = \bar{6}.\bar{3}\bar{2}\bar{1}\bar{7} = \bar{7}.6783$

$\therefore y = 8^{\bar{7}} = \text{Antilog}\ \bar{7}.6783$

$= 10^{\bar{7}} * \text{Antilog}\ 0.6783$

$= 10^{\bar{7}} * (4.764 + 0.003)$

$= 10^{\bar{7}} * (4.767) = 0.0000004767$

जबकि अंकगणित गणना नियम में $8^{\bar{7}} = (\frac{1}{8})^7 = (0.125)^7 = 0.000000476837158203125$ है।

⧗ गुणा , भाग तथा घातांकी संक्रिया विस्तार गणना में सारिणी (पत्रक) चार अकीय ही है अतः मानक मान प्राप्त होना ही स्वीकारा जाना यथेष्ठ होगा। इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि वास्तविक मान प्राप्त ही नहीं होगा।

----------08----------

अध्याय -9
साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज

अधिकांश व्यक्ति अपना सिमित आय दैनिक आश्यकताओं की पूर्ति मे ही खर्च कर लेते है। विवाह, बीमारी, मृत्यु ,कृषि मकान ,व्यापार जैसे कार्य को पूरा करने के लिये एक मुस्त बड़ी राशि की आवश्यकता आन पड़ने पर पर्याप्त धन राशि का अभाव संकट में पड़ जाते हैं। इस संकट के निर्वारण के लिए उधार धन राशि चाहता है। यह उधार धन राशि उधार देने का व्यवसाय करने वाले साहूकारों , बेंकों ,निगमों समितियों से प्राप्त करता है। वाणिज्य जगत में उधार धन राशि लेन–देन का व्यवसाय अन्तराष्ट्रीय स्वरूप में विकसित हो चुका है। वाणिज्य गणित में विशिष्ट अध्ययन का विषय शीर्षक साधारण ब्याज ,चक्रवृद्धिब्याज एवं किश्त योजना है। व्यवसायिक अध्ययन शब्दावली निम्नानुसार परिभाषित है।

9-1 उधार धन राशि लेन–देन का व्यवसायिक शब्दावली

1• **उधार धन राशि** अपनी आकस्मिक आवश्यकता की पूर्ति के लिये किसी व्यक्ति या संस्था से लिया गया धन राशि जिसे नियमानुसार वापस करना होता है। उधार धन राशि कहलाता है।

2• **ऋणी** वह व्यक्ति जो , उधार धन राशि लेता है ऋणी कहलाता है।

3• **ऋणदाता** वह यक्ति या संस्था जो उधार धन राशि देता है ऋणदाता कहलाता है।

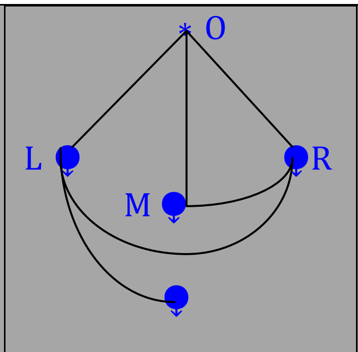
4• **मूलधन** जो धन राशि उधार लिया एवं दिया जाता है, मूलधन कहलाता है। अध्ययन संकेत p (पी)

5• **ब्याज** दिये उधार धन राशि (मूलधन) के प्रति ऋणदाता नियमानुसार और अतिरिक्त धन चाहता है। जिसे ऋणी लिये उधार धन राशि की उपयोगिता के बदले अदायगी तिथि पर मूलधन के साथ अदा करता है। ब्याज कहलाता है। अध्ययन संकेत I (आई)

6• **मिश्रधन** मूलधन एवं ब्याज के योग मान राशि को मिश्रधन कहते है। अर्थात् मिश्रधन = मूलधन + ब्याज
अध्ययन संकेत A (ए)

7• **समयमान** उधार धन राशि लेने की तिथि से मिश्रधन अदायगी तिथि के एक दिन पूर्व तक की अवधि को ब्याज गणना समयमान या केवल समय कहते है। समयमान ऋणदाता के द्वारा जारी नियमानुसार होता है। जो दिन , सप्ताह, पक्ष , माह , तिमाही , छमाही , वर्ष के इकाई गुणांक में मान्य है। भौतिक विज्ञान दोलन घड़ी के अनुसार 1 दोलन काल⧗ (अवधि) को 1 सेकण्ड समय इकाई मान माना गया है। तब – 60 सेकण्ड = 1 मिनट , 60 मिनट = 1 घ्ण्टा , 24 घण्टा = 1 दिन–रात (गणना में दिन कहा गया है।) , 7 दिन = 1 सप्ताह , 15 दिन = 1 पक्ष , 30 दिन = 1 माह , 365 दिन = 1 वर्ष , 3 माह = 1 तिमाही , 6 माह = 1 छमाही , 12 माह = 1 वर्ष। , अध्ययन संकेत – वार्षिक ब्याज दर गणना पर T(टी) तथा अन्य समयमान अन्तराल ब्याज दर पर t (छोटे अक्षर का टी)

दर मान– नियमानुसार ब्याज गणना की सुविधा के लिए एक आधार चुनता है। जो एक सरल गुणांक राशि के लिये एक निश्चित समयमान इकाई अवधि के प्रति जो ब्याजमान राशि निर्धारित करता है। दरमान या केवल दर कहलाता है।



⧗दोलनकाल – एक मजबूत पतली रस्सी जिसके सिरे O को ऊपर हुक में फाँस लगाया गया है। सिरे M में वजनी धातु जैसे लोहे की डिबरी विरामावस्था में लटक रहा है। अब डिबरी को झूले की भाँति झुला कर छोड़ दिया जावें तो झुलन के किसी चक्र में M से R तक फिर R से L तक और L से M तक आने में व्यतीत समयमान को 1 दोलन काल (1झुलन चक्र समयमान) माना गया है। झुलन की प्रत्येक चक्र में गति एवं झुलन चक्र में चली दूरी घटते क्रम मे परिवर्तनीय है। प्रत्येक दोलन काल एक स्थिरांक होता है। अर्थात् झुलन के प्रत्येक चक्र में झुलन की गति और झुलन चक्र में चली दूरी एक दूसरे के अनुक्रमानुपाती होते है।

8• **मानक दर** – 1• प्रति रूपया प्रति दिन अर्थात एक रूपया का एक दिन का ब्याज।

2• प्रति रूपया प्रति माह अर्थात एक रूपया का एक माह का ब्याज।

3• प्रतिशत प्रति माह अर्थात एक सौ रूपये का एक माह का ब्याज।

4• प्रतिशत प्रति वर्ष अर्थात एक सौ रूपये का एक वर्ष (साल) का ब्याज।

5• प्रतिशत प्रति तिमाही अर्थात एक सौ रूपये का 3 माह का ब्याज।

6• प्रतिशत प्रति छमाही अर्थात एक सौ रूपये का 6 माह का ब्याज। अध्ययन संकेत वार्षिक ब्याज दर गणना पर R(आर) तथा अन्य समयमान अन्तराल ब्याज दर पर r (छोटे अक्षर का r)

9-2 ब्याज गणना के प्रकार– [1] साधारण या सरल ब्याज [2] चक्रवृद्धि ब्याज

[1] साधारण या सरल ब्याज – वह ब्याज मान राशि जिसके गणन प्रक्रिया में मूलधन , समयमान एवं ब्याज के बीच सँयुक्त अनुपात विचरण नियमों का प्रतिपालन प्रमाणित हो साधारण या सरल ब्याज कहलाता है।

साधारण या सरल ब्याज गणना में मूलधन, समयमान एवं ब्याज दर के बीच सँयुक्त अनुपात विचरण नियम–

1• मूलधन यथावत रहने पर ब्याज मान राशि और समयमान एकदूसरे के अनुक्रमानुपाती विचरण में होते हैं।

2• ब्याजमान राशि यथावत रहने पर मूलधन राशि और समयमान एकदूसरे के व्युत्क्रमानुपाती विचरण में होते हैं।

3• समयमान यथावत रहने पर मूलधन राशि और ब्याजमान राशि एक दूसरे के व्युत्क्रमानुपाती विचरण में होते हैं।

उक्त नियमों के सँयुक्त अनुप्रयोग में मूलघन , समय और ब्याज के दो त्रिग्म (P_1, T_1, I_1) और (P_2, T_2, I_2) को निम्नानुसार व्यवस्थित कीजिए।

ऊर्ध्व एवं तिर्यक गुणा

मूलधन P	P_1 ■	■ P_2
समय T	T_1 ■	■ T_2
ब्याज I	I_1 ■	■ I_2

या

क्षैतिज एवं तिर्यक गुणा

मूलधनP	समय T	ब्याज I
P_1 ■	T_1 ■	I_1 ■
P_2 ■	T_2 ■	I_2 ■

से हल समिका– $P_1 * T_1 * I_2 = P_2 * T_2 * I_1 \Rightarrow$ मूलधन$_1$* समय$_1$*ब्याज$_2$= मूलधन$_2$* समय$_2$*ब्याज$_1$

उदाहरण ■ जिस दर मान से 300 रूपयें का 5 वर्ष का ब्याज 60 रूपये हो तो उसी दर मान से 700 रूपयें का 3 वर्ष का कितना ब्याज होगा ?

हल उर्ध्व एवं तिर्यक गुणा

मूलधन P	$P_1 = 300$ रू.	$P_2 = 700$ रू.
समय T	$T_1 = 5$ वर्ष	$T_2 = 3$ वर्ष
ब्याज I	$I_1 = 60$ रू.	I_2 =माना xरू.

या

क्षैतिज एवं तिर्यक गुणा

मूलधनP	समय T	ब्याज I
$P_1 = 300$ रू.	$T_1 = 5$ वर्ष	$I_1 = 60$ रू.
$P_2 = 700$ रू.	$T_2 = 3$ वर्ष	I_2 = माना xरू.

से हल समिका– $P_1 * T_1 * I_2 = P_2 * T_2 * I_1 \Rightarrow 300*5*x = 700*3*60$ से x=84 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

साधारण या सरल ब्याज गणना समिका/प्रमेय –

(1) r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान पर मूलधन p का t इकाई समय मान के लिए

– उर्ध्व एवं तिर्यक गुणा

मूलधन P	$P_1 = 100$ रू.	$P_2 = p$ रू.
समय T	$T_1 = 1$ इ. स.	$T_2 = t$ इ.स
ब्याज I	$I_1 = r$ रू.	I_2 =माना xरू.

या

क्षैतिज एवं तिर्यक गुणा

मूलधनP	समय T	ब्याज I
$P_1 = 100$ रू.	$T_1 = 1$ इ. स.	$I_1 = r$ रू.
$P_2 = p$रू.	$T_2 = 3$ इ.स.	I_2 = माना xरू.

से हल समिका– $P_1 * T_1 * I_2 = P_2 * T_2 * I_1 \Rightarrow 100*1*x = p*t*r$

$\Rightarrow 100*x = p*t*r$

$\Rightarrow$ 100*ब्याज = मूलधन*समय*दर अभीष्ट समिका होगी।

उदाहरण 1■ 5% प्रति वर्ष ब्याज दर मान पर मूलधन 620 का 4 वर्ष के लिए देय ब्याज राशि एवं मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल गणना समिका– 100*ब्याज = मूलधन*समय*दर से 100*ब्याज = 620*4*5

$\Rightarrow$ ब्याज =124 रू.

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज = 620+124 =744रू. } अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका मिश्रधन 4% वार्षिक ब्याज दर पर 5 वर्ष मे 600 रू. हो जाता है।

हल माना कि मूलधन P रूपये है। ∴ ब्याज = मिश्रधन – मूलधन = 600 - P

गणना समिका– 100*ब्याज = मूलधन*समय*दर से 100*(600-P) = P*4*5 $\Rightarrow$ 3000 -5P =P $\Rightarrow$ 6P =3000

$\Rightarrow$ P =500 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ कितने % मासिक ब्याज दरमान से 5000 रूपये मूलधन का मिश्रधन 8 माह में 5600 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि मासिक ब्याजदर मान r% मासिक है। ब्याज = मिश्रधन – मूलधन = 5600 – 5000 = 600 रूपय

गणना समिका– 100*ब्याज = मूलधन*समय*दर से 100*600 = 5000*r*8 $\Rightarrow$ 2r = 3 $\Rightarrow$ r = 1.5%

अभीष्ट उत्तर होगा।

(2) साधारण ब्याज गणना पर मूलधन एवं मिश्रधन विषयक प्रमेय एक निश्चित ब्याज दर एवं समयमान के प्रति मूलधन एवं मिश्रधन अनुक्रमानुपाती होते हैं ।

अर्थात् एक निश्चित ब्याज दर एवं समयमान के प्रति मूलधन P एवं मिश्रधन A के दो युग्म (P_1, A_1) और (P_2, A_2) निम्नानुसार व्यवस्थित करने पर–

एक निश्चित ब्याज दर एवं समयमान के प्रति

मूलधन P	P_1	P_2
मिश्रधन A	A_1	A_2

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–

$P_1 * A_2 = P_2 * A_1$ होगा।

उदाहरण ■ एक निश्चित ब्याज दर एवं समयमान पर मूलधन 450 रूपये का मिश्रधन 540 रूपये हो जाता है। तो उसी निश्चित ब्याज दर एवं समयमान पर मूलधन 625 रूपये का मिश्रधन ज्ञात कीजिए ।

हल एक निश्चित ब्याज दर एवं समयमान के प्रति

मूलधन P	P_1 =450 रू.	P_2 = 625 रू.
मिश्रधन A	A_1 =540 रू.	A_2 = माना x रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–

$P_1 * A_2 = P_2 * A_1$ $\Rightarrow$ 450 *x=625*540 से

x= 750 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

(3) मिश्रधन गणना समिका

r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान पर मूलधन p का t इकाई समय मान के लिए r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान t इकाई समय मान के लिए %मिश्रधन = (100+r*t) होगा।

∴ r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान पर मूलधन p का t इकाई समय मान के लिए मिश्रधन गणना समिका–

मूलधन P	P_1 =100 रू.	P_2 = P रू.
मिश्रधन A	A_1 =(100+rt) रू.	A_2 = A रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–

$P_1 * A_2 = P_2 * A_1$

$\Rightarrow$ 100*A= P(100+r*t) होगा।

उदाहरण 1■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका मिश्रधन 4% वार्षिक ब्याज दर पर 5 वर्ष मे 600 रू. हो जाता है।

हल 4% वार्षिक दर मान से 5 वर्ष के लिए %मिश्रधन = (100+r*t) =(100+4*5) =120 रू.होगा। तब–

मूलधन P	$P_1 = 100$ रू.	$P_2 = P$ रू.
मिश्रधन A	$A_1 = 120$ रू.	$A_2 = 600$ रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण– $P_1 * A_2 = P_2 * A_1$

$\Rightarrow 100*600 = P*120$ से

P= 500 रूाये. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ कितने % मासिक ब्याज दरमान से 5000 रूपये मूलधन का मिश्रधन 8 माह में 5600 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि ब्याज दरमान r% मासिक है। तब–r% मासिक ब्याज दर मान से 8 माह के लिए %मिश्रधन = (100+r*t) =(100+r*5) =(100+8r) रू.होगा।

मूलधन P	$P_1 = 100$ रू.	$P_2 = 5000$ रू.
मिश्रधन A	$A_1 = (100+8r)$ रू.	$A_2 = 5600$ रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–$P_1 * A_2 = P_2 * A_1$

$\Rightarrow 100*5600 = 5000*(100+8r)$

$\Rightarrow 112 = 100 + 8r$ से $r = 1.5\%$.अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ वह समयमान ज्ञात कीजिए जिस पर 13% वार्षिक ब्याज दरमान से 8000 रूपये मूलधन का मिश्रधन 13200 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि समयमान t वर्ष है। तब–13% वार्षिक ब्याज दर मान से t वर्ष के लिए %मिश्रधन = (100+r*t) =(100+13*t) =(100+13t) रू. होगा।

मूलधन P	$P_1 = 100$ रू.	$P_2 = 8000$ रू.
मिश्रधन A	$A_1 = (100+13t)$ रू.	$A_2 = 13200$ रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण–$P_1 * A_2 = P_2 * A_1$

$\Rightarrow 100*13200 = 8000*(100+13t)$ $\Rightarrow 165 = 100 + 13t$ से $t = 5$ वर्ष .अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ 17% प्रति वार्षिक ब्याज दर मान पर मूलधन 25000 रूपये का 7 वर्ष बाद अदायगी के लिए मिश्रधन ज्ञात कीजिए ?

हल 17% वार्षिक दर मान से 7 वर्ष के लिए %मिश्रधन = (100+r*t) =(100+17*7) =219 रू.होगा। तब–

मूलधन P	$P_1 = 100$ रू.	$P_2 = 25000$ रू.
मिश्रधन A	$A_1 = 219$ रू.	$A_2 =$ माना x रू.

अनुक्रमानुपाती विचरण नियम के तहत् हल समीकरण– $P_1 * A_2 = P_2 * A_1$

$\Rightarrow 100*x = 25000*219$ से

x= 54750 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

[2} चक्रवृद्धि ब्याज सरल शब्द में चक्रवृद्धि ब्याज गणना करना ब्याज पर ब्याज गणना की सतत् संक्रिया है जिसके अनुसार सतत् इकाई –इकाई समय वार q वें इकाई क्रम के लिए प्राप्त मिश्रधन को अगले इकाई –इकाई समय वार (q+1) वें इकाई क्रम के लिए मूलधन माना जा कर अंतिम n वें इकाई क्रम के लिए प्राप्त मिश्रधन में से मूलधन को घटाने से प्राप्त ब्याज चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है।

जिसके अनुसार r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान पर मूलधन p का n इकाई समय मान के लिए चक्रवृद्धि मिश्रधन A_n तथा चक्रवृद्धि ब्याज I_n हो तो गणना समिका –

1• $A_n = p * (1 + \frac{r}{100})^n$ या $A_n = p * \{1 + (0.01) * r\}^n$

2• $I_n = A_n - p = p * (1 + \frac{r}{100})^n - p = p\{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\}$

या $I_n = A_n - p = p * \{1 + (0.01) * r\}^n - p = p * [\{1 + (0.01) * r\}^n - 1]$

प्रमाण आगमन –निगमन विधि द्वारा–

r% प्रति इकाई समयमान ब्याज दर मान पर मूलधनP के प्रति साधारण ब्याज गणना नियम से इकाई –इकाई समय वार तक में चक्रवृद्धि मिश्रधन A_n तथा चक्रवृद्धि ब्याज I_n गणन सूची

प्रक्रम x=↓	समय इकाई क्रम x=↓	मूलधन $P_x = A_{x-1}$	चक्रवृद्धि मिश्रधन $A_x = P_x(1+\frac{r}{100})$	कुल चक्रवृद्धि ब्याज $I_x = A_x - P$
1	1	$P_1 = A_0 \quad = P$	$A_1 \quad = P(1+\frac{r}{100})$	$I_1 \quad = P\{(1+\frac{r}{100})-1\}$
2	2	$P_2 = A_1 \quad = P(1+\frac{r}{100})$	$A_2 \quad = P(1+\frac{r}{100})^2$	$I_2 \quad = P\{(1+\frac{r}{100})^2-1\}$
3	3	$P_3 = A_2 \quad = P(1+\frac{r}{100})^2$	$A_3 \quad = P(1+\frac{r}{100})^3$	$1_3 \quad = P\{(1+\frac{r}{100})^3-1\}$
4	4	$P_4 = A_3 \quad = P(1+\frac{r}{100})^3$	$A_4 \quad = P(1+\frac{r}{100})^4$	$I_4 \quad = P\{(1+\frac{r}{100})^4-1\}$
-	-	--------------------------------	---------------------------	----------------------------
-	-	-------------------------------	---------------------------	--------------------------
कोई q	कोई q	$P_q = A_{q-1} \quad = P(1+\frac{r}{100})^{q-1}$	$A_q \quad = P(1+\frac{r}{100})^q$	$I_q \quad = P\{(1+\frac{r}{100})^q-1\}$
-	-	--------------------------------	---------------------------	-------------------------------
-	-	--------------------------------	----------------------------	---------------------------------
n-2	n-2	$P_{n-2} = A_{n-3} = P(1+\frac{r}{100})^{n-3}$	$A_{n-2} = P(1+\frac{r}{100})^{n-3}$	$I_{n-2} = P\{(1+\frac{r}{100})^{n-2}-1\}$
n-1	n-1	$P_{n-1} = A_{n-2} = P(1+\frac{r}{100})^{n-2}$	$A_{n-1} = P(1+\frac{r}{100})^{n-1}$	$I_{n-1} = P\{(1+\frac{r}{100})^{n-1}-1\}$
ंतिम n	ंतिमn	$P_n \quad = A_{n-1} = P(1+\frac{r}{100})^{n-1}$	$A_n \quad = P(1+\frac{r}{100})^n$	$I_n \quad = P\{(1+\frac{r}{100})^n-1\}$

प्रमाणित

कुल या सकल चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने विषयक अभ्यास उदाहरण

सतत् गणना विधि

उदाहरण 1■ 8000 रूपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम वर्ष का मूलघन $P_1 = A_0 = P = 8000$ रूपये होगा।

जिसका प्रथम वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_1 = \frac{P_1 * r * t}{100} = \frac{8000*10*1}{100} = 800$ रू.

द्वितीय वर्ष का मूलघन $P_2 = A_1 = P_1 + i_1 = 8000 + 800 = 8800$ रूपये होगा।

जिसका द्वितीय वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_2 = \frac{P_2 * r * t}{100} = \frac{8800*10*1}{100} = 880$ रू.

∴ दोनों वर्ष का कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= i_1 + i_2 = 800 + 880 = 1680$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ 125000 रूपये का 8% वार्षिक ब्याज की दर पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल प्रथम वर्ष का मूलघन $P_1 = A_0 = P = 125000$ रूपये होगा।

जिसका प्रथम वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_1 = \frac{P_1 * r * t}{100} = \frac{125000*8*1}{100} = 10,000$ रू.

द्वितीय वर्ष का मूलघन $P_2 = A_1 = P_1 + I_1 = 1,25,000 + 10,000 = 1,35,000$ रूपये होगा।

जिसका द्वितीय वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_2 = \frac{P_2 * r * t}{100} = \frac{1,35,000*8*1}{100} = 10,800$ रू.

तीसरे वर्ष का मूलघन $P_3 = A_2 = P_2 + i_2 = 1,35,000 + 10,800 = 1,45,800$ रूपये होगा। और तीसरे वर्ष के लिए समयमान $\frac{1}{2}$ वर्ष है।

$\therefore$ तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_3 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{1,45,800*8*\frac{1}{2}}{100} = .5,832$ रू

$\therefore 2\frac{1}{2}$ वर्ष का कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= i_1 + i_2 + i_3 = 10,000 + 10,800 + 5,832 = 26,632$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ 16000 रूपये का $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर पर 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल वार्षिक ब्याज की दर $r = 12\frac{1}{2}\% = 12.5\%$ प्रथम वर्ष का मूलघन $P_1 = A_0 = P = 16000$ रूपये होगा।

जिसका प्रथम वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_1 = \frac{P_1*r*t}{100} = \frac{16000*12.5*1}{100} = 2,000$ रू.

द्वितीय वर्ष का मूलघन $P_2 = A_1 = P_1 + i_1 = 16,000 + 2,000 = 18,000$ रूपये होगा।

जिसका द्वितीय वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_2 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{18000*12.5*1}{100} = 2250$ रू.

तीसरे वर्ष का मूलघन $P_3 = A_2 = P_2 + i_2 = 18,000 + 2250 = 20250$ रूपये होगा।

$\therefore$ तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_3 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{20250*12.5*1}{100} = 2531.25$ रू.

$\therefore 2\frac{1}{2}$ वर्ष का कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= i_1 + i_2 + i_3 = 2,000 + 2,250 + 2,531.25$

$= 6,781.25$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ 25000 रूपये 3 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिये । ब्याज दर परिवर्तन क्रम में पहले ,दूसरे एवं तीसरे वर्ष का ब्याज दर क्रमशः 8% , 12% एवं 10% वार्षिक लगाया जावें तों चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल ब्याज दर परिवर्तन क्रम में कुल साधारण ब्याज = मूलघन * (परिवर्तित ब्याज मानों का योग मान)÷100

=25000* (8+12+10)÷ 100 =25000*30÷ 100=7500 रू

पहले वर्ष के लिए ब्याज की दर $r_1 = 8\%$ मूलघन $P_1 = A_0 = P = 25000$ रूपये होगा।

जिसका पहले वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_1 = \frac{P_1*r*t}{100} = \frac{25000*8*1}{100} = .2,000$ रू

द्वितीय वर्ष के लिए ब्याज की दर $r_2 = 10\%$ मूलघन $P_2 = A_1 = P_1 + I_1 = 25,000 + 2,000 = 27,000$ रूपये होगा।

जिसका द्वितीय वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_2 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{27000*10*1}{100} = 2700$ रू.

तीसरे वर्ष के लिए ब्याज की दर $r_3 = 12\%$ तीसरे वर्ष का मूलघन $P_3 = A_2 = P_2 + i_2 = 27,000 + 2700 = 29700$ रूपये होगा।

$\therefore$ तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_3 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{29700*12*1}{100} = 3564$ रू.

$\therefore$ 3 वर्ष का कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= i_1 + i_2 + i_3 = 2,000 + 2,700 + 3564 = 8,264$ रू.

चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज का अंतर $= 8264 - 7500 = 764$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

(2) गणना समिका विधि

उदाहरण 1■ 8000 रूपये का 10% वार्षिक ब्याज की दर पर 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल गणना समिका– $I_n = P\{(1 + \frac{r}{100})^n - 1\}$ में मूलधन $P = 8000$ रू. , दर $r = 10\%$ वार्षिक , समयमान $n = 2$ वर्ष

प्रतिरूथापित करने पर दो वर्ष का चक्रवृद्धि $I_2 = 8000\{(1 + \frac{10}{100})^2 - 1\}$

$= 8000\{(1.1)^2 - 1\} = 8000\{(1.1)^2 - 1\}$

$= 8000\{1.21 - 1\} = 8000*0.21 = 1680.00 = 1680$ रू.

अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ 125000 रूपये का 8% वार्षिक ब्याज की दर पर $2\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल गणना समिका– $I_n =P\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\}$ में मूलधन$P=125000$ रू. , दर $r=8\%$ वार्षिक , समयमान n =पूर्णांश वर्ष $2=$ वर्ष प्रतिरूथापित करने पर दो वर्ष का चक्रवृद्धि $I_2 = 8000\{\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 - 1\} = 125000\{(1.08)^2 - 1\}$ $=125000\{1.1664-1\}=125000\{0.1664\}=20800$ रू.

तीसरे वर्ष का मूलधन $P_3 = A_2 = p + I_2 = 1{,}25{,}000 + 20{,}800 = 1{,}45{,}800$ रूपये होगा। और तीसरे वर्ष के लिए समयमान $\frac{1}{2}$ वर्ष है।

∴ तीसरे वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज $i_3 = \frac{P_2*r*t}{100} = \frac{1,45,800*8*\frac{1}{2}}{100} = 5{,}832$ रू.

∴ $2\frac{1}{2}$ वर्ष का कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= I_2 + i_3 = 20{,}800 + 5{,}832 = 26{,}632$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ 16000 रूपये का $12\frac{1}{2}\%$ वार्षिक ब्याज की दर पर 3 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल गणना समिका– $I_n =P\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\}$ में मूलधन$P=16{,}000$ रू. , दर $r=12\frac{1}{2}\%=12.5\%$ वार्षिक ,समयमान $n=3$ वर्ष प्रतिरूथापित करने पर– तीन वर्ष का चक्रवृद्धि $I_3 = 16000\{\left(1+\frac{12.5}{100}\right)^2 - 1\}$

$$=16000\{(1.125)^3-1\}$$
$$=16000\{1.423828125-1\}$$
$$=16000*0.423828125$$
$$= 6781.25$$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ 25000 रूपये 3 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज पर उधार दिये । ब्याज दर परिवर्तन क्रम में पहले ,दूसरे एवं तीसरे वर्ष का ब्याज दर क्रमशः 8% , 12% एवं 10% वार्षिक अगाया जावें तों चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज का अंतर ज्ञात कीजिए।

हल गणना समिका– ब्याज दर परिवर्तन क्रम में चक्रवृद्धि ब्याज $I_n = P[\{\left(1+\frac{r_1}{100}\right)*\left(1+\frac{r_2}{100}\right)*\left(1+\frac{r_3}{100}\right)---\left(1+\frac{r_n}{100}\right)\}-1]$ में मूलधन$P=25{,}000$ रू. , ब्याज दर परिवर्तन क्रम में ब्याज की दरें क्रमशः $r_1=8\%$, $r_2=10\%$, $r_3=12\%$ वार्षिक , प्रतिरूथापित करने पर–

3 वर्ष तीन वर्ष का चक्रवृद्धि $C.I_3 = P[\{\left(1+\frac{r_1}{100}\right)*\left(1+\frac{r_2}{100}\right)*\left(1+\frac{r_3}{100}\right)\}-1]$

$$= 25000\left[\left\{\left(1+\frac{8}{100}\right)*\left(1+\frac{12}{100}\right)*\left(1+\frac{10}{100}\right)\right\}-1\right]$$
$$= 25000[\{(1.08)*(1.12)*(1.10)\}-1]$$
$$= 25000[1.330560-1\}$$
$$= 25000*0.330560 = 8264$$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

ब्याज दर परिवर्तन क्रम में साघारण ब्याज $S.\ I_n = \frac{P(r_1+r_2+r_3---+r_n)}{100} \Rightarrow = \frac{25000(8+12+10)}{100} = 250*30 = 7500$ रू

चक्रवृद्धि एवं साधारण ब्याज का अंतर $=8{,}264 - 7500 = 764$ अभीष्ट उत्तर होगा।

9-3 दिये चक्रवृद्धि ब्याज दर के प्रति छैमाही(अर्धवार्षिकी) तथा तिमाही गणना में चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं ब्याज ज्ञात करने विषयक

इसके लिए यदि वार्षिक ब्याज दर $R\%$ हो तो छैमाही गणना ब्याज दर $r_6 = \frac{R}{2}$ तथा तिमाही गणना ब्याज दर $r_3 = \frac{R}{4}$ और छैमाही गणना में इकाई समयमान की संख्या $n=2*$ (वर्ष की संख्या Y) / माह की संख्या $M \div 2$ एवं
तिमाही गणना में इकाई समयमान की संख्या $n=4*$ (वर्ष की संख्या Y) / माह की संख्या $M \div 4$ लिया जाना चाहिए।

तब– **1•** छैमाही गणना में चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_6 = P\left(1+\frac{r_6}{100}\right)^n = P\left(1+\frac{R}{200}\right)^n$

तथा $= P\{\left(1+\frac{r_6}{100}\right)^n - 1\} = P\{\left(1+\frac{R}{200}\right)^n - 1\}$

तथा **2•** तिमाही गणना में चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_3 = P\left(1+\frac{r_3}{100}\right)^n = P\left(1+\frac{R}{400}\right)^n$

तथा चक्रवृद्धि ब्याज $c.I_3 = = P\{\left(1+\frac{r_3}{400}\right)^n - 1\} = P\{\left(1+\frac{R}{400}\right)^n - 1\}$ होगा।

उदाहरण 1■ अर्धवार्षिकी ब्याज गणना पर 7000 रूपये का 20% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन एव ब्याज ज्ञात कर कीजिए।

हल गणना समिक– छैमाही गणना में चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_6 = P\left(1+\frac{r_6}{100}\right)^n = P\left(1+\frac{R}{200}\right)^n$ में मूलधन$P = 7,000$ रू.

वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर $R = 20\% \Rightarrow$ अर्धवार्षिकी चक्रवृद्धि ब्याज दर $r_6 = \frac{R}{2} = \frac{20}{2} = 10\%$ अर्धवार्षिकी इकाई समय मान की संख्या $n = 2*$ (वर्ष की संख्या Y) $= 2*(1\frac{1}{2}) = 2*\frac{3}{2} = 3$ प्रतिस्थापित करने पर –

चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_6 = 7000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 = 7000\left(\frac{11}{10}\right)^3 = 7000*\frac{1331}{1000} = 9317$रू.

चक्रवृद्धिब्याज $c.I_6 = c.A_6 - P = 9317$रू.$- 7000$ रू. $= 2317$रू.

अभीष्ट उत्तर होंगे।

उदाहरण2■ तिमाही ब्याज गणना पर 10,00,000 रूपये का 12% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 9 माह का चक्रवृद्धि मिश्रधन एव ब्याज ज्ञात कर कीजिए।

हल गणना समिक– तिमाही गणना में चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_3 = P\left(1+\frac{r_6}{100}\right)^n = P\left(1+\frac{R}{200}\right)^n$ में मूलधन$P = 10,000$ रू.

वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर $R = 12\% \Rightarrow$ तिमाही चक्रवृद्धि ब्याज दर $r_3 = \frac{R}{4} = \frac{12}{4} = 3\%$, तिमाही इकाई समय मान की संख्या $n =$ (माह की संख्या M)$\div 3 = 9 \div 3 = 3$ प्रतिस्थापित करने पर –

चक्रवृद्धि मिश्रधन $c.A_3 = 1000000\left(1+\frac{3}{100}\right)^3 = 7000\left(\frac{103}{100}\right)^3 = 1000000*\frac{1092727}{100000} = 1092727$रू.

चक्रवृद्धिब्याज $c.I_3 = c.A_3 - P = 1092727$रू.$- 1000000$ रू. $= 92727$रू.

अभीष्ट उत्तर होंगे।

मिश्रधन / चक्रवृद्धि ब्याज इकाई समयमान संख्या एवं दर मान ज्ञात होने पर मूलधन ज्ञात करने विषयक

गणना समिका– चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ से **मूलधन** $P = \frac{A}{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n} = A \div \left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ होगा।

मूलधन, चक्रवृद्धि मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज एवं दर मान ज्ञात होने पर इकाई समयमान संख्या ज्ञात करने विषयक

गणना समिका– चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{A}{P} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ में $\frac{A}{P}$ के हलमान $= \left(1+\frac{q}{100}\right)^n$ में दर्शित किये जाने पर दर मान $r = y$ होगा। अथवा $\frac{A}{P} = y^n$ दर्शित किये जाने पर–

$y = 1+\frac{r}{100}$ से दर मान $r = \{100*(y-1)\}\%$ होगा।

मूलधन, चक्रवृद्धि मिश्रधन/चक्रवृद्धि ब्याज एवं इकाई समयमान की संख्या ज्ञात होने पर दर मान करने विषयक

गणना समिका– चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{A}{P} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ में $\frac{A}{P}$ के हलमान $= \left(1+\frac{r}{100}\right)^x$ दर्शित किये जाने पर– इकाई समयमान कीसंख्या $n = x$ होगा।

उदाहरण 1■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका मिश्रधन 4% के ब्याज दर से 2 वर्ष मे 6760 रूपये हो जावेगा।

हल **मूलधन** $P = A \div \left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 6760 \div \left(1+\frac{4}{100}\right)^2 = 6760 \div (\frac{26}{25})^2$

$= 6760 \div \frac{676}{625} = 6760 * \frac{625}{676} = 6250$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका मिश्रधन 5% के ब्याज दर से 3 वर्ष मे 9261 रूपये हो जावेगा।

हल **मूलधन** $P = A \div \left(1+\frac{r}{100}\right)^n = 9261 \div \left(1+\frac{5}{100}\right)^3 = 9261 \div (\frac{21}{20})^3$

$= 9261 \div \frac{9261}{8000} = 9261 * \frac{8000}{9261} = 8000$ रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका चक्रवृद्धि ब्याज 5% के ब्याज दर से 2 वर्ष मे 1640 रूपये हो जावेगा।

हल माना कि मूलधन P रूपये है। अतः मिश्रधनA = (मूलधन +ब्याज) = (P+1640)

मूलधन $P = A \div \left(1+\frac{r}{100}\right)^n = (P+1640) \div \left(1+\frac{5}{100}\right)^2 = (P+1640) \div (\frac{21}{20})^2$

$= (P+1640) \div \frac{441}{400} = (P+1640) * \frac{400}{441}$

अतः $441\,P = 400P + 1640*400 \Rightarrow 441\,P - 400P = 1640*400 \Rightarrow 41\,P = 1640*400$ से

$P = 40*400 = 16000$ रू.अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ वह मूलधन एवं ब्याज दर ज्ञात कीजिए जिनसे 2 और 3 वर्ष बाद का मिश्रधन क्रमशः 2420 रूपये और 2662 रूपये प्राप्त होता है।

हल माना कि मूलधन P रूपये एवं चक्रवृद्धि ब्याज की दर r: वार्षिक है।

$\therefore$ 2 वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_2 = 2420 = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$------------ (1)

3 वर्ष्वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_3 = 2662 = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^3$------------ (2)

समीकरण (2) ÷ (1) से $\frac{2662}{2420} = 1+\frac{r}{100} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{2662}{2420} - 1 \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{242}{2420} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{10}$ से r=10%

समीकरण (1) में प्राप्त r का मान 10 प्रतिस्थापित करने पर– $2420 = P\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 \Rightarrow 2420 = P\left(\frac{11}{10}\right)^2$

$\Rightarrow 2420 = P * \frac{121}{100}$ से P =2000 रू.। अतः अभीष्ट उत्तर –मूलधन 2000 रू. एवं चक्रवृद्धि ब्याज की दर10% होगा।

टीप चक्रवृद्धि ब्याज की दर ज्ञात करने सतत् ब्याज गणना नियम का अनुप्रयोग अवलोकित कीजिए–

तीसरे वर्ष का मूलधन P_3 = दूसरे वर्श के लिए प्राप्त मिश्रधनA_2= 2420 रूपये तथा तीसरे वर्ष का मूलधन A_3 = 2662रूपये से गणना समिका $A_3 = P_3(1+\frac{r}{100}) \Rightarrow 2662 = 2420(1+\frac{r}{100}) \Rightarrow \frac{2662}{2420} = 1+\frac{r}{100}$ प्राप्त कर उपरोक्तानुसार r=10% किया जा सकता है।

उदाहरण 5■ ज्ञात कीतिए– कितने % वार्षिक चक्रवृद्धि दर से 2वर्ष बाद मूलधन 1250 रूपये का मिश्रधन 1352 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि चक्रवृद्धि ब्याज की दर r% वार्षिक है।

$\therefore$ 2 वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_2 = 1352 = 1250\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{1352}{1250} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{676}{625} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{26}{25}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{26}{25} = 1+\frac{r}{100} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{26}{25} - 1$

$\Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{25} \Rightarrow r = \frac{100}{25} = 4\ \%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 6■ ज्ञात कीतिए– कितने % वार्षिक चक्रवृद्धि दर से 2 वर्ष बाद मूलधन 20,000 रूपये का मिश्रधन 22050 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि चक्रवृद्धि ब्याज की दर r% वार्षिक है।

$\therefore$ 2 वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_2 = 22050 = 20{,}000\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{22050}{20000} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{441}{400} = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \Rightarrow \frac{21}{20} = 1+\frac{r}{100} \Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{21}{20} - 1$

$\Rightarrow \frac{r}{100} = \frac{1}{20} \Rightarrow r = \frac{100}{20} = 5\ \%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 7■ ज्ञात कीतिए– कितने वर्षों बाद 10% वार्षिक चक्रवृद्धि दर से मूलधन 4,000रूपये का मिश्रधन 5,324 रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि समयमान n वर्ष है।

$\therefore$ n वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_n = 5{,}324 = 4{,}000\left(1+\frac{10}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{5304}{4000} = \left(\frac{11}{10}\right)^n \Rightarrow \frac{1331}{1000} = \left(\frac{11}{10}\right)^n$

$\Rightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^3 = \left(\frac{11}{10}\right)^n \Rightarrow n = 3$ वर्ष अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 8■ ज्ञात कीतिए– कितने वर्षों बाद 5% वार्षिक चक्रवृद्धि दर से मूलधन 64,000रूपये का मिश्रधन 68,921रूपये हो जावेगा ?

हल माना कि समयमान n वर्ष है।

$\therefore$ n वर्ष बाद प्राप्त मिश्रधन $A_n = 68{,}921 = 64{,}000\left(1+\frac{5}{100}\right)^n \Rightarrow \frac{68921}{8000} = \left(\frac{21}{20}\right)^n$

$\Rightarrow \left(\frac{21}{20}\right)^3 = \left(\frac{21}{20}\right)^n \Rightarrow n = 3$ वर्ष अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 9■ वह मूलधन ज्ञात कीजिए जिसका चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज का अंतरमान 2 वर्ष मे 5% वार्षिक ब्याज की दर से 20 रूपये है।

हल माना कि मूलधन P है। $\therefore$ 2 वर्ष में 5% वार्षिक ब्याज की दर से–

चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण का अंतरमान मान 20 रूपये= चक्रवृद्धि ब्याज − साधारण ब्याज $= P\{(1+\frac{5}{100})^2 - 1\} - \frac{P*2*5}{100}$

$\Rightarrow 20 = P\{(\frac{21}{20})^2 - 1\} - \frac{P}{10} \Rightarrow 20 = P\{\frac{441}{400} - 1\} - \frac{P}{10} \Rightarrow 20 = \frac{41P}{400} - \frac{P}{10}$

$\Rightarrow 20 = \frac{P}{400} \Rightarrow P = 8000$ रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

9-4 चक्रवृद्धि मिश्रधन गणन समिका अनुप्रयोग विस्तार

1• बढती जनसंख्या 10 वर्षीय जनसंख्या गणना के आकलन से यह मान लिया गया है कि साल दर साल बढ़ती जनसंख्या चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम के अनुसार ही होता है। अतः जनसंख्या विषयक प्रश्नों के हल के लिए– वर्तमान जनसंख्या P_s t वर्ष पश्चात् जनसंख्याA_s, तथा जनसंख्या वृद्धि की दर r% वार्षिक हो तो – गणना समिका – $A_s = P_s(1+\frac{r}{100})^t$ होगा। तथा t वर्ष पहले् जनसंख्याB_s हो तो – गणना समिका – $P_s = B_s(1+\frac{r}{100})^t$ होगा।

2• घटती जनसंख्या पाकृतिक आपदा एवं जनसंख्या वृद्धि में रोक लगाने सरकारी नीतियों एव प्रयासों के परिणाम स्वरूप साल दर साल घटती जनसंख्या चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम के अनुसार ही होता है। अतः जनसंख्या विषयक प्रश्नों के हल के लिए– वर्तमान

जनसंख्या P_s t वर्ष पश्चात् जनसंख्याA_s, तथा जनसंख्या घटाव की दर $r\%$ वार्षिक हो तो गणना समिका – $A_s = P_s(1-\frac{r}{100})^t$ होगा। तथा t वर्ष पहले् जनसंख्याB_s हो तो – गणना समिका – $P_s = B_s(1-\frac{r}{100})^t$ होगा।

3• पुरानी वाहनों के कीमतों में अवमूल्यन नयी वाहन उपभोग पूरा होने अवधि के क्रम (1वर्ष, 2वर्ष, 3वर्ष, ------t वर्ष,) पुरानी मानी जाती है। ऐसी पुरानी वाहनों के कीमतों में अवमूल्यन होता है। यह अवमूल्यन चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम के अनुसार ही होता है। अतः पुरानी वाहनों के कीमतों में अवमूल्यन विषयक प्रश्नों के हल के लिए– नयी वाहन की कीमत N_p रूपये t वर्ष उपभोग उपरांत हुए इस पुरानी वाहन O_p रूपये , तथा अवमूल्यन की दर $r\%$ वार्षिक हो तो गणना समिका – $O_p = N_P(1-\frac{r}{100})^t$ होगा।

उदाहरण 1■ एक नगरी निकाय की जन संख्या 64000 है। यदि जनसंख्या वृद्धि दर 5% वार्षिक हो तो 3 वर्ष बाद नगर जनसंख्या कितनी होगी ?

हल प्रश्नानुसार वर्तमान जनसंख्या $P_s = 64,000$, जनसंख्या वृद्धि की दर $r\% = 5\%$ $t=3$ वर्ष पश्चात् जनसंख्या$A_s = ?$
गणना समिका – $A_s = P_s(1+\frac{r}{100})^t$ मे उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर–

$A_s = 64000(1+\frac{5}{100})^3 = 64000(\frac{21}{20})^3 = 64000*\frac{9261}{8000} = 8*9261 = 74088$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ एक नगरी निकाय की जन संख्या 32000 है। यदि जनसंख्या वृद्धि दर 20% वार्षिक हो तो 2 वर्ष बाद नगर जनसंख्या कितनी हो जायेगी ?

हल प्रश्नानुसार वर्तमान जनसंख्या $P_s = 32,000$, जनसंख्या वृद्धि की दर $r\% = 20\%$ $t=2$ वर्ष पश्चात् जनसंख्या$A_s = ?$
गणना समिका – $A_s = P_s(1+\frac{r}{100})^t$ मे उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर–

$A_s = 32000(1+\frac{20}{100})^2 = 32000(\frac{6}{5})^2 = 32000*\frac{36}{25} = 1280*36 = 46080$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 3■ एक देश की जन संख्या 5,48,72,000 है। यदि जनसंख्या कमी (घटाव) की दर 5% वार्षिक हो तो 3 वर्ष पहले राज्य की जनसंख्या कितनी थी तथा 3 वर्ष बाद नगर जनसंख्या कितनी हो जायेगी?

हल प्रश्नानुसार वर्तमान जनसंख्या $P_s = 5,48,72000$, जनसंख्या कमी (घटाव) की दर $r\% = 5\%$ $t=3$ वर्ष पहले जनसंख्या$B_s = ?$ के लिए गणना समिका – $P_s = B_s(1-\frac{r}{100})^t$ होगी। जिसमें उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर–

$5,48,72000 = P_s(1-\frac{5}{100})^3 = B_s*(\frac{19}{20})^3 = B_s*\frac{6859}{8000}$ से

$B_s = 5,48,72,000*\frac{8000}{6859}$ $8000*8000 = 6,80,00.000$ अभीष्ट उत्तर होगा।

पुनः $t=3$ वर्ष बाद जनसंख्या$0_s = ?$ के लिए गणना समिका – $0_s = P_s(1-\frac{r}{100})^t$ होगी । जिसमें उक्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर– $0_s = 5,48,72000\,(1-\frac{5}{100})^3 = 5,48,72000\,(\frac{19}{100})^3 = 5,48,72000*\frac{6859}{8000}$
$= 6859*6859 = 4,70,45,881$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 4■ 4 वर्ष पूर्व 5,00,000 रूपये में क्रय किये गये नयी कार का उपभोग उपरांत आज का विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए। यदि कार का अवमूल्यन दर प्रथम 2 वर्ष के लिए 5% तथा अंतिम 2 वर्ष के लिए 10% का निर्धारित किया गया है।

हल प्रश्नानुसार नयी वाहन की कीमत $N_p = 5,00,000$ रूपये, 4 वर्ष उपभोग उपरांत हुए इस पुरानी वाहन $O_p = ?$ रूपये जहाँ वार्षिक क्रमिक अवमूल्यन की दर क्रमशः पहले वर्ष के लिए $r_1 = 5\%$ दूसरे वर्ष के लिए $r_2 = 5\%$ तीसरे वर्ष के लिए $r_3 = 10\%$ चौथे वर्ष के लिए $r_4 = 10\%$ है। ,

अतः गणना समिका – $O_p = N_P\left(1-\frac{r_1}{100}\right)*\left(1-\frac{r_2}{100}\right)*\left(1-\frac{r_3}{100}\right)*(1-\frac{r_4}{100})$ में उपरोक्त मानों का प्रतिस्थापित करने पर– $O_p = 5,00.000\left(1-\frac{5}{100}\right)*\left(1-\frac{5}{100}\right)*\left(1-\frac{10}{100}\right)*(1-\frac{10}{100})$

$= 5,00.000\left(\frac{19}{20}\right) * \left(\frac{19}{20}\right) * \left(\frac{9}{10}\right) * (\frac{9}{10}) =$ 12.50*19*19*9*9 =3,65,512.50 रू. अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 5■ ज्ञात कीजिए उस गाँव की जनसंख्या वर्तमान वर्ष के 3 वर्ष पहले कितनी थी जो उसके बाद के प्रथम वर्ष में 15% बढ़ता है । दूसरे और तीसरे वर्ष में क्रमशः 10% और 5% घटकर वर्तमान में 7866 दर्शित है।

हल प्रश्नानुसार 3 वर्ष पहले की जन संख्या B_s =? जहाँ उसके बाद के पहले वर्ष में बढने की दर $r_1 = 15\%$ दूसरे वर्ष में घटने की दर r_2=10% तीसरे वर्ष में घटने की दर r_3=5% उपरांत वर्तमान जनसंख्या $P_{s=}$ 7866 दर्शित है।

अतः गणना समिका – $P_s = B_s\left(1+\frac{r_1}{100}\right) * \left(1-\frac{r_2}{100}\right) * \left(1-\frac{r_3}{100}\right)$ में उपरोक्त मानों का प्रतिस्थापित करने पर–

$$7866 = B_s\left(1+\frac{15}{100}\right) * \left(1-\frac{10}{100}\right) * \left(1-\frac{5}{100}\right) \Rightarrow 7866 = B_s\left(\frac{23}{20}\right) * \left(\frac{9}{10}\right) * \left(\frac{19}{20}\right)$$

$$\Rightarrow 7866 = B_s * \frac{3933}{4000} \quad \Rightarrow B_s = 7866 * \frac{4000}{3933} \quad \Rightarrow B_s = 2 * 4000 = 8000$$ अभीष्ट उत्तर होगा।

----------09----------

अध्याय -10
किश्त योजना

आधुनिक युग नित नये–नये उत्पादों नये–नये तकनिकियों की जरूरतों की लम्बी सूची और आय के सीमित साघन के बीच बाजार में विक्रेता एवं ऋणदाता संस्थाएँ लेन–देन की समुचित संतुलन की आवश्यकता को दृष्टिगत करते हुए विक्रेता वस्तु के विक्रय मूल्य एवं ऋणदाता संस्थाएँ द्वारा दियें गये ऋण की अदायगी किश्तों (प्रतिदिनी, साप्ताहिक, पाक्षिक मासिक, तिमाही छैमाही एवं वार्षिक अवधि अन्तराल) में चुकता करने की सुविधा उपलब्ध कराती है। इस प्रकार के सुविधा के प्रति विक्रेता विक्रय किये गये वस्तु का नगद मूल्य {वस्तु विक्रय अवधि पर तत्काल भुगतान राशि (तभुरा)}एवं ऋणदाता संस्थाएँ दिये ऋण राशि जिसे मूलधन कहतें है। तब व्यापारिक क्रिया अध्ययन में नगद मूल्य /मूलधन राशि की उपयोगिता से वंचित होना पड़ता है। उस वंचित भाव की संतुष्टि के प्रति विक्रेता / ऋणताता पूर्ण अदायगी अवधि पर अतिरिक्त धन लाभ चाहता है। इस प्रकार चाही गयी धन लाभ को ब्याज कहते है। ब्याज की गणना प्रतिशत राशि प्रति किश्त अवधि की (संकेत में $r\% \backslash k_t$) दर–मान मान पर किया जाता है। तब किश्तों की कुल संख्या n के प्रति किश्त योजना समिका अमानक⧗ एवं मानक दोनों तरीके में साधारण एवं चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम पर अलग–अलग प्राप्त करते है।

10-1 साधारण ब्याज गणना नियम पर किश्त योजना समिका प्रमेय

A• अमानक किश्त योजना समिका प्रमेय नगद मूल्य/मूलधन=P , किश्तमान राशि =k , ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या =n हो तो अमानक किश्त योजना समिका में – $k=\frac{p(100+r*n)}{100n}$ $\Rightarrow$ $100*n*k = p(100+r*n)$ होगा।

प्रमाण किश्तमान राशि $k =$ मिश्रधन $A \div$ किश्तों की संख्या $n = P(1+\frac{r*n}{100}) \div n = \frac{p(100+r*n)}{100n}$

$\Rightarrow$ $100*n*k = p(100+r*n)$ प्रमाणित।

B• मानक किश्त योजना समिका प्रमेय नगद मूल्य/मूलधन=P , किश्तमान राशि =k , ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या =n हो तो मानक किश्त योजना समिका में – $n*k\{200+r*(n-1)\} = 2P\{100+r*n)$

$$\Rightarrow k = \frac{2P\{100+r*n)}{n\{200+r*(n-1)\}}$$ होगा।

प्रमाण– प्रक्रम 1 मूलधन से मिश्रधन $A = P(1+\frac{r*n}{100})$

प्रक्रम 2 अंतिम nवाँ किश्त भुगतान अवधि तक प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग मिश्रधन गणना–

प्रथम किश्त का मिश्रधन $A_1 = k(1+\frac{r*(n-1)}{100})$ -------------1

दुसरे किश्त का मिश्रधन $A_2 = k(1+\frac{r*(n-2)}{100})$ -------------2

तीसरे किश्त का मिश्रधन $A_3 = k(1+\frac{r*(n-3)}{100})$ -------------3

– – – – – – – – — – – – – – – – — – – – – – – – – — – – – – – – – – –

– – – – – – – – — – – – – – – – — – – – – – – – – — – – – – – – – – –

⧗ चूँकि किश्त योजना में किसी m वें किश्त मान राशि k का भुगतान विक्रेता / ऋणदाता को $[(n-m)*$(किश्त अन्तराल अवधि)] अवधि का उपयोगिता लाभ देता है। जो कि अमानक किश्त योजना गणना में दर्शित नहीं हो पा रहा है। अतः किश्त मान राशि k अमानक होगा। आपके अध्ययन के अभाव का लाभ विक्रेता/ऋणदाता अमानक किश्त योजना समिका लागू कर सकता है। अतः इसका ध्यानाकर्षण कराया जा रहा है। किसी नगद मूल्य / मूलधन=P , ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या =n के मानों की स्थिरता पर संगत किश्त योजना समिका प्रमेय का अनुप्रयोग कर किश्त मान राशि प्राप्त का किश्तमान के आकार पर पड़ने वाले प्रभाव को अनुच्छेद 3 को अनुसार विश्लेषित कर समझा ता सकता है।

mवें किश्त का मिश्रधन $A_m = k(1+\frac{r*(n-m)}{100})$ -------------m

----- ------------ ----------- ----------- ----

----- ------------ ----------- ----------- ----

अंतिम nवें किश्त का मिश्रधन $A_n = k\left(1+\frac{r*(n-n)}{100}\right) = k$ -------------n

प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग प्राप्त मिश्रधन का योगमान S

$= A_1 + A_2 + A_3 + - - - + A_n$

$= n*k + \frac{k*r}{100}\{(n-1)+(n-2)+(n-3)+- + - + - + 3 + 2 + 1\}$

$= n*k + \frac{k*r}{100}\{\frac{n*(n-1)}{2}\}$

$= n*k*\{1+\frac{r*(n-1)}{200}\}$

प्रक्रम 3 मूलधन से प्राप्त मिश्रधन A = प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग प्राप्त मिश्रधन का योगमान S होगा।

$\therefore\ P(1+\frac{r*n}{100}) = n*k*\{1+\frac{r*(n-1)}{200}\} \quad \Rightarrow\ p(\frac{100+rn}{100}) = n*k(\frac{200+r(n-1)}{200})$

$\Rightarrow\ p(100+r*n) = n*k\{\frac{200+r(n-1)}{2}\} \Rightarrow 2\,p(100+r*n) = n*k\{200 + r*(n-1)\}$

$$k = \frac{2\,p(100+r*n)}{n\{200+r*(n-1)\}}$$

10-2 चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम पर किश्त योजना समिका प्रमेय

A• अमानक किश्त योजना समिका प्रमेय मूल्य/मूलधन=P , किश्तमान राशि =k , ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या =n हो तो $\left(1+\frac{r}{100}\right) = y$ माने जाने पर अमानक किश्त योजना समिका में – $k = \frac{p*y^n}{n} \Rightarrow n*k = py^n$ होगा।

प्रमाण– किश्तमान राशि $k =$ मिश्रधन $A \div$ किश्तों की संख्या $n = P(1+\frac{r}{100})^n \div n = p*y^n \div n = \frac{p*y^n}{k}$

$\Rightarrow n*k = p*y^n$ प्रमाणित।

B• मानक किश्त योजना समिका प्रमेय नगद मूल्य / मूलधन=P , किश्तमान राशि =k , ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या =n हो तो $\left(1+\frac{r}{100}\right) = y$ माने जाने पर मानक किश्त योजना समिका में मानक किश्त योजना समिका में –

$p*y^n(y-1) = k*(y^n-1) \Rightarrow k = \frac{p*y^n(y-1)}{y^n-1}$ होगा।

प्रमाण प्रक्रम 1 मूलधन से मिश्रधन $A = P(1+\frac{r}{100})^n = p*y^n$

प्रक्रम 2 अंतिम nवाँ किश्त भुगतान अवधि तक प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग मिश्रधन गणना–

प्रथम किश्त का मिश्रधन $A_1 = k\,(1+\frac{r}{100})^{n-1} = k*y^{n-1}$-------------1

दुसरे किश्त का मिश्रधन $A_2 = k\,(1+\frac{r}{100})^{n-2} = k*y^{n-2}$-------------2

तीसरे किश्त का मिश्रधन $A_3 = k\,(1+\frac{r}{100})^{n-3} = k*y^{n-3}$------------3

----- ------------ ----------- ----------- ----

----- ------------ ----------- ----------- ----

mवें किश्त का मिश्रधन $A_m = k\,(1+\frac{r}{100})^{n-m} = k*y^{n-m}$------------m

----- ---—---- ---—---- ---—---- ----

----- ---—---- ---—---- ---—---- ----

अंतिम n वें किश्त का मिश्रधन $A_n = k(1+\frac{r}{100})^{n-n} = ky^0 = k$------------n

प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग प्राप्त मिश्रधन का योगमान S

$= A_1 + A_2 + A_3 + - - - + A_n = k*\frac{y^n-1}{y-1}$

प्रक्रम 3 मूलधन से प्राप्त मिश्रधन A = प्रथम किश्त से अंतिम nवाँ किश्त मानों के प्रति अलग– अलग प्राप्त मिश्रधन का योगमान S होगा।

$p*y^n = k(y^{n-1} + y^{n-2} + y^{n-3} + \cdot\cdot + \cdot\cdot + y^2 + y + 1) \Rightarrow p*y^n = k*\frac{y^n-1}{y-1}$

$\Rightarrow k = \frac{p*y^n(y-1)}{y^n-1}$ होगा।

10-3 साधारण ब्याज गणना नियम एवं चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम पर अमानक तथा मानक किश्त योजना का तुलनात्मक अध्ययन के प्रति एक उदाहरण

12% वार्षिक ब्याज दर पर लिये गये 100000 रूपयें को मासिक 24 आसान किश्तों में अदा करने साधारण ब्याज गणना नियम एवं चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम पर अमानक तथा मानक किश्त योजना का तुलनात्मक अध्ययन करने अलग–अलग किश्त मान राशि की गणना कीजिए।

हल प्रश्नानुसार वार्षिक ब्याज दर R =12% ∴ किश्त अन्तराल अवधि (मासिक) के प्रति ब्याज दर r = 1%

मूलधन P = 100000 रूपयें किश्तों की संख्या n =24 प्राप्त है। तब किश्तमान राशि k की गणना करना–

साधारण ब्याज गणना नियम पर

A• **अमानक गणना समिका** 100*n*k = p(100+r*n) में प्राप्त मान रखने पर–

$100*24*k = 100000\ (100+1*24) \Rightarrow 24k = 1000*124$ से

अमानक किश्त दर राशि k= 5166.67=**5167** रूपये होगा।

B• **मानक गणना समिका** $k = \frac{2P\{100+r*n\}}{n\{200+r*(n-1)\}}$ में प्राप्त मान रखने पर–

मानक किश्त दर राशि $k = \frac{2*100000\{100+1*24\}}{24\{200+1*(24-1)\}} = \frac{100000*124}{12*223} = \frac{3100000}{669}$

$= 4633.78 = 4634$रूपये होगा।

चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम पर $y = (1+\frac{r}{100}) = (1+\frac{1}{100}) = 1.01$

A• **अमानक गणना समिका** $n*k = p*y^n$ में प्राप्त मान रखने पर–

$24*k = 100000*(1.01)^{24} = 100000*1.26973 = 126973$ से

अमानक किश्त दर राशि k =126973 ÷ 24 = 5290.54 =5291 रूपये होगा।

B• **मानक गणना समिका** $k = \frac{p*y^n(y-1)}{y^n-1}$ में प्राप्त मान रखने पर–

मानक किश्त दर राशि $k = \frac{100000*(1.01)^{24}*(1.01-1)}{(1.01)^{24}-1} = \frac{100000*1.26973*0.01}{1.26973-1} = \frac{1269.73}{0.26973}$

=4707.41 = 4707 रूपये होगा।

गणना से स्पष्ट है –

(साधारण ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त मानक किश्त मान राशि) < (चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त मानक किश्त मान राशि) <

(साधारण ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त अमानक किश्त मान राशि) $<$ (चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त अमानक किश्त मान राशि)

ज्ञात हो बैकिंग वाणिज्य गणित में चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त मानक किश्त मान राशि का निर्धारण करता है।

नगद मूल्य / मूलधन$=P$, किश्तमान राशि $=k$, ब्याजदर $= r\% \backslash k_t$ तथा किश्तों की संख्या $=n$ के प्रति–

1• साधारण ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त अमानक किश्त मान राशि$=k_{as}$

2• साधारण ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त मानक किश्त मान राशि$=k_s$

3• चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त अमानक किश्त मान राशि$=k_{ac}$

4• चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना नियम से प्राप्त मानक किश्त मान राशि$=k_c$ हो तो–

$$\frac{100*k_{as}*n}{100+r*n} = \frac{k_s*n\{200+r(n-1)\}}{2\{100+r*n\}} = \frac{k_{ac}*n}{(1+\frac{r}{100})^n} = \frac{k_c\{(1+\frac{r}{100})^n-1\}}{(1+\frac{r}{100})^n*(\frac{r}{100})} = p$$ होगा।

10-4 वेलकम या स्वागतम् सूची

A• केवल और केवल चक्रवृद्धि ब्याज गण्ना मान में मूलधन आधारित

मानक किश्त योजना अन्तर्गत नगद मूल्य / मूलधन$=P$ को, ब्याजदर $= r\% \backslash$ किश्त दर पर किश्तों की कुल संख्या $=n$ में प्रति मानक किश्तमान राशि $=k$ के हिसाब से चुकाने में प्रत्येक t वें किश्त के प्रति मूलधन P_t ,ब्याज की राशि C_t मिश्रधन A_t तथा t वाँ किश्त अदा करने उपरांत $(t+1)$ वें किश्त के लिए मान्य मूलधन $P_{(t+1)}$ की गणना सूची को मूलधन आधारित वेलकम या स्वागतम् सूची कहते है।

टीप वेलकम तैयार करने के अनुसार अंतिम किश्त की अदायगी प्रति किश्तमान राशि न्यूनाधिक हो सकते है।

उदाहरण■ नगद मूल्य / मूलधन$=100000$ रूपये को, ब्याजदर $= 1\% \backslash$किश्त समय अन्तराल दर पर मासिक किश्तों की कुल संख्या $=24$ में चक्रवृद्धि ब्याज गणना मान में मानक किश्तमान राशि $=4707$ रूपये के हिसाब से चुकाने का–

मूलधन आधारित वेलकम या स्वागतम् सूची

क्रमांक	किश्त क्रमाक	मूलधन P_t	ब्याज C_t	मिश्रधन A_t	अदा किया गया किश्त मान राशि k	किश्त अदा करने उपरांत परवर्ती$(t+1)$ वें किश्त के लिए मान्य मूलधन $P_{(t+1)}$
1	2	3	4	5	6	7
1	1	1,0 0,000.00	1,000.00	1,01,000.00	4707.00	96,293.00
2	2	96,293.00	963.00	97256.00	4707.00	92549.00
3	3	92549.00	925.00	93474.00	4707.00	88767.00
4	4	88767.00	888.00	89655.00	4707.00	84948.00
5	5	84948.00	849.00	85797,00	4707.00	81090.00
6	6	81090.00	811.00	81901.00	4707.00	77194.00
7	7	77194.00	772.00	77966.00	4707.00	73259.00
8	8	73259.00	733.00	73992.00	4707.00	69285.00
9	9	69285.00	693.00	69978.00	4707.00	65271.00
10	10	65271.00	653.00	65924.00	4707.00	61217.00
11	11	61217.00	612.00	61829.00	4707.00	57122.00
12	12	57122.00	571.00	57693.00	4707.00	52986.00
13	13	52986.00	530.00	53516.00	4707.00	48809.00
14	14	48809.00	488.00	49297.00	4707.00	44590.00
15	15	44590.00	446.00	45036.00	4707.00	40329.00
16	16	40329.00	403.0	40732.00	4707.00	36025.00
17	17	36025.00	360.00	36385.00	4707.00	31678.00
18	18	31678.00	317.00	31995.00	4707.00	27288.00

19	19	27288.00	273.00	27561.00	4707.00	22854.00
20	20	22854.00	229.00	23083.00	4707.00	18376.00
21	21	18376.00	184.00	18560.00	4707.00	13853.00
22	22	13853.00	139.00	13994.00	4707.00	9287.00
23	23	9287.00	93.00	9380.00	4707.00	4673.00
24	24	4673.00	47.00	4720.00	4720.00	Nill

⧗ अंतिम 24 वाँ किश्त मान 4720.00 मानक किश्त मान राशि 4707.00 रूपये से 13 अधिक है। जो कि ब्याज गणना में पूर्ण रूपये स्वीकारें जाने का परिणाम है। यह स्वाभाविक है। अन्यथा न लेवें।

B• साधारण और चक्रवृद्धि ब्याज दोनों के प्रति मिश्रधन आधारित मानक किश्त योजना अन्तर्गत नगद मूल्य / मूलधन=P को, ब्याजदर $= r\%$ \ किश्त समय अन्मराल दर पर किश्तों की कुल संख्या =n में प्रति मानक किश्तमान राशि =k के हिसाब से चुकाने में प्रत्येक t वें किश्त का (n-t) किश्त अन्तराल अवधि का मिश्रघन $kp_{(n-t)}$ के गणना एवं मूलधन=P का मिश्रधन $A_{\{n-t)+1\}}$ दर्शित करने की गणना सूची को वेलकम या स्वागतम् सूची कहते है।

कम्पनी अथवा बैंकिग प्रणाली में वेलकम देने में यह मिश्रधन आधारित नियम प्रचलित नहीं है। जिसे निःसंकोच विशुद्ध वेलकम माना जा सकता है।

साधारण ब्याज गणना में मिश्रधन आधारित वेलकम या स्वागतम् सूची

क्रमांक	किश्त क्रमांक t	मूलधनP=100000 के प्रति देय शेष मिश्रधन A_t	किश्तमान k=4634.00 रूपये का (n-t) किश्त अन्तराल अवधि का मिश्रघन $kp_{(n-t)}$	मिश्रधन $A_{t+1}=$ (स्तंम्भ4−स्तम्भ3)
1	2	3	4	5
1	1	124000.00	4634*1.23= 5700.00	118300.00
2	2	118300.00	4634*1.22= 5653.00	112647.00
3	3	112647.00	4634*1.21= 5607.00	107040.00
4	4	107040.00	4634*1.20= 5561.00	101479.00
5	5	101479.00	4634*1.19= 5514.00	95965.00
6	6	95965.00	4634*1.18= 5468.00	90497.00
7	7	90497.00	4634*1.17= 5422.00	85075.00
8	8	85075.00	4634*1.16= 5375.00	79700.00
9	9	79700.00	4634*1.15= 5329.00	74371.00
10	10	74371.00	4634*1.14= 5283.00	69088.00
11	11	69088.00	4634*1.13= 5236.00	63852.00
12	12	63852.00	4634*1.12= 5190.00	58662.00
13	13	58662.00	4634*1.11= 5144.00	53518.00
14	14	53518.00	4634*1.10= 5097.00	48421.00
15	15	48421.00	4634*1.09= 5051.00	43370.00
16	16	43370.00	4634*1.08= 5005.00	38365.00
17	17	38365.00	4634*1.07= 4958.00	33407.00
18	18	33407.00	4634*1.06= 4912.00	28495.00
19	19	28495.00	4634*1.05= 4866.00	23629.00
20	20	23629.00	4634*1.04= 4819.00	18810.00

21	21	18810.00	4634*1.03= 4773.00	14037.00
22	22	14037.00	4634*1.02= 4726.00	9311.00
23	23	9311.00	4634*1.01= 4680.00	4631.00
24	24	4631.00	4634*1.00= 4634.00	अंतिम किश्त 4634.00 के लिए 4631.00 देय होगा

चक्रवृद्धि ब्याज गणना में मिश्रधन आधारित वेलकम या स्वागतम् सूची

क्रमांक	किश्त क्रमांक t	मूलधन P=100000 के प्रति देय शेष मिश्रधन A_t	किश्तमान k=4707.00 रूपये का (n-t) किश्त अन्तराल अवधि का मिश्रघन $kp_{(n-t)}$	मिश्रधन A_{t+1}=(स्तंम्भ4−स्तम्भ3)
1	2	3	4	5
1	1	126973.00	$4707*(1.01)^{23}$=5917.00	121056.00
2	2	121056.00	$4707*(1.01)^{22}$=5859.00	115197.00
3	3	115197.00	$4707*(1.01)^{21}$=5801.00	109395.00
4	4	109395.00	$4707*(1.01)^{20}$=5743.00	103653.00
5	5	103653.00	$4707*(1.01)^{19}$=5687.00	97966.00
6	6	97966.00	$4707*(1.01)^{18}$=5630.00	92336.00
7	7	92336.00	$4707*(1.01)^{17}$=5575.00	86761.00
8	8	86761.00	$4707*(1.01)^{16}$=5519.00	81242.00
9	9	81242.00	$4707*(1.01)^{15}$=5465.00	75777.00
10	10	75777.00	$4707*(1.01)^{14}$=5411.00	70366.00
11	11	70366.00	$4707*(1.01)^{13}$=5357.00	65000.00
12	12	65000.00	$4707*(1.01)^{12}$=5304.00	59705.00
13	13	59705.00	$4707*(1.01)^{11}$=5251.00	54454.00
14	14	54454.00	$4707*(1.01)^{10}$=5199.00	49255.00
15	15	49255.00	$4707*(1.01)^{09}$=5148.00	44107.00
16	16	44107.00	$4707*(1.01)^{08}$=5097.00	39010.00
17	17	39010.00	$4707*(1.01)^{07}$=5047.00	33963.00
18	18	33963.00	$4707*(1.01)^{06}$=4997.00	28966.00
19	19	28966.00	$4707*(1.01)^{05}$=4947.00	24019.00
20	20	24019.00	$4707*(1.01)^{04}$=4898.00	19121.00
21	21	19121.00	$4707*(1.01)^{03}$=4850.00	14271.00
22	22	14271.00	$4707*(1.01)^{02}$=4802.00	9469.00
23	23	9469.00	$4707*(1.01)^{01}$=4754.00	4715.00
24	24	4715.00	$4707*(1.01)^{00}$=4707.00	अंतिम किश्त 4707.00 के लिए 4715.00 देय होगा।

10-5 किश्त संख्या n= 2 एवं 3 होने के प्रति मानक किश्त योजना

	किश्त संख्या n= 2	किश्त संख्या n= 3
साधारण ब्याज गणना नियम मे	$P(100+2r)=k(200+r)$	$P(100+3r)=2k(100+r)$
चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम मे	$P(1+\frac{r}{100})^2 = k(2+\frac{r}{100})$ $(1+\frac{r}{100}) = y$ के प्रति– $py^2 = k(y+1)$	$P(1+\frac{r}{100})^3=k\{(\frac{r}{100})^2+3(1+\frac{r}{100})\}$ $(1+\frac{r}{100}) = y$ के प्रति– $Py^3=k(y^2+y+1)\}$

साधारण ब्याज गणना नियम में मानक किश्त विषयक हल उदाहरण

A• प्रति किश्तमान राशि ज्ञात करना भारतीय स्टेट बैंक द्वारा शासकीय कर्मचारी के लिए जारी व्यक्तिगत लोन सुविधा अन्तर्गत 63176 का लोन 13% वार्षिक पर 24 आसान मासिक किश्तों में अदा करने की सुविधा पर देता है। किश्त मान राशि ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– स्वीकृत लोन की राशि P =63176 रूपये। वार्षिक ब्याज दर R = 13%

∴ प्रति किश्त अन्तराल (मासिक) ब्याज दर $r= \frac{13}{12}\%$ देय होगा। किश्तमान राशि k = ज्ञात करना है।

मानक गणना समिका – $k = \frac{2P\{100+r*n)}{n\{200+r*(n-1)\}}$ में प्राप्त मान रखने पर–

$k = \frac{2*63176\{100+\frac{13}{12}*24)}{24\{200+\frac{13}{12}*(24-1)\}} = \frac{2*63176*126}{24*\{\frac{2400+299}{12}\}} = \frac{2*63176*126}{2*2699}$ =24*126 = 3024 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

B • ब्याजदर ज्ञात करना छोटेलाल एक रेडियो जिसका नगद मून्य 870 रूपये है। 200 रूपये नगद देकर शेष देय राशि 2 समान किश्तों में 340 रूपये मासिक किश्तों दर में अदा करने का वादा कर क्रय कर लेता है। ज्ञात कीजिए दुकानदार कितने % वार्षिक व्याज दर निर्धारित करता है।

हल प्रश्नानुसार– रेडियो का नगद मूल्य 870 रूपये । रेडियो क्रय करने 200 रूपये नगद अदा किया गया।

∴ शेष उधार राशि P =870-200 = 670 रूपये । किश्तमान राशि k = 340 रूपये ।

माना कि प्रति किश्त अन्तराल (मासिक) ब्याज दर r% देय है। से वार्षिक ब्याज दर R = 12r

हल समिका P(100+2r)=k(200+r) में उपरोक्त प्राप्त मान रखने पर–

$670(100+2r)=340(200+r) \Rightarrow 67(100+2r)=34(200+r)$

$\Rightarrow 6700+134r= 6800+34r \Rightarrow 134r\text{-}34r= 6800\text{-}6800 \Rightarrow 100r= 100 \Rightarrow r = 1\%$

∴ वार्षिक ब्याज दर R= 12r =12*1% = 12% होंगा।

C• किश्तों की कुल संख्या ज्ञात करना बजाज मोटर सायकल कम्पनी के लोन मेला में एक मोटर साख्कल का नगद मूल्य 38200 .00 रूपये है । मोहन अपनी पुरानी मोटर सायकल के बदले 6000.00 रूपये नगद रियायत प्राप्त करता है। शेष देय राशि का भुगतान किश्त योजना अन्तर्गत 16% वार्षिक ब्याज पर 2900.00 रूपये मासिक किश्त का अनुबंध पर खरीद लाता है। पूर्ण अदायगी किश्तों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार –

मोटर सायकल का नगद मूल्य 38200 .00 रूपये

— पुरानी मोटर सायकल के बदले नगद रियायत 6000.00 रूपये

∴ किश्तों में देय शेष राशि p 32200.00 रूपये

वार्षिक ब्याज दर R = 16% ∴ माासिक किश्त अन्तराल अवधि का ब्याज दर $r = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ %

मासिक किश्तमान राशि $k = 2900.00$ रूपय।` पूर्ण अदायगी किश्तों की कुल संख्या n ज्ञात करना है।

मानक गणना समिका– $k = \frac{2P(100+r*n)}{n\{200+r*(n-1)\}}$

$\Rightarrow nk\{200 + r*(n-1)\} = 2p(100 + r*n)$ में प्राप्त मान रखने पर–

$n*2900\{200+\frac{4}{3}*(n-1)\} = 2*32200(100+\frac{4}{3}*n)$

$\Rightarrow 29n*(600+4n-4) = 644(300+4n) \Rightarrow 29n*(596+4n) = 644(300+4n)$

$\Rightarrow 29*4*n*(149+n) = 644*4*(75+n) \Rightarrow 29*n*(149+n) = 644*(75+n)$

$\Rightarrow 29n^2 + 4321n = 48300+644n \Rightarrow 29n^2 + 4321n - 644n - 48300 = 0$

$\Rightarrow 29n^2 + 3677n - 48300 = 0 \Rightarrow 29n^2 - 348n + 4025n - 48300 = 0$

$\Rightarrow 29n(n-12) + 4025(n-12) = 0$` $\Rightarrow (n-12)(29n+4025) = 0 \therefore n-12 = 0$ सै

किश्तों की संख्या n=12 अभीष्ट उत्तर होगा।

D• मूलधन ज्ञात करना

उस मिनीबस का नगद क्रय मूल्य ज्ञात कीजिए जो 1,00,000 (एक लाख) रूपये नगद भुगतान बाद शेष देय राशि भुगतान किश्त योजना अन्तर्गत 24% वार्षिक ब्याज दर पर मासिक 60 किश्तों मे 11000 रूपये प्रति किश्त मान का अनुबंध पर खरीद गया है।

हल माना कि मिनीबस का नगद क्रय मूल्य C रूपये

प्रश्नुसार नगद दिया राशि 100000 रूपये

∴ किश्तों में देय शेष राशि p C− 100000 रूपये

वार्षिक ब्याज दर R = 24% ∴ माासिक किश्त अन्तराल अवधि का ब्याज दर $r = \frac{24}{12} = 2\%$

मासिक किश्तमान राशि $k = 11000$ रूपय।` पूर्ण अदायगी किश्तों की कुल संख्या 60

मानक गणना समिका– $k = \frac{2P(100+r*n)}{n\{200+r*(n-1)\}}$

$\Rightarrow nk\{200 + r*(n-1)\} = 2p(100 + r*n)$ में प्राप्त मान रखने पर–

$60*11000\{200+2(60-1) = 2(C-100000)(100+2*60)$

$\Rightarrow 30*11000*318 = (C-100000)*(220)$

$\Rightarrow 30*500*318 = (C-100000) \Rightarrow 477000 = (C-100000)$

∴ मिनीबस का नगद क्रय मूल्य Cरूपये = 477000+100000 =577000 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

10-6 चक्रवृद्धि ब्याज गणना नियम में मानक किश्त विषयक

(1) किश्तों की संख्या n= 2 होने पर

A• प्रति किश्तमान राशि ज्ञात करना 6% वार्षिक ब्याज दर पर 5150 रूपये उधार लिया गया धन दो समान वार्षिक किश्तों में चुकाया गया । प्रति किश्तमान राशि ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– मूलधन उधार राशि P =5150 रूपये । किश्त अन्तराल (वार्षिक) ब्याज दर R= 6% देय है।

माना कि प्रति किश्तमान राशि $=$k ज्ञात करना है।

गणन समिका $P(1+\frac{R}{100})^2 = k(2+\frac{R}{100})$ में प्राप्त मान प्रतिज्ञथापित करने पर–

समिका $P(1+\frac{6}{100})^2 = k(2+\frac{6}{100}) \Rightarrow 5150(1+\frac{6}{100})^2 = k(2+\frac{6}{100})$

$\Rightarrow 5150(\frac{106}{100})^2 = k(\frac{206}{100}) \Rightarrow 5150(\frac{53}{50})^2 = k(\frac{103}{50}) \Rightarrow 103 * 53 * 53 = k*103$

$\therefore$ प्रति किश्तमान राशि k $=$2809 रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

B • ब्याज दर ज्ञात करना एक किसान शाकम्भरी योजना अन्तर्गत सिचाई कुँआ तैयार करने 21300 रूपयें का ऋण 12729 रूपये प्रति वार्षिक किश्तमान राशि की दर पर 2 किश्तों में चुकता करने की शर्त पर अदा करने की शर्त पर प्राप्त करता है। चक्रवृद्धि ब्याज मानक गणना नियम के तहत वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– मूलधन उधार राशि P $=$21300 रूपये । किश्त अन्तराल (वार्षिक) ब्याज दर R$=$ 6% देय है।

वार्षिक किश्तमान राशि k$=$12729 रूपये । वार्षिक ब्याज दर R ज्ञात करना है।

$(1+\frac{R}{100}) = y$ के प्रति

गणन समिका $Py^2 = k(y+1)$ में प्राप्त मान प्रतिज्ञथापित करने पर–

समिका $Py^2 = k(y+1) \Rightarrow 21300y^2 = 12729(y+1)$

$y = \frac{12729+\sqrt{12729^2+4*21300*12729}}{2*213} \Rightarrow y = \frac{12729+\sqrt{12729(12729+4*21300)}}{2*21300}$

$\Rightarrow y = \frac{113^2+113\sqrt{(12729+85200)}}{42600} \Rightarrow y = \frac{113^2+113\sqrt{97969}}{42600} \Rightarrow y = \frac{113^2+113*313}{42600}$

$\Rightarrow y = \frac{113(113+313)}{42600} \Rightarrow y = \frac{113*426}{42600} = \frac{113}{100} = 1+\frac{13}{100}$

$\therefore 1+\frac{R}{100} = 1+\frac{13}{100}$ से $R = 13\ \%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

(2) किश्तों की संख्या n≥ 3 होने पर

A• प्रति किश्तमान राशि ज्ञात करना . एक शिक्षक व्यक्तिगनत ऋण सुविधा योजना अन्तर्गत 1,50,000 रूपयें का ऋण 13% वार्षिक ब्याज दर पर 48 मासिक किश्तों में पूर्ण अदा करने का अनुबंध प्रपत्र देता है। जिसके लिए बेंक 1500 रूपये लिपकीय व्यय भी जोड़ लेता है। प्रति किश्तमान राशि ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– मूलधन P $=$(लिया उधार राशि $+$लिपकीय व्यय) $=$1,50,000$+$1,500 $=$1,51,500 रूपये ।

वार्षिक ब्याज दर R$=$ 13% देय है। $\therefore$ किश्त अन्तराल अवधि (मासिक) ब्याज दर $r = \frac{13}{12}$

$y = (1+\frac{r}{100}) = (1+\frac{\frac{13}{12}}{100}) = \frac{1213}{1200}$

माना कि प्रति किश्तमान राशि $=$k ज्ञात करना है।

गणन समिका $Py^n(y-1) = k(y^n-1)$ में प्राप्त मान प्रतिज्ञथापित करने पर–

समिका $1,51,500\ (\frac{1213}{1200})^{48}(\frac{1213}{1200}-1) = k\{(\frac{1213}{12})^{48}-1\}$

$\Rightarrow$ $151500*1.67733 * (1.01083-1) = k(1.67733-1)$

$\Rightarrow$ $151500*1.67733 * 0.01083 = k(0.67733)$

$\therefore k = (151500*1.67733 * 0.01083) \div 0.67733$

$= 4063.12 = 4063.00$ रूपये अभीष्ट उत्तर होगा।

टीप वेलकम तैयार करने के अनुसार अंतिम किश्त की अदायगी प्रति किश्तमान राशि न्यूनाधिक हो सकते है।

B• ब्याज दर ज्ञात करना किश्तों की संख्या $n \geq 3$ के प्रति वास्तविक ब्याज दर ज्ञात की समिका विस्तार –

$Py^n - ky^{n-1} - ky^{n-2} - ky^{n-3}$----------$-ky^2 - ky - k = 0$ को हल करना होगा । जिसके लिए n घाती समीकरण हल करने के नियम का प्रतिपादन करना होगा। जो कि किश्तों की संख्या n के बढ़ते मानों के प्रति उत्तरोत्तर कठिन होता जावेगा और यह प्राप्त हल भी वास्तविक ब्याज दर के निकटतर ही होगा।

किश्तों की संख्या n=3 के प्रति उदाहरण एक किसान ट्रेक्टर क्रय करने कृषि विकास निगम से 3,31,000 रूपये का लोन 1,33,100 रूपये प्रति वार्षिक किश्तमान राशि की दर पर 3 ख्मान किश्तों में चुकता करने की शर्त पर प्राप्त करता है। चक्रवृद्धि ब्याज मानक गणना नियम के तहत वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार– मूलधन उधार राशि P =3,31,000 रूपये । वार्षिक किश्तमान राशि k=1,33100रूपये । वार्षिक ब्याज दर R ज्ञात करना है।

$(1+\frac{R}{100}) = y$ के प्रति

गणन समिका $Py^n - ky^{n-1} - ky^{n-2} - ky^{n-3}$----------$-ky^2 - ky - k = 0$ में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर–

$3{,}31000y^3 - 133100y^2 - 133{,}100y - 1{,}33100 = 0$

$\Rightarrow 3310y^3 - 1331y^2 - 1331y - 1331 = 0$ y=1.1 प्रतिस्थापित करने पर–

बाँया पक्ष $=3310(1.1)^3 - 1331(1.1)^2 - 1331(1.1) - 1331$

$=3310 * 1.331 - 1331 * 1.21 - 1331(1.1) - 1331$

$= 3310 * 1.331 - 1331 * 3.31 = 3310 * 1.331 - 1.331 * 3310 = 0$ =दाँया पक्ष।

अतः y=1.1 प्रमाणित हुआ। अतः $1+\frac{R}{100} = 1.1 = 1 + 0.1 = 1+\frac{10}{100}$ ∴ $R = 10\%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

किश्तों की कुल संख्या n ज्ञात करना $(1+\frac{r}{100}) = y$ से $y - 1 = \frac{r}{100}$

हल समिका $Py^n = k * \frac{y^n - 1}{y-1} \Rightarrow \frac{y^n - 1}{y^n} = \frac{P}{k}(y-1) \Rightarrow 1 - \frac{1}{y^n} = \frac{P}{k}(y-1)$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{(1+\frac{r}{100})^n} = \frac{P}{k} * \frac{r}{100} \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{r}{100})^n} = 1 - \frac{Pr}{100k} \Rightarrow \frac{1}{(1+\frac{r}{100})^n} = \frac{100k - Pr}{100k}$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n = \frac{100k}{100k - pr} \Rightarrow n\log(1 + r * 0.01) = \log\left[\frac{100k}{100k - Pr}\right]$$

∴ **किश्तों की कुल संख्या n =** $\frac{\log\left[\frac{100k}{100k-Pr}\right]}{\log(1+r*0.01)}$ का हल मान होगा।

उदाहरण■ सरकारी कर्मचारी आवास ऋण योजना अन्तर्गत एक कर्मचारी भारतीय स्टेट बैंक से 12% वार्षिक ब्याजदर एवं 3500 मासिक किश्तों अदायगी पर 2,50,000 रूपये का ऋण स्वीकृती अनुबंध पत्र देता है। जिसके लिए बैंक 500 रूपये का लिपकीय शुल्क भी जोड़ लेता है। यदि ब्याज गणना प्रतिदिनी चक्रवृद्धि हो तो मासिक किश्तों की कुल संख्याा ज्ञात कीजिए।

हल गणना में 1 वर्ष =365 दिन तथा 1 माह=$\frac{365}{12}$ दिन लिया गया है। तथा हल के लिए आवश्यक गणना कम्प्यूटर सें प्राप्त गणना को लिया गया है।

प्रश्नानुसार– मूलधन P =(लिया उधार राशि +लिपकीय व्यय) =2,50,000+500 =2,50,500 रूपये ।

वार्षिक ब्याज दर R= 12% देय है। ∴ किश्त अन्तराल अवधि (मासिक) ब्याज दर $r = \frac{12}{12} = 1\%$

तथा प्रतिदिनी ब्याज दर $r_d = \frac{12}{365}$

$$y = (1+\frac{r}{100}) = (1+\frac{1}{100}) = 1.01 \quad \text{तथा } y_d = (1+\frac{r_d}{100}) = (1+\frac{\frac{12}{365}}{100}) = \frac{36512}{36500} = 1.0003287$$

माना कि प्रतिदिनी किश्तमान राशि k_d है।

$\therefore$ मासिक किश्तमान राशि $k = k_d\ (\frac{(y_d)^{\frac{365}{12}}-1}{y_d-1}) \Rightarrow 3500 = k_d\ (\frac{(1.0003287)^{\frac{365}{12}}-1}{1.0003287-1})$

$$\Rightarrow 3500 = k_d\ (\frac{(1.0003287)^{\frac{365}{12}}-1}{0.0003287}) = k_d \left\{\frac{(1.0003287)^{30.41667}-1}{0.0003287}\right\} = k_d \left\{\frac{1.01004644-1}{0.0003287}\right\}$$

$= k_d \left\{\frac{0.01004644}{0.0003287}\right\}$ से प्रतिदिनी किश्तमान राशि $k_d = \frac{3500*0.0003287}{0.01004644} = 114.51$ रूपये होगा ।

किश्तमानों की कुल संख्या $n_d = \frac{\log\left[\frac{100*k_d}{100*k_d-Pr}\right]}{\log\ (1+r_d*0.01)} = \frac{\log\left[\frac{100*114.51}{100*114.51-250500*\frac{12}{365}}\right]}{\log\ \left(1+\frac{12}{365}*0.01\right)}$

$$= \frac{\log\left[\frac{11451}{*11451-8236}\right]}{\log\ (1+0.0003287)} = \frac{\log\left[\frac{11451}{3215}\right]}{\log\ (1.0003287)}$$

$$= \frac{\log(3.561741)}{\log\ (1.0003287)} = \frac{0.551662}{0.000142} = 3884.94 = 3885 \text{ दिन}$$

$= 10.644$ वर्ष $= 127.728$ माह के लिए 128 माह होगा।

अथवा

चूँकि किश्तों का भुगतान मासिक किश्त अंतराल योजना एवं गणना प्रतिदिनी चक्रवृद्धि है। $\therefore$ प्रतिदिनी चक्रवृद्धि गणना एवं किश्तों का भुगतान मासिक किश्त अंतराल योजना के प्रति चक्रवृद्धि ब्याज दर $r = [\ \{$सरल मासिक ब्याज दर $=$ (वार्षिक ब्याज दर $R) \div 12 = 12 \div 12 = 1\}$ का प्रतिदिनी ब्याज दर $r_d = \frac{12}{365}$ पर –

(1माह $= \frac{365}{12}$) का मिश्रधन $= 1*\left(1+\frac{\frac{12}{365}}{100}\right)^{\frac{365}{12}} = \left(\frac{36512}{36500}\right)^{\frac{365}{12}} = 1.0100485$

मासिक किश्तमानों की कुल संख्या $n = \frac{\log\left[\frac{100*k}{100*k-P*r}\right]}{\log\ (1+r*0.01)} = \frac{\log\left[\frac{100*3500}{100*3500-250500*.1.0100485}\right]}{\log\ (1+1.0100485*0.01)}$

$$= \frac{\log\left[\frac{350000}{350000-253017}\right]}{\log\ (1+0.010100485)} = \frac{\log\left[\frac{350000}{96983}\right]}{\log\ (1.010100485)}$$

$= \frac{\log(3.60888)}{\log\ (1.0101)} = \frac{0.55737}{0.00436} = 127.837$ माह के लिए 128 माह होगा।

----------10----------

अध्याय 11
करारोपण एवं उपभोग

किसी देश या राज्य की सरकार अपनी आर्थिक प्रक्रिया को पूरा करने के लिए राजकोष बनाती है। इस राजकोष को पूरा करने जनता से कर या टैक्स वसूलती है। जिसे राजस्व प्राप्त करना कहते है। ये टैक्स कई प्रकार के होते है। जैसे आय–कर,, मनोरंजन–कर, दान–कर , उत्पादन–कर , विक्रय–कर , मकान–टैक्स, जल–कर , सफाई–कर ....इत्यादि इत्यादि। उत्पादन एवं विक्रय पर लगने वाले करों में कमी या वृद्धि तथा उपभोक्ता के लिए वस्तु की मांग की प्रबलता पूर्व प्राप्त होने वाले राजस्व पर प्रभाव डालते है। जिसका प्रथम सामान्य अध्ययन करना यथेष्ठ होगा। अनुच्छेद क्रम में प्रस्तुत है।

11-1 किसी वस्तु के उत्पादन/विक्रय में कर की वृद्धि/कमी से वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में होने वाले वृद्धि/कमी का प्राप्त पूर्व राजस्व में प्रभाव गणितीय अध्ययन में किसी वस्तु के उत्पादन/विक्रय में कर एवं उपभोग (मांग) मात्रा में होने वाले वृद्धि/कमी को % मान में दर्शाने की परिपाटी है। अतः हमारा अध्ययन किसी वस्तु के उत्पादन/विक्रय में कर में x% वृद्धि/कमी दर्ज होने पर उस वस्तु के उपभोग (मांग) मे y% वृद्धि/कमी दर्ज हो तो कुल प्राप्त राजस्व में a% की वृद्धि/कमी दर्ज होने के प्रति अध्ययन करना है।

(A) यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर कर में x% वृद्धि दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% कमी दर्ज हो तो पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान a में निम्नानुसार प्रतिबंधों का प्रभाव पड़ता है।

1• x=y =k हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से कम होगा और यह कमी का % मान $a = \frac{k^2}{100}\%$ होगा।

2• $y = \frac{100}{100+x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व के बराबर होगा। अर्थात् कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान $a = 0\ \%$

3• $y > \frac{100}{100+x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से कम होगा और यह कमी का % मान $a = \frac{100(y-x)+xy}{100}\%$ होगा।

4• $y < \frac{100}{100+x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से अधिक होगा और यह आधिक्य (वृद्धि) का % मान $a = \frac{100(x-y)-xy}{100}\%$ होगा।

(B) यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर कर में x% कमी दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% वृद्धि दर्ज हो तो पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान a में निम्नानुसार प्रतिबंधों का प्रभाव पड़ता है।

1• x=y =k हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से कम होगा और यह कमी का % मान $a = \frac{k^2}{100}\%$ होगा।

2• $y = \frac{100}{100-x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व के बराबर होगा। अर्थात् कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान $a = 0\ \%$

3• $y > \frac{100}{100-x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से अधिक होगा और यह आधिक्य (वृद्धि) का % मान $a = \frac{100(y-x)-xy}{100}\%$ होगा।

4• $y < \frac{100}{100-x}$ हो तो इस नये करारोपण एवं उपभोग (मांग) मात्रा से कुल प्राप्त राजस्व पूर्व में प्राप्त राजस्व से कम होगा और यह कमी का % मान $a = \frac{100(x-y)+xy}{100}\%$ होगा।

(C) यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय में कर में x% वृद्धि दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% अधिक दर्ज हो तो पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व से अधिक होगा और यह आधिक्य (वृद्धि) का % मान $a = \frac{100(y+x)+xy}{100}\%$ होगा।

(D) यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय में कर में x% कमी दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% कमी दर्ज हो तो पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व से कम होगा और यह कमी का % मान $a = \frac{100(y+x)-xy}{100}\%$ होगा।

उदाहरण 1■ यदि सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में 25% वृद्धि दर्ज होने पर सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में –
(1) 25% की कमी (2) 20% की कमी (3) 30% की कमी (4) 15% की कमी (5) 40% की वृद्धि दर्ज होने के प्रति क्रमशः अलग–अलग पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान ज्ञात कीजिए।

हल 1• प्रश्नानुसार सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में वृद्धि दर्ज का % मान x =25%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =25%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में x=y =k =25% है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में कमी दर्ज होगा। जिसका % मान $a = \frac{k^2}{100} = \frac{25^2}{100} = \frac{625}{100} = 6.25\%$ की कमी दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 2• प्रश्नानुसार सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में वृद्धि दर्ज का % मान x =25%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =20%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100+x} = \frac{100*25}{100+25} = \frac{2500}{125} = 20$ से $y = \frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन अपरिवर्तनीय होगा। अर्थात परिवर्तन का % मान a = 0 % अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 3• प्रश्नानुसार सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में वृद्धि दर्ज का % मान x =25%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =30%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100+x} = \frac{100*25}{100+25} = \frac{2500}{125} = 20$ से $y > \frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में वृद्धि दर्ज होगा। जिसका % मान $a = \frac{100(y-x)+xy}{100} = \frac{100(30-25)+30*25}{100} = \frac{1250}{100} = 12.50\%$ की वृद्धि दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 4• प्रश्नानुसार सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में वृद्धि दर्ज का % मान x =25%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =15%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100+x} = \frac{100*25}{100+25} = \frac{2500}{125} = 20$ से $y < \frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में वृद्धि दर्ज होगा। जिसका % मान $a = \frac{100(x-y)-xy}{100} = \frac{100(25-15)-25*15}{100} = \frac{625}{100} = 6.25\%$ की वृद्धि दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 5• प्रश्नानुसार सोने के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में वृद्धि दर्ज का % मान x =25%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में वृद्धि का % मान y = 40%

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में वृद्धि दर्ज होगा।

जिसका % मान a = $\frac{100(x+y)+xy}{100}$ = $\frac{100(25+40)-25*40}{100}$ = $\frac{7500}{100}$ = 75% की वृद्धि दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ यदि स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में 20% की कमी दर्ज होने पर इसके उपभोग (मांग) मात्रा में – (1) 20% की वृद्धि (2) 25% की वृद्धि(3) 30% की वृद्धि (4) 15% की वृद्धि (5) 40% की कमी दर्ज होने के प्रति क्रमशः अलग–अलग पूर्व में कुल प्राप्त राजस्व में होने परिवर्तन के % मान ज्ञात कीजिए।

हल 1• प्रश्नानुसार– स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में कमी दर्ज का % मान x =20%

सोने के उपभोग (मांग) मात्रा में वृद्धि का % मान y =20%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में x=y =k =20% है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में कमी दर्ज होगा। जिसका % मान a =$\frac{k^2}{100}$ = $\frac{20^2}{100}$ = $\frac{400}{100}$ = 4% की कमी दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 2• प्रश्नानुसार स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में कमी दर्ज का % मान x =20%

स्टील बर्तनों के उपभोग (मांग) मात्रा में वृद्धि का % मान y =25%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100-x}$ = $\frac{100*20}{100-20}$ = $\frac{2000}{80}$ =25 से y=$\frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन अपरिवर्तनीय होगा। अर्थात परिवर्तन का % मान a = 0 % अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 3• प्रश्नानुसार स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में कमी दर्ज का % मान x =20%

स्टील बर्तनों के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =30%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100+x}$ = $\frac{100*20}{100-20}$ = $\frac{2000}{80}$ =25 से y>$\frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में वृद्धि दर्ज होगा।

जिसका % मान a = $\frac{100(y-x)-xy}{100}$ = $\frac{100(30-20)-30*20}{100}$ = $\frac{400}{100}$ = 4% की वृद्धि दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 4• प्रश्नानुसार स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में कमी दर्ज का % मान x =20%

स्टील बर्तनों के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y =15%

हल हेतू प्रतिबंध की जाँच में $\frac{100x}{100+x}$ = $\frac{100*25}{100+25}$ = $\frac{2500}{125}$ =20 से y<$\frac{100x}{100+x}$ है।

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में कमी दर्ज होगा।

जिसका % मान a = $\frac{100(x-y)+xy}{100}$ = $\frac{100(25-15)+20*15}{100}$ = $\frac{800}{100}$ = 8% की कमी दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

हल 5• प्रश्नानुसार स्टील बर्तनों के क्रय–विक्रय पर पूर्व जारी कर में कमी दर्ज का % मान x =20%

स्टील बर्तनों के उपभोग (मांग) मात्रा में कमी का % मान y = 40%

अतः कुल प्राप्त राजस्व में होने वाले परिवर्तन में कमी दर्ज होगा।

जिसका % मान a = $\frac{100(x+y)-xy}{100}$ = $\frac{100(20+40)-20*40}{100}$ = $\frac{5200}{100}$ = 52% की कमी दर्ज होगा। अभीष्ट उत्तर होगा।

11-2 कर परिवर्तन के प्रति परिर्वतनकर्ता (सरकार) का गणितीय व्यवहार यह अलग अध्ययन का विषय है कि कर (टैकस) परिवर्तन का मानव समाज (उपभोकता) पर क्या प्रभाव पड़ेगा। या अमुक वस्तु पर जारी **कर** परिवर्तन करना उचित है अथवा अनुचित। लेकिन प्रत्येक **कर** परिवर्तन पर परिवर्तनकर्ता (सरकार) इस बात का अवश्य रखती है, कि–

1• यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर कर में x% वृद्धि दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% कमी दर्ज हो तो y ≤ $\frac{100x}{100+x}$ की न्यूनतम शर्त बनी रहे।

2• यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर कर में x% कमी दर्ज होने पर वस्तु के उपभोग (मांग) मात्रा में y% वृद्धि दर्ज हो तो

$Y \geq \frac{100x}{100-x}$ की न्यूनतम शर्त बनी रहे।

यदि वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर **कर** में वृद्धि दर्ज होने पर किये जाने पर उपभोग मात्रा में वृद्धि की स्थिति दर्ज हो तो तो उस वस्तु के उत्पादन/विक्रय पर पुनः कर वृद्धि दर्ज किया जा सकता है। जैसे डीजल ,पेट्रोल, सोना चांदी ....आदि का मूल्य बढ़ने पर भी उसके उपभोग में वृद्धि का क्रम सतत् जारी है। अतः इनका मूल्य उत्तरोत्तर बढ़ता ही जा रहा है।

----------11----------

अध्याय 12
बजट संतुलन

12-1 बजट संतुलन सुनिश्चित या अपरिवर्तित आय पर आजिविका चलाने में उपभोग की वस्तुओं का बाजार मूल्य को दृष्टिगत करना होता है। हम अपने उपभोग की वस्तुओं की मात्रा को वस्तुओं के बाजार मूल्य के आधार पर सुनिश्चित करते है। जैसे घर में शक्कर की मासिक खपत 5 किलो जिसके लिए 18 रूपये /किलो की दर से खर्च राशि 90 रूपये सुनिश्चित है। लेकिन यदि शक्कर बाजार भाव बढ़कर 20 रूपये /किलो की दर पर हो जाय और उस पर खर्च राशि 90 रूपये ही सुनिश्चित हो तो हमें शक्कर की मासिक खपत 4.5 किलो ही करना होगा। अर्थात् माह में शक्कर की खपत मात्रा में 0.5 किलो की कटौती करना होगा। और यदि शक्कर बाजार भाव घ्टकर 15रूपये /किलो की दर पर हो जाय और उस पर खर्च राशि 90 रूपये ही सुनिश्चित हो तो हमें शक्कर की मासिक खपत 6 किलो कर सकते। अर्थात् माह में शक्कर की खपत मात्रा में 1 किलो की बढ़ा सकते है। उस प्रकार के अध्ययन को बजट संतुलन कहते है।

12-2 बजट संतुलन प्रमेय गणित अध्ययन में वस्तु के मूल्य वृद्धि (बढ़ती)/कमी(घटती) तथा वस्तु के उपभोग मात्रा में कमी(कटौती)/वृद्धि(बढ़त) को % मान में लिया जाता है। इन % मान के आधार पर बजट संतुलन प्रमेय निम्नानुसार होंगे।

प्रमेय 1 सुनिश्चित या अपरिवर्तित आय पर किसी वस्तु का मूल्य x% बढ़ जाने पर उस वस्तु के उपभोग मात्रा मे $\frac{100x}{100+x}\%$ की कटौती करने पर उस वस्तु पर होने वाला व्यय बजट संतुलित रहता है।

उपपत्ति माना कि सुनिश्चित या अपरिवर्तित आय पर एक उपभोक्ता अपने बनाये बजट संतुलन में किसी आवश्यक वस्तु के प्रति रूपये r ही व्यय करने की पात्रता रखता है। जिसका बाजार भाव a रूपये/ईकाई की दर पर का b इकाई मात्रा ही उपभोग करने की स्थिति बनती है। अतः रूपये r =रूपये a*b

अब यदि उक्त आवश्यक वस्तु के बाजार भाव x% बढ़ जाता है। तब वस्तु का बाजार भाव $\frac{(100+x)*a}{100}$ रूपये/ईकाई हो जावेगा। जिससे व्यय करने की पात्रता रूपये r पर उस वस्तु का $\frac{100*r}{(100+x)*a} = \frac{100*a*b}{(100+x)*a} = \frac{100*b}{100+x}$ इकाई मात्रा उपभोग कर सकेगा।

अर्थात् वस्तु के उपभोग मात्रा में कुल कटौती $= b - \frac{100*b}{100+x} = \frac{b*x}{100+x}$ इकाई

अतः (कटौती का % मान)*(वस्तु की उपभोग की सुनिश्चित मात्रा) = 100* (वस्तु के उपभोग मात्रा में कुल कटौती)

$\Rightarrow$(कटौती का % मान)* b = $100*\frac{b*x}{100+x}$ से कटौती का % मान = $\frac{100x}{100+x}$ प्रमाणित हुआ।

प्रमेय 2 सुनिश्चित या अपरिवर्तित आय पर किसी वस्तु का मूल्य x% की कमी हो जाने पर उस वस्तु के उपभोग मात्रा मे $\frac{100x}{100-x}\%$ की वृद्धि करने पर उस वस्तु पर होने वाला व्यय बजट संतुलित रहता है।

उपपत्ति माना कि सुनिश्चित या अपरिवर्तित आय पर एक उपभोक्ता अपने बनाये बजट संतुलन में किसी आवश्यक वस्तु के प्रति रूपये r ही व्यय करने की पात्रता रखता है। जिसका बाजार भाव a रूपये/ईकाई की दर पर का b इकाई मात्रा ही उपभोग करने की स्थिति बनती है। अतः रूपये r =रूपये a*b

अब यदि उक्त आवश्यक वस्तु के बाजार भाव में x% की कमी हो जाता है। तब वस्तु का बाजार भाव $\frac{(100-x)*a}{100}$ रूपये/ईकाई हो जावेगा। जिससे व्यय करने की पात्रता रूपये r पर उस वस्तु का $\frac{100*r}{(100-x)*a} = \frac{100*a*b}{(100-x)*a} = \frac{100*b}{100-x}$ इकाई मात्रा उपभोग कर सकेगा।

अर्थात् वस्तु के उपभोग मात्रा में कुल वृद्धि $= \frac{100*b}{100-x} - b = \frac{b*x}{100-x}$ इकाई

अतः (वृद्धि का % मान)*(वस्तु की उपभोग की सुनिश्चित मात्रा) = 100* (वस्तु के उपभोग मात्रा में कुल वृद्धि)

$\Rightarrow$ (वृद्धि का % मान)* $b = 100*\frac{b*x}{100+x}$ से वृद्धि का % मान $= \frac{100x}{100-x}$ प्रमाणित हुआ।

विडम्बना– विडम्बना यह है कि ऐसे सरल मौखिक हल श्रेणी के प्रश्न को दीर्घ उत्तरीय श्रेणी का प्रश्न मानकर व्यापक हल प्रस्तुति देना आधुनिक गणित की परम्परा में आज भी प्रचलित है। जो कि उक्त प्रमेय की उपपत्ति (प्रमाणन) ही है।

उदाहरण 1■ शक्कर का बाजार भाव 25% बढ़ गया । बताओ एक उपभोक्ता को शक्कर के उपभोग मात्रा कितने % कटौती करना होगा जिससे शक्कर पर होने वाला व्यय बजट यथा संतुलन में बना रहे।

हल शक्कर का बाजार भाव में वृद्धि का % मान $x = 25$

$\therefore$ शक्कर के उपभोग मात्रा में कटौती का% मान $= \frac{100x}{100+x} \Rightarrow \frac{100*25}{100+25} = \frac{2500}{125} = 20\%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

उदाहरण 2■ दूध का बाजार भाव 20% घट गया । बताओ एक उपभोक्ता को दूध के उपभोग मात्रा कितने % वृद्धि करना होगा जिससे दूध पर होने वाला व्यय बजट यथा संतुलन में बना रहे।

हल दूध का बाजार भाव में का % मान $x = 20$

$\therefore$ दूध के उपभोग मात्रा में वृद्धि का% मान $= \frac{100x}{100-x} \Rightarrow \frac{100*20}{100-20} = \frac{2000}{80} = 25\%$ अभीष्ट उत्तर होगा।

विशेष स्थितियाँ 1• वस्तु के उपभोग मात्रा में कटौती का % मान पूरा–पूरा 100% होने के लिए वस्तु के मूल्य वृद्धि का % मान $x = \infty$ (अनन्त) होगा। अर्थात् वस्तु का उत्पादन ही नहीं होगा।

प्रमाण उपभोग मात्रा में कटौती का % मान $= \frac{100x}{100+x} \Rightarrow 100 = \frac{100x}{100+x} \Rightarrow 10000 + 100x = 100x$

$\Rightarrow 0x = 10000 \Rightarrow x = \frac{1000}{0} = \infty$ (अनन्त) प्रमाणित हुआ।

2• वस्तु के मूल्य कमी का % मान $x = 100\%$ होने पर वस्तु के उपभोग मात्रा में वृद्धि का % मान ∞ (अनन्त) होगा। अर्थात् वस्तु मुफत में मिलने पर वस्तु का उपभोग स्वैच्छिक ∞ (अनन्त) मात्रा में किया जा सकता है।

जैसे हवा और सूर्य का प्रकाश।

उपभोग मात्रा में वृद्धि का % मान $= \frac{100x}{100-x} = \frac{100*100}{100-100} = \frac{1000}{0} = \infty$ (अनन्त) प्रमाणित हुआ।

----------12----------

आपके मार्गदर्शन की अभिलाषा में

• आपका स्नेहकांक्षी •

पंचराम केशरिया

चँादनी चौक नगर अर्जुन्दा जिला बालोद (छ.ग.) भारत

p.in 491225 mn 96300-86128• 96852-67495•