

पूर्वाध्ययन

संकल्पना जीवन को जीने का आधार सर्व प्रथम हमारी इच्छा शक्ति है जो हमारे दिलो-दिमाग में जागृत होती है। जिसे कल्पना करना कहते हैं। कल्पना को साकार रूप देने का प्रयास नवीन ज्ञान-विज्ञान का मार्ग प्रशस्त करता है। कल्पना को साकार करने कुछ प्रतिमान प्रतीकों को चिन्हित करना ही होता है। जिसे संकल्पना कहते हैं। इन्हीं संकल्पना के द्वारा हम सब चराचर जगत के असंख्य जीव-जन्तु, पेड़-पौधे वस्तु-पदार्थ एवं आवाज (ध्वनि) से परिचित होते हैं। जिसकी पहचान उनके विशिष्ट गुण दृश्य जैसे रूप-आकृति, रंग, स्पर्श एवं सवाद की अनुभूति के आधार पर करते हैं। दृश्य (रूप-आकृति, एवं रंग) एवं अदृश्य अनुभूति {आवाज (ध्वनि), स्पर्श, स्वाद} के आधार पर करते हैं। इन दृश्य एवं अदृश्य अनुभूतियों का विभेद करने जो प्रतिमान एवं प्रतीकों की चिन्हित आकृति एवं शब्द लिये गये हैं, उनका आधार संकल्पना ही है। अर्थात् साकार कल्पना को प्रतिपादित एवं परिभाषित करने का प्रथम आधार संकल्पना ही है जो हमारी साकार कल्पना की सत्यता प्रमाणित करने में सहायक है। हमारी कल्पना के तारतम्य में संकल्पना को सीमित नहीं किया जा सकता है। इसका अर्थ यह कदापि नहीं है कि हमारी असीमित कल्पना के बराबर ही संकल्पना होगी। विषय विभाजन के अनुसार संकल्पना का विभाजन किया जा सकता है। गणित विषय की एक शाखा ज्यामिति (रेखागणित) है। जिसके अध्ययन के लिए की गयी संकल्पनाएँ ज्यामिति संकल्पना कहलाती है। ये निम्नानुसार हैं।—

ज्यामिति संकल्पना एवं उनका अध्ययन संकेतन

1• समतल सपाटतल जैसे— कापी, पुस्तक का एक पृष्ठ, टेबल श्यामपट समतल की संकल्पना है।

2• गोलीयतल गेंद या बाल गोलीयतल की संकल्पना है।

3• बिन्दु किसी भी तल { समतल एवं गोलीय } पर नुकीली पेंसिल के नोक से निर्मित चिन्ह बिन्दु की संकल्पना है। जिसका अध्ययन संकेतन • है। इसे ऑग्ल भाषा के सरल बड़े अक्षरों द्वारा नामांकित किया जाता है। **जैसे** — A को बिन्दु A पढ़ेंगे।

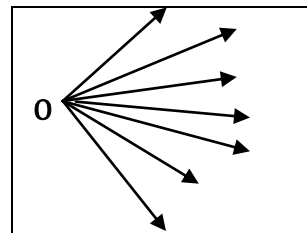
4• रेखा तनी हुई रस्सी या धागा रेखा की संकल्पना है। किसी समतल पर रेखा दोनों ओर अपरिमित रूप से विस्तारित होती है। अर्थात् रेखा का कोई अंत बिन्दु नहीं है। अध्ययन संकेत $\longleftrightarrow$ है। विस्तार में इसे ऑग्ल भाषा के सरल छोटे अक्षर अथवा सरल दो बड़े अक्षरों द्वारा नामांकित किया जाता है। **जैसे** $\longleftrightarrow a$ को रेखा a पढ़ेंगे। अथवा $\longleftrightarrow A B$ को रेखा AB पढ़ेंगे। एक रेखा में अनन्त बिन्दु होते हैं।

5• रेखाखण्ड रेखा का कोई एक खण्ड रेखाखण्ड कहलाता है। इसके दोनों ओर अंत बिन्दु होते हैं। अध्ययन संकेत --- है। विस्तार में इसे ऑग्ल भाषा के सरल दो बड़े अक्षरों द्वारा नामांकित किया जाता है। जो कि दोनों ओर अन्त बिन्दुओं को नामांकित करता है। **जैसे** $\overline{A B}$ का अध्ययन संकेतन $\overline{AB}$ है। सामान्य अध्ययन में रेखा का तात्पर्य रेखाखण्ड से है। अतः रेखाखण्ड $\overline{AB}$ को रेखा AB पढ़ने का नियम मान्य है।

रेखाखण्ड / रेखा का नाप किसी रेखाखण्ड / रेखा की केवल लम्बाई होती है। लम्बाई की नाप मापने माप की दो पद्धतियाँ **1•** (F . P . S) / (फुट, पाउण्ड , सेंकण्ड) **2•** (M . K . S) / (मीटर, किलोग्राम , सेकण्ड) के अन्तर्गत क्रमशः **1•** F . (फुट) और **2•** M . (मीटर) है। फुट के बारहवें भाग नाप को इंच , तीगुने मान नाप को गज कहते हैं। और भी बढ़ते मानों के लिए **220** गज = **1** फर्लांग , **8** फर्लांग = **1** मील, **3** मील = **1** कोस है। मीटर के **10000** वें भाग को माइक्रोमीटर , **1000** वें भाग को मिलीमीटर, **100** वें भाग को सेंटीमीटर , **10** वें भाग को डेसीमीटर , **10** गुने को डेकामीटर, **100** गुने को हेक्टोमीटर, **1000** गुने को किलोमीटर, कहते हैं।

6• किरण उगते सूरज अथवा किसी प्रकाश श्रोत (प्रदीप्त) को टक लगाकर देखो। अनन्त प्रदीप्त रेखाएँ चमकती दिखाई देती है। जिसे किरण कहते हैं। अर्थात् किरण वह रेखा है जिसका आदि (प्रारंभिक स्थिर मूल) बिन्दु तो है लेकिन अंत बिन्दु नहीं है।

किसी किरण के आदि बिन्दु को ऑग्ल भाषा के सरल बड़े अक्षर O से तथा निकलने वाली दिशा की ओर शेष अक्षरों में कोई एक दर्शित किया जाता है। यथा — $O \longrightarrow A$ को पढ़ेंगे किरण OA ।

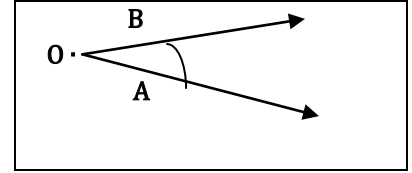


संकेत किरण OA का अध्ययन संकेत $\vec{OA}$ है।

7• कोण दो किरणों के बीच आदि बिन्दु O पर बना झुकाव कोण की संकल्पना है।

किरण OA और OB के बीच आदि बिन्दु O पर बने झुकाव AOB को कोण AOB या केवल आदि बिन्दु O के नाम पर कोण O पढ़ा जाता है।

संकेत कोण का अध्ययन संकेत $\angle$ है। कोण AOB को $\angle AOB$, कोण O को $\angle O$ दर्शित किया जाता है



कोण माप कोण माप की दो इकाई रेडियन और अंश माप है। कोण माप का अध्ययन संकेत $m \angle AOB$ है। कोण माप x अंश का अध्ययन संकेत x° है। 2π रेडियन $= 360^\circ$, 1 रेडियन $= \frac{630}{11} = 57.295$ अंश मान्य है।

कोण के प्रकार संकेत में $m \angle AOB$ होगा –

1• न्यून कोण $0^\circ < m \angle AOB < 90^\circ$ हो। 	2• समकोण $m \angle AOB = 90^\circ$ हो। 	3• अधिक कोण $90^\circ < m \angle AOB < 180^\circ$ हो।
4• ऋजु या सरल या रेखा कोण $m \angle AOB = 180^\circ$ हो। 	5• पुर्नयुक्त कोण $180^\circ < m \angle AOB < 360^\circ$ हो। 	6• सम्पूर्ण कोण $m \angle AOB = 360^\circ$ हो। किरण OA पर किरण OB होने पर

आसन्न कोण युग्म 	पूरक कोण युग्म 	सम्पूरक कोण युग्म
----------------------------	---------------------------	------------------------------

आसन्न कोण युग्म किसी किरण के आदि बिन्दु में अंतरित किरण के दोनों ओर बने कोण युग्म को आसन्न कोण युग्म कहते हैं।

आकृति में किरण $\vec{OB}$ के आदि O पर किरण OB के दोनों ओर बने कोण युग्म $m \angle BOA$ और $m \angle BOC$ क्रमशः $m \angle 1$ और $m \angle 2$ आसन्न कोण युग्म।

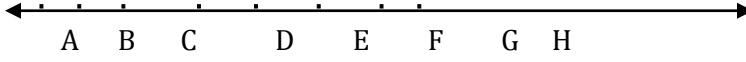
पूरक कोण वे आसन्न कोण युग्म जिनका योगमान एक समकोण (90°) होता है को एक $\longleftrightarrow$ दूसरे के प्रति पूरक कोण कहते हैं।

सम्पूरक कोण वे आसन्न कोण युग्म जिनका योगमान दो समकोण (180°) होता है को एक $\longleftrightarrow$ दूसरे के प्रति सम्पूरक कोण कहते हैं।

किसी आदि बिन्दु से अंतरित रेखा के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति

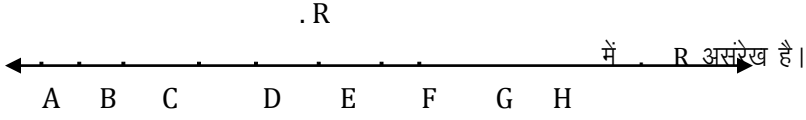
1• संरेख बिन्दु किसी तल पर स्थित तीन या तीन से अधिक वें समस्त नामांकित बिन्दु जो एक ही रेखा में स्थिति दर्शित कराते हैं।

जैसे



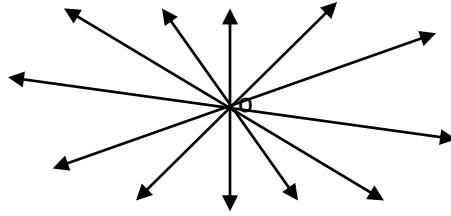
2• असंरेख बिन्दु वे बिन्दु जो संरेख नहीं होते असंरेख बिन्दु कहलाते हैं।

जैसे



बिन्दु के सापेक्ष रेखाएँ

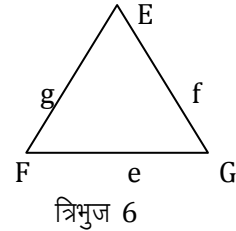
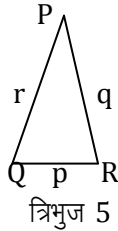
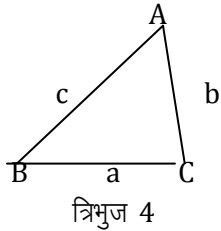
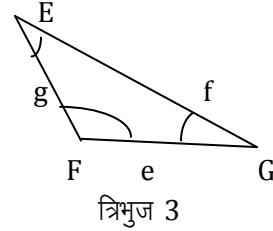
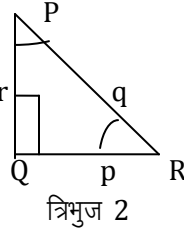
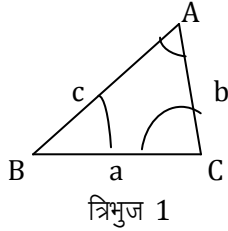
1• एक बिन्दु और रेखाएँ किसी तल पर स्थित एक बिन्दु से होकर जाती हुई अनन्त रेखाएँ खींची जा सकती है।



2• दो बिन्दु और रेखा किसी तल पर स्थित दो बिन्दु से होकर जाती हुई केवल और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

त्रिभुज किसी समतल पर स्थित तीन असंरेख बिन्दुओं को मिलाने से बनी बंद आकृति त्रिभूज की संकल्पना है।

त्रिभुज का अध्ययन सकेत $\triangle$ है।



त्रिभुज के अंग किसी त्रिभुज के मूलांग क्रम में तीन शीर्ष, तीन भुजा और तीन अन्तः कोण होते हैं। उपरोक्त त्रिभुज 1, 2, और 3 में तीनों शीर्षों को बड़े अक्षर में, तीन भुजा के मापों को छोटे अक्षर में तथा प्रत्येक शीर्ष पर बने अन्तःकोण को $\angle$ से चिह्नांकित किया गया है। अन्तः कोणों के अध्ययन के संदर्भ में उदाहरणार्थ $m \angle ABC$ का अर्थ शीर्ष B पर दर्शित कोण माप B से है। तथा भुजाओं के अध्ययन के संदर्भ में उदाहरणार्थ शीर्ष B के सापेक्ष $\overline{BC}$ और $\overline{BA}$ को आसन्न या कोण भुजा तथा $\overline{CA}$ को शीर्षाभिमुख या सम्मुख भुजा कहते हैं।

त्रिभुज के प्रकार• (1) अन्तः कोणों के माप के आधार पर तीन प्रकार होते हैं।

1• न्यूनकोण त्रिभुज त्रिभुज के तीनों अन्तःकोण के माप न्यून कोण होते हैं। जैसे त्रिभुज 1

2• समकोण त्रिभुज त्रिभुज का एक अन्तःकोण के माप समकोण होता है। जैसे त्रिभुज 2

समकोण त्रिभुज PQR के संदर्भ में शीर्ष Q दर्शित $m \angle PQR$ समकोण है। जिसके सापेक्ष आसन्न भूजा या कोण भुजा $\overline{QR}$ और $\overline{QP}$ को क्रमशः आधार भुजा और लम्ब भुजा तथा शीर्षाभिमुख या सम्मुख भुजा $\overline{RP}$ को कर्ण भुजा कहते हैं।

इस प्रकार समकोण त्रिभुज के आधार , लम्ब कर्ण के माप संख्या को समकोण त्रिभुज का त्रिभुजांक या त्रिक कहते हैं। त्रिभुजांक या त्रिक (आधार , लम्ब कर्ण) का अध्ययन संकेत (x, y, z) इस त्रिक में सम्बंध समिका $x^2 + y^2 = z^2$ प्रमाणित है।

3• अधिककोण त्रिभुज त्रिभुज के एक अन्तःकोण के माप अधिककोण होता है। **जैसे** त्रिभुज 3

(2) भुजाओं के माप के आधार पर— तीन प्रकार होते हैं।

1• विषम बाहु त्रिभुज त्रिभुज के तीनों भुजाओं के माप अलग-अलग होते हैं। **जैसे** त्रिभुज 4

2• सम द्विबाहु त्रिभुज त्रिभुज के दो भुजाओं के माप बराबर होते हैं। **जैसे** त्रिभुज 5

3• समबाहु त्रिभुज त्रिभुज के तीनों भुजाओं के माप बराबर होते हैं। **जैसे** त्रिभुज 6

ध्यानाकर्षण 1• त्रिभुज के तीनों अन्तःकोण के मापों का योगफल 180° होता है।

2• त्रिभुज के दो भुजाओं के मापों का योगमान तीसरी भुजा के माप से बड़ा होता है।

-----पू अ -----

अध्याय -1

त्रिभुजांक

1.1 परिचय

वैदिक कालीन ऋषियों मनीषियों को सम्पूर्ण आध्यात्मिक विषय, ज्ञान-विज्ञान एवं कलाओं की जानकारी थी ही, उन्हें त्रिकोणमिति का अच्छा ज्ञान भी था। इसे आधुनिक विद्वान सहर्ष स्वीकारते हैं। मजेदार आध्यात्मिक विषय, ज्ञान-विज्ञान के अन्तर्गत ऐसे तीन अंक या संख्या x, y और z का परिचय कराने जा रहे हैं जो समिका $x^2 + y^2 = z^2$ को संतुष्ट करता है। इन तीन अंक या संख्या समूह को त्रिक कहते हैं। समकोण त्रिभुज की भुजाएँ (आधार, लम्ब, कर्ण) का अध्ययन संकेत (x, y, z) के प्रति समिका $x^2 + y^2 = z^2$ प्रमाणित है, समकोण त्रिभुज के संदर्भ में ऐसा त्रिक त्रिभुजांक कहलाता है। आधुनिक गणित शास्त्र में समकोण त्रिभुज का पैथागोरस प्रमेय—

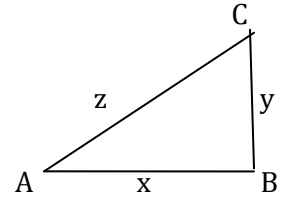
(समकोण त्रिभुज के आधार एवं लम्ब भुजा के अलग-अलग माप के वर्ग मान का योगफल कर्ण भुजा माप के वर्ग मान के बराबर होता है।)

आप को यह जानकर आश्चर्य होगा कि वैदिक कालीन सभ्यता के पूर्व की सभ्यता में उक्त पैथागोरस प्रमेय का विस्तार हो चुका था। जो कि अधोदर्शित सुलभ कात्यायन सूत्र से स्पष्टतः प्रमाणित होता है। यह साधारण समिका त्रिकोणमिति की सम्पूर्ण अध्ययन के लिए महत्वपूर्ण उपलब्धि है।

1.2 सुलभ कात्यायन सूत्र

1. सम चतुस्त्रस्य अक्षण्या रज्जू द्विकरणी।
2. द्विप्रमाणा चतुः करणी। त्रि प्रमाणा नव करणी। चतुः प्रमाणा षोडस् करणी।
3. अध प्रमाणेन पाद प्रमाणम् विधीयते।
4. तृतीयेन नवमोम्स।

उपरोक्त सूत्रों का अर्थ कात्यायन ऋषि के अनुसार निम्नानुसार है।



आकृति 1.1

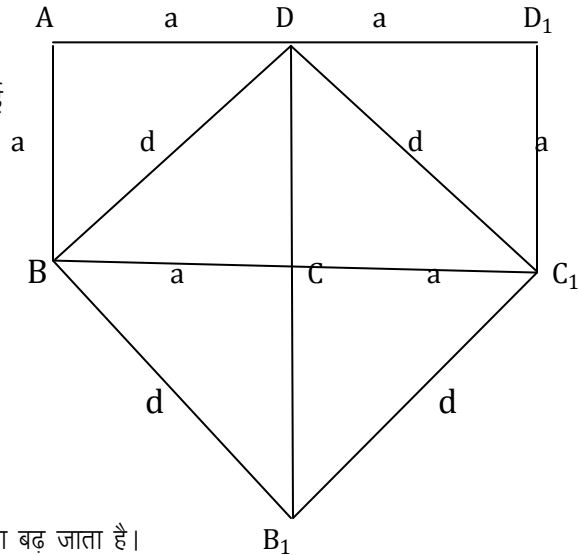
1. वर्गाकार क्षेत्र का विकर्ण के माप का वर्ग मान पहले वर्ग का दुगुना क्षेत्र बनाकर प्राप्त किया जा सकता है। आकृति 1.2 का अवलोकन कीजिए।

a इकाई भुजा माप का ABCD एक वर्ग है। जिसका विकर्ण BD है।

वर्ग ABCD के बराबर DCC₁D₁ दूसरा वर्ग है। विकर्ण BD = d इकाई

माप का वर्गमान ज्ञात करने वर्ग DBB₁C₁ की रचना कीजिए। तब—

$$\begin{aligned}
 &\text{विकर्ण BD माप का वर्ग मान } d^2 = \text{वर्ग DBB}_1\text{C}_1 \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &= \text{आयत AB C}_1\text{D}_1 \text{ का क्षेत्रफल} \\
 &= (\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल} + \text{वर्ग DCC}_1\text{D}_1 \text{ का क्षेत्रफल}) \\
 &= a^2 + a^2 \\
 &= 2a^2 \\
 &= 2(\text{वर्ग ABCD का क्षेत्रफल})
 \end{aligned}$$



आकृति 1.2

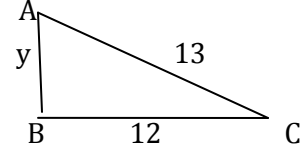
2. यदि वर्ग की भुजा लम्बाई दुगुना कर दिया जावे तो क्षेत्रफल चार गुना बढ़ जाता है।
यदि वर्ग की भुजा लम्बाई तिगुना कर दिया जावे तो क्षेत्रफल नव गुना बढ़ जाता है।
यदि वर्ग की भुजा लम्बाई चारगुना कर दिया जावे तो क्षेत्रफल सोलह गुना बढ़ जाता है।
3. यदि वर्ग की भुजा लम्बाई आधी कर दी जावे तो क्षेत्रफल चौथाई भाग रह जाता है।
4. यदि वर्ग की भुजा लम्बाई एक तिहाई कर दी जावे तो क्षेत्रफल नवाँ भाग ही रह जाता है।

ठीक ऐसा ही एक पुराना (1900_1600 ईसा पूर्व) बायलोलियन सारिणी प्लीमशन (खम्भा) संग्रह कोलम्बिया विश्वविद्यालय में रखा है। जिसमें पंद्रह त्रिभुजांकों की एक सारिणी एक अंश के अन्तर मान से जारी किया गया था।

यदि तीन संख्या का एक संग्रह 3,4,5 का चित्रण एक त्रिभुजांक के रूप में किया जाय कि $3^2 + 4^2 = 5^2$ हो तब ऐसे में कर्ण (ज्या) और अन्य दो भुजाओं (लम्ब और आधार)में से दो भुजा का माप ज्ञात हो तो योगान्तर नियम जिसके लिये वैदिक गणित में सूत्र **संकलन व्यकलनाभ्यां** (जोड़ना घटाना) कहा गया है का उपयोग कर तीसरी भुजा की माप (जो ज्ञात नहीं है) आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण ■ एक समकोण त्रिभुज का कर्ण $z=13$ इकाई और आधार $x=12$ इकाई हो तो लम्ब y का मान ज्ञात कीजिए।

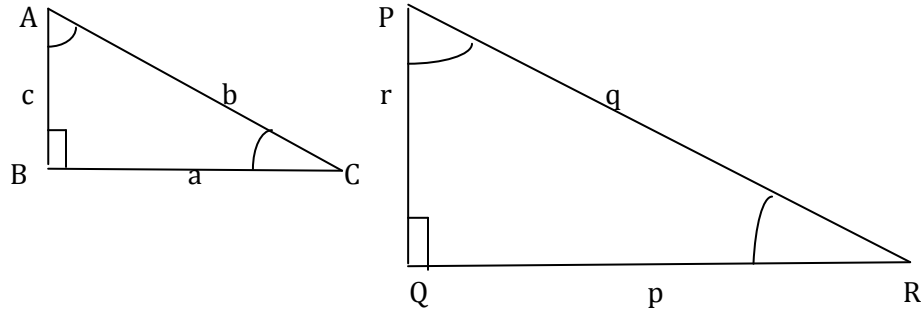
हल $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$
 $= (13+12)(13-12) = 25 \times 1$
 $= 25 = 5 \times 5 \therefore y = 5$ इकाई अभीष्ट उत्तर होगा।



1.3 मानक या दक्ष त्रिभुजांक एवं गुणित त्रिभुजांक वे त्रिभुजांक जिनके अवयवों का 1 के अतिरिक्त और कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होता मानक या दक्ष त्रिभुजांक कहलाता है। जैसे (3 4 5) (5 12 13)

चूँकि समरूप त्रिभुजों के संगत कोण माप बराबर होते हैं। तथा संगत भुजाओं का अनुपात या परिमेय निरूपण हल मान बराबर होते हैं।

उदाहरण ■



यदि समकोण त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR समरूप है तो $m \angle A = m \angle P$, $m \angle B = m \angle Q =$ समकोण

एवं $m \angle C = m \angle R$ होंगे तथा $a:p = b:q = c:r$ या $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ होंगे।

अतः $m \angle C$ का त्रिभुजांक (a b c) तथा $m \angle R$ का त्रिभुजांक (p q r)

चूँकि $m \angle C = m \angle R$ है। इसलिए $m \angle C = m \angle R$ का त्रिभुजांक –

(a b c) $\leftarrow$ गुणित त्रिभुजांक $\rightarrow$ (p q r) यदि त्रिभुजांक (a b c) मानक या दक्ष हो तो (p q r) त्रिभुजांक (a b c) का गुणित त्रिभुजांक कहलाता है। इसी प्रकार यदि त्रिभुजांक (p q r) मानक या दक्ष त्रिभुजांक हो तो (a b c) त्रिभुजांक (p q r) का गुणित त्रिभुजांक कहलाता है।

सारांश में $m \angle \theta$ का मानक या दक्ष त्रिभुजांक (x y z) का गुणित त्रिभुजांक ($k \cdot x$ $k \cdot y$ $k \cdot z$) होगा। जहाँ विस्तारित अध्ययन में $k=0$ और 1 के अतिरिक्त परिमेय संख्या है। जबकि सामान्य अध्ययन में $k=1$ के अतिरिक्त सभी प्राकृत संख्या है। इस प्रकार k के अनंत मानों के प्रति $m \angle \theta$ का मानक या दक्ष त्रिभुजांक (x y z) के अनंत गुणित त्रिभुजांक प्राप्त होंगे।

जैसे मानक या दक्ष त्रिभुजांक (3 4 5) के गुणित त्रिभुजांक $k=2,3,4,\dots,N$ से क्रमशः $(2 \cdot 3 \ 2 \cdot 4 \ 2 \cdot 5) = (6 \ 8 \ 10)$, $(3 \cdot 3 \ 3 \cdot 4 \ 3 \cdot 5) = (9 \ 12 \ 15)$, $(4 \cdot 3 \ 4 \cdot 4 \ 4 \cdot 5) = (12 \ 16 \ 20)$, $\dots, (N \cdot 3 \ N \cdot 4 \ N \cdot 5) = (3N \ 4N \ 5N)$ होगा।

मानक या दक्ष त्रिभुजांक (12 5 13) के गुणित त्रिभुजांक $k=2,3,4,\dots,N$ से क्रमशः $(2 \cdot 12 \ 2 \cdot 5 \ 2 \cdot 13) = (24 \ 10 \ 26)$, $(3 \cdot 12 \ 3 \cdot 5 \ 3 \cdot 13) = (36 \ 15 \ 39)$, $(4 \cdot 12 \ 4 \cdot 5 \ 4 \cdot 13) = (48 \ 20 \ 52)$, $\dots, (N \cdot 12 \ N \cdot 5 \ N \cdot 13) = (12N \ 5N \ 13N)$ होगा।

ध्यानाकर्षण त्रिभुजांक विषयक अध्ययनों में $m \angle \theta$ के प्रति मानक या दक्ष त्रिभुजांक या उसके किसी गुणित त्रिभुजांक को लिया जा सकता है। सरलता की दृष्टि से गुणित त्रिभुजांक के प्रति मानक या दक्ष त्रिभुजांक प्राप्त करना यथेष्ट होगा। अध्ययन का मूल उद्देश्य मानक या दक्ष त्रिभुजांक के प्रति ही है। अतः त्रिभुजांक का तात्पर्य केवल मानक या दक्ष त्रिभुजांक ही लिया जाना है।

1.4 व्यापक समिकाएँ

A 1 यदि $x^2 + y^2 = 1$ हो तो $x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x*x = (1+y)(1-y) \Rightarrow \frac{x}{1-y} = \frac{1+y}{x}$ ----- (1)

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने (वैदिक गणित सूत्र- एकाधिकेण पूर्वेण = पहले से एक अधिक या आगर करने) पर-

$$\frac{x}{1-y} + 1 = \frac{1+y}{x} + 1 \Rightarrow \frac{x-y+1}{1-y} = \frac{x+y+1}{x} \Rightarrow \frac{x-y+1}{x+y+1} = \frac{1-y}{x} \text{ ----- (2)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 घटाने (वैदिक गणित सूत्र- एकन्यूनेन पूर्वेण = पहले से एक कम या उना करने) पर-

$$\frac{x}{1-y} - 1 = \frac{1+y}{x} - 1 \Rightarrow \frac{x+y-1}{1-y} = \frac{y-x+1}{x} \Rightarrow \frac{x+y-1}{y-x+1} = \frac{1-y}{x} \text{ ----- (3)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर-

$$1 - \frac{x}{1-y} = 1 - \frac{1+y}{x} \Rightarrow \frac{1-x-y}{1-y} = \frac{x-y-1}{x} \Rightarrow \frac{1-x-y}{x-y-1} = \frac{1-y}{x} \text{ ----- (4)}$$

समिका (2), (3) और (4) से $\frac{x-y+1}{x+y+1} = \frac{x+y-1}{y-x+1} = \frac{1-x-y}{x-y-1} = \frac{1-y}{x}$ ----- व्यापक समिका [1]

A 2 $x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x*x = (1+y)(1-y) \Rightarrow \frac{x}{1+y} = \frac{1-y}{x}$ ----- (1)

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने (वैदिक गणित सूत्र- एकाधिकेण पूर्वेण = पहले से एक अधिक या आगर करने) पर -

$$\frac{x}{1+y} + 1 = \frac{1-y}{x} + 1 \Rightarrow \frac{x+y+1}{1+y} = \frac{x-y+1}{x} \Rightarrow \frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{1+y}{x} \text{ ----- (2)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 घटाने (वैदिक गणित सूत्र- एकन्यूनेन पूर्वेण = पहले से एक कम या उना करने) पर -

$$\frac{x}{1+y} - 1 = \frac{1-y}{x} - 1 \Rightarrow \frac{x-y-1}{1+y} = \frac{1-x-y}{x} \Rightarrow \frac{x-y-1}{1-x-y} = \frac{1+y}{x} \text{ ----- (3)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर-

$$1 - \frac{x}{1+y} = 1 - \frac{1-y}{x} \Rightarrow \frac{1-x+y}{1+y} = \frac{x+y-1}{x} \Rightarrow \frac{1-x+y}{x+y-1} = \frac{1+y}{x} \text{ ----- (4)}$$

समिका (2), (3) और (4) से $\frac{x+y+1}{x-y+1} = \frac{x-y-1}{1-x-y} = \frac{1-x+y}{x+y-1} = \frac{1+y}{x}$ ----- व्यापक समिका [2]

B 1 यदि $x^2 + y^2 = 1$ हो तो $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y*y = (1+x)(1-x) \Rightarrow \frac{y}{1-x} = \frac{1+x}{y}$ ----- (1)

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने (वैदिक गणित सूत्र- एकाधिकेण पूर्वेण = पहले से एक अधिक या आगर करने) पर-

$$\frac{y}{1-x} + 1 = \frac{1+x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{y-x+1}{1-x} = \frac{x+y+1}{y} \Rightarrow \frac{y-x+1}{x+y+1} = \frac{1-x}{y} \text{ ----- (2)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 घटाने (वैदिक गणित सूत्र- एकन्यूनेन पूर्वेण = पहले से एक कम या उना करने) पर-

$$\frac{y}{1-x} - 1 = \frac{1+x}{y} - 1 \Rightarrow \frac{x+y-1}{1-x} = \frac{x-y+1}{y} \Rightarrow \frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{1-x}{y} \text{ ----- (3)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर-

$$1 - \frac{y}{1-x} = 1 - \frac{1+x}{y} \Rightarrow \frac{1-x-y}{1-x} = \frac{y-x-1}{y} \Rightarrow \frac{1-x-y}{y-x-1} = \frac{1-x}{y} \text{ ----- (4)}$$

समिका (2), (3) और (4) से $\frac{y-x+1}{x+y+1} = \frac{x+y-1}{x-y+1} = \frac{1-x-y}{y-x-1} = \frac{1-x}{y}$ ----- व्यापक समिका [3]

B 2 $y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y*y = (1+x)(1-x) \Rightarrow \frac{y}{1+x} = \frac{1-x}{y}$ ----- (1)

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने (वैदिक गणित सूत्र- एकाधिकेण पूर्वेण = पहले से एक अधिक या आगर करने) पर-

$$\frac{y}{1+x} + 1 = \frac{1-x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{y+x+1}{1+x} = \frac{y-x+1}{y} \Rightarrow \frac{y+x+1}{y-x+1} = \frac{1+x}{y} \text{ ----- (2)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष में 1 घटाने (वैदिक गणित सूत्र- एकन्यूनेन पूर्वेण = पहले से एक कम या उना करने) पर-

$$\frac{y}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{y} - 1 \Rightarrow \frac{y-x-1}{1+x} = \frac{1-x-y}{y} \Rightarrow \frac{y-x-1}{1-x-y} = \frac{1+x}{y} \text{ ----- (2)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर-

$$1 - \frac{y}{1+x} = 1 - \frac{1-x}{y} \Rightarrow \frac{x-y+1}{1+x} = \frac{x+y-1}{y} \Rightarrow \frac{x-y+1}{x+y-1} = \frac{1+x}{y} \text{ ----- (4)}$$

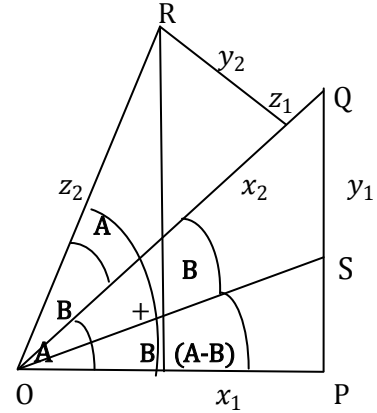
समिका (2), (3) और (4) से $\frac{y+x+1}{y-x+1} = \frac{y-x-1}{1-x-y} = \frac{x+y-1}{x+y-1} = \frac{1+x}{y}$ व्यापक समिका [4]

उपरोक्त सरल एवं व्यापक समिका का अनुप्रयोग त्रिकोण मिति समिकाओं को प्रमाणित / हल करने में अवलोकित कीजिए।

1.4 दो त्रिभुजांको का योग एवं अन्तर ये दोनों क्रियाएँ वैदिक गणित सूत्र ऊर्ध्वतिर्यकभ्यां का अनुप्रयोग कर आसानी से किया जा सकता है। ऊर्ध्वतिर्यकभ्यां का अर्थ ऊर्ध्व (खड़ा VERTICOLLY) एवं तिर्यक (तिरछा CROSSWISE) द्वारा है। विशिष्ट कार्यविधि अवलोकित करें।

यदि $m \angle A$ का त्रिभुजांक $\{x_1, y_1, z_1\}$ तथा $m \angle B$ का त्रिभुजांक $\{x_2, y_2, z_1\}$ हो तो $m \angle(A+B)$ एवं $m \angle(A-B)$ का अलग-अलग त्रिभुजांक प्राप्त करने की कार्य विधि का संकेतन आकृति 1.3 के अनुसार $m \angle A = m \angle POQ$
 $m \angle B = m \angle QOR = m \angle SOQ$ मानें जाने पर
 $m \angle(A+B) = m \angle POR$ तथा $m \angle(A-B) = m \angle POS$ होगा।

तब $m \angle(A+B)$ और $m \angle(A-B)$ के त्रिभुजांक गणना संकेतन—



आकृति 1.3

ऊर्ध्व			तिर्यक			ऊर्ध्व		
x_1	y_1	z_1	x_1	y_1	z_1	x_1	y_1	z_1
■	■	■	■	■	■	■	■	■
↑	↑		↗	↘		↑	↑	
■	■	■	■	■	■	■	■	■
x_2	y_2	z_2	x_2	y_2	z_2	x_2	y_2	z_2
■	■	■	■	■	■	■	■	■
■	•	•	•	■	•	•	•	■
आधार माप			लम्ब माप			कर्ण माप		
से								
संकेतन व्याख्या			त्रिभुजांक					
कोण माप			आधार			लम्ब		
$m \angle A$ का त्रिभुजांक			x_1			y_1		
$m \angle B$ का त्रिभुजांक			x_2			y_2		
$m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक			$x_1 * x_2 - y_1 * y_2$			$x_2 * y_1 + x_1 * y_2$		
$m \angle(A-B)$ का त्रिभुजांक			$x_1 * x_2 + y_1 * y_2$			$x_2 * y_1 - x_1 * y_2$		
						$z_1 * z_2$		

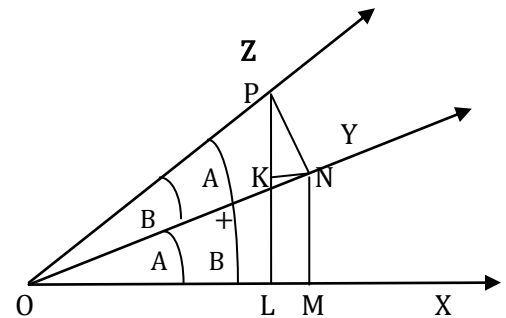
उपरोक्त संकेतन के अनुसार दो त्रिभुजांको का योग एवं अन्तर प्रमेय तथा प्रमेय की उपपत्ति

प्रमेय [1] यदि $m \angle A$ का त्रिभुजांक $\{x_1, y_1, z_1\}$ तथा $m \angle B$ का त्रिभुजांक $\{x_2, y_2, z_1\}$ हो तो $m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक $[x_1 * x_2 - y_1 * y_2], [y_1 * x_2 + y_2 * x_1], [z_1 * z_2]$ होगा।

प्रमेय के उपपत्ति के प्रति ज्यामिति आकृति अनुसार विश्लेषण

आकृति 1.4 के अनुसार माना कि कोई परिक्रामी किरण आदि स्थित OX से चलकर OY तक $m \angle A = m \angle XOY$ अन्तरित करता। और आगे चलकर स्थिति OZ में दूसरा कोण $m \angle B = m \angle YOZ$ अन्तरित करता। OX, OY और OZ परिक्रामी किरण की क्रमशः आदि, मध्य और अंतिम स्थितियाँ हैं। तब $m \angle(A+B) = m \angle XOZ$ होगा।

रचना $\rightarrow$ OZ के किसी बिन्दु P से दो लम्ब PL और PN क्रमशः OZ और OY पर अन्तरित कीजिए। PN के पाद बिन्दु N से दो लम्ब NK और NM क्रमशः OX और लम्ब PL पर अन्तरित कीजिए। तब उक्त रचना से—



आकृति 1.4

समकोण त्रिभुज OMN के न्यून कोण $m\angle MON = m\angle XOY = m\angle A$ का त्रिभुजांक

OM	MN	ON
x_1	y_1	z_1

समकोण त्रिभुज ONP के न्यून कोण $m\angle NOP = m\angle YOZ = m\angle B$ का त्रिभुजांक

ON	NP	OP
x_2	y_2	z_2

(1)
(2)

सिद्ध करना है समकोण त्रिभुज OLP के न्यून कोण $m\angle MOP = m\angle XOZ = m\angle(A+B)$ का त्रिभुजांक

ON	NP	OP
$[x_1 * x_2 - y_1 * y_2]$	$[y_1 * x_2 + y_2 * x_1]$	$[z_1 * z_2]$

होगा।

उपपत्ति• प्रक्रम 1 समकोण त्रिभुज PNO में शीर्ष N पर $m\angle PNO$ समकोण है, जिसे $\overline{NK}$ दो कोण $m\angle PNK$ और $m\angle KNO$ में बाँटती है। $\therefore m\angle PNK + m\angle KNO = 90^\circ$ ----- 1

पुनः रचना से स्पष्ट है क्षेत्र MNKL आयत होगा। जिनके शीर्ष M, N, K, L पर अन्तरित कोण माप समकोण होने के नियम से शीर्ष N पर $m\angle MNK$ समकोण होगा, जिसे $\overline{NO}$ दो कोण $m\angle MNO$ और $m\angle KNO$ में बाँटती है।

$\therefore m\angle MNO + m\angle KNO = 90^\circ$ ----- 2

समिका 1 और 2 से $m\angle MNO = m\angle PNK$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज OMN और समकोण त्रिभुज NKP समरूप होंगे।

$\therefore$ समकोण त्रिभुज NKP के न्यून कोण $m\angle KPN = m\angle A$ का त्रिभुजांक =

PK	KN	PN
$k * x_1$	$k * y_1$	$k * z_1$

(3)

प्रक्रम 2 रचना से प्राप्त त्रिभुजांक (1) और (2) तथा प्रक्रम 1 से प्राप्त त्रिभुजांक (3) के अवलोकन से स्पष्ट है—

$ON = z_1 = x_2$ $PN = y_2 = k * z_1$ तथा आयत KLMN से $LK = MN$ और $KN = LM$

$\therefore$ त्रिभुज OLP से $m\angle POL = m\angle(A+B)$ का त्रिभुजांक

=	OL	LP	OP
=	$[OM - LM]$	$[LK + KP]$	$[OP]$
=	$[OM - KN]$	$[KP + LK]$	$[OP]$
=	$[\frac{OM - KN}{OP}]$	$[\frac{KP + MN}{OP}]$	$[\frac{OP}{OP}]$
=	$[\frac{OM}{OP} - \frac{KN}{OP}]$	$[\frac{KP}{OP} + \frac{MN}{OP}]$	1
=	$[\frac{OM}{OP} * \frac{ON}{ON} - \frac{KN}{OP} * \frac{NP}{NP}]$	$[\frac{KP}{OP} * \frac{NP}{NP} + \frac{MN}{OP} * \frac{ON}{ON}]$	1
=	$[\frac{OM}{ON} * \frac{ON}{OP} - \frac{KN}{NP} * \frac{NP}{OP}]$	$[\frac{KP}{NP} * \frac{NP}{OP} + \frac{MN}{ON} * \frac{ON}{OP}]$	1
=	$[\frac{x_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} - \frac{k * y_1}{k * z_1} * \frac{y_2}{z_2}]$	$[\frac{y_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} + \frac{k * x_1}{k * z_1} * \frac{y_2}{z_2}]$	1
=	$[x_1 * x_2 - y_1 * y_2]$	$[y_1 * x_2 + x_1 * y_2]$	$[z_1 * z_2]$
=	$[x_1 x_2 - y_1 y_2]$	$[x_2 y_1 + x_1 y_2]$	$[z_1 z_2]$

सिद्ध।

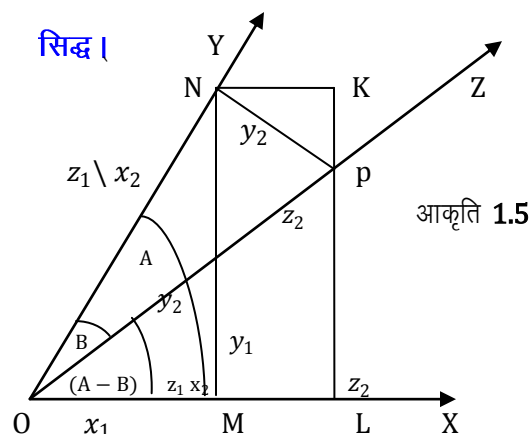
प्रमेय [2] यदि $m\angle A$ का त्रिभुजांक $\{x_1, y_1, z_1\}$ तथा $m\angle B$ का

त्रिभुजांक $\{x_2, y_2, z_2\}$ हो तो $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक

$[x_1 * x_2 + y_1 * y_2], [x_2 y_1 - x_1 y_2], [z_1 * z_2]$ होगा।

प्रमेय के उपपत्ति के प्रति ज्यामिति आकृति अनुसार विश्लेषण

आकृति 1.5 के अनुसार माना कि कोई परिक्रामी किरण आदि स्थित $\overrightarrow{OX}$ से चलकर OY तक $m\angle A = m\angle XOY$ अन्तरित करता। फिर दक्षिणावर्त (घड़ी की दिशा) वापस आकर स्थिति OZ में दूसरा कोण $m\angle B = m\angle YOZ$ अन्तरित करता है। $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$ और $\overrightarrow{OZ}$ परिक्रामी किरण की क्रमशः आदि, मध्य और अंतिम स्थितियाँ हैं। तब $m\angle(A-B) = m\angle XOZ$ होगा।



रचना OZ के किसी बिन्दु P से दो लम्ब PL और PN क्रमशः OZ और OY पर अन्तरित कीजिए। PN के पाद बिन्दु N से दो लम्ब NK और NM क्रमशः OX और लम्ब PL पर अन्तरित कीजिए। तब उक्त रचना से-

समकोण त्रिभुज OMN के न्यून कोण $m\angle MON = m\angle XOY = m\angle A$ का त्रिभुजांक $= \frac{OM}{ON} \cdot \frac{MN}{ON}$
 $= \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{z_1}{z_1} \text{-----}(1)$

समकोण त्रिभुज ONP के न्यून कोण $m\angle NOP = m\angle YOZ = m\angle B$ का त्रिभुजांक $= \frac{ON}{NP} \cdot \frac{OP}{OP}$
 $= \frac{x_2}{y_2} \cdot \frac{z_2}{z_2} \text{-----}(2)$

सिद्ध करना है समकोण त्रिभुज OLP के न्यून कोण $m\angle MOP = m\angle XOZ = m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक

$\frac{OL}{LP} \cdot \frac{OP}{OP}$
 $= [x_1 * x_2 + y_1 * y_2] [x_2 y_1 - x_1 y_2] [z_1 * z_2]$ होगा।

उपपत्ति• प्रक्रम 1 रचना से स्पष्ट है क्षेत्र MNKL आयत होगा। $\therefore MN \parallel LK$ होगा। जिनसे तिर्यकछेदी रेखा NP क्रमशः बिन्दु N और P पर मिलता (प्रतिच्छेद करता) है। $\therefore m\angle KPN = m\angle PNM$ एकान्तर कोण का नियम से।

पुनः $m\angle PNM = 90^\circ - m\angle MNO = m\angle NMO = m\angle YOX = m\angle A$

$\therefore m\angle NMO = m\angle KPN = m\angle A$

अथवा $m\angle KNP + m\angle PNM = m\angle KNM = 90^\circ$ ----- 1. आयत MNKN का समकोण।

तथा $m\angle MNO + m\angle PNM = m\angle PNO = 90^\circ$ ----- 2 समकोण त्रिभुज ONP का समकोण।

1 और 2 से $m\angle KNP = m\angle MNO = m\angle(90 - A)^\circ$

$\therefore$ समकोण त्रिभुज OMN और समकोण त्रिभुज NKP समरूप होंगे।

$\therefore$ समकोण त्रिभुज NKP के न्यून कोण $m\angle KPN = m\angle A$ का त्रिभुजांक $= \frac{PK}{KN} \cdot \frac{PN}{PN}$
 $= \frac{k * x_1}{k * y_1} \cdot \frac{k * z_1}{k * z_1} \text{-----}(3)$

प्रक्रम 2 रचना प्राप्त से प्राप्त त्रिभुजांक (1) और (2) तथा प्रक्रम 1 से प्राप्त त्रिभुजांक (3) के अवलोकन से स्पष्ट है-

$ON = z_1 = x_2$ $PN = y_2 = k * z_1$ तथा आयत KLMN से $LK = MN$ और $KN = LM$

$\therefore$ त्रिभुज OLP से $m\angle MOP = m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक

$= \frac{OL}{LP} \cdot \frac{OP}{OP}$
 $= \frac{[OM+LM]}{[LK-KP]} \cdot \frac{[OP]}{[OP]}$
 $= \frac{[OM+KN]}{[MN-KP]} \cdot \frac{[OP]}{[OP]}$
 $= \frac{[\frac{OM-KN}{OP}]}{[\frac{MN-KP}{OP}]} \cdot \frac{[OP]}{[OP]}$
 $= \frac{[\frac{OM}{OP} - \frac{KN}{OP}]}{[\frac{MN}{OP} - \frac{KP}{OP}]} \cdot 1$
 $= \frac{[\frac{OM}{OP} * \frac{ON}{ON} - \frac{KN}{OP} * \frac{NP}{NP}]}{[\frac{MN}{OP} * \frac{ON}{ON} - \frac{KP}{OP} * \frac{NP}{NP}]} \cdot 1$
 $= \frac{[\frac{OM}{ON} * \frac{ON}{OP} - \frac{KN}{NP} * \frac{NP}{OP}]}{[\frac{MN}{ON} * \frac{ON}{OP} - \frac{KP}{NP} * \frac{NP}{OP}]} \cdot 1$
 $= \frac{[\frac{x_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} - \frac{k * y_1}{k * z_1} * \frac{y_2}{z_2}]}{[\frac{y_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} - \frac{k * x_1}{k * z_1} * \frac{y_2}{z_2}]} \cdot 1$
 $= \frac{[x_1 * x_2 - y_1 * y_2]}{[y_1 * x_2 + x_1 * y_2]} \cdot \frac{[z_1 * z_2]}{[z_1 * z_2]}$
 $= \frac{[x_1 x_2 + y_1 y_2]}{[x_2 y_1 - x_1 y_2]} \cdot \frac{[z_1 z_2]}{[z_1 z_2]}$ **सिद्ध।**

1.5 किसी न्यून कोण माप θ (थीटा) के पूरक कोण माप $= (90 - \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक

सम कोण त्रिभुज ABC में $m\angle B = 90^\circ$ $m\angle A = \theta$

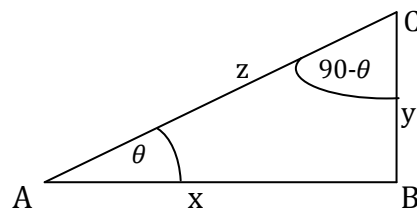
होने पर $m\angle C = \theta$ (थीटा) के पूरक कोण माप =

$(90 - \theta)^\circ$ होगा। तब $m\angle A = \theta$ का त्रिभुजांक

$[m(\overline{AB}) \cdot m(\overline{BC}) \cdot m(\overline{AC})]$ होने पर

$m\angle C = \theta$ (थीटा) के पूरक कोण माप $= (90 - \theta)^\circ$

का त्रिभुजांक $[m(\overline{BC}) \cdot m(\overline{AB}) \cdot m(\overline{AC})]$ होगा।



आकृति 1.6

अर्थात् का $m\angle A = \theta$ का त्रिभुजांक = $x \quad y \quad z$ होने पर

$m\angle A$ का पूरक कोण $m\angle(90^\circ - A) = (90 - \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक = $y \quad x \quad z$ होगा।

1.6 न्यून कोण माप θ (थीटा) के पूरक कोण माप $= (90 - \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक तथा दो त्रिभुजांको का योग एवं अन्तर का नियम अनुप्रयोग से

[1] 0° का त्रिभुजांक $0^\circ = m\angle A - m\angle A$

$$\begin{array}{rcl} \therefore & m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x \quad y \quad z \\ & m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x \quad y \quad z \\ \hline \therefore (0^\circ = m\angle A - m\angle A) \text{ का त्रिभुजांक} = & (x^2 + y^2) & (xy - xy) \quad z^2 \\ & z^2 & 0 \quad z^2 \quad (x^2 + y^2 = z^2 \text{ प्रतिस्थापित करने पर}) \\ & 1 & 0 \quad 1 \quad (\text{त्रिभुजांक अवयव}) \div z^2 \text{ से अभीष्ट हल।} \end{array}$$

[2] $m\angle(-A)$ का त्रिभुजांक $m\angle(-A) = m\angle(0^\circ - A)$

$$\begin{array}{rcl} 0^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = & 1 & 0 \quad 1 \\ m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x & y \quad z \\ \hline \therefore m\angle(-A) = m\angle(0^\circ - A) \text{ का त्रिभुजांक} = & x & -y \quad z \end{array}$$

[3] 90° का त्रिभुजांक 1• कोण माप 0° के पूरक कोण माप $= (90 - 0)^\circ = 90^\circ$

∴ कोण माप 0° का त्रिभुजांक = $1 \quad 0 \quad 1$ से 0° के पूरक कोण माप 90° का त्रिभुजांक = $0 \quad 1 \quad 1$ होगा।

2• $90^\circ = m\angle A + \{m\angle A \text{ का पूरक कोण } m\angle(90 - A)\}$

$$\begin{array}{rcl} \therefore & m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x \quad y \quad z \\ & m\angle(90 - A) \text{ का त्रिभुजांक} = & y \quad x \quad z \\ \hline 90^\circ = m\angle A + m\angle(90 - A) \text{ का त्रिभुजांक} = & (xy - yx) & (y^2 + x^2) \quad z^2 \\ & = 0 & z^2 \quad z^2 \quad (x^2 + y^2 = z^2 \text{ प्रतिस्थापित करने पर}) \\ & = 0 & 1 \quad 1 \quad (\text{त्रिभुजांक अवयव}) \div z^2 \text{ से अभीष्ट हल।} \end{array}$$

[4] $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष अधिक कोण माप $\{(90+A) < 180^\circ\}$ का त्रिभुजांक

$$\begin{array}{rcl} m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x & y \quad z \\ 90^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = & 0 & 1 \quad 1 \\ \hline \therefore m\angle(90 + A) \text{ का त्रिभुजांक} = & -y & x \quad z \quad \text{मन ही मन सीधा गणना। अभीष्ट हल।} \end{array}$$

[5] $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle 2A$ का त्रिभुजांक $m\angle 2A = m\angle A + m\angle A$

$$\begin{array}{rcl} m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x & y \quad z \\ m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x & y \quad z \\ \hline \therefore m\angle 2A \text{ का त्रिभुजांक} = & (x^2 - y^2) & 2xy \quad z^2 \quad \text{मन ही मन सीधा गणना। अभीष्ट हल।} \end{array}$$

[6] 180° का त्रिभुजांक $180^\circ = 2 * 90^\circ$

$$\begin{array}{rcl} \therefore 90^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = & 0 & 1 \quad 1 \quad \text{से} \\ 180^\circ = 2 * 90^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = & (0^2 - 1^2) & 2 * 0 * 1 \quad 1^2 \quad m\angle 2A \text{ का त्रिभुजांक गणना नियम से} \\ & = -1 & 0 \quad 1 \quad \text{अभीष्ट हल।} \end{array}$$

[7] $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle A$ के सम्पूरक कोण $m\angle(180^\circ - A)$ का त्रिभुजांक

$$\begin{array}{rcl} 180^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = & -1 & 0 \quad 1 \quad 180^\circ \text{ के त्रिभुजांक गणना नियम से} \\ m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = & x & y \quad z \\ \hline m\angle(180^\circ - A) \text{ का त्रिभुजांक} = & -x & y \quad z \quad \text{मन ही मन सीधा गणना। अभीष्ट हल।} \\ \text{या } m\angle A \text{ के पूरक कोण } m\angle(90-A) \text{ का त्रिभुजांक} = & y & x \quad z \end{array}$$

$$90^0 \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \end{array}$$

∴ $m\angle\{(90-A)+90\} = m\angle(180^0 - A)$ का त्रिभुजांक = $\begin{array}{ccc} -x & y & z \end{array}$ मन ही मन सीधा गणना। **अभीष्ट हल।**

उदाहरण 1■ यदि $m\angle A$ के त्रिभुजांक = $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ हो तो $m\angle 2A$ तथा 0^0 का त्रिभुजांक गणना कीजिए।

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \end{array}$

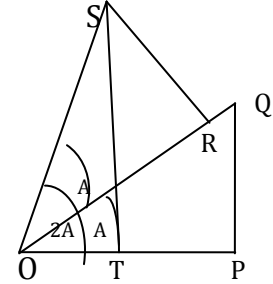
$m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\begin{array}{ccc} 4 & 3 & 5 \end{array}$

$$\begin{aligned} \therefore m\angle 2A = (A+A) \text{ का त्रिभुजांक} &= \begin{pmatrix} 4^2 - 3^2 & (2 \cdot 4 \cdot 3) & 5^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 24 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

अभीष्ट हल होगा।

$$\begin{aligned} \text{तथा } 0^0 = (A-A) \text{ का त्रिभुजांक} &= \begin{pmatrix} 4^2 + 3^2 & 0 & 5^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 25 & 0 & 25 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

अभीष्ट हल होगा।



आकृति 1.7

उदाहरण 2■ यदि $m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\begin{pmatrix} 2 & 3 & \sqrt{13} \end{pmatrix}$ का पूरक कोण $m\angle B$ हो तो $m\angle B$, 90^0 और $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल त्रिभुज OPQ से $m\angle A = m\angle POQ$ का त्रिभुजांक = $\begin{array}{ccc} OP & PQ & OQ \\ = 2 & 3 & \sqrt{13} \end{array}$

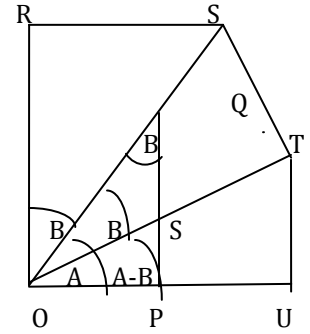
∴ त्रिभुज OPQ से $m\angle A$ का पूरक कोण $m\angle B$ का त्रिभुजांक = $\begin{array}{ccc} PQ & OP & OQ \\ = 3 & 2 & \sqrt{13} \end{array}$

पूरक कोण का त्रिभुजांक नियम अनुच्छेद 1.5 से प्रमाणित

$$\begin{aligned} 90^0 = m\angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक} &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 3 - 3 \cdot 2) & (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) & \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 13 & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ दक्ष त्रिभुजांक होगा

$$\begin{aligned} m\angle(A-B) \text{ का त्रिभुजांक} &= \begin{pmatrix} (2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) & (3 \cdot 3 - 2 \cdot 2) & \sqrt{13} \cdot \sqrt{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 12 & 5 & 13 \end{pmatrix} \text{ होगा।} \end{aligned}$$



आकृति 1.8

आकृति में समकोण त्रिभुज OPQ में $m\angle POQ = m\angle A$ है। ∴ $m\angle A$ का पूरक कोण $m\angle OQP = m\angle B$

$\triangle OPQ \equiv \triangle ORS \equiv \triangle OTS$ है। जिनमें क्रमशः $m\angle OQP = m\angle SOR = m\angle SOT = m\angle B$

समकोण $\triangle OUT$ में $m\angle TOU = m\angle(A-B)$ है।

ध्यानाकर्षण दो तर्क रहित त्रिभुजांकों का योग एवं अंतर का त्रिभुजांक तर्क रहित एवं सारभूत होने के प्रतिबंध से मुक्त है।

$$\begin{array}{ccc} \text{Sin } x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & \\ & \text{Cos } x \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{Cos } x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & & \text{Sin } x \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \text{Sin } x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Cos } x \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Cos } x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{Sin } x \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

जहाँ तर्क रहित त्रिभुजांक का तात्पर्य त्रिभुजांक के तीनों अवयव (आधार, लम्ब, कर्ण) शून्येतर धनात्मक संख्या होने से है।

तर्क युक्त त्रिभुजांकों में $(1\ 0\ 1), (0\ 1\ 1), (-1\ 0\ 1), (0\ -1\ 1)$ ही है। जो कि क्रमशः $n \in \mathbb{Z}$ के प्रतिबंध पर $4n, (4n+1), (4n+2), (4n+3)$ समकोण ($\perp$) माप के कोण होंगे। जिन्हे कोण माप x के प्रतिस्थापित करने पर—

$\cos(4n)\perp = 1, \sin(4n+1)\perp = 1, \cos(4n+2)\perp = -1, \sin(4n+3)\perp = -1$ का हल देगा।
त्रिकोणमिति निष्पत्तियों के अध्ययन विस्तार में कोण माप x का त्रिभुजांक (p, q, r) के तारतम्य में $\cos x = \frac{p}{r}$ और $\sin x = \frac{q}{r}$ है।

उदाहरण 1 ■ यदि $m\angle A$ का त्रिभुजांक $[5\ 12\ 13]$ हो तो $m\angle 2A$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए और दर्शित कीजिए कि दो तर्क रहित त्रिभुजांकों का योग एवं अंतर का त्रिभुजांक तर्क रहित एवं सारभूत होने के प्रतिबंध से मुक्त है।

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक = $5\ 12\ 13$ से

$$m\angle 2A \text{ का त्रिभुजांक} = [(5^2 - 12^2)\ (2 * 5 * 12)\ 13^2] \\ = -119\ 120\ 169$$

$m\angle 2A$ का त्रिभुजांक हल मान $m\angle(180 - 2A)$ के त्रिभुजांक

के हल के प्रति दर्शित होगा। जो कि समकोण त्रिभुज ORQ में :

क्रमश $OR\ RQ\ QO$ माप $QO = 13k$ के लिए जाने पर :

$$\text{क्रमश } -\frac{119}{13k}, \frac{120}{13k}, \frac{169}{13k} = -\frac{119}{13}k, \frac{120}{13}k, 13k \text{ इकाई में होगा।}$$

आधार माप $OR = -\frac{119}{13}k$ ऋणात्मक है। $\therefore$ परिणामी त्रिभुज के

आधार का विस्तार मूल बिन्दु O के ऋणात्मक दिशा ($\leftarrow$) में होगा।

उदाहरण 2 ■ यदि $m\angle A$ का त्रिभुजांक $(12\ 5\ 13)$ तथा $m\angle B$ का त्रिभुजांक $(5\ 12\ 13)$ हो तो $m\angle(A - B)$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए और दर्शित कीजिए कि दो तर्क रहित त्रिभुजांकों का योग एवं अंतर का त्रिभुजांक तर्क रहित एवं सारभूत होने के प्रतिबंध से मुक्त है।

हल अवलोकनार्थ रचना आकृति के अनुसार —

$$m\angle A = m\angle MON \text{ का त्रिभुजांक} \\ = OM\ MN\ ON \\ = 12\ 5\ 13$$

$$m\angle B = m\angle POQ \text{ का त्रिभुजांक} \\ = OP\ PQ\ OQ \\ = 5\ 12\ 13$$

$m\angle(A - B)$ की गणना दर्शाने रचना से

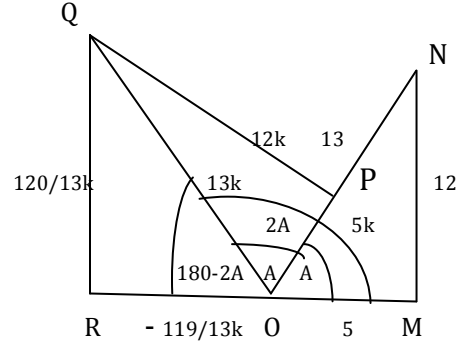
$$m\angle(-B) = m\angle POQ_1 \text{ का त्रिभुजांक} \\ = OP\ P_1Q_1\ QQ_1 \\ = 5\ -12\ 13$$

$\therefore m\angle(A - B) = m\angle POR$ का .

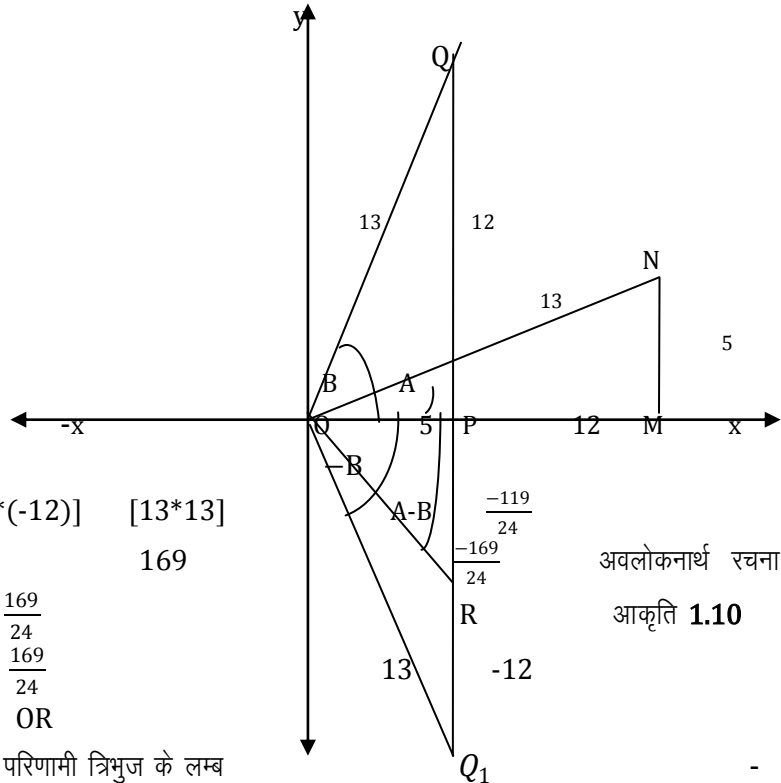
$$\text{त्रिभुजांक} = [12*5 - 5*(-12)]\ [5*5 + 12*(-12)]\ [13*13] \\ = 120\ -119\ 169 \\ = \frac{120}{24}\ -\frac{119}{24}\ \frac{169}{24} \\ = 5\ -\frac{119}{24}\ \frac{169}{24} \\ = OP\ PR\ OR$$

में लम्ब माप $RQ_1 = -\frac{119}{24}$ ऋणात्मक है। $\therefore$ परिणामी त्रिभुज के लम्ब

का विस्तार मूल बिन्दु O के ऋणात्मक दिशा ($\downarrow$) में होगा।



अवलोकनार्थ रचना आकृति 1.9



अवलोकनार्थ रचना
आकृति 1.10

1-6 प्रमेय $m\angle A$ के त्रिभुजांक $(x \ y \ z)$ के सापेक्ष $m\angle(-A)$ का त्रिभुजांक $(x \ -y \ z)$ होगा।

प्रमाण 1 $m\angle(-A) = m\angle(A - 2A)$ अवलोकनार्थ रचना आकृति 1-11 के अनुसार -

$$m\angle A = m\angle MON \text{ का त्रिभुजांक} = OM \quad MN \quad ON = x \quad y \quad z$$

$m\angle(A - 2A)$ की गणना दर्शाने रचना से

$$m\angle 2A = m\angle MOP \text{ का त्रिभुजांक} = OP \quad PN \quad ON = \frac{x^2 - y^2}{z} \quad \frac{2xy}{z} \quad z$$

$$m\angle 2A = m\angle MOP \text{ का त्रिभुजांक} = (x^2 - y^2) \quad 2xy \quad z^2$$

$\therefore m\angle(A - 2A) = m\angle(-A)$ का त्रिभुजांक

$$= \{x(x^2 - y^2) + y \cdot 2xy\} \quad \{(x^2 - y^2) \cdot y - x \cdot 2xy\} \quad z^3$$

$$= \frac{x(x^2 + y^2)}{xz^2} \quad \frac{-y(x^2 + y^2)}{-yz^2} \quad \frac{z^3}{z^3}$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2 = z^2} \quad \frac{-y}{-yz^2} \quad \frac{z}{z^3}$$

$$= \frac{x}{x} \quad \frac{-y}{-y} \quad \frac{z}{z}$$

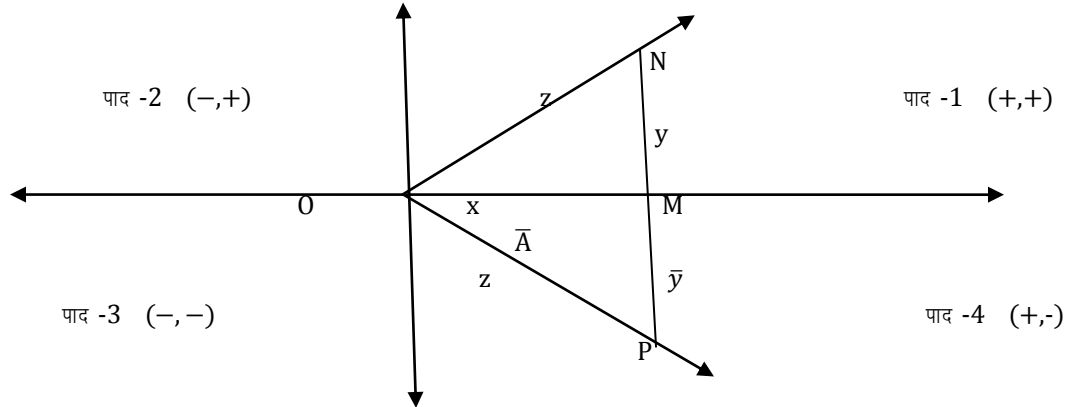
$$= OM \quad MQ \quad OQ$$

अतः $m\angle A$ के त्रिभुजांक $(x \ y \ z)$ के सापेक्ष $m\angle(-A)$

का त्रिभुजांक $(x \ -y \ z)$ होगा। जहाँ लम्ब MQ

$= \bar{y}$ ऋणात्मक है। $\therefore$ परिणामी त्रिभुज के लम्ब का विस्तार मूल बिन्दु O के ऋणात्मक दिशा ($\downarrow$) में होगा।

प्रमाण 2



आकृति 1.12

$m\angle(-A) = m\angle(0^\circ - A)$ अवलोकनार्थ रचना आकृति के अनुसार -

$$m\angle(0^\circ) \text{ का त्रिभुजांक} = OM \quad OO \quad OM = x \quad 0 \quad x = 1 \quad 0 \quad 1$$

$$m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = OM \quad MN \quad ON = x \quad y \quad z$$

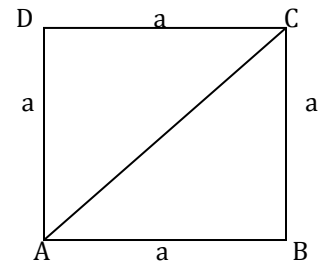
$$\therefore m\angle(0^\circ - A) = m\angle(-A) \text{ का त्रिभुजांक} = OM \quad MP \quad OP = x \quad -y \quad z \quad \text{प्रमाणित।}$$

1-7 कोण माप 45° , 30° एवं 60° का त्रिभुजांक गणना

[1] $m\angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक **1. ज्यामिति में वर्ग के प्रगुण का अनुप्रयोग**

वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर माप की होती हैं तथा चारों शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण बराबर माप में 90° होता है। विकर्ण (वह रेखाखण्ड जिसके दोनों ओर के अन्त्य बिन्दु युग्म शीर्षाभिमुख होते हैं) द्वारा समद्विभाजित होते हैं। अतः $\frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ कोण माप का त्रिभुजांक गणना के लिए-

माना कि वर्ग ABCD की भुजा माप a इकाई है। विकर्ण AC की रचना से-



आकृति 1.13

समकोण त्रिभुज ABC में $m\angle DAC = m\angle ACD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$, भुजा $DA = DC = a$ इकाई तथा विकर्ण $= a\sqrt{2}$ होगा। $\therefore$

$m\angle DAC = m\angle ACD = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ का त्रिभुजांक $= x \ y \ z = a \ a \ a\sqrt{2} = 1 \ 1 \ \sqrt{2}$ होगा।

2• पूरककोण त्रिभुजांक अनुप्रयोग 45° का पूरककोण $= (90 - 45)^\circ = 45^\circ$

माना कि 45° का त्रिभुजांक $= x \ y \ z$

$\therefore 45^\circ$ का पूरककोण $= (90 - 45)^\circ = 45^\circ$ का त्रिभुजांक $= y \ x \ z$

तुलना करने पर $x=y=a$ प्रतिस्थापन के प्रति $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ प्रतिस्थापन होगा।

$\therefore 45^\circ$ का त्रिभुजांक $= x \ y \ z = a \ a \ a\sqrt{2} = 1 \ 1 \ \sqrt{2}$ होगा।

[2] $m\angle 30^\circ$ और $m\angle 60^\circ$ का त्रिभुजांक

1• ज्यामिति में समबाहु त्रिभुज के प्रगुण का अनुप्रयोग शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण

माप तथा समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ बराबर माप की होती हैं।

$\therefore$ बराबर माप में 60° होता है। किसी शीर्ष से उसके सम्मुख भुजा पर अन्तरित लम्ब उस शीर्ष पर अन्तरित अन्तःकोण एवं सम्मुख भुजा को समद्विभाजित करता है।

माना कि समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा माप a इकाई है। शीर्ष C से उसके सम्मुख भुजा AB

पर अन्तरित लम्ब CD शीर्ष C पर अन्तरित अन्तःकोण $m\angle BCA$ को एवं भुजा AB को

बिन्दु D पर समद्विभाजित करेगा। तब समकोण $\triangle ADC \cong$ समकोण $\triangle BDC$ होगा।

अतः

$$m\angle DCA = m\angle DCB = 30^\circ$$

$$m\angle DAC = m\angle DBC = 60^\circ$$

$$\text{भुजा AC} = \text{भुजा BC} = a$$

$$\text{भुजा AD} = \text{भुजा BD} = \frac{a}{2}$$

$$\text{भुजा CD} = \text{भुजा CD} = a * \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ उभयनिष्ठ है।}$$

$$\begin{aligned} \therefore m\angle 30^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{CD}{DA} \quad \frac{AC}{DB} \quad \text{समकोण } \triangle ADC \text{ से} \\ &= \frac{CD}{DB} \quad \frac{BC}{BC} \quad \text{समकोण } \triangle BDC \text{ से} \\ &= a * \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{a}{2} \quad a = \sqrt{3} \quad 1 \quad 2 \text{ होगा।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m\angle 60^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{AD}{DC} \quad \frac{AC}{BC} \quad \text{समकोण } \triangle ADC \text{ से} \\ &= \frac{BD}{DC} \quad \frac{BC}{BC} \quad \text{समकोण } \triangle BDC \text{ से} \\ &= \frac{a}{2} \quad a * \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a = 1 \quad \sqrt{3} \quad 2 \text{ होगा।} \end{aligned}$$

अथवा• सीधे पूरक कोण का त्रिभुजांक नियम से

$m\angle 30^\circ$ का पूरक कोण $m\angle 60^\circ$ का त्रिभुजांक $= 1 \quad \sqrt{3} \quad 2$ होगा।

2• पूरककोण एवं दूने कोण माप त्रिभुजांक का अनुप्रयोग

30° का पूरककोण $= (90 - 30)^\circ = 60^\circ$, $60^\circ = 2 * 30^\circ$

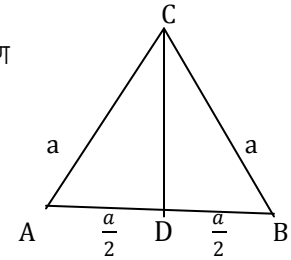
माना कि 30° का त्रिभुजांक $= x \ y \ z$

$\therefore 30^\circ$ का पूरककोण $= (90 - 30)^\circ = 60^\circ$ का त्रिभुजांक $= y \ x \ z$ -----(1)

पुनः $60^\circ = 2 * 30^\circ$ का त्रिभुजांक $= (x^2 - y^2) \ 2xy \ z^2$ -----(2)

(1) और (2) की तुलना से $y = x^2 - y^2$ -----(3) तथा $x = 2xy$ से $y = \frac{1}{2}$ को समिका (3) में

प्रतिस्थापित करने पर $-\frac{1}{2} = x^2 - (\frac{1}{2})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} = x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ से $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



आकृति 1.14

$$z^2 = z \text{ से } z=1 \text{ या } y = \frac{1}{2} \text{ और } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ प्रतिस्थापन के प्रति } z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ प्रतिस्थापन होगा।}$$

$$\therefore 30^\circ \text{ का त्रिभुजांक } = (x \ y \ z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ \frac{1}{2} \ 1\right) = (\sqrt{3} \ 1 \ 2)$$

$$\therefore 30^\circ \text{ का पूरककोण } = (90 - 30)^\circ = 60^\circ \text{ का त्रिभुजांक } = (y \ x \ z) = (1 \ \sqrt{3} \ 2)$$

$$\text{जाँच } 60^\circ = 2 * 30^\circ \text{ का त्रिभुजांक } = (x^2 - y^2) \ 2xy \ z^2 = (\sqrt{3}^2 - 1^2) \ 2\sqrt{3} * 1 \ 2^2$$

$$= (3 - 1) \ 2\sqrt{3} * 1 \ 4 = 2 \ 2\sqrt{3} \ 4$$

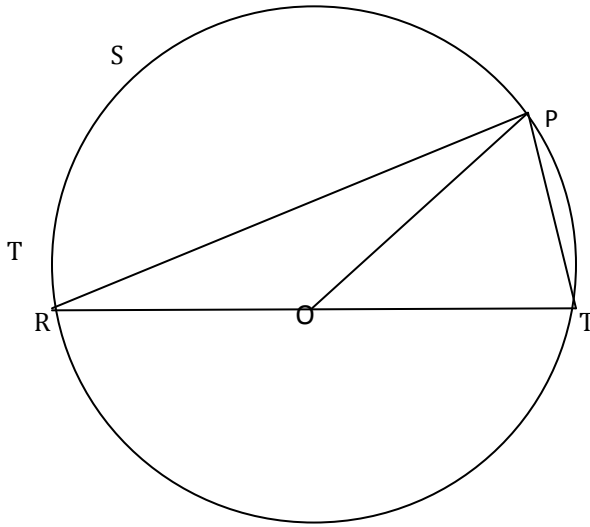
$$= 1 \ \sqrt{3} \ 2 \text{ निष्कर्ष प्राप्त त्रिभुजांक सही है।}$$

1-8 $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक प्राप्त करना

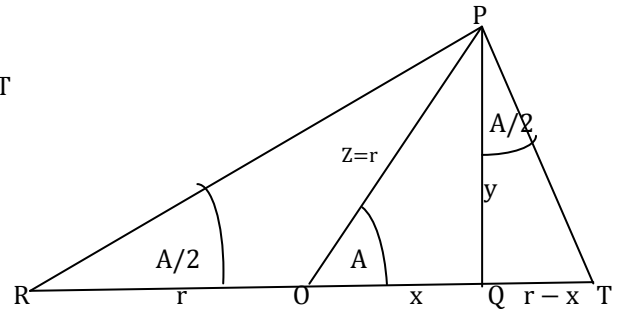
1• किसी चापखण्ड/चापकर्ण द्वारा अन्तरित परिधि पर का कोण माप विषयक प्रमेय ज्यामिति प्रमेय का अनुसार— प्रमाणित है कि

[1] किसी चापखण्ड/चापकर्ण द्वारा अन्तरित परिधि पर का कोण माप उसी चापखण्ड/चापकर्ण द्वारा अन्तरित केन्द्र पर अन्तरित कोण माप का आधा होता है।

[2] अर्धवृत्त चापकर्ण (ब्यास) द्वारा अन्तरित परिधि पर कोण का माप समकोण (90°) होता है। अतः आकृति 1.15 (1) में अर्धवृत्त PTRS में अर्धवृत्त चापकर्ण RT द्वारा अन्तरित परिधि पर कोण $m\angle RPT$ समकोण होगा। अतः त्रिभुज RPT समकोण त्रिभुज होगा। उक्त समकोण त्रिभुज का प्रतिरूपण आकृति 1.15 (2) है।



आकृति 1.15 (1)



आकृति 1.15 (2)

जिसमें चापकर्ण PT द्वारा केन्द्र O पर अन्तरित $m\angle POT = m\angle A$ के सापेक्ष उसी चापकर्ण PT द्वारा परिधि पर अन्तरित $m\angle PRT = m\angle \frac{A}{2}$ होगा। समकोण शीर्ष P से रेखाखण्ड PQ कर्ण (ब्यास) के बिन्दु Q पर लम्ब रचित है।

$OR = OP = OT = r$ वृत्त की त्रिज्या r होगा।

समकोण त्रिभुज RPT और समकोण त्रिभुज PQT में $m\angle T$ उभयनिष्ठ है। $\therefore$ समकोण त्रिभुज RPT $\equiv$ समकोण त्रिभुज PQT होंगे। तब

$$m\angle PRT = m\angle QPT = m\angle \frac{A}{2}$$

इसी प्रकार समकोण त्रिभुज RPT और समकोण त्रिभुज PQR में $m\angle R$ उभयनिष्ठ है। $\therefore$ समकोण त्रिभुज RPT $\equiv$ समकोण त्रिभुज PQR होंगे। तब

$$m\angle PRT = m\angle PRQ = m\angle \frac{A}{2}$$

तब समकोण त्रिभुज PQO में $m\angle QOP = m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\frac{OQ}{x} \cdot \frac{QP}{y} \cdot \frac{PO}{z=r}$ के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजांक की गणना समरूप समकोण त्रिभुजों RPT, PQR और PQT से अलग-अलग अवलोकित कीजिए।

(1) समकोण त्रिभुज RPT से- $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक = $\frac{RP}{RT} \cdot \frac{PT}{RT}$ ----- (1) के लिए $RT = \text{ब्यास} = 2r = 2z$

$$PT = \sqrt{(QT)^2 + (QP)^2} \quad \text{समकोण त्रिभुज PQT से}$$

$$= \sqrt{(r-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(z-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{z^2 - 2zx + x^2 + y^2} = \sqrt{2z^2 - 2zx} = \sqrt{2z(z-x)}$$

$$RP = \sqrt{(RT)^2 - (PT)^2} \quad \text{समकोण त्रिभुज RPT से}$$

$$= \sqrt{(2r)^2 - 2z(z-x)} = \sqrt{(2z)^2 - 2z(z-x)} = \sqrt{2z(z+x)}$$

$$\text{उपरोक्त प्राप्त मानों को बिन्दु (1) में प्रतिस्थापित करने पर। } m\angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{\sqrt{2z(z+x)}}{\sqrt{2z(z-x)}} \cdot \frac{\sqrt{2z(z-x)}}{2z} \cdot 2z$$

$$= \frac{\sqrt{z+x}}{\sqrt{z-x}} \cdot \sqrt{2z} \cdot \sqrt{2z}$$

(2) समकोण त्रिभुज PQR से $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक = $\frac{RQ}{PQ} \cdot \frac{PQ}{RP}$ ----- (2) के लिए

$$PQ = y = \sqrt{(OP)^2 - (OQ)^2} \quad \text{समकोण त्रिभुज OQP से}$$

$$= \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{(z+x)(z-x)} \quad RQ = OR + OQ = z+x \quad RP = \sqrt{2z(z+x)}$$

$$\text{उपरोक्त प्राप्त मानों को बिन्दु (2) में प्रतिस्थापित करने पर- } m\angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{(z+x)}{\sqrt{2z(z+x)}} \cdot \frac{y}{\sqrt{2z(z+x)}} \cdot \sqrt{2z(z+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{(z+x)(z-x)}}{\sqrt{2z(z+x)}} \cdot \frac{\sqrt{(z+x)(z-x)}}{\sqrt{2z(z+x)}} \cdot \sqrt{2z(z+x)}$$

$$= \frac{\sqrt{z+x}}{\sqrt{z-x}} \cdot \sqrt{2z}$$

(3) समकोण त्रिभुज PQT से $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक = $\frac{PQ}{QT} \cdot \frac{QT}{PT}$ ----- (3) के लिए

$$PQ = y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{(z+x)(z-x)} \quad \text{प्राप्त है। } QT = OT - OQ = r - x = z - x = \sqrt{(z-x)(z-x)}$$

$PT = \sqrt{2z(z-x)}$ प्राप्त है। उपरोक्त प्राप्त मानों को बिन्दु (3) में प्रतिस्थापित करने पर।

$$m\angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{y}{z-x} \cdot \frac{z-x}{\sqrt{2z(z-x)}} \cdot \sqrt{2z(z-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{(z+x)(z-x)}}{\sqrt{(z-x)(z-x)}} \cdot \frac{\sqrt{(z-x)(z-x)}}{\sqrt{2z(z-x)}} \cdot \sqrt{2z(z-x)}$$

$$= \frac{\sqrt{z+x}}{\sqrt{z-x}} \cdot \sqrt{2z}$$

2. दूने कोण माप त्रिभुजांक का अनुप्रयोग

माना कि $m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}$ के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक = $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{r}$ है।

$$m\angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{r} \text{ के सापेक्ष } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{(p^2 - q^2)}{2pq} \cdot \frac{r^2}{(p^2 + q^2)}$$

$$= \frac{(p^2 - q^2)}{2pq} \cdot \frac{(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)} \quad \text{त्रिभुजांक होने के प्रतिबंध पर-}$$

$$m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \quad \text{और } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{(p^2 - q^2)}{2pq} \cdot \frac{(p^2 + q^2)}{(p^2 + q^2)} \text{ की तुलना करने पर -}$$

$$p^2 + q^2 = z \quad \text{----- (1)}$$

$$p^2 - q^2 = x \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{समिका (1) + (2) से } 2p^2 = z + x \Rightarrow p = \sqrt{\frac{z+x}{2}}$$

$$\text{समिका (1) - (2) से } 2q^2 = z - x \Rightarrow q = \sqrt{\frac{z-x}{2}}$$

$$\therefore r^2 = p^2 + q^2 = \frac{z+x}{2} + \frac{z-x}{2} = z \text{ से } r = \sqrt{z}$$

$$\text{या } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \text{ और } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{(p^2 - q^2)}{2pq} \cdot \frac{r^2}{(p^2 + q^2)} \text{ की तुलना करने पर -}$$

$$r^2 = z \text{ से } r = \sqrt{z} \therefore m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \text{ के सापेक्ष}$$

$$m \angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक } p \ q \ r = \sqrt{\frac{z+x}{2}} \quad \sqrt{\frac{z-x}{2}} \quad \sqrt{z}$$

$$= \sqrt{z+x} \quad \sqrt{z-x} \quad \sqrt{2z}$$

पुनः विस्तार 1 = (z+x) y $\sqrt{2z(z+x)}$ $\sqrt{z+x}$ का गुणा करने पर
विस्तार 2 = y (z-x) $\sqrt{2z(z-x)}$ $\sqrt{z-x}$ का गुणा करने पर

उदाहरण 1■ यदि $m \angle A$ का त्रिभुजांक 3 4 5 हो तो $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y z = 3 4 5
 $\therefore m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{z+x}$ $\sqrt{z-x}$ $\sqrt{2z}$ = $\sqrt{5+3}$ $\sqrt{5-3}$ $\sqrt{2*5}$
= $\sqrt{8}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2*5}$
= $2\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $\sqrt{2*5}$
= 2 1 $\sqrt{5}$ **उत्तर।**

अथवा $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक (z+x) y $\sqrt{2z(z+x)}$ = (5+3) 4 $\sqrt{2*5(5+3)}$
= 8 4 $\sqrt{2*5*8}$
= 8 4 $4*\sqrt{5}$
= 2 1 $\sqrt{5}$ **उत्तर।**

अथवा $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक y (z-x) $\sqrt{2z(z-x)}$ = 4 (5-3) $\sqrt{2*5(5-3)}$
= 4 2 $\sqrt{2*5*2}$
= 4 2 $2*\sqrt{5}$
= 2 1 $\sqrt{5}$ **उत्तर।**

उदाहरण 2■ यदि $m \angle A$ का त्रिभुजांक 5 12 13 हो तो $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y z = 5 12 13
 $\therefore m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{z+x}$ $\sqrt{z-x}$ $\sqrt{2z}$ = $\sqrt{13+5}$ $\sqrt{13-5}$ $\sqrt{2*13}$
= $\sqrt{18}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{2*13}$
= $3*\sqrt{2}$ $2*\sqrt{2}$ $\sqrt{2*13}$
= 3 2 $\sqrt{13}$ **उत्तर।**

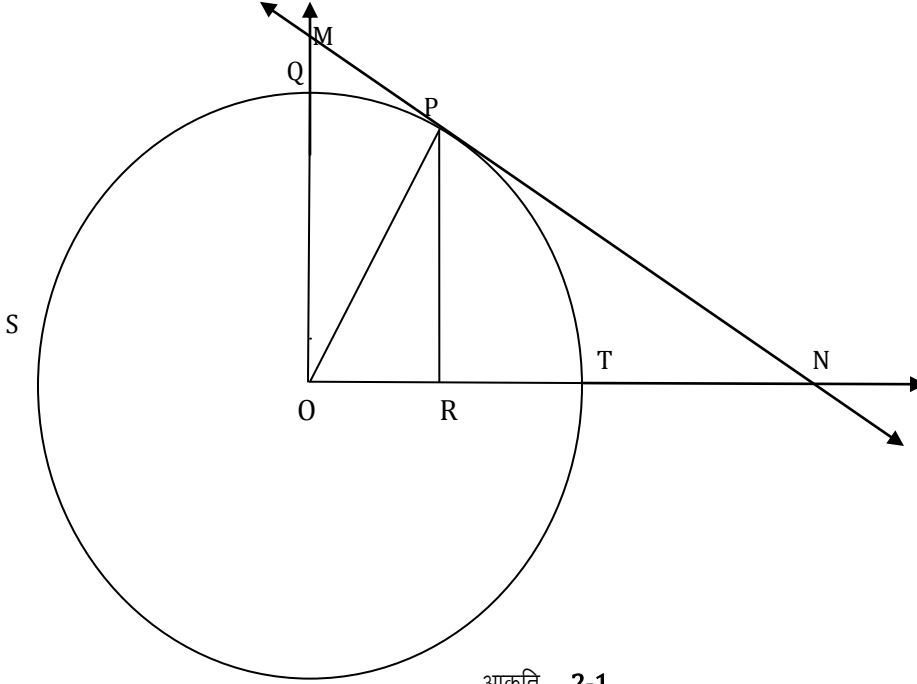
अथवा $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक (z+x) y $\sqrt{2z(z+x)}$ = (13+5) 12 $\sqrt{2*13(13+5)}$
= 18 12 $\sqrt{2*13*18}$
= 18 12 $6*\sqrt{13}$
= 3 2 $\sqrt{13}$ **उत्तर।**

अथवा $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक y (z-x) $\sqrt{2z(z-x)}$ = 12 (13-5) $\sqrt{2*13(13-5)}$
= 12 8 $\sqrt{2*13*8}$
= 12 8 $4*\sqrt{13}$
= 3 2 $\sqrt{13}$ **उत्तर।**

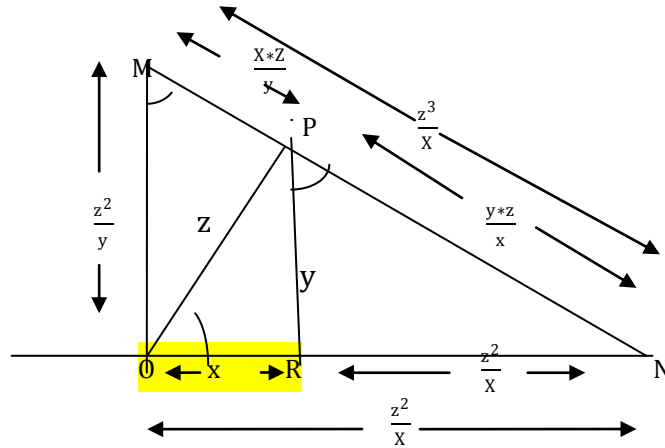
-----01-----

अध्याय -2 त्रिकोणमिति भाग 1

2.1 अधो आकृति 2-1 में वृत्त PQSTU का केन्द्र बिन्दु O है। त्रिज्या OQ और OT केन्द्र बिन्दु O पर समकोण अन्तरित करता है। स्पर्श रेखा MN लघु चाप QT में स्थित परिधि के बिन्दु P को स्पर्श करता है। त्रिज्या OQ और OT बढ़ाये जाने पर वृत्त के बाहर क्रमशः M और N पर प्रतिच्छेदी है। प्राप्त समकोण त्रिभुज MON जिसके कर्ण MN पर स्पर्श बिन्दु P स्थित होगा।



आकृति 2-1



आकृति 2-2

रचना OP मिलाइये तथा P से रेखा ON पर लम्ब की रचना कीजिए। रचना उपरान्त आकृति 2-1 में से वृत्त की परिधि को विलोपित करने के भाव से शेष को आकृति 2-2 में प्रतिरूपित कीजिए।

आकृति 2-2 में सिद्ध किया जा सकता है कि $\Delta_1 ORP \equiv \Delta_2 OPM \equiv \Delta_3 OPN \equiv \Delta_4 PRN \equiv \Delta_5 MON$ और समकोण Δ होंगे। ($\equiv$ समरूप होने का संकेत है।) जिसके तहत उक्त समकोण त्रिभुजों में क्रमशः $m\angle ORP = m\angle OPM = m\angle OPN, m\angle PRN =$

$m\angle MON = 90^\circ$ (सम कोण) माप के होंगे। $m\angle ROP = m\angle OMP = m\angle PON = m\angle RPN = m\angle OMN =$ माना कि $m\angle A$ है। तब पूरक कोण नियम से $m\angle OPR = m\angle POM = m\angle ONP = m\angle RNP = m\angle ONM = m\angle(90^\circ - A)$ होगा।

$m\angle A$ के प्रति भुजाओं के माप एवं त्रिभुजांक आधार लम्ब कर्ण

- 1■ समकोण $\Delta_1 ORP$ में $m\angle A = m\angle ROP$ के प्रति भुजाएँ = OR RP PO
 $= x y z$ के सापेक्ष
 त्रिभुजांक $= x y z$
- 2■ समकोण $\Delta_2 OPM$ में $m\angle A = m\angle ROP$ के प्रति भुजाएँ = MP PO OM
 $= \frac{xz}{y} z \frac{z^2}{y}$
 त्रिभुजांक $= x y z$ भुजा $\times \frac{y}{z}$ से
- 3■ समकोण $\Delta_3 OPN$ में $m\angle A = m\angle PON$ के प्रति भुजाएँ = OP PN NO
 $= z \frac{yz}{x} \frac{z^2}{x}$
 त्रिभुजांक $= x y z$ भुजा $\times \frac{x}{z}$ से
- 4■ समकोण $\Delta_4 PRN$ में $m\angle A = m\angle RPN$ के प्रति भुजाएँ = PR RN NP
 $= y \frac{y^2}{x} \frac{yz}{x}$
 त्रिभुजांक $= x y z$ भुजा $\times \frac{x}{y}$ से
- 5■ समकोण $\Delta_5 MON$ में $m\angle A = m\angle OMN$ के प्रति भुजाएँ = MO ON NM
 $= \frac{z^2}{y} \frac{z^2}{x} \frac{z^3}{xy}$
 त्रिभुजांक $= x y z$ भुजा $\times \frac{x}{z} \times \frac{y}{z}$ से

भुजाओं का अनुपात नियम से• आधार : आधार = लम्ब : लम्ब = कर्ण : कर्ण

- 1■ $\Delta_1 ORP \equiv \Delta_2 OPM$ में OR : OP = OR : PM = PO : OM
 $x : \frac{x \cdot z}{y} = y : z = z : \frac{z^2}{y} = y : z$
- 2■ $\Delta_1 ORP \equiv \Delta_3 OPN$ में OR : OP = RP : PN = PO : NO
 $x : z = y : \frac{yz}{x} = z : \frac{z^2}{x} = x : z$
- 3■ $\Delta_1 ORP \equiv \Delta_4 PRN$ में OR : PR = RP : RN = PO : NP
 $x : y = y : \frac{y^2}{x} = z : \frac{yz}{x} = x : y$
- 4■ $\Delta_1 ORP \equiv \Delta_5 MON$ में OR : MO = RP : ON = PO : NM
 $x : \frac{z^2}{y} = y : \frac{z^2}{x} = z : \frac{z^3}{xy} = xy : z^2 = \frac{x}{z} : \frac{z}{y}$
- 5■ $\Delta_2 OPM \equiv \Delta_3 OPN$ में MP : OP = PO : PN = OM : NO
 $\frac{xz}{y} : z = z : \frac{yz}{x} = \frac{z^2}{y} : \frac{z^2}{x} = x : y$
- 6■ $\Delta_2 OPM \equiv \Delta_4 PRN$ में MP : PR = PO : RN = OM : NP
 $\frac{xz}{y} : y = z : \frac{y^2}{x} = \frac{z^2}{y} : \frac{yz}{x} = xz : y^2 = \frac{x}{y} : \frac{y}{z}$
- 7■ $\Delta_2 OPM \equiv \Delta_5 MON$ में MP : MO = PO : ON = OM : NM

$$\begin{aligned}
& \frac{xz}{y} : \frac{z^2}{y} = z : \frac{z^2}{x} = \frac{z^2}{y} : \frac{z^3}{xy} = x : z \\
\text{8} \blacksquare \Delta_3 \text{OPN} \equiv \Delta_4 \text{PRN} \text{ में } & \text{OP} : \text{PR} = \text{PN} : \text{RN} = \text{NO} : \text{NP} \\
& z : y = \frac{yz}{x} : \frac{y^2}{x} = \frac{z^2}{x} : \frac{yz}{x} = z : y \\
\text{9} \blacksquare \Delta_3 \text{OPN} \equiv \Delta_5 \text{MON} \text{ में } & \text{OP} : \text{MO} = \text{PN} : \text{ON} = \text{NO} : \text{NM} \\
& z : \frac{z^2}{y} = \frac{yz}{x} : \frac{z^2}{x} = \frac{z^2}{x} : \frac{z^3}{xy} = y : z \\
\text{10} \blacksquare \Delta_4 \text{PRN} \equiv \Delta_5 \text{MON} \text{ में } & \text{PR} : \text{MO} = \text{RN} : \text{ON} = \text{NP} : \text{NM} \\
& y : \frac{z^2}{y} = \frac{y^2}{x} : \frac{z^2}{x} = \frac{yz}{x} : \frac{z^3}{xy} = y^2 : z^2 = \frac{y}{z} : \frac{z}{y}
\end{aligned}$$

उपरोक्त व्यापक विश्लेषण में समकोण त्रिभुज के त्रिभुजांक आधार लम्ब कर्ण = x y z के कोई दो अवयव के मापों का अनुपात सम्बंध $\{(y:z), (x:z), (y:x), (x:y), (z:x), (z:y)\}$ के अध्ययन की आवश्यकता को प्रतिपादित करता है। अध्ययन की व्यापकता में इन अनुपातों के परिमेयकरण $\left[\frac{P}{Q}\right]$ को ज्या निष्पत्ति या त्रिकोणमिति निष्पत्ति के नाम से निम्नानुसार नामांकित किया गया है।

m∠A का त्रिभुजांक आधार=x लम्ब=y कर्ण=z के प्रति
m∠A की ज्या निष्पत्ति या त्रिकोणमिति निष्पत्ति तालिका

क्रमांक	अनुपात का स्वरूप	अनुपातों का परिमेयकरण $\left[\frac{P}{Q}\right]$	पूरा नाम		संक्षिप्त नाम	
			हिन्दी	ऑग्ल	हिन्दी	ऑग्ल
1	लम्ब : कर्ण = y : z	$\frac{y}{z}$	ज्या A	Sine A	ज्या A	SinA
2	आधार : कर्ण = x : z	$\frac{y}{z}$	कोटिज्या A	Cosine A	कोज्या A	CosA
3	लम्ब : आधार = y : x	$\frac{y}{x}$	स्पर्शज्या A	Tangent A	स्पज्या A	TanA
4	आधार : लम्ब = x : y	$\frac{x}{y}$	व्युत्क्रमस्पर्शज्या A	Cotangent A	कोस्पज्या A	CotA
5	कर्ण :: आधार = z : x	$\frac{z}{x}$	व्युत्क्रमकोटिज्या A	Secant A	व्युकोज्या A	SecA
6	कर्ण :: लम्ब = z : y	$\frac{z}{y}$	युत्क्रमज्या A	Cosecant A	व्युज्या A	CosecA

2-2 m∠A के प्रति कोई एक ज्ञात त्रिकोणमिति निष्पत्ति के सापेक्ष m ∠A का त्रिभुजांक एवं शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति प्राप्त करना

प्रक्रम 1 ज्ञात निष्पत्ति का परिमेयकरण $\frac{P}{Q}$ कर अंश P और हर Q को m∠A का त्रिभुजांक x y z में से दो अवयव निम्नानुसार प्रतिबंध पर सुनिश्चित कीजिए।

$$\begin{aligned}
(1) \sin A &= \frac{P}{Q} \text{ से } y = P \text{ तथा } z = Q & (2) \cos A &= \frac{P}{Q} \text{ से } x = P \text{ तथा } z = Q \\
(2) \tan A &= \frac{P}{Q} \text{ से } y = P \text{ तथा } x = Q & (4) \cot A &= \frac{P}{Q} \text{ से } x = P \text{ तथा } y = Q \\
(5) \sec A &= \frac{P}{Q} \text{ से } z = P \text{ तथा } x = Q & (6) \csc A &= \frac{P}{Q} \text{ से } z = P \text{ तथा } y = Q
\end{aligned}$$

प्रक्रम 2 त्रिभुजांक समिका $x^2 + y^2 = z^2$ में प्रक्रम 1 के अनुसार सुनिश्चित त्रिभुजांक के दो अवयव का मान प्रतिस्थापित कर समिका हल कर त्रिभुजांक का तीसरा अवयव सुनिश्चित कर $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y z पूरा करे। इस प्रकार प्राप्त अदक्ष त्रिभुजांक होने पर दक्ष त्रिभुजांक (प्राप्त करना यथेष्ट होगा) प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 उक्त प्राप्त $m \angle A$ का त्रिभुजांक आधार = x लम्ब = y कर्ण = z के प्रति $m \angle A$ की त्रिकोणमिति निष्पत्ति – $\sin A = \frac{y}{z}$, $\cos A = \frac{x}{z}$, $\tan A = \frac{y}{x}$, $\cot A = \frac{x}{y}$, $\sec A = \frac{z}{x}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{z}{y}$ में त्रिभुजांक x y z के प्राप्त मान प्रतिस्थापित कर शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति प्राप्त कीजिए।

उदाहरण 1■ $\sin A = \frac{5}{13}$ को दृष्टिगत कर $m \angle A$ के प्रति शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति प्राप्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \sin A = \frac{y}{z} = \frac{5}{13} \therefore m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } x \quad y \quad z &= x \quad 5 \quad 13 \\ &= \sqrt{13^2 - 5^2} \quad 5 \quad 13 \\ &= 12 \quad 5 \quad 13 \text{ होगा। जिसको देखने मात्र से} \end{aligned}$$

शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति $\cos A = \frac{x}{z} = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{5}{12}$, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{12}{5}$, $\sec A = \frac{z}{x} = \frac{13}{12}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{z}{y} = \frac{13}{5}$ होगा।

उदाहरण 2■ $\tan A = 1$ को दृष्टिगत कर $m \angle A$ के प्रति शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति प्राप्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \tan A = \frac{y}{x} = 1 = \frac{1}{1} \therefore m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } x \quad y \quad z &= 1 \quad 1 \quad z \\ &= 1 \quad 1 \quad \sqrt{1^2 + 1^2} \\ &= 1 \quad 1 \quad \sqrt{2} \text{ होगा। जिसको देखने मात्र} \end{aligned}$$

से शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति $\sin A = \frac{y}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos A = \frac{x}{z} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$,

$$\sec A = \frac{z}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \operatorname{cosec} A = \frac{z}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \text{ होगा।}$$

उदाहरण 3■ $\sec A = \frac{5}{3}$ को दृष्टिगत कर $m \angle A$ के प्रति शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति प्राप्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल } \sec A = \frac{z}{x} = \frac{5}{3} \therefore m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } x \quad y \quad z &= 3 \quad y \quad 5 \\ &= 3 \quad \sqrt{5^2 - 3^2} \quad 5 \\ &= 3 \quad 4 \quad 5 \text{ होगा। जिसको देखने मात्र} \end{aligned}$$

से शेष पाँच त्रिकोणमिति निष्पत्ति $\sin A = \frac{y}{z} = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{x}{z} = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{4}{3}$, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$,

$$\sec A = \frac{z}{x} = \frac{5}{3}, \operatorname{cosec} A = \frac{z}{y} = \frac{5}{4} \text{ होगा।}$$

आधुनिक त्रिकोणमिति अध्ययनों में समानता, समीकरण, आकलन, अनुपात आदि को सिद्ध करने उपयुक्त सूत्रों की लम्बी सूची (पृष्ठ 23 में दर्शित तालिका 2-2 की भाँति) कंठस्थ करने की ओर बाध्य होना पड़ता है। कंठस्थीकरण का भयावह परिणाम सीखने-सिखाने में बोझिलता से ग्रसित होना ही है। त्रिभुजांक को त्रिकोणमिति अध्ययन का प्रथम आधार स्वीकार कर सीखने-सिखाने में बोझिलता से मुक्त सहजता की ओर अग्रसर होंगे।

पुनः माना कि $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 है। जहाँ $m \angle A = 0^\circ$ से $n \cdot 360^\circ$ तक का कोई कोण माप होगा। तब उपरोक्त 6 त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ के मान – $\sin A = \frac{y}{z} = y$, $\cos A = \frac{x}{z} = x$, $\tan A = \frac{y}{x} = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\cot A = \frac{x}{y} = \frac{\cos A}{\sin A}$, $\sec A = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos A}$, $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{y} = \frac{1}{\sin A}$ इन सबके लिए सम्बंधित रेखाचित्र आकृति 2-2 में $z=1$ प्रतिस्थापित कर रूपान्तरित करें।

2-3 सरल प्राथमिक त्रिकोणमिति समीकरण कुछ सरल प्राथमिक त्रिकोणमिति समीकरण त्रिभुजांक द्वारा सरलता प्राप्त कीजिए।

1. $m \angle A$ का त्रिभुजांक $x, y, 1$ से $x^2 + y^2 = 1 \therefore \cos^2 A + \sin^2 A = 1$
2. $x^2 + y^2 = 1$ के दोनों पक्ष को $\frac{1}{y^2}$ से गुणा करने पर $\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{1}{y^2} \therefore \cot^2 A + 1 = \operatorname{cosec}^2 A$
3. $x^2 + y^2 = 1$ के दोनों पक्ष को $\frac{1}{x^2}$ से गुणा करने पर $1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} \therefore 1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
4. $x^2 + y^2 = 1$ के दोनों पक्ष को $\frac{1}{x \cdot y}$ से गुणा करने पर $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x} * \frac{1}{y} \therefore \cot A + \tan A = \sec A * \operatorname{cosec} A$
5. $x^2 + y^2 = 1$ के दोनों पक्ष को $\frac{1}{x^2 \cdot y^2}$ से गुणा करने पर $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} * \frac{1}{y^2}$
 $\therefore \operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A = \sec^2 A * \operatorname{cosec}^2 A$

6. समिका 5 $\div$ समिका 4 से $\frac{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}{\cot A + \tan A} = \sec A * \operatorname{cosec} A = \cot A + \tan A$

तलिका 2-2

$m \angle \theta$ के सभी 6 प्रकार के त्रिकोणमिति निष्पत्तियों को किसी एक ही प्रकार के त्रिकोणमिति निष्पत्ति के पद स्वरूप में दर्शाना

क्र मां क	एक प्रकार पद स्वरूप ↓	6 प्रकार के त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ					
		$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$
		1	2	3	4	5	6
1	$\sin \theta$	$\sin \theta$	$\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}{\sin \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sin \theta}$
2	$\cos \theta$	$\sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}{\cos \theta}$	$\frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cos \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}}$
3	$\tan \theta$	$\frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$	$\tan \theta$	$\frac{1}{\tan \theta}$	$\sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\frac{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta}$
4	$\cot \theta$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$	$\frac{1}{\cot \theta}$	$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{\cot \theta}$	$\sqrt{1 + \cot^2 \theta}$
5	$\sec \theta$	$\frac{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}{\sec \theta}$	$\frac{1}{\sec \theta}$	$\sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\frac{1}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$	$\sec \theta$	$\frac{\sec \theta}{\sqrt{\sec^2 \theta - 1}}$
6	$\operatorname{cosec} \theta$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$	$\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}{\operatorname{cosec} \theta}$	$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}$	$\frac{\operatorname{cosec} \theta}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \theta - 1}}$	$\operatorname{cosec} \theta$

2-3 त्रिभुजांक विधि द्वारा त्रिकोणमिति समानता समीकरण सिद्ध करना

हलित उदाहरण अवलोकित करें—

उदाहरण 1■ सिद्ध कीजिए $(1 - \cos^2 \theta)(\operatorname{cosec}^2 \theta) = 1$

हल $m \angle \theta$ का त्रिभुजांक $x, y, 1$ से

बाँया पक्ष $= (1 - \cos^2 \theta)(\operatorname{cosec}^2 \theta) = (1 - x^2)\left(\frac{1}{y^2}\right) = y^2 * \frac{1}{y^2} = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 2■ सिद्ध कीजिए $(1 + \tan^2 \theta)(\cos^2 \theta) = 1$

हल $m \angle \theta$ का त्रिभुजांक $x, y, 1$ से

बाँया पक्ष $= (1 + \tan^2 \theta)(\cos^2 \theta) = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)(x^2) = \frac{x^2 + y^2}{x^2} * x^2 = x^2 + y^2 = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 3■ सिद्ध कीजिए $(1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = \tan^2 \theta$

हल $m \angle \theta$ का त्रिभुजांक $x, y, 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= (1 - \cos^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) = (1 - x^2)\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \\ &= y^2 * \frac{x^2 + y^2}{x^2} = y^2 * \frac{1}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} = \tan^2 \theta = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 4■ सिद्ध कीजिए $(1 - \cos^2 \theta)(\cot^2 \theta) = \cos^2 \theta$

हल $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\text{बाँया पक्ष} = (1 - \cos^2 \theta)(\cot^2 \theta) = (1 - x^2)\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = y^2 * \frac{x^2}{y^2} = x^2 = \cos^2 \theta = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 5■ सिद्ध कीजिए $\sin^3 A \cos A + \cos^3 A \sin A = \sin A \cos A$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \sin^3 A \cos A + \cos^3 A \sin A = y^3 x + x^3 y \\ &= yx(y^2 + x^2) = yx * 1 = yx = \sin A \cos A = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 6■ सिद्ध कीजिए $\sin^4 A - \cos^4 A = \sin^2 A - \cos^2 A$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \sin^4 A - \cos^4 A = y^4 - x^4 = (y^2 + x^2)(y^2 - x^2) \\ &= (1)(y^2 - x^2) = \sin^2 A - \cos^2 A = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 7■ सिद्ध कीजिए $\cos^4 A - \sin^4 A = 2\cos^2 A - 1$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \cos^4 A - \sin^4 A = x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (1)(x^2 - y^2) = \{x^2 - (1 - x^2)\} = 2x^2 - 1 \\ &= 2\cos^2 A - 1 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 8■ सिद्ध कीजिए $(\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= (\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = (y + x)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = (y + x)\left(\frac{y^2 + x^2}{xy}\right) = (y + x) * \frac{1}{xy} = \frac{y + x}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \\ &= \sec A + \operatorname{cosec} A = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 9■ सिद्ध कीजिए $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= (\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = (y + x)^2 + (y - x)^2 \\ &= (y^2 + x^2 + 2yx) + (y^2 + x^2 - 2yx) \\ &= 2(y^2 + x^2) = 2 * 1 = 2 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 10■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos A}{\sec A} + \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} = 1$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\text{बाँया पक्ष} = \frac{\cos A}{\sec A} + \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} = \frac{x}{\frac{1}{x}} + \frac{y}{\frac{1}{y}} = x^2 + y^2 = 1 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 11■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} \theta$

हल $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{y}{1 + x} + \frac{1 + x}{y} = \frac{y^2 + 1 + 2x + x^2}{(1 + x) * y} = \frac{(y^2 + x^2) + 1 + 2x}{(1 + x) * y} \\ &= \frac{1 + 1 + 2x}{(1 + x) * y} = \frac{2 + 2x}{(1 + x) * y} = \frac{2 * (1 + x)}{(1 + x) * y} = \frac{2}{y} = 2 \operatorname{cosec} \theta = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 12■ सिद्ध कीजिए $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$

हल $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow y * y = (1+x)(1-x) \Rightarrow \frac{1+x}{y} = \frac{y}{1-x} \Rightarrow \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} \quad \text{प्रश्न समिका प्राप्त सिद्ध।}$$

उदाहरण 13■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{Cosec}\theta + \cot\theta$

हल $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y * y = (1+x)(1-x)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-x} = \frac{1+x}{y} \Rightarrow \frac{y}{1-x} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \operatorname{Cosec}\theta + \cot\theta \quad \text{प्रश्न समिका प्राप्त सिद्ध।}$$

उदाहरण 14■ सिद्ध कीजिए $\sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sec\theta + \tan\theta$

हल $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \sqrt{\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} * \sqrt{\frac{1+y}{1+y}} = \sqrt{\frac{(1+y)^2}{1-y^2}} \\ &= \frac{1+y}{\sqrt{x^2}} = \frac{1+y}{x} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x} = \sec\theta + \tan\theta = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।} \end{aligned}$$

उदाहरण 15■ सिद्ध कीजिए $\frac{\operatorname{Cosec}\theta + \cot\theta}{\operatorname{Cosec}\theta - \cot\theta} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

हल $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \sqrt{\frac{\operatorname{Cosec}\theta + \cot\theta}{\operatorname{Cosec}\theta - \cot\theta}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{y} + \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{x}{y}}} = \sqrt{\frac{\frac{1+x}{y}}{\frac{1-x}{y}}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} * \sqrt{\frac{1-x}{1-x}} \\ &= \sqrt{\frac{1-x^2}{(1-x)^2}} = \frac{\sqrt{y^2}}{1-x} = \frac{y}{1-x} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।} \end{aligned}$$

उदाहरण 16■ सिद्ध कीजिए $\frac{\tan A + \cot B}{\cot A + \tan B} = \tan A \cot B$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x_1 y_1 1 एवं $m\angle B$ का त्रिभुजांक x_2 y_2 1 से

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \frac{\tan A + \cot B}{\cot A + \tan B} = \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{x_2}{y_2}}{\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\frac{y_1 y_2 + x_1 x_2}{x_1 y_2}}{\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{y_1 x_2}} = \frac{y_1 y_2 + x_1 x_2}{x_1 y_2} * \frac{y_1 x_2}{x_2 x_1 + y_2 y_1} \\ &= \frac{y_1 x_2}{x_1 y_2} = \frac{y_1}{x_1} * \frac{x_2}{y_2} = \tan A \cot B = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।} \end{aligned}$$

उदाहरण 17■ सिद्ध कीजिए $\frac{\operatorname{Cosec} A}{\operatorname{Cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{Cosec} A}{\operatorname{Cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\text{बाँया पक्ष} = \frac{\operatorname{Cosec} A}{\operatorname{Cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{Cosec} A}{\operatorname{Cosec} A + 1} = \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y} - 1} + \frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y} + 1} = \frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y} = \frac{1+y+1-y}{1-y^2} = \frac{2}{x^2} = 2\sec^2 A = \text{दाँया पक्ष}$$

उदाहरण 18■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cot A - 1}{1 - \tan A} = \frac{\cot A + 1}{1 + \tan A}$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \frac{\cot A - 1}{1 - \tan A} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{\frac{x-y}{y}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{x-y}{y} * \frac{x}{x-y} = \frac{x}{y} = \cot A \text{ ----- (1)} \\ \text{दाँया पक्ष} &= \frac{\cot A + 1}{1 + \tan A} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{1 + \frac{y}{x}} = \frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x+y}{x}} = \frac{x+y}{y} * \frac{x}{x+y} = \frac{x}{y} = \cot A \text{ ----- (2)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} \\ \text{दाँया पक्ष} \end{aligned}} \right\}$$

(1) और (2) से बाँया पक्ष = दाँया पक्ष सिद्ध।

उदाहरण 19■ सिद्ध कीजिए $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\cot A}{1-\tan A} = \frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{x}{y}} + \frac{\frac{x}{y}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y-x}{y}} + \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x-y}{x}} = \frac{y^2}{x(y-x)} + \frac{x^2}{y(x-y)} = \frac{y^2}{x(y-x)} - \frac{x^2}{y(y-x)} \\ &= \frac{y^3-x^3}{xy(y-x)} = \frac{(y-x)(x^2+y^2+xy)}{xy(y-x)} = \frac{(x^2+y^2)+xy}{xy} = \frac{1+xy}{xy} \\ &= \frac{1}{xy} + 1 = \frac{1}{x} * \frac{1}{y} + 1 = \sec A \operatorname{cosec} A + 1 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 20■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos A}{1+\tan A} - \frac{\sin A}{1+\cot A} = \cos A - \sin A$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \frac{\cos A}{1+\tan A} - \frac{\sin A}{1+\cot A} = \frac{x}{1+\frac{y}{x}} - \frac{y}{1+\frac{x}{y}} = \frac{x}{\frac{x+y}{x}} - \frac{y}{\frac{y+x}{y}} = \frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y} \\ &= \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = x-y = \cos A - \sin A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 21■ सिद्ध कीजिए $\frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x*x = (1-y)(1+y)$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+y} = \frac{1-y}{x} \text{ के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर } \Rightarrow 1 - \frac{x}{1+y} = 1 - \frac{1-y}{x} \Rightarrow \frac{1+y-x}{1+y} = \frac{x-1+y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y-x}{x-1+y} = \frac{1+y}{x} \text{ के बाँये पक्ष के हर एवं अंश को अलग-अलग } x \text{ द्वारा विभाजित करने पर } \Rightarrow \frac{\frac{1+y-x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{y}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{y}{x}} = \frac{1+y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\sec A + \tan A - 1}{1 - \sec A + \tan A} = \frac{1+\sin A}{\cos A} \Rightarrow \frac{\tan A + \sec A - 1}{\tan A - \sec A + 1} = \frac{1+\sin A}{\cos A} \text{ प्रश्न समिका प्राप्त सिद्ध।}$$

उदाहरण 22■ सिद्ध कीजिए $\frac{1+\sin A + \cos A}{1-\sin A + \cos A} = \frac{1+\sin A}{\cos A}$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2 \Rightarrow x*x = (1-y)(1+y)$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+y} = \frac{1-y}{x} \text{ के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने पर } \Rightarrow \frac{x}{1+y} + 1 = \frac{1-y}{x} + 1 \Rightarrow \frac{1+y+x}{1+y} = \frac{1-y+x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+y+x}{1-y+x} = \frac{1+y}{x} \Rightarrow \frac{1+\sin A + \cos A}{1-\sin A + \cos A} = \frac{1+\sin A}{\cos A} \text{ प्रश्न समिका प्राप्त सिद्ध।}$$

उदाहरण 23■ सिद्ध कीजिए $\frac{1+\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A + 1} = \frac{1+\cos A}{\sin A}$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 से $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow y*y = (1+x)(1-x)$

$$\Rightarrow \frac{y}{1+x} = \frac{1-x}{y} \text{ के दोनों पक्ष में 1 जोड़ने पर } \Rightarrow \frac{y}{1+x} + 1 = \frac{1-x}{y} + 1 \Rightarrow \frac{y+1+x}{1+x} = \frac{1-x+y}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{y+1+x}{1-x+y} = \frac{1+x}{y} \text{ के बाँये पक्ष के हर एवं अंश को अलग-अलग } y \text{ द्वारा विभाजित करने पर } \Rightarrow \frac{\frac{y+1+x}{y} - \frac{1}{y} + \frac{x}{y}}{\frac{1}{y} - \frac{x}{y} + \frac{y}{y}} = \frac{1+x}{y}$$

$$\Rightarrow \frac{1+\operatorname{cosec} A + \cot A}{\operatorname{cosec} A - \cot A + 1} = \frac{1+\cos A}{\sin A} \text{ प्रश्न समिका प्राप्त सिद्ध।}$$

उदाहरण 24■ सिद्ध कीजिए $2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 0$

हल $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$$\text{बाँया पक्ष} = 2(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - 3(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 1 = 2(y^6 + x^6) - 3(y^4 + x^4) + 1$$

$$= 2\{(x^2)^3 + (y^2)^3\} - 3y^4 - 3x^4 + 1 = 2\{(y^2 + x^2)(y^4 - y^2x^2 + x^4)\} - 3y^4 - 3x^4 + 1$$

$$= 2\{(1)(y^4 - y^2x^2 + x^4)\} - 3y^4 - 3x^4 + 1 = 2y^4 - 2y^2x^2 + 2x^4 - 3y^4 - 3x^4 + 1$$

$$= 1 - \{y^4 + 2y^2x^2 + x^4\} = 1 - (y^2 + x^2)^2 = 1 - (1)^2 = 1 - 1 = 0 = \text{दाया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 25■ यदि $m\cos A + n\sin A = P$ तथा $m\sin A - n\cos A = Q$ हो तो सिद्ध कीजिए $P^2 + Q^2 = m^2 + n^2$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$m\cos A + n\sin A = P \Rightarrow mx + ny = P \therefore P^2 = m^2x^2 + 2mnxy + n^2y^2 \text{ ----- (1)}$$

$$m\sin A - n\cos A = Q \Rightarrow my - nx = Q \therefore Q^2 = m^2y^2 - 2mnxy + n^2x^2 \text{ ----- (2)}$$

$$\text{समिका (1) + (2) से } P^2 + Q^2 = m^2(x^2 + y^2) + n^2(y^2 + x^2) \Rightarrow P^2 + Q^2 = m^2(1) + n^2(1)$$

$$\Rightarrow P^2 + Q^2 = m^2 + n^2 \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 26■ यदि $\tan A + \sin A = m$ तथा $\tan A - \sin A = n$ हो तो सिद्ध कीजिए $4\sqrt{mn} = m^2 - n^2$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x \ y \ 1$ से

$$\tan A + \sin A = m \Rightarrow \frac{y}{x} + y = m \text{ ----- (1)}$$

$$\tan A - \sin A = n \Rightarrow \frac{y}{x} - y = n \text{ ----- (2)}$$

$$\text{समिका (1) के वर्ग मान में (2) के वर्ग मान का घटाने पर - } \left(\frac{y}{x} + y\right)^2 - \left(\frac{y}{x} - y\right)^2 = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow \left\{\left(\frac{y}{x} + y\right) + \left(\frac{y}{x} - y\right)\right\} \left\{\left(\frac{y}{x} + y\right) - \left(\frac{y}{x} - y\right)\right\} = m^2 - n^2$$

$$\Rightarrow 2\frac{y}{x} * 2y = m^2 - n^2 \Rightarrow 4\frac{y^2}{x} = m^2 - n^2 \text{ ----- (3) .}$$

$$\text{समिका (1) और (2) का गुणा करने पर - } \left(\frac{y}{x} + y\right)\left(\frac{y}{x} - y\right) = mn \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 - y^2 = mn \Rightarrow \frac{y^2 - x^2y^2}{x^2} = mn$$

$$\Rightarrow \frac{y^2(1 - x^2)}{x^2} = mn \Rightarrow \frac{y^2(y^2)}{x^2} = mn$$

$$\Rightarrow \frac{y^4}{x^2} = mn \Rightarrow \sqrt{\frac{y^4}{x^2}} = \sqrt{mn} \Rightarrow \frac{y^2}{x} = \sqrt{mn} \text{ समिका 3 में प्रतिस्थापित करने पर -}$$

$$4\sqrt{mn} = m^2 - n^2 \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 27■ यदि $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos B$ हो तो सिद्ध कीजिए $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin B$

हल $m\angle A$ का त्रिभुजांक $x_1 \ y_1 \ 1$ एवं $m\angle B$ का त्रिभुजांक $x_2 \ y_2 \ 1$ से

$$\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos B \Rightarrow x_1 + y_1 = \sqrt{2} x_2 \text{ ----- (1)}$$

समिका (1) के दोनों पक्ष का वर्ग करने पर- $x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 = 2x_2^2$ में $x_1^2 + y_1^2 = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$$1 + 2x_1y_1 = 2x_2^2 \Rightarrow 2x_1y_1 = 2x_2^2 - 1 \text{ ----- (2)}$$

पुनः $(x_1 - y_1)^2 = (x_1 + y_1)^2 - 4x_1y_1$ में समिका (1) और (2) से प्रतिस्थापित करने पर-

$$(x_1 - y_1)^2 = (\sqrt{2} x_2)^2 - 2(2x_2^2 - 1) = 2x_2^2 - 4x_2^2 + 2 = 2x_2^2 - 4x_2^2 + 2 = 2 - 2x_2^2 = 2(1 - x_2^2)$$

$$= 2y_2^2 \therefore x_1 - y_1 = \sqrt{2} y_2 \Rightarrow \cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin B \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 28■ यदि $x = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$ हो तो सिद्ध कीजिए $\sin \theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

हल $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक $p \ q \ 1$ से $\cos \theta = p$, $\sin \theta = q$

$$p^2 + q^2 = 1 \Rightarrow p^2 = 1 - q^2 \Rightarrow \frac{p}{1 - q} = \frac{1 + q}{p} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = x$$

$$\therefore \frac{p}{1 - q} * \frac{1 + q}{p} = x * x \Rightarrow \frac{1 + q}{1 - q} = x^2 \text{ में योगान्तर अनुपात नियम से - } \frac{(1 + q) + (1 - q)}{(1 + q) - (1 - q)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow \frac{2}{2q} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \Rightarrow q = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow \sin \theta = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 29■ यदि $\tan \theta = \frac{a}{b}$ हो तो $\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल 1 $\tan \theta = \frac{a}{b}$ के सापेक्ष $m \angle \theta$ का त्रिभुजांक b a $\sqrt{b^2 + a^2}$ से

$$\sin \theta = \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}}, \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}} \therefore \frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{a * \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} + b * \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}}{a * \frac{a}{\sqrt{b^2 + a^2}} - b * \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2}}} = \frac{\frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}}{\frac{b^2 + a^2}{\sqrt{b^2 + a^2}}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \text{ उत्तर।}$$

हल 2 $\tan \theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} * \frac{a}{b} = \frac{a}{b} * \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta} = \frac{a^2}{b^2}$ के लिए योगान्तर अनुपात नियम से—

$$\frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \text{ उत्तर।}$$

हल 3 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{a}{b} = k$ से $\sin \theta = k \cos \theta$ तथा $a = bk$

$$\therefore \frac{a \sin \theta + b \cos \theta}{a \sin \theta - b \cos \theta} = \frac{(bk)(k \cos \theta) + b \cos \theta}{(bk)(k \cos \theta) - b \cos \theta} = \frac{b \cos \theta (k^2 + 1)}{b \cos \theta (k^2 - 1)} = \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{a^2 + b^2}{b^2}}{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \text{ उत्तर।}$$

-----02-----

अध्याय -3

विशिष्ट कोण माप के त्रिकोणमिति निष्पत्तियों के मान

चूँकि अध्याय 1 में (0° से $n \times 360^\circ$ में से) कोणों के विशिष्ट मापों एवं प्रकारों के त्रिभुजांको की गणना विस्तारित किया जा चुका है।
अतः सम्बंधित कोणों माप एवं प्रकार के त्रिभुजांकों के सापेक्ष उनके त्रिकोणमिति निष्पत्ति तालिका प्रस्तुत है।

तालिका 3-1
कोणों के विशिष्ट मापों त्रिभुजांक के सापेक्ष उनके त्रिकोणमिति निष्पत्ति

$m\angle\theta$		त्रिभुजांक			$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
अंश माप	रेडियन माप	आधार x	लम्ब y	कर्ण z	$\frac{y}{z}$	$\frac{x}{z}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{z}{x}$	$\frac{z}{y}$
0°	0^r	1	0	1	0	1	0	∞	1	∞
30°	$(\pi/6)^r$	$\sqrt{3}$	1	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
45°	$(\pi/4)^r$	1	1	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$(\pi/3)^r$	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$
90°	$(\pi/2)^r$	0	1	1	1	0	∞	0	∞	0
120°	$(2\pi/3)^r$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}/2$	$\bar{1}/2$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}/\sqrt{3}$	$\bar{2}$	$2/\sqrt{3}$
135°	$(3\pi/4)^r$	$\bar{1}$	1	$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\bar{1}/\sqrt{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$(5\pi/6)^r$	$\sqrt{3}$	1	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2
180°	π^r	$\bar{1}$	0	1	0	$\bar{1}$	0	∞	$\bar{1}$	∞
210°	$(7\pi/6)^r$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}$	2	$\bar{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\bar{2}/\sqrt{3}$	$\bar{2}$
225°	$(5\pi/4)^r$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\sqrt{2}$	$\bar{1}/\sqrt{2}$	$\bar{1}/\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
240°	$(4\pi/3)^r$	$\bar{1}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}/2$	$\bar{1}/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}/\sqrt{3}$
270°	$(3\pi/2)^r$	0	$\bar{1}$	1	$\bar{1}$	0	∞	0	∞	$\bar{1}$
300°	$(5\pi/3)^r$	1	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}/\sqrt{3}$	2	$\bar{2}/\sqrt{3}$
315°	$(7\pi/4)^r$	1	$\bar{1}$	$\sqrt{2}$	$\bar{1}/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
330°	$(11\pi/6)^r$	$\sqrt{3}$	$\bar{1}$	2	$\bar{1}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\bar{1}/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$\bar{2}$
360°	$2\pi^r$	1	0	1	0	1	∞	0	1	∞
$n \times 360^\circ$	$2n\pi^r$	1	0	1	0	1	∞	0	1	∞

तालिका 3-2

($\theta < 90^\circ$) के प्रतिबंध पर आधार कोण $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक एवं त्रिभुजांक आधारित त्रिकोणमिति निष्पत्तियों के सापेक्ष कोण के विभिन्न प्रकारों के त्रिभुजांक एवं त्रिभुजांक आधारित त्रिकोणमिति निष्पत्तियों

कोण के प्रकार	त्रिभुजांक			$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$\sec\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$
आधार कोण $m\angle\theta$	x	y	1	Y	X	y/x	x/y	1/x	1/y
शून्य कोण $m\angle 0$	1	0	1	0	1	0	∞	1	∞
ऋणात्मक कोण $m\angle\bar{\theta}$	x	-y	1	-y	X	-(y/x)	-(x/y)	1/x	-(1/y)
समकोण $m\angle 90^\circ$	0	1	1	1	0	∞	0	∞	1
पूरक कोण $m\angle(90 - \theta)^\circ$	y	x	1	X	y	x/y	y/x	1/y	1/x
अधिक कोण $m\angle(90 + \theta)^\circ$	-y	x	1	X	-y	-(x/y)	-(y/x)	-(1/y)	1/x
सरल या ऋजु कोण $m\angle 180^\circ$	-1	0	1	0	-1	0	∞	-1	∞
सम्पूरक कोण $m\angle(180 - \theta)^\circ$	-x	y	1	Y	-x	-(y/x)	-(x/y)	-(1/x)	1/y
अधि कोण $m\angle(180 + \theta)^\circ$	-x	-y	1	-y	-x	y/x	x/y	-(1/x)	-(1/y)
अधि-समकोण कोण $m\angle 270^\circ$	0	-1	1	-1	0	∞	0	∞	-1
अधि-पूरक कोण $m\angle(270 - \theta)^\circ$	-y	-x	1	-x	-y	x/y	y/x	-(1/y)	-(1/x)
अधिक अधि-कोण $m\angle(270 + \theta)^\circ$	y	-x	1	-x	y	-(x/y)	-(y/x)	1/y	-(1/x)
सम्पूर्ण कोण $m\angle 360^\circ$	1	0	1	0	1	0	∞	1	∞
सम्पूर्ण-पूरक कोण $m\angle(360 - \theta)^\circ$	x	-y	1	-y	X	-(y/x)	-(x/y)	1/x	-(1/y)
अधिकसम्पूर्ण कोण $m\angle(360 + \theta)^\circ$	x	y	1	Y	X	y/x	x/y	1/x	1/y

टीप उपरोक्त तालिका में नामांकित त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ दर्ज करने एवं पढ़ने के संदर्भ में-

y के लिए $\sin\theta$, x के लिए $\cos\theta$, y/x के लिए $\tan\theta$, x/y के लिए $\cot\theta$, 1/x के लिए $\sec\theta$, तथा 1/y के लिए $\operatorname{cosec}\theta$ दर्ज करे एवं पढ़े।

उदाहरणार्थ- आधार कोण $m\angle\theta$ के त्रिभुजांक x y 1 के सापेक्ष

अधि-पूरक कोण $m\angle(270 - \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक -y -x 1 होगा।

तब आधार कोण $m\angle\theta$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ- $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = y/x$, $\cot\theta = x/y$, $\sec\theta = 1/x$ तथा $\operatorname{cosec}\theta = 1/y$ प्राप्त होगा। जिसके सापेक्ष अधि-पूरक कोण $m\angle(270 - \theta)^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ- $\sin(270 - \theta)^\circ = -x = -\cos\theta$, $\cos(270 - \theta)^\circ = -y = -\sin\theta$, $\tan(270 - \theta)^\circ = x/y = \cot\theta$, $\cot(270 - \theta)^\circ = y/x = \tan\theta$, $\sec(270 - \theta)^\circ = -(1/y) = -\operatorname{cosec}\theta$, $\operatorname{cosec}(270 - \theta)^\circ = -(1/x) = -\sec\theta$ दर्ज करे एवं पढ़े।

अध्याय 2 अनुच्छेद 2.3 में प्राप्त समीकरण तथा तालिका 3.1 एवं 3.2 का अनुप्रयोग में हलित उदाहरण

उदाहरण 1 $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल 1 तालिका 3.1 से प्राप्त मान रखने पर-

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ उत्तर।}$$

हल 2 $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = \sin 30^\circ \cos(90 - 30)^\circ + \cos 30^\circ \sin(90 - 30)^\circ$

$$= \sin 30^\circ * \sin 30^\circ + \cos 30^\circ * \cos 30^\circ \text{ तालिका 3.2 } m\angle(90 - \theta)^\circ$$

$$= \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \text{ उत्तर अनुच्छेद 2.3 समिका 1}$$

उदाहरण 2 $4\sin^2 30^\circ + \tan^2 60^\circ + \sec^2 45^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल तालिका 3.1 से प्राप्त मान रखने पर-

$$4\sin^2 30^\circ + \tan^2 60^\circ + \sec^2 45^\circ = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = 1 + 3 + 2 = 6 \text{ उत्तर।}$$

उदाहरण 3■ यदि $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ हो तो $\cot 75^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल $\cot 75^\circ = \cot(90 - 15)^\circ = \tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ **उत्तर।** तालिका 3.2 $m \angle(90 - \theta)^\circ$

उदाहरण 4■ सिद्ध कीजिए $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = \sin 45^\circ \sin 60^\circ \tan 45^\circ \cos 60^\circ$

हल बाँया पक्ष $= \tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\text{दाँया पक्ष} = \sin 45^\circ \sin 60^\circ \tan 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \sqrt{3} * \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

अतः बाँया पक्ष = दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 5■ $m\angle A = 45^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

हल बाँया पक्ष $= \sin 2A = \sin 2 * 45^\circ = \sin 90^\circ = 1$

$$\text{दाँया पक्ष} = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{2 \tan 45^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \frac{2 * 1}{1 + 1^2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{अतः बाँया पक्ष} = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 6■ सिद्ध कीजिए $\sin 60^\circ = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ}$

हल बाँया पक्ष $= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{दाँया पक्ष} = \frac{2 \tan 30^\circ}{1 + \tan^2 30^\circ} = \frac{2 * \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} * \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{अतः बाँया पक्ष} = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 7■ सिद्ध कीजिए $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4}$

हल बाँया पक्ष $= \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{2} = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 90^\circ = \frac{1}{4} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} \quad \text{तथा} \quad \text{दाँया पक्ष} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

अतः बाँया पक्ष = दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 8■ सिद्ध कीजिए $3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 0$

हल बाँया पक्ष $= 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{3} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\pi}{2}$

$$= 3 \tan^2 30^\circ - \frac{4}{3} \sin^2 60^\circ - 2 \sin^2 45^\circ + \sin^2 90^\circ$$

$$= 3 * \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{4}{3} * \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2$$

$$= 3 * \frac{1}{3} - \frac{4}{3} * \frac{3}{4} - 2 * \frac{1}{2} + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 9■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 24^\circ}{\cos 66^\circ} = 1$

हल 1 बाँया पक्ष $= \frac{\sin 24^\circ}{\cos 66^\circ} = \frac{\sin(90 - 66)^\circ}{\cos 66^\circ} = \frac{\cos 66^\circ}{\cos 66^\circ} = 1 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$

हल 2 बाँया पक्ष $= \frac{\sin 24^\circ}{\cos 66^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\cos(90 - 24)^\circ} = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 24^\circ} = 1 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{सिद्ध।}$

उदाहरण 10■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ}{\sec 45^\circ + \tan 45^\circ}$

$$\text{हल} \quad \text{बाँया पक्ष} = \frac{\cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \quad \text{दाँया पक्ष} = \frac{\operatorname{cosec} 45^\circ - \cot 45^\circ}{\sec 45^\circ + \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

अतः बाँया पक्ष = दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 11■ मान ज्ञात कीजिए- (a) $\sin 1920^\circ$ (b) $\cos 1500^\circ$ (c) $\tan 765^\circ$ (d) $\tan(-585^\circ)$

हल (a) $\sin 1920^\circ = \sin(5 * 360 + 120)^\circ = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **उत्तर।**

$$(b) \cos 1500^\circ = \cos(4 \times 360 + 60)^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ उत्तर।}$$

$$(c) \tan 765^\circ = \tan(2 \times 360 + 45)^\circ = \tan 45^\circ = 1 \text{ उत्तर।}$$

$$(d) \tan(-585^\circ) = -\tan 585^\circ = -\tan(2 \times 360 - 135)^\circ = -\tan(-135)^\circ = \tan 135^\circ = -1 \text{ उत्तर}$$

उदाहरण 12 ■ मान ज्ञात कीजिए—

$$(a) \sin 240^\circ \quad (b) \cos 450^\circ \quad (c) \tan 330^\circ \quad (d) \cot 390^\circ \quad (e) \operatorname{cosec} 780^\circ$$

$$\text{हल} \quad (a) \sin 240^\circ = \sin(360 - 120)^\circ = -\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ उत्तर।}$$

$$(b) \cos 450^\circ = \cos(360 + 90)^\circ = \cos 90^\circ = 0 \text{ उत्तर।}$$

$$(c) \tan 330^\circ = \tan(360 - 30)^\circ = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ उत्तर।}$$

$$(d) \cot 390^\circ = \cot(360 + 30)^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \text{ उत्तर।}$$

$$(e) \operatorname{cosec} 780^\circ = \operatorname{cosec}(2 \times 360 + 60)^\circ = \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ उत्तर।}$$

उदाहरण 13 ■ $\tan \theta + \cot \theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{जबकि } m \angle \theta = \text{रेडियन में } (a) \frac{\pi}{3}, (b) \frac{7\pi}{4}, (c) \frac{13\pi}{4}, (d) \frac{13\pi}{6} \text{ है।}$$

$$\text{हल} \quad (a) m \angle \theta = \frac{\pi}{3} \text{ के लिए } \tan \theta + \cot \theta = \tan \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ + \cot 60^\circ \\ = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ उत्तर।}$$

$$(b) m \angle \theta = \frac{7\pi}{4} \text{ के लिए } \tan \theta + \cot \theta = \tan \frac{7\pi}{4} + \cot \frac{7\pi}{4} = \tan 315^\circ + \cot 315^\circ \\ = \tan(360 - 45)^\circ + \cot(360 - 45)^\circ \\ = -\tan 45^\circ + (-\cot 45^\circ) \\ = -1 + (-1) = -2 \text{ उत्तर।}$$

$$(c) m \angle \theta = \frac{13\pi}{4} \text{ के लिए } \tan \theta + \cot \theta = \tan \frac{13\pi}{4} + \cot \frac{13\pi}{4} = \tan 585^\circ + \cot 585^\circ \\ = \tan(2 \times 360 - 135)^\circ + \cot(2 \times 360 - 135)^\circ \\ = -\tan 135^\circ + (-\cot 135^\circ) \\ = -(-1) + \{-(-1)\} = 2$$

$$(d) m \angle \theta = \frac{13\pi}{6} \text{ के लिए } \tan \theta + \cot \theta = \tan \frac{13\pi}{6} + \cot \frac{13\pi}{6} = \tan 390^\circ + \cot 390^\circ \\ = \tan(360 + 30)^\circ + \cot(360 + 30)^\circ \\ = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ उत्तर।}$$

उदाहरण 14 ■ $0^\circ \leq m \angle \theta \leq 360^\circ$ के प्रति $m \angle \theta$ के समस्त मान ज्ञात कीजिए। यदि—

$$(a) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (b) \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (c) \tan \theta = -1 \text{ हो।}$$

$$\text{हल} \text{ तलिका 3.1 के अवलोकन से— } (a) \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ के प्रति } m \angle \theta = 60^\circ, 120^\circ$$

$$(b) \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ के प्रति } m \angle \theta = 60^\circ, -60^\circ = (360 - 60)^\circ = 300^\circ$$

$$(c) \tan \theta = -1 \text{ के प्रति } m \angle \theta = -45^\circ = (360 - 45)^\circ = 315^\circ$$

उदाहरण 15 ■ यदि $\tan \theta + \cot \theta = 2$ हो तो $0^\circ \leq m \angle \theta \leq 180^\circ$ के प्रति $m \angle \theta$ के समस्त मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल} \quad \tan \theta + \cot \theta = 2 \Rightarrow \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 1 + 1 = 1 + \frac{1}{1} \therefore \tan \theta = 1$$

तलिका 3.1 के अवलोकन से $\theta = 45^\circ$ उत्तर।

उदाहरण 16■ यदि $\tan^2 \theta = \frac{1}{3}$ हो तो $0^\circ \leq m \angle \theta \leq 180^\circ$ के प्रति $m \angle \theta$ के समस्त मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^2 \theta = \frac{1}{3} \therefore \tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ अतः (1) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ के प्रति तलिका 3.1 के अवलोकन से $\theta = 30^\circ$ उत्तर।

(2) $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ के प्रति तलिका 3.1 के अवलोकन से $\theta = 150^\circ$ उत्तर।

उदाहरण 17■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos \theta}{\sin(90+\theta)} + \frac{\sin(-\theta)}{\sin(180+\theta)} - \frac{\tan(90+\theta)}{\cot \theta} = 3$

हल बाँया पक्ष $= \frac{\cos \theta}{\sin(90+\theta)} + \frac{\sin(-\theta)}{\sin(180+\theta)} - \frac{\tan(90+\theta)}{\cot \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{-\sin \theta}{-\sin \theta} - \frac{-\cot \theta}{\cot \theta}$
 $= 1+1+1=3 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**

उदाहरण 18■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ} * \frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ} * \frac{\operatorname{cosec} 15^\circ}{\sec 75^\circ} = 1$

हल बाँया पक्ष $= \frac{\sin 35^\circ}{\cos 55^\circ} * \frac{\tan 25^\circ}{\cot 65^\circ} * \frac{\operatorname{cosec} 15^\circ}{\sec 75^\circ} = \frac{\sin(90-55)^\circ}{\cos 55^\circ} * \frac{\tan(90-65)^\circ}{\cot 65^\circ} * \frac{\operatorname{cosec}(90-75)^\circ}{\sec 75^\circ}$
 $= \frac{\cos 55^\circ}{\cos 55^\circ} * \frac{\cot 65^\circ}{\cot 65^\circ} * \frac{\sec 75^\circ}{\sec 75^\circ} = 1*1*1 = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 19■ सिद्ध कीजिए $\cot \theta - \tan(90 + \theta) + \tan(180 + \theta) + \tan(360 - \theta) = 0$

हल बाँया पक्ष $= \cot \theta - \tan(90 + \theta) + \tan(180 + \theta) + \tan(360 - \theta)$
 $= \cot \theta - \cot \theta + \tan \theta - \tan \theta = 0 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 20■ सिद्ध कीजिए $\cot(270 - \theta) * \cot(270 + \theta) * \cot(540 - \theta) * \cot(540 + \theta) = 1$

हल 1 बाँया पक्ष $= \cot(270 - \theta) * \cot(270 + \theta) * \cot(540 - \theta) * \cot(540 + \theta)$
 $= \tan \theta * (-\tan \theta) * \cot \{270 + (270 + \theta)\} * \cot \{270 + (270 - \theta)\}$
 $= -\tan^2 \theta \{ -\tan(270 + \theta) \} * \{ -\tan \{(270 - \theta)\} \}$
 $= -\tan^2 \theta * \{ -(-\cot \theta) \} * \{ -(\cot \theta) \}$
 $= -\tan^2 \theta * (-\cot^2 \theta) = \tan^2 \theta * \cot^2 \theta = \tan^2 \theta * \frac{1}{\tan^2 \theta} = 1$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

हल 2 बाँया पक्ष $= \cot(270 - \theta) * \cot(270 + \theta) * \cot(540 - \theta) * \cot(540 + \theta)$
 $= \cot\{360 - (90 + \theta)\} * \cot\{360 - (90 - \theta)\} *$
 $\cot\{360 + (180 - \theta)\} * \cot\{360 + (180 + \theta)\}$
 $= \{-\cot(90 + \theta)\} * \{-\cot(90 - \theta)\} * \{\cot(180 - \theta)\} * \{\cot(180 + \theta)\}$
 $= \cot(90 + \theta) * \cot(90 - \theta) * \cot(180 - \theta) * \cot(180 + \theta)$
 $= (-\tan \theta) * \tan \theta * (-\tan \theta) * (-\cot \theta) * \cot \theta$
 $= \tan \theta * \tan \theta * \frac{1}{\tan \theta} * \frac{1}{\tan \theta} = 1$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 21■ सिद्ध कीजिए $\cos \theta + \sin(270 + \theta) - \sin(270 - \theta) + \cos(180 + \theta) = 0$

हल बाँया पक्ष $= \cos \theta + \sin(270 + \theta) - \sin(270 - \theta) + \cos(180 + \theta)$
 $= \cos \theta + (-\cos \theta) - (-\cos \theta) + (-\cos \theta)$
 $= \cos \theta - \cos \theta + \cos \theta - \cos \theta = 0 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 22■ सिद्ध कीजिए $\operatorname{cosec}(270 - \theta) * \operatorname{cosec}(270 + \theta) + \cot(270 - \theta) * \cot(270 + \theta) = 1$

हल बाँया पक्ष $= \operatorname{cosec}(270 - \theta) * \operatorname{cosec}(270 + \theta) * \cot(270 - \theta) * \cot(270 + \theta)$
 $= (-\sec \theta) * (-\sec \theta) + \tan \theta * (-\tan \theta)$
 $= \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = (1 + \tan^2 \theta) - \tan^2 \theta = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 23■ सिद्ध कीजिए $\tan \theta + \tan(90 + \theta) - \tan(180 + \theta) + \tan(270 - \theta) = 0$

हल बाँया पक्ष $= \tan \theta + \tan(90 + \theta) - \tan(180 + \theta) + \tan(270 - \theta)$
 $= \tan \theta + (-\cot \theta) + (-\tan \theta) + \cot \theta = 0 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध**।

उदाहरण 24■ सिद्ध कीजिए $\sin \theta + \sin(90 + \theta) - \sin(180 + \theta) + \sin(270 + \theta) = 0$

हल बाँया पक्ष = $\sin\theta + \sin(90 + \theta) - \sin(180 + \theta) + \sin(270 + \theta) = 0$
 $= \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta + (-\cos\theta)$
 $= \sin\theta + \cos\theta - \sin\theta - \cos\theta = 0 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

उदाहरण 25■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin(180 + \theta) \cdot \cos(270 - \theta)}{\sin(180 - \theta) \cdot \cos(270 + \theta)} = 1$

हल माना कि $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक x y 1
 $\therefore m\angle 0^\circ = m\angle(\theta - \theta)$ का त्रिभुजांक 1 0 1
 $m\angle 0^\circ$ का पूरक कोण = $m\angle 90^\circ$ का त्रिभुजांक 0 1 1
 $m\angle 0^\circ$ का सम्पूरक कोण = $m\angle 180^\circ$ का त्रिभुजांक $\bar{1}$ 0 1
 $m\angle\theta$ का सम्पूरक कोण = $m\angle(180 - \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक $\bar{x}$ y 1
 $m\angle\theta$ का अधिपूरक कोण = $m\angle(180 + \theta)^\circ$ का त्रिभुजांक $\bar{x}$ $\bar{y}$ 1
 $m\angle(270 - \theta)^\circ = m\angle\{90 + (180 - \theta)\}^\circ$ का त्रिभुजांक $\bar{y}$ $\bar{x}$ 1
 $m\angle(270 + \theta)^\circ = m\angle\{90 + (180 + \theta)\}^\circ$ का त्रिभुजांक y $\bar{x}$ 1 का अनु प्रयोग से
बाँया पक्ष = $\frac{\sin(180 + \theta) \cdot \cos(270 - \theta)}{\sin(180 - \theta) \cdot \cos(270 + \theta)} = \frac{\bar{y} \cdot \bar{y}}{y \cdot y} = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

टीप – उदाहरण 25 का हल **हाथ कंगन को आरसी क्या** मुहावरा की प्रमाणिकता के आधार पर सीधा त्रिभुजांक आधारित प्राप्त त्रिकोण मिति निष्पत्तियों के आधार पर किया गया है। तालिका रटने से मुक्ति प्रदान करता है और त्रुटियों से मुक्त रखता है। ऐसा ही हल शेष 1 से 24 तक के उदाहरणों के हल प्रस्तुत किये जा सकते हैं। चूँकि ऐसा विश्लेषण अध्याय के प्रारंभ में किया जा चुका है। अतः तालिका की उपयोगिता बनाएँ रखा है। जो कि सीधे हल को अग्रेषित करता है।

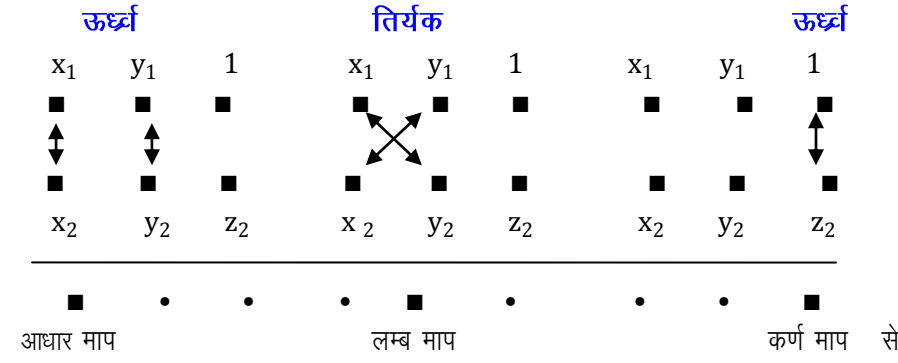
तालिका अवलोकन से बाँया पक्ष = $\frac{\sin(180 + \theta) \cdot \cos(270 - \theta)}{\sin(180 - \theta) \cdot \cos(270 + \theta)} = \frac{(-\sin\theta) \cdot (-\sin\theta)}{\sin\theta \cdot \sin\theta} = \frac{\sin\theta \cdot \sin\theta}{\sin\theta \cdot \sin\theta} = 1 =$ दाँया पक्ष **सिद्ध।**

-----03-----

अध्याय -4

दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान के कोण का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ एवं समिकाएँ

4-1 दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान के कोण का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ अध्याय 1 में समकोण Δ के त्रिभुजांक के व्यापक अध्ययन में विशिष्ट कोण मापों अध्ययन का अनुप्रयोग कर अध्याय 2 में त्रिकोणमिति निष्पत्तियों नामांकित कर तत् विषयक कुछ त्रिकोणमिति समिका सिद्ध करना अवगत कराया है। त्रिकोणमिति के व्यापक अध्ययन क्रम में दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान के कोण का त्रिकोणमिति निष्पत्तियों को प्रतिपादित करने अध्याय 1 के अनुच्छेद 1.4 में दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान का त्रिभुजांक प्राप्त करने का नियम परिपालन में निम्नानुसार विश्लेषित है।



संकेतन व्याख्या -

कोण माप	आधार	लम्ब	कर्ण
$m\angle A$ का त्रिभुजांक	x_1	y_1	z_1 एवं
$m\angle B$ का त्रिभुजांक	x_2	y_2	z_2 हो तो
$m\angle(A+B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 * x_2 - y_1 * y_2)$	$(x_2 * y_1 + x_1 * y_2)$	$z_1 * z_2$ एवं
$m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 * x_2 + y_1 * y_2)$	$(x_2 * y_1 - x_1 * y_2)$	$z_1 * z_2$ होगा।

अतः अध्याय 2 अनुच्छेद 2-1 के अन्तर्गत दर्ज तालिका $m\angle A$ का त्रिभुजांक आधार = x , लम्ब = y , कर्ण = z के प्रति $m\angle A$ की ज्या निष्पत्ति या त्रिकोणमिति निष्पत्ति के अनुसार $m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ की त्रिकोणमिति निष्पत्ति तालिका **4-1** में अवलोकिता कीजिए।

तालिका 4-1

$m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ की त्रिकोणमिति निष्पत्ति

त्रिकोणमिति निष्पत्ति	$\theta = m\angle(A+B)$	$\theta = m\angle(A-B)$
$\sin\theta$	$\frac{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}{z_1 * z_2}$	$\frac{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}{z_1 * z_2}$
$\cos\theta$	$\frac{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}{z_1 * z_2}$	$\frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}{z_1 * z_2}$
$\tan\theta$	$\frac{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$	$\frac{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}$
$\cot\theta$	$\frac{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$	$\frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}$

$Sec\theta$	$\frac{z_1 * z_2}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$	$\frac{z_1 * z_2}{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}$
$Cosec\theta$	$\frac{z_1 * z_2}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$	$\frac{z_1 * z_2}{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}$

और अधिक सहजता की ओर अग्रसर होने संकेतन व्याख्या –

त्रिभुजांक

कोण माप	आधार	लम्ब	कर्ण
$m\angle A$ का त्रिभुजांक	x_1	y_1	1 एवं
$m\angle B$ का त्रिभुजांक	x_2	y_2	1 हो तो
$m\angle(A+B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 * x_2 - y_1 * y_2)$	$(x_2 * y_1 + x_1 * y_2)$	1 एवं
$m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 * x_2 + y_1 * y_2)$	$(x_2 * y_1 - x_1 * y_2)$	1 होगा।

अतः अध्याय 2 अनुच्छेद 2-1 के अन्तर्गत दर्ज तालिका $m\angle A$ का त्रिभुजांक आधार = x , लम्ब = y , कर्ण = 1 के प्रति $m\angle A$ की ज्या निष्पत्ति या त्रिकोणमिति निष्पत्ति के अनुसार $m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ की त्रिकोणमिति निष्पत्ति तालिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिए।

$m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ की त्रिकोणमिति निष्पत्ति तालिका

त्रिकोणमिति निष्पत्ति	$\theta = m\angle(A+B)$	$\theta = m\angle(A-B)$
$\sin\theta$	$x_2 * y_1 + x_1 * y_2$	$x_2 * y_1 - x_1 * y_2$
$\cos\theta$	$x_1 * x_2 - y_1 * y_2$	$x_1 * x_2 + y_1 * y_2$
$\tan\theta$	$\frac{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$	$\frac{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$
$\cot\theta$	$\frac{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$	$\frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}$
$Sec\theta$	$\frac{1}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$	$\frac{1}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$
$Cosec\theta$	$\frac{1}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$	$\frac{1}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$

4-2 दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान की त्रिकोणमिति समिकाएँ

1• $m\angle A$ का त्रिभुजांक (x_1, y_1, z_1) के प्रति–

$$\sin A = \frac{y_1}{z_1}, \cos A = \frac{x_1}{z_1}, \tan A = \frac{y_1}{x_1}, \cot A = \frac{x_1}{y_1}, \sec A = \frac{z_1}{x_1}, \csc A = \frac{z_1}{y_1},$$

$m\angle B$ का त्रिभुजांक (x_2, y_2, z_2) के प्रति–

$$\sin B = \frac{y_2}{z_2}, \cos B = \frac{x_2}{z_2}, \tan B = \frac{y_2}{x_2}, \cot B = \frac{x_2}{y_2}, \sec B = \frac{z_2}{x_2}, \csc B = \frac{z_2}{y_2},$$

तालिका 4-1 में प्रतिस्थापनानुकूल करने पर दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान को त्रिकोणमिति समिकाएँ

m ∠A+B) के प्रति	m ∠A-B) के प्रति	प्रतिस्थापनानुकूल संक्रिया
$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \frac{x_2*y_1+x_1*y_2}{z_1*z_2} \\ &= \frac{x_2}{z_2} * \frac{y_1}{z_2} + \frac{x_1}{z_1} * \frac{y_2}{z_2} \\ &= \cos B \sin A + \cos A \sin B\end{aligned}$	$\begin{aligned}\sin(A-B) &= \frac{x_2*y_1-x_1*y_2}{z_1*z_2} \\ &= \frac{x_2}{z_2} * \frac{y_1}{z_2} - \frac{x_1}{z_1} * \frac{y_2}{z_2} \\ &= \cos B \sin A - \cos A \sin B\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $z_1 * z_2$ द्वारा भाग देने पर
$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \frac{x_1*x_2-y_1*y_2}{z_1*z_2} \\ &= \frac{x_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} - \frac{y_1}{z_1} * \frac{y_2}{z_2} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B\end{aligned}$	$\begin{aligned}\cos(A-B) &= \frac{x_1*x_2+y_1*y_2}{z_1*z_2} \\ &= \frac{x_1}{z_1} * \frac{x_2}{z_2} + \frac{y_1}{z_1} * \frac{y_2}{z_2} \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $z_1 * z_2$ द्वारा भाग देने पर
$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{x_2*y_1+x_1*y_2}{x_1*x_2-y_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}}{1 - \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\tan(A-B) &= \frac{x_2*y_1-x_1*y_2}{x_1*x_2+y_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर
$\begin{aligned}\cot(A+B) &= \frac{x_1*x_2-y_1*y_2}{x_2*y_1+x_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{x_1}{y_1} * \frac{x_2}{y_2} - 1}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\cot(A-B) &= \frac{x_1*x_2+y_1*y_2}{x_2*y_1-x_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{x_1}{y_1} * \frac{x_2}{y_2} - 1}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2$ द्वारा भाग देने पर
$\begin{aligned}\sec(A+B) &= \frac{z_1*z_2}{x_1*x_2-y_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{z_1}{x_2} * \frac{z_2}{x_2}}{1 - \frac{y_1}{x_2} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\sec(A-B) &= \frac{z_1*z_2}{x_1*x_2+y_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{z_1}{x_2} * \frac{z_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_2} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर
$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(A+B) &= \frac{z_1*z_2}{x_2*y_1+x_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{z_1}{y_1} * \frac{z_2}{y_2}}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\cot B + \cot A}\end{aligned}$	$\begin{aligned}\operatorname{cosec}(A-B) &= \frac{z_1*z_2}{x_2*y_1-x_1*y_2} \\ &= \frac{\frac{z_1}{y_1} * \frac{z_2}{y_2}}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\cot B - \cot A}\end{aligned}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2$ द्वारा भाग देने पर

2- m∠A का त्रिभुजांक ($x_1 \ y_1 \ 1$) के प्रति-

$$\sin A = y_1, \cos A = x_1, \tan A = \frac{y_1}{x_1}, \cot A = \frac{x_1}{y_1}, \sec A = \frac{1}{x_1}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{y_1},$$

m∠B का त्रिभुजांक ($x_2 \ y_2 \ 1$) के प्रति-

$$\sin B = y_2, \cos B = x_2, \tan B = \frac{y_2}{x_2}, \cot B = \frac{x_2}{y_2}, \sec B = \frac{1}{x_2}, \operatorname{cosec} B = \frac{1}{y_2},$$

तालिका 4-2 में प्रतिस्थापनानुकूल करने पर दो कोण मापों के योग एवं अन्तर मान की त्रिकोणमिति समिकाएँ

m ∠A+B) के प्रति	m ∠A – B) के प्रति	प्रतिस्थापनानुकूल संक्रिया
$\sin(A + B) = x_2 * y_1 + x_1 * y_2$ $= \cos B \sin A + \cos A \sin B$	$\sin(A - B) = x_2 * y_1 - x_1 * y_2$ $= \cos B \sin A - \cos A \sin B$	
$\cos(A + B) = x_1 * x_2 - y_1 * y_2$ $= \cos A \cos B - \sin A \sin B$	$\cos(A - B) = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$ $= \cos A \cos B + \sin A \sin B$	
$\tan(A + B) = \frac{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$ $= \frac{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}}{1 - \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\tan(A - B) = \frac{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}$ $= \frac{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}} = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर।
$\cot(A + B) = \frac{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$ $\frac{\frac{x_1}{y_1} * \frac{x_2}{y_2} - 1}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}$	$\cot(A - B) = \frac{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}$ $\frac{\frac{x_1}{y_1} * \frac{x_2}{y_2} - 1}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}} = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2$ द्वारा भाग देने पर।
$\sec(A + B) = \frac{1}{x_1 * x_2 - y_1 * y_2}$ $= \frac{1}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$ या $\sec(A + B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{1 - \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}}$ $= \frac{\sec A \sec B}{1 - \tan A \tan B}$ या $\sec(A + B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{\frac{x_2}{y_1} * \frac{y_2}{x_1} - 1}$ $= \frac{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\cot A \cot B - 1}$ या $\sec(A + B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2} * \frac{1}{y_1} * \frac{1}{y_2}}{\frac{1}{y_1} * \frac{1}{y_2} - \frac{1}{x_2} * \frac{1}{x_1}}$ $= \frac{\sec A \sec B * \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B - \sec A \sec B}$	$\sec(A - B) = \frac{1}{x_1 * x_2 + y_1 * y_2}$ $= \frac{1}{\cos A \cos B + \sin A \sin B}$ या $\sec(A - B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{1 + \frac{y_1}{x_1} * \frac{y_2}{x_2}}$ $= \frac{\sec A \sec B}{1 + \tan A \tan B}$ या $\sec(A - B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{\frac{x_2}{y_1} * \frac{y_2}{x_1} + 1}$ $= \frac{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\cot A \cot B + 1}$ या $\sec(A - B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2} * \frac{1}{y_1} * \frac{1}{y_2}}{\frac{1}{y_1} * \frac{1}{y_2} + \frac{1}{x_2} * \frac{1}{x_1}}$ $= \frac{\sec A \sec B * \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B}{\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B + \sec A \sec B}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर। दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2$ द्वारा भाग देने पर। दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2 * x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर।
$\operatorname{cosec}(A + B) = \frac{1}{x_2 * y_1 + x_1 * y_2}$ $= \frac{1}{\cos B \sin A + \cos A \sin B}$ या $\operatorname{cosec}(A + B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2}}$ $= \frac{\sec A \sec B}{\tan A + \tan B}$	$\operatorname{cosec}(A - B) = \frac{1}{x_2 * y_1 - x_1 * y_2}$ $= \frac{1}{\cos B \sin A - \cos A \sin B}$ या $\operatorname{cosec}(A - B) = \frac{\frac{1}{x_1} * \frac{1}{x_2}}{\frac{y_1}{x_1} - \frac{y_2}{x_2}}$ $= \frac{\sec A \sec B}{\tan A - \tan B}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर।

या $\text{Cosec}(A + B) = \frac{\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}}{\frac{x_2}{y_2} + \frac{x_1}{y_1}}$ $= \frac{\text{Cosec}A \cdot \text{Cosec}B}{\text{Cot}B + \text{Cot}A}$ या $\text{Cosec}(A + B) = \frac{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}}{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{y_2} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{y_1}}$ $= \frac{\text{Sec}A \cdot \text{Sec}B \cdot \text{Cosec}A \cdot \text{Cosec}B}{\text{Sec}A \cdot \text{Cosec}B + \text{Sec}A \cdot \text{Cosec}B}$	या $\text{Cosec}(A - B) = \frac{\frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}}{\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_1}{y_1}}$ $= \frac{\text{Cosec}A \cdot \text{Cosec}B}{\text{Cot}B - \text{Cot}A}$ या $\text{Cosec}(A - B) = \frac{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{y_1} \cdot \frac{1}{y_2}}{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{y_2} - \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{y_1}}$ $= \frac{\text{Sec}A \cdot \text{Sec}B \cdot \text{Cosec}A \cdot \text{Cosec}B}{\text{Sec}A \cdot \text{Cosec}B - \text{Sec}A \cdot \text{Cosec}B}$	दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2$ द्वारा भाग देने पर। दाँये पक्ष के हर एवं अंश को $y_1 * y_2 * x_1 * x_2$ द्वारा भाग देने पर।
---	---	---

4.3 $m\angle 60^\circ$ एवं $m\angle 45^\circ$ के त्रिभुजांक के द्वारा $m\angle 105^\circ$ और $m\angle 15^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ अध्याय 1 में प्राप्त किया जा चुका है—

$$\begin{aligned} m\angle 60^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{1}{1} \quad \frac{\sqrt{3}}{1} \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \\ m\angle 45^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore m\angle 105^\circ = m\angle (60 + 45)^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = (1 - \sqrt{3}) \quad (\sqrt{3} + 1) \quad 2\sqrt{2} \text{ से -}$$

$$m\angle 15^\circ = m\angle (60 - 45)^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = (1 + \sqrt{3}) \quad (\sqrt{3} - 1) \quad 2\sqrt{2} \text{ से -}$$

अतः **$m\angle 105^\circ$ एवं $m\angle 15^\circ$ की समस्त त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ तालिका**

कोण माप	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec
$m\angle 105^\circ$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3})$	$\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} = -(2 - \sqrt{3})$	$\frac{2\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$
$m\angle 15^\circ$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = (2 - \sqrt{3})$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = (2 + \sqrt{3})$	$\frac{2\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$

4-4 $m\angle 45^\circ$ एवं $m\angle 30^\circ$ के त्रिभुजांक के द्वारा $m\angle 75^\circ$ और $m\angle 15^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ

$$\begin{aligned} m\angle 45^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{1}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ m\angle 30^\circ \text{ का त्रिभुजांक} &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore m\angle 75^\circ = m\angle (45 + 30)^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = (\sqrt{3} - 1) \quad (\sqrt{3} + 1) \quad 2\sqrt{2}$$

$$m\angle 15^\circ = m\angle (45 - 30)^\circ \text{ का त्रिभुजांक} = (\sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{3} - 1) \quad 2\sqrt{2}$$

अतः **$m\angle 75^\circ$ एवं $m\angle 15^\circ$ की समस्त त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ तालिका**

कोण माप	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec
$m\angle 75^\circ$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = (2 + \sqrt{3})$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = (2 - \sqrt{3})$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$
$m\angle 15^\circ$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = (2 - \sqrt{3})$	$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = (2 + \sqrt{3})$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$	$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$

अभ्यास उदाहरण 1 ■ यदि $\text{Sin}A = \frac{3}{5}$ तथा $\text{Cos}B = \frac{12}{13}$ हो तो $m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ के प्रति सभी त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ ज्ञात कीजिए।

हल $\sin A = \frac{3}{5}$ से $m \angle A$ का त्रिभुजांक = $\sqrt{5^2 - 3^2}$ 3 5 = 4 3 5
 $\cos B = \frac{12}{13}$ से $m \angle B$ का त्रिभुजांक = 12 $\sqrt{13^2 - 12^2}$ 13 = 12 5 13

$\therefore m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक = $(4 \cdot 12 - 3 \cdot 5)$ $(12 \cdot 3 + 4 \cdot 5)$ $5 \cdot 13$ = 33 56 65
 एवं $m \angle(A-B)$ का त्रिभुजांक = $(4 \cdot 12 + 3 \cdot 5)$ $(12 \cdot 3 - 4 \cdot 5)$ $5 \cdot 13$ = 63 16 65

अतः $m \angle(A+B)$ एवं $m \angle(A-B)$ को समस्त त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ तालिका

कोण माप	Sin	Cos	Tan	Cot	Sec	Cosec
$m \angle(A+B)$	$\frac{56}{65}$	$\frac{33}{65}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{33}{56}$	$\frac{65}{33}$	$\frac{65}{56}$
$m \angle(A-B)$	$\frac{16}{65}$	$\frac{63}{65}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{63}{16}$	$\frac{65}{63}$	$\frac{65}{16}$

उदाहरण 2■ $\cos 19^\circ \sin 41^\circ + \cos 41^\circ \sin 19^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हल समिका $\sin(A+B) = \cos B \sin A + \cos A \sin B$ में $A=41^\circ$ $B=19^\circ$ प्रतिस्थापित करने पर—
 $\cos B \sin A + \cos A \sin B = \cos 19^\circ \sin 41^\circ + \cos 41^\circ \sin 19^\circ = \sin(41+19)^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ उत्तर।

उदाहरण 3■ सिद्ध कीजिए $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

हल $\sin(A+B) = \cos B \sin A + \cos A \sin B$ तथा $\sin(A-B) = \cos B \sin A - \cos A \sin B$ से
 $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = (\cos B \sin A + \cos A \sin B) \cdot (\cos B \sin A - \cos A \sin B)$
 $= (\cos B \sin A)^2 - (\cos A \sin B)^2$
 $= \cos^2 B \sin^2 A - \cos^2 A \sin^2 B$
 $= (1 - \sin^2 B) \sin^2 A - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$
 $= \sin^2 A - \sin^2 B \sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B$
 $= \sin^2 A - \sin^2 B = \text{दॉया पक्ष सिद्ध।}$

अथवा त्रिभुजांक विधि द्वारा

$m \angle A$ का त्रिभुजांक	x_1	y_1	1
एवं $m \angle B$ का त्रिभुजांक	x_2	y_2	1 हो तो
$m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2)$	$(x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2)$	1 एवं
$m \angle(A-B)$ का त्रिभुजांक	$(x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2)$	$(x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)$	1 होगा।

तब— $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B) = (x_2 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2) \cdot (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2)$
 $= x_2^2 y_1^2 - x_1^2 y_2^2 = (1 - y_2^2) y_1^2 - (1 - y_1^2) y_2^2$
 $= y_1^2 - y_1^2 y_2^2 - y_2^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1^2 - y_2^2 = \sin^2 A - \sin^2 B = \text{दॉया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 4■ सिद्ध कीजिए $\cot(45 - A)^\circ = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$

हल $m \angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक 1 1 $\sqrt{2}$
 तथा $m \angle A^\circ$ का त्रिभुजांक x y 1 से

$m \angle(45 - A)^\circ$ का त्रिभुजांक (x+y) (x-y) $\sqrt{2}$

$\therefore \cot(45 - A)^\circ = \frac{x+y}{x-y} = \frac{\frac{x+y}{y}}{\frac{x-y}{y}} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - 1} = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1} = \text{दॉया पक्ष सिद्ध।}$

अथवा प्राप्त समिका $\cot(A - B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ के तहत

$$\cot(45 - A) = \frac{\cot 45 \cot A + 1}{\cot A - \cot 45} = \frac{1 \cdot \cot A + 1}{\cot A - 1} = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध चूँकि } \cot 45 = 1$$

उदाहरण 5 ■ यदि $(A+B) = 45^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए $(1+\tan A)(1+\tan B)=2$

हल प्रश्नानुसार $(A+B) = 45^\circ \therefore m \angle B = (45 - A)^\circ$

$m \angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ x & y & 1 \end{matrix}$ से

$m \angle B = (45 - A)^\circ$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} (x+y) & (x-y) & \sqrt{2} \end{matrix}$

अतः बाँया पक्ष $= (1+\tan A)(1+\tan B)$

$$= \left(1 + \frac{y}{x}\right) \left(1 + \frac{x-y}{x+y}\right) = \left(\frac{x+y}{x}\right) \left(\frac{(x+y)+(x-y)}{x+y}\right) = \frac{2x}{x} = 2 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 6 ■ सिद्ध कीजिए $\tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A * \tan 2A * \tan A$

हल 1 • त्रिभुजांक द्वारा

माना कि $m \angle A$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} x & y & 1 \\ (x^2 - y^2) & 2xy & 1 \\ (x^3 - 3xy^2) & (3x^2y - y^3) & 1 \end{matrix}$ होगा।

$$\begin{aligned} \text{अतः बाँया पक्ष} &= \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} - \frac{2xy}{x^2 - y^2} - \frac{y}{x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} - \left(\frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} - \frac{3x^2y - y^3}{x(x^2 - y^2)} = (3x^2y - y^3) \left(\frac{1}{x^3 - 3xy^2} - \frac{1}{x(x^2 - y^2)}\right) \\ &= (3x^2y - y^3) \left(\frac{x(x^2 - y^2) - (x^3 - 3xy^2)}{(x^3 - 3xy^2) * x * (x^2 - y^2)}\right) \\ &= (3x^2y - y^3) \left(\frac{x^3 - xy^2 - (x^3 - 3xy^2)}{(x^3 - 3xy^2) * x * (x^2 - y^2)}\right) \\ &= (3x^2y - y^3) \left(\frac{2xy^2}{(x^3 - 3xy^2) * x * (x^2 - y^2)}\right) \\ &= \frac{(3x^2y - y^3) * 2xy * y}{(x^3 - 3xy^2) * (x^2 - y^2) * x} = \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} * \frac{2xy}{x^2 - y^2} * \frac{y}{x} \\ &= \tan 3A * \tan 2A * \tan A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

हल 2 • प्राप्त समिका द्वारा $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$$\Rightarrow \tan(A+B) - \tan(A+B) \tan A \tan B = \tan A + \tan B$$

$$\Rightarrow \tan(A+B) - \tan A - \tan B = \tan(A+B) \tan A \tan B \text{ में}$$

$B = 2A$ प्रतियथापित करने पर $\tan(A+2A) - \tan A - \tan 2A = \tan(A+2A) \tan A \tan 2A$

$$\Rightarrow \tan 3A - \tan 2A - \tan A = \tan 3A * \tan 2A * \tan A \text{ सिद्ध।}$$

समिका विस्तार $A = p\theta$ $B = q\theta$ प्रतियथापित करने पर -

$$\tan\{(p+q)\theta\} - \tan(p\theta) - \tan(q\theta) = \tan\{(p+q)\theta\} * \tan(p\theta) * \tan(q\theta) \text{ प्रमाणित होगा।}$$

उदाहरण 7 ■ सिद्ध कीजिए $\tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = 1$

हल 1 • त्रिभुजांक द्वारा

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} = 45^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \text{तथा मानलो } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } & x & y & 1 \end{array} \\ \therefore m\angle\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} (x-y) & (x+y) & \sqrt{2} \end{array} \\ \text{तथा } m\angle\left(\frac{\pi}{4} - A\right) \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} (x+y) & (x-y) & \sqrt{2} \end{array} \end{array}$$

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \frac{x+y}{x-y} * \frac{x-y}{x+y} = 1 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\text{हल 2• प्राप्त समिका द्वारा } \tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan A}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan A} = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} \quad \left(\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^0 = 1 \text{ प्रति स्थापित करने पर}\right)$$

$$\text{तथा } \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan A}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \tan A} = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} \quad \left(\tan\frac{\pi}{4} = \tan 45^0 = 1 \text{ प्रति स्थापित करने पर}\right)$$

$$\text{बाँया पक्ष} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + A\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} * \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = 1 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\text{उदाहरण 8■ सिद्ध कीजिए } \frac{\cos 11^0 + \sin 11^0}{\cos 11^0 - \sin 11^0} = \tan 56^0$$

हल त्रिभुजांक द्वारा

$$\begin{array}{l} m\angle 56^0 = m\angle(45 + 11)^0 \\ m\angle 45^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \text{तथा मानलो } m\angle 11^0 \text{ का त्रिभुजांक } & x & y & 1 \end{array} \\ \therefore m\angle 56^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} (x-y) & (x+y) & \sqrt{2} \end{array} \end{array}$$

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \frac{\cos 11^0 + \sin 11^0}{\cos 11^0 - \sin 11^0} = \frac{x+y}{x-y} = \tan 56^0$$

विस्तार में $\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \tan(45 + \theta)$ प्रमाणित होगा। जिसके प्रमाणन के लिए आधुनिक गणित अध्ययन में प्राप्त समिका

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \text{ का अनुप्रयोग प्रतिपादित है। जिसके अनुसार-}$$

$$\text{दाँया पक्ष} = \tan(45 + \theta) = \frac{\tan 45^0 + \tan \theta}{1 - \tan 45^0 \tan \theta} = \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \quad \tan 45^0 = 1 \text{ प्रति स्थापित करने पर}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ प्रति स्थापित करने पर}$$

$$= \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta} = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\text{उदाहरण 9■ यदि } m\angle(A + B) = 225^0 \text{ हो तो सिद्ध कीजिए } \frac{\cot A}{1 + \cot A} + \frac{\cot B}{1 + \cot B} = \frac{1}{2}$$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा

$$m\angle(A + B) = 225^0 \quad \therefore m\angle B = m\angle(225 - A)^0$$

$$m\angle 180^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \text{त्रिभुजांक गणना नियम से प्राप्त}$$

$$m\angle 45^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{array} \quad \text{त्रिभुजांक गणना नियम से प्राप्त}$$

$$\therefore m\angle(A + B) = 225^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{array} \text{ होगा।}$$

$$\text{माना कि } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} x & y & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \therefore m\angle B = (225 - A)^0 \text{ का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} (\bar{x} + \bar{y}) & (\bar{x} - \bar{y}) & \sqrt{2} \\ = \bar{x} + \bar{y} & \bar{x} - \bar{y} & \sqrt{2} \end{array} \text{ होगा।} \end{array}$$

$$\text{जिनसे- } \cot A = \frac{x}{y} \Rightarrow 1 + \cot A = 1 + \frac{x}{y} = \frac{y+x}{y} \therefore \frac{\cot A}{1+\cot A} = \frac{x}{y+x} \text{ -----(1)}$$

$$\cot B = \frac{x+y}{x-y} = \frac{x+y}{x-y} \Rightarrow 1 + \cot B = 1 + \frac{x+y}{x-y} = \frac{(x-y)+(y+x)}{x-y} = \frac{2x}{x-y} \therefore \frac{\cot B}{1+\cot B} = \frac{x+y}{2x} \text{ -----(2)}$$

समिका (1) और (2) का पक्षवार गुणा करने पर-

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \frac{\cot A}{1+\cot A} * \frac{\cot B}{1+\cot B} = \frac{x}{y+x} * \frac{x+y}{2x} = \frac{1}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} \text{ एवं}$$

त्रिभुजांक गणना नियम से प्राप्त $m \angle(A+B) = 225^\circ$ का त्रिभुजांक $\bar{1} \quad \bar{1} \quad \sqrt{2}$ से

$$\cot(A+B) = \frac{\bar{1}}{\bar{1}} = 1 = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A} \Rightarrow \cot A + \cot B = \cot A \cot B - 1$$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + 1 = \cot A \cot B \text{ ----- (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \frac{\cot A}{1+\cot A} * \frac{\cot B}{1+\cot B} = \frac{\cot A \cot B}{1+\cot A + \cot B + \cot A \cot B} \\ &= \frac{\cot A \cot B}{\cot A \cot B + \cot A \cot B + 1} \quad \text{समिका (1) से प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर-} \\ &= \frac{\cot A \cot B}{2\cot A \cot B + 1} = \frac{1}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

उदाहरण 10■ यदि $m \angle(A+B) = 90^\circ$ हो तो सिद्ध कीजिए $\tan A = 2\tan(A-B) + \tan B$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा $m \angle(A+B) = 90^\circ \therefore m \angle A$ और $m \angle B$ एक दुसरे के पूरक होंगे।

तब $m \angle A$ के त्रिभुजांक $x \quad y \quad 1$ के सापेक्ष $m \angle B$ का त्रिभुजांक $y \quad x \quad 1$

तथा $m \angle(A-B)$ का त्रिभुजांक $2xy \quad (y^2 - x^2) \quad 1$ होगा।

$$\text{जिनसे } \tan A = \frac{y}{x}, \tan B = \frac{x}{y} \text{ तथा } \tan(A-B) = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः दाँया पक्ष} &= 2\tan(A-B) + \tan B = 2 * \frac{y^2 - x^2}{2xy} + \frac{x}{y} = \frac{y^2 - x^2}{xy} + \frac{x}{y} \\ &= \frac{y^2 - x^2 + x^2}{xy} = \frac{y^2}{xy} = \frac{y}{x} = \tan A = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा $m \angle(A+B) = 90^\circ \therefore m \angle A$ और $m \angle B$ एक दुसरे के पूरक होंगे।

$$\therefore \tan B = \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\text{तथा } \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\tan A - \frac{1}{\tan A}}{1 + \tan A * \frac{1}{\tan A}} = \frac{\tan^2 A - 1}{1+1} = \frac{\tan^2 A - 1}{2} = \frac{\tan^2 A - 1}{2\tan A}$$

$$\text{अतः दाँया पक्ष} = 2\tan(A-B) + \tan B = 2 * \frac{\tan^2 A - 1}{2\tan A} + \frac{1}{\tan A} = \frac{\tan^2 A}{\tan A} = \tan A = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।}$$

विस्तार में $\tan(45 + \theta) = 2\tan 2\theta + \tan(45 - \theta)$ प्रमाणित होगा।

प्रमाण उपरोक्तानुसार यदि $m \angle(A+B) = 90^\circ$ हो तो $\tan A = 2\tan(A-B) + \tan B$ प्रमाणित है। सें तुलना करने पर

$m \angle A = (45 + \theta)^\circ$ $m \angle B = (45 - \theta)^\circ$ से $m \angle(A+B) = 90^\circ$ तथा $m \angle(A-B) = 2\theta$ समिका का शर्त पूरा करता है। उदाहरण 11 अवलोकित करें।

उदाहरण 11■ सिद्ध कीजिए $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$

प्रमाण $\tan 70^\circ = 2\tan 50^\circ + \tan 20^\circ$ की तुलना $\tan(45 + \theta) = 2\tan 2\theta + \tan(45 - \theta)$ करने पर

$2\theta = 50^\circ \Rightarrow \theta = 25^\circ$ से $(45 + \theta)^0 = (45 + 25)^0 = 70^\circ$ तथा $(45 - \theta)^0 = (45 - 25)^0 = 20^\circ$ समिका
 $\tan(45 + \theta)^0 = 2\tan 2\theta + \tan(45 - \theta)^0$ के अनुरूपता को प्रमाणित करता है।
 टीप- उपरोक्तानुसार हल 1- त्रिभुजांक द्वारा और हल 2 प्राप्त समिका द्वारा का अनुपालन कर प्रमाणित किया जा सकता है।

उदाहरण 12■ यदि $\tan B = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$ हो तो सिद्ध कीजिए $\tan(A+B) = 1$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा

माना कि $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 है। जिससे $\tan A = \frac{y}{x}$ होगा।
 $\tan B = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$ से $m \angle B$ का त्रिभुजांक $(1 + \tan A)$ $(1 - \tan A)$ $\sqrt{2(1 + \tan^2 A)}$
 $= (1 + \frac{y}{x})$ $(1 - \frac{y}{x})$ $\sqrt{2(1 + \frac{y^2}{x^2})}$
 $= \frac{x+y}{x}$ $\frac{x-y}{x}$ $\sqrt{2(\frac{x^2+y^2}{x^2})}$
 $= (x+y)$ $(x-y)$ $\sqrt{2}$ $x^2 + y^2 = 1$

 $\therefore m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक $= \frac{\{x(x+y) - y(x-y)\} \{(x+y)y + x(x-y)\}}{(x^2 + y^2)(y^2 + x^2)} \sqrt{2}$
 $= \frac{1}{1} \frac{1}{1} \sqrt{2}$
 $= m \angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक
 $\therefore \tan(A+B) = \frac{1}{1} = 1$ प्रमाणित

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ में $\tan B = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$ प्रतिस्थापित करने पर
 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}}{1 - \tan A \cdot \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}} = \frac{\frac{\tan A + 1 - \tan A}{1 + \tan A}}{\frac{1 + \tan A - (1 - \tan A)}{1 + \tan A}} = \frac{1}{2 \tan A} = 1$ प्रमाणित।

4-5 $m \angle A$ के त्रिकोणमिति निष्पत्तियों के सापेक्ष $m \angle 2A, m \angle 3A$ एवं $m \angle \frac{A}{2}$ के त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ

$m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 के सापेक्ष
 $m \angle 2A = m \angle(A+A)$ का त्रिभुजांक $\{x^2 - y^2\}$ $2xy$ 1 अध्याय 1 अनुच्छेद 1.4 के तहत
 $= \{1 - 2y^2\}$ $2xy$ 1
 $= \{2x^2 - 1\}$ $2xy$ 1
 अतः $\sin 2A = 2xy = 2 \sin A \cos A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} = \frac{2 \cot A}{1 + \cot^2 A}$
 $\cos 2A = x^2 - y^2 = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1$
 $\tan 2A = \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2}{\cot A - \tan A} = \frac{2 \sin A \cos A}{1 - 2 \sin^2 A}$
 $= \frac{2 \sin A \cos A}{2 \cos^2 A - 1} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2 \tan A}{\sec^2 A - 2 \tan^2 A} = \frac{2 \tan A}{2 - \sec^2 A}$
 $= \frac{2 \cot A}{\cot^2 A - 1} = \frac{2 \cot A}{\operatorname{cosec}^2 A - 2} = \frac{2 \cot A}{2 \cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A}$
 $\cot 2A = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2 \sin A \cos A} = \frac{1}{2} (\cot A - \tan A) = \frac{1 - 2 \sin^2 A}{2 \sin A \cos A}$
 $= \frac{2 \cos^2 A - 1}{2 \sin A \cos A} = \frac{1 - \tan^2 A}{2 \tan A} = \frac{\sec^2 A - 2 \tan^2 A}{2 \tan A} = \frac{2 - \sec^2 A}{2 \tan A}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cot^2 A - 1}{2\cot A} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A - 2}{2\cot A} = \frac{2\cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A}{2\cot A} \\
\sec 2A &= \frac{1}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{1}{1 - 2\sin^2 A} = \frac{1}{2\cos^2 A - 1} = \frac{\sec^2 A}{1 - \tan^2 A} = \frac{1 + \tan^2 A}{1 - \tan^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\sec^2 A - 2\tan^2 A} = \frac{\sec^2 A}{2 - 2\sec^2 A} \\
&= \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\cot^2 A - 1} = \frac{\cot^2 A + 1}{\cot^2 A - 1} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A - 2} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{2\cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A} \\
\operatorname{cosec} 2A &= \frac{1}{2\sin A \cos A} = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} A \sec A = \frac{1 + \tan^2 A}{2\tan A} = \frac{1 + \cot^2 A}{2\cot A}
\end{aligned}$$

$m \angle 3A = m \angle (A + 2A)$ का त्रिभुजांक $\{x^3 - 3xy^2\}$ $\{3x^2y - y^3\}$ 1 अध्याय 1 अनुच्छेद 1.4 के तहत

$$\begin{aligned}
&= x(x^2 - 3y^2) \quad y(3x^2 - y^2) \quad 1 \\
&= x(1 - 4y^2) \quad y(3 - 4y^2) \quad 1 \\
&= x(4x^2 - 3) \quad y(4x^2 - 1) \quad 1
\end{aligned}$$

अतः $\sin 3A = 3x^2y - y^3 = 3\cos^2 A \sin A - \sin^3 A = \sin A(3\cos^2 A - \sin^2 A)$
 $= \sin A(3 - 4\sin^2 A) = \sin A(4\cos^2 A - 1)$

$\cos 3A = x^3 - 3xy^2 = \cos^3 A - 3\cos A \sin^2 A = \cos A(\cos^2 A - 3\sin^2 A)$
 $= \cos A(1 - 4\sin^2 A) = \cos A(1 + 2\sin A)(1 - 2\sin A) = \cos A(4\cos^2 A - 1)$

$\tan 3A = \frac{3x^2y - y^3}{x^3 - 3xy^2} = \frac{\frac{3x^2y - y^3}{x^3}}{\frac{x^3 - 3xy^2}{x^3}} = \frac{\frac{3y}{x} - \frac{y^3}{x^3}}{1 - 3\frac{y^2}{x^2}} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

$\cot 3A = \frac{x^3 - 3xy^2}{3x^2y - y^3} = \frac{\frac{x^3 - 3xy^2}{y^3}}{\frac{3x^2y - y^3}{y^3}} = \frac{\frac{x^3}{y^3} - 3\frac{x}{y}}{\frac{3x^2}{y^2} - 1} = \frac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

$\sec 3A = \frac{1}{x^3 - 3xy^2} = \frac{1}{x^3 - 3x(1 - x^2)} = \frac{1}{4x^3 - 3x} = \frac{\frac{1}{x^3}}{4\frac{x^3}{x^3} - 3\frac{x}{x^3}} = \frac{\frac{1}{x^3}}{4 - 3\frac{1}{x^2}} = \frac{\sec^3 A}{4 - 3\sec^2 A}$

$\operatorname{cosec} 3A = \frac{1}{3x^2y - y^3} = \frac{1}{3(1 - y^2)y - y^3} = \frac{1}{3y - 4y^3} = \frac{\frac{1}{y^3}}{3\frac{y}{y^3} - 4\frac{y^3}{y^3}} = \frac{\frac{1}{y^3}}{3\frac{1}{y^2} - 4} = \frac{\operatorname{cosec}^3 A}{3\operatorname{cosec}^2 A - 4}$

$m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक -

अध्याय 1 अनुच्छेद 1.8 के तहत $m \angle A$ के त्रिभुजांक x y z के सापेक्ष
 $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{z + x}$ $\sqrt{z - x}$ $\sqrt{2z}$ प्राप्त है।

और अधिक सहजता की ओर अग्रसर होने -

$m \angle A$ के त्रिभुजांक x y 1 के सापेक्ष
 $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{1 + x}$ $\sqrt{1 - x}$ $\sqrt{2}$ (1)

$= y$ $(1 - x)$ $\sqrt{2(1 - x)}$ (2) त्रि(1)* $\sqrt{1 - x}$ से

$= (1 + x)$; y $\sqrt{2(1 + x)}$ (3) त्रि(1)* $\sqrt{1 + x}$ प्राप्त है।

अतः $\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$ या $\sin \frac{A}{2} = \frac{1 - x}{\sqrt{2(1 - x)}} = \frac{1 - \cos A}{\sqrt{2(1 - \cos A)}}$ या $\sin \frac{A}{2} = \frac{y}{\sqrt{2(1 + x)}} = \frac{\sin A}{\sqrt{2(1 + \cos A)}}$

$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$ या $\cos \frac{A}{2} = \frac{y}{\sqrt{2(1 - x)}} = \frac{\sin A}{\sqrt{2(1 - \cos A)}}$ या $\cos \frac{A}{2} = \frac{1 + x}{\sqrt{2(1 + x)}} = \frac{1 + \cos A}{\sqrt{2(1 + \cos A)}}$

$\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$ या $\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - x}{y} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} = \operatorname{cosec} A - \cot A$ या $\tan \frac{A}{2} = \frac{y}{1 + x} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}$

$$\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{1-\cos A}} \text{ या } \cot \frac{A}{2} = \frac{y}{1-x} = \frac{\sin A}{1-\cos A} \text{ या } \cot \frac{A}{2} = \frac{1+x}{y} = \frac{1+\cos A}{\sin A} = \operatorname{Cosec} A + \cot A$$

$$\sec \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2}{1+x}} = \sqrt{\frac{2}{1+\cos A}} \text{ या } \sec \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2(1-x)}}{y} = \frac{\sqrt{2(1-\cos A)}}{\sin A} \text{ या } \sec \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2(1+x)}}{1+x} = \frac{\sqrt{2(1+\cos A)}}{1+\cos A}$$

$$\operatorname{Cosec} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2}{1-x}} = \sqrt{\frac{2}{1-\cos A}} \text{ या } \operatorname{Cosec} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2(1-x)}}{1-x} = \frac{\sqrt{2(1-\cos A)}}{1-\cos A} \text{ या } \operatorname{Cosec} \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2(1+x)}}{y} = \frac{\sqrt{2(1+\cos A)}}{\sin A}$$

$$\text{सिद्ध कर चुके हैं कि } \cot \frac{A}{2} = \operatorname{Cosec} A + \cot A \text{ ----- (1) } \tan \frac{A}{2} = \operatorname{Cosec} A - \cot A \text{ ----- (2)}$$

$$\text{अतः समिका (1) + (2) से } \cot \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2} = 2 \operatorname{Cosec} A \text{ ----- (3)}$$

$$\text{समिका (1) - (2) से } \cot \frac{A}{2} - \tan \frac{A}{2} = 2 \cot A \text{ ----- (4)}$$

$$\begin{aligned} \text{समिका (1) * (2) से } \cot \frac{A}{2} * \tan \frac{A}{2} &= \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A \Rightarrow 1 = \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A \\ &\Rightarrow \operatorname{cosec}^2 A = \cot^2 A + 1 \text{ ----- (5)} \end{aligned}$$

$$\text{समिका (3) * (4) से } \cot^2 \frac{A}{2} - \tan^2 \frac{A}{2} = 4 \operatorname{Cosec} A * \cot A = \frac{4 \cos A}{\sin^2 A} \text{ ----- (6) प्रमाणित होंगे।}$$

अनुप्रयोग उदाहरण ■

(1) $m \angle 15^\circ = m \angle (\frac{30}{2})^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ प्राप्त करने में

$m \angle A$ के त्रिभुजांक x y z के सापेक्ष

$m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{z+x}$ $\sqrt{z-x}$ $\sqrt{2z}$ होने के नियम से

$m \angle 30^\circ$ का त्रिभुजांक $\sqrt{3}$ 1 2 के सापेक्ष

$$m \angle 15^\circ = m \angle (\frac{30}{2})^\circ \text{ का त्रिभुजांक } \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \sqrt{2*2}$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{3}} \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} \quad 2 \text{ ----- (1)}$$

$$= 1 \quad (2-\sqrt{3}) \quad 2\sqrt{2-\sqrt{3}} \text{ ----- (2) त्रि.(1)*}(\sqrt{2-\sqrt{3}}) \text{ से}$$

$$= (2+\sqrt{3}) \quad 1 \quad 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \text{ ----- (3) त्रि.(1)*}(\sqrt{2+\sqrt{3}}) \text{ से।}$$

$$= (\sqrt{3}+1) \quad (\sqrt{3}-1) \quad 2\sqrt{2} * \text{ ----- (4) त्रि.(2)*}(\sqrt{3}+1) \text{ अथवा त्रि.(3)*}(\sqrt{3}-1) \text{ से}$$

अतः त्रिभुजांकों को देखने मात्र से $m \angle 15^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ निम्नानुसार प्राप्त होंगे—

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 15^\circ = (2-\sqrt{3}) = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \quad \cot 15^\circ = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\begin{aligned} \sec 15^\circ &= \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} \quad \operatorname{Cosec} 15^\circ = \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \\ &= (\sqrt{2}+1) \quad 1 \quad \sqrt{4+2\sqrt{2}} \text{ ----- (3) त्रि.(1)*} \sqrt{\sqrt{2}+1} \text{ से।} \end{aligned}$$

$$\mathbf{X} \quad 2\sqrt{2-\sqrt{3}} * (\sqrt{3}+1) = 2\sqrt{((2-\sqrt{3})) * (\sqrt{3}+1)^2} = 2\sqrt{(2-\sqrt{3}) * (4+2\sqrt{3})} = 2\sqrt{2(2-\sqrt{3}) * (2+\sqrt{3})} = 2\sqrt{2*1} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{अथवा } 2\sqrt{2+\sqrt{3}} * (\sqrt{3}-1) = 2\sqrt{((2+\sqrt{3})) * (\sqrt{3}-1)^2} = 2\sqrt{(2+\sqrt{3}) * (4-2\sqrt{3})} = 2\sqrt{2(2+\sqrt{3}) * (2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{2*1} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{अथवा } \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{(4+2\sqrt{3}) + (4-2\sqrt{3})} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

अतः त्रिभुजांकों को देखने मात्र से $m \angle 22.5^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ निम्नानुसार प्राप्त होंगे-

$$\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \quad \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1) \quad \cot 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1),$$

(2) $m \angle (22.5)^\circ = m \angle (\frac{45}{2})^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ प्राप्त करने में

$m \angle A$ के त्रिभुजांक x y z के सापेक्ष

$m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $\sqrt{z+x}$ $\sqrt{z-x}$ $\sqrt{2z}$ होने के नियम से

$m \angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक 1 1 $\sqrt{2}$ के सापेक्ष

$$m \angle 22.5^\circ = m \angle (\frac{45}{2})^\circ \text{ का त्रिभुजांक } \sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \sqrt{\sqrt{2}-1} \quad \sqrt{2 * \sqrt{2}} \text{ -----(1)}$$

$$= 1 \quad (\sqrt{2}-1) \quad \sqrt{4-2\sqrt{2}} \text{ -----(2) त्रि.(1)*}\sqrt{\sqrt{2}-1} \text{ से।}$$

$$\sec 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{4-2\sqrt{2}} \quad \operatorname{cosec} 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

(3) $m \angle 18^\circ, m \angle 36^\circ, m \angle 54^\circ, m \angle 72^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ प्राप्त करने में

माना कि- $m \angle 18^\circ$ का त्रिभुजांक x y 1

$\therefore m \angle 36^\circ = 2 * m \angle 18^\circ$ का त्रिभुजांक $(x^2 - y^2)$ $2xy$ 1

$m \angle 54^\circ = 3 * m \angle 18^\circ$ का त्रिभुजांक $[x^3 - 3xy^2]$ $[3x^2y - y^3]$ 1 -----(1)

$m \angle 36^\circ + m \angle 54^\circ = m \angle 90^\circ$ अतः $m \angle 36^\circ \leftarrow$ पूरक कोण $\rightarrow m \angle 54^\circ$ होंगे।

$\therefore$ पूरक कोण त्रिभुजांक नियम से-

$m \angle 54^\circ = (m \angle 36^\circ \text{ का पूरक कोण})$ का त्रिभुजांक $2xy$ $(x^2 - y^2)$ 1 -----(2)

एवं सरल त्रिभुजांक नियम से $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 1 - y^2$ -----(3)

त्रिभुजांक (1) और (2) से $2xy = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow 2y = x^2 - 3y^2 \Rightarrow 2y = (1 - y^2) - 3y^2$

$$\Rightarrow 2y = 1 - 4y^2 \Rightarrow 4y^2 + 2y - 1 = 0 \text{ को हल करने पर}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 * 4 * (-1)}}{2 * 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2 * 4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \text{ से } y = \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4} \text{ और } \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

अथवा $x^2 - y^2 = 3x^2y - y^3 \Rightarrow (1 - y^2) - y^2 = 3(1 - y^2)y - y^3$

$$\Rightarrow 1 - 2y^2 = 3y - 3y^3 - y^3 \Rightarrow 4y^3 - 2y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(4y^2 + 2y - 1) = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \text{ एवं } 4y^2 + 2y - 1 = 0 \text{ से}$$

$$y = 1, \frac{-(\sqrt{5}+1)}{4} \text{ और } \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

चूँकि $m \angle 0^\circ < m \angle 18^\circ < m \angle 90^\circ$ है $\therefore y = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ धनात्मक हल मान मान्य होगा। जिसे

$$x^2 = 1 - y^2 \text{ में प्रतिस्थापित करने पर } x^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{16-(6-2\sqrt{5})}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

अतः $m \angle 18^\circ$ का त्रिभुजांक x y 1 $= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 1 से

$m \angle 18^\circ$ का मानक त्रिभुजांक $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} (\sqrt{5}-1)$ 4 होगा जिसके सापेक्ष

$m \angle 36^\circ$ का मानक त्रिभुजांक $(\sqrt{5}+1) \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ प्राप्त होगा। $40 + 8\sqrt{8}$

तब पूरक कोण त्रिभुजांक नियम से-

$m \angle 54^\circ = (m \angle 36^\circ \text{ का पूरक कोण})$ का त्रिभुजांक $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} (\sqrt{5}+1)$ 4

$m \angle 72^\circ = (m \angle 18^\circ \text{ का पूरक कोण})$ का त्रिभुजांक $(\sqrt{5}-1) \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ होंगे। जिनको देखने मात्र से ही-

$m \angle 18^\circ, m \angle 36^\circ, m \angle 54^\circ, m \angle 72^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ तालिका निम्नानुसार प्राप्त होगा।

$m \angle \theta$	18°	36°	54°	72°
$\sin \theta$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
$\tan \theta$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$
$\cot \theta$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$
$\sec \theta$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}-1$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1$
$\operatorname{cosec} \theta$	$\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \sqrt{5}+1$	$\frac{4}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$	$\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5}-1$	$\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$

4-6 $m \angle 3^\circ, m \angle 6^\circ, m \angle 9^\circ, m \angle 7.5^\circ$ की त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ

1- $m \angle 3^\circ = m \angle 18^\circ - m \angle 15^\circ$

$\therefore m \angle 18^\circ$ का त्रिभुजांक $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} (\sqrt{5}-1)$ 4 और

$m \angle 15^\circ$ का त्रिभुजांक $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ से

$m \angle 3^\circ$ का त्रिभुजांक आधार $\frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{8} + \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{8}$

लम्ब $\frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{8} - \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{8}$

कर्ण 8 होगा। जिसे देखते ही सुनिश्चित कीजिए-

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{8} - \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{8}, \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{8} + \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{8}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}+6\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}} - \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}, \cot 3^\circ = \frac{\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}} + \frac{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}{\sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}$$

$$\sec 3^\circ = \frac{8}{\sqrt{20+4\sqrt{5}+10\sqrt{3}+2\sqrt{15}} + \sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}}}, \operatorname{cosec} 3^\circ = \frac{8}{\sqrt{12-4\sqrt{5}-6\sqrt{3}+2\sqrt{15}} - \sqrt{20+4\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{15}}}$$

2- $m \angle 6^\circ = m \angle 36^\circ - m \angle 30^\circ$

$\therefore m \angle 36^\circ$ का त्रिभुजांक $(\sqrt{5}+1) \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ और

$m \angle 30^\circ$ का त्रिभुजांक $\frac{\sqrt{3}}{2}$ से

$m \angle 6^\circ$ का त्रिभुजांक $\{\sqrt{18+6\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\} \{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)\}$ 8
देखते ही सुनिश्चित कीजिए-

$$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)}{8}, \quad \cos 6^\circ = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{8}, \quad \tan 6^\circ = \frac{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)}{\sqrt{18+6\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\cot 6^\circ = \frac{\sqrt{18+6\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)}, \quad \sec 6^\circ = \frac{8}{\sqrt{18+6\sqrt{5}} + \sqrt{10-2\sqrt{5}}}, \quad \operatorname{cosec} 6^\circ = \frac{8}{\sqrt{30-6\sqrt{5}} - (\sqrt{5}+1)}$$

3- $m \angle 9^\circ = m \angle 45^\circ - m \angle 36^\circ$

$$\begin{array}{l} \therefore m \angle 45^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad 1 \quad 1 \quad \sqrt{2} \text{ और} \\ m \angle 36^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad (\sqrt{5}+1) \quad \sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad 4 \text{ से} \\ m \angle 9^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad \{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\} \quad \{(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\} \quad 4\sqrt{2} \end{array}$$

$$\sin 9^\circ = \frac{\{(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}{4\sqrt{2}}, \quad \cos 9^\circ = \frac{\{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}{4\sqrt{2}}, \quad \tan 9^\circ = \frac{\{(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}{\{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}$$

$$\cot 9^\circ = \frac{\{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}{\{(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}, \quad \sec 9^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{\{(\sqrt{5}+1) + \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}, \quad \operatorname{cosec} 9^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{\{(\sqrt{5}+1) - \sqrt{10-2\sqrt{5}}\}}$$

4- $m \angle 7.5^\circ = m \angle 30^\circ - m \angle 22.5^\circ$

$$\begin{array}{l} \therefore m \angle 30^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad \sqrt{3} \quad 1 \quad 2 \text{ और} \\ m \angle 22.5^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad \sqrt{\sqrt{2}+1} \quad \sqrt{\sqrt{2}-1} \quad \sqrt{2 * \sqrt{2}} \text{ से} \\ m \angle 7.5^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad [\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}] \quad [\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}] \quad 2\sqrt{2\sqrt{2}} \end{array}$$

अथवा $m \angle 7.5^\circ = m \angle (\frac{15}{2})^\circ$

$$\begin{array}{l} \therefore m \angle 15^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad (\sqrt{3}+1) \quad (\sqrt{3}-1) \quad 2\sqrt{2} \text{ से} \\ m \angle 7.5^\circ \text{ का त्रिभुजांक} \quad \sqrt{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)} \quad \sqrt{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)} \quad \sqrt{4\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\text{अतः } \sin 7.5^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+1} - \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{4\sqrt{2}}}, \quad \cos 7.5^\circ = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{4\sqrt{2}}}$$

$$\tan 7.5^\circ = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+1} - \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}}{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)}}, \quad \cot 7.5^\circ = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1} - \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)}}$$

$$\sec 7.5^\circ = \frac{2\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{\sqrt{2}-1}} = \frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)}}, \quad \operatorname{cosec} 7.5^\circ = \frac{2\sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}+1} - \sqrt{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}+1)}}$$

अभ्यास उदाहरण 1 ■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} - \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = 2 \tan 2A$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा माना कि $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 है। के सापेक्ष $m \angle 2A$ का त्रिभुजांक $(x^2 - y^2)$ $2xy$ 1 होगा।

$$\begin{aligned} \text{अतः बाँया पक्ष} &= \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} - \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{2 * 2xy}{x^2 - y^2} = 2 \tan 2A \\ &= \text{दाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा बाँया पक्ष $= \frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} - \frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{(\cos A + \sin A)^2 - (\cos A - \sin A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A}$

$$= \frac{4\cos A \sin A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{2 \cdot 2 \cos A \sin A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$$

$$= \frac{2 \sin 2A}{\cos 2A} = 2 \tan 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 2■ सिद्ध कीजिए $\frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A} = \tan^2 A$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा माना कि $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 है। के सापेक्ष $m \angle 2A$ का त्रिभुजांक $(x^2 - y^2)$ $2xy$ 1 होगा।

त्रिभुजांक होने के प्रतिबंध पर— त्रिभुजांक x y 1 से $x^2 + y^2 = 1$

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A} = \frac{(x^2+y^2)+(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)-(x^2-y^2)} = \frac{2y^2}{2x^2} = \frac{y^2}{x^2} = \tan^2 A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा बाँया पक्ष $= \frac{1+\cos 2A}{1-\cos 2A} = \frac{(\cos^2 A + \sin^2 A) + (\cos^2 A - \sin^2 A)}{(\cos^2 A + \sin^2 A) - (\cos^2 A - \sin^2 A)}$
 $= \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \tan^2 A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 3■ सिद्ध कीजिए $\sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0 = \frac{1}{2} \cos 2A$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा माना कि— $m \angle A$ का त्रिभुजांक x y 1 है। के सापेक्ष $m \angle 2A$ का त्रिभुजांक $(x^2 - y^2)$ $2xy$ 1 होगा।

$$m \angle 45^\circ \text{ का त्रिभुजांक } 1 \quad 1 \quad \sqrt{2}$$

$$(45 + A)^0 \text{ का त्रिभुजांक } (x - y) \quad (x + y) \quad \sqrt{2}$$

$$(45 - A)^0 \text{ का त्रिभुजांक } (x + y) \quad (x - y) \quad \sqrt{2}$$

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} * \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x^2-y^2}{2} = \frac{1}{2} \cos 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा— $\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin(45 + A)^0 = \cos A \sin 45^0 + \cos 45^0 \sin A = \cos A * \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos A + \sin A)$$

$$\sin(45 - A)^0 = \cos A \sin 45^0 - \cos 45^0 \sin A = \cos A * \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos A - \sin A)$$

$$\therefore \sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0 = \frac{1}{2} (\cos^2 A - \sin^2 A) = \frac{1}{2} \cos 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\text{अथवा बाँया पक्ष} = \sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0 = \frac{1}{2} (2 \sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0)$$

$$= \frac{1}{2} [\cos\{(45 - A) - (45 + A)\}^0 - \cos\{(45 + A) + (45 - A)\}^0]$$

$$= \frac{1}{2} [\cos(-2A) + \cos 90^0] = \frac{1}{2} [\cos 2A - 0] = \frac{1}{2} \cos 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

अथवा अध्याय 5 गुणन सूत्र द्वारा—

$$\sin(45 + A)^0 \sin(45 - A)^0 = \frac{1}{2} \cdot (2 \sin(\frac{90+2A}{2})^0 \sin(\frac{90-2A}{2})^0) = \frac{1}{2} (\cos 2A - \cos 90^0)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 2A - 0) = \frac{1}{2} (\cos 2A) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 4■ सिद्ध कीजिए $\sec A + \tan A = \tan(45^0 + \frac{A}{2})$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा— माना कि— $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक x y 1 है।

$$\therefore m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } (x^2 - y^2) \quad 2xy \quad 1 \text{ होगा।}$$

$$m \angle 45^0 \text{ का त्रिभुजांक } 1 \quad 1 \quad \sqrt{2}$$

$$\therefore m \angle (45^0 + \frac{A}{2}) \text{ का त्रिभुजांक } (x - y) \quad (x + y) \quad \sqrt{2} \text{ होगा।}$$

त्रिभुजांक होने के प्रतिबंध पर— त्रिभुजांक x y 1 से $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{aligned}\text{अतः बाँया पक्ष} &= \sec A + \tan A = \frac{1}{x^2-y^2} + \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{1+2xy}{x^2-y^2} = \frac{x^2-y^2+2xy}{x^2-y^2} \\ &= \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = \tan(45^\circ + \frac{A}{2}) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{हल 2• प्राप्त समिका द्वारा- बाँया पक्ष} &= \sec A + \tan A = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2} + 2\cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2}} \\ &= \frac{(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2})^2}{(\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2})(\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2})} = \frac{\cos \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} \text{-----(1)}\end{aligned}$$

$$\text{दाँया पक्ष} = \tan(45^\circ + \frac{A}{2}) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan 45^\circ \tan \frac{A}{2}} = \frac{1 + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2}} \text{-----(2)} \quad \tan 45^\circ = 1 \text{ के प्रतिस्थापन से}$$

(1) और (2) से बाँया पक्ष = दाँया पक्ष सिद्ध।

उदाहरण 5 ■ सिद्ध कीजिए $\sin A * \sin(60^\circ + A) * \sin(60^\circ - A) = \frac{1}{4} \sin 3A$

$$\begin{array}{lclcl}\text{हल 1• त्रिभुजांक द्वारा} & m \angle 60^\circ \text{ का त्रिभुजांक} & 1 & \sqrt{3} & 2 \\ \text{माना कि} & m \angle A \text{ का त्रिभुजांक} & x & y & 1 \text{ है।} \\ \therefore m \angle (60^\circ + A) \text{ का त्रिभुजांक} & (x - \sqrt{3}y) & (\sqrt{3}x + y) & 2 & \\ m \angle (60^\circ - A) \text{ का त्रिभुजांक} & (x + \sqrt{3}y) & (\sqrt{3}x - y) & 2 & \\ m \angle 2A \text{ का त्रिभुजांक} & (x^2 - y^2) & 2xy & 1 & \\ m \angle 3A \text{ का त्रिभुजांक} & \{x^3 - 3xy^2\} & \{3x^2y - y^3\} & 1 & \text{होगा।}\end{array}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः बाँया पक्ष} &= \sin A * \sin(60^\circ + A) * \sin(60^\circ - A) = y * \frac{(\sqrt{3}x + y)}{2} * \frac{(\sqrt{3}x - y)}{2} \\ &= \frac{1}{4} (3x^2y - y^3) = \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

$$\text{हल 2• प्राप्त समिका द्वारा} \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(60^\circ + A)^0 = \cos A \sin 60^\circ + \cos 60^\circ \sin A = \cos A * \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \sin A = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos A + \sin A)$$

$$\sin(60^\circ - A)^0 = \cos A \sin 60^\circ - \cos 60^\circ \sin A = \cos A * \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \sin A = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos A - \sin A)$$

$$\begin{aligned}\text{अतः बाँया पक्ष} &= \sin A * \sin(60^\circ + A)^0 * \sin(60^\circ - A)^0 \\ &= \sin A * \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos A + \sin A) * \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos A - \sin A) \\ &= \frac{1}{4} \sin A (3 \cos^2 A - \sin^2 A) = \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{अथवा बाँया पक्ष} &= \sin A * \sin(60^\circ + A) * \sin(60^\circ - A) = \frac{1}{2} \sin A [2 \sin(60^\circ + A) * \sin(60^\circ - A)] \\ &= \frac{1}{2} \sin A [\cos\{(60^\circ - A) - (60^\circ + A)\}^0 - \cos\{(60^\circ - A) + (60^\circ + A)\}^0] \\ &= \frac{1}{2} \sin A [\cos(-2A) - \cos 120^\circ] = \frac{1}{2} \sin A [\cos 2A - (-\frac{1}{2})] \\ &= \frac{1}{2} \sin A [\frac{2 \cos 2A + 1}{2}] = \frac{1}{4} \sin A [2 \cos 2A + 1] \\ &= \frac{1}{4} \sin A [2(\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 A + \sin^2 A)] \\ &= \frac{1}{4} \sin A [3 \cos^2 A - \sin^2 A] = \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{अथवा अध्याय 5 गुणन सूत्र द्वारा- बाँया पक्ष} &= \sin A * \sin(60^\circ + A) * \sin(60^\circ - A) \\ &= \frac{1}{2} \sin A (2 \sin(\frac{120^\circ + 2A}{2})^0 \sin(\frac{120^\circ - 2A}{2})^0) = \frac{1}{2} \sin A (\cos 2A - \cos 120^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sin A [\cos 2A - (-\frac{1}{2})] = \frac{1}{2} \sin A [\frac{2\cos 2A + 1}{2}] \\
&= \frac{1}{4} \sin A [2\cos 2A + 1] = \frac{1}{4} \sin A [2(\cos^2 A - \sin^2 A) + (\cos^2 A + \sin^2 A)] \\
&= \frac{1}{4} \sin A [3\cos^2 A - \sin^2 A] = \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}
\end{aligned}$$

उदाहरण 6■ सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \tan(A - B)$

हल• त्रिभुजांक द्वारा माना कि

m ∠A का त्रिभुजांक	x_1	y_1	1	तथा
m ∠B का त्रिभुजांक	x_2	y_2	1	
∴ m ∠(A-B) का त्रिभुजांक	$(x_1 x_2 + y_1 y_2)$	$(x_2 y_1 - x_1 y_2)$	1	
m ∠2A का त्रिभुजांक	$(x_1^2 - y_1^2)$	$2 x_1 y_1$	1	
m ∠2B का त्रिभुजांक	$(x_2^2 - y_2^2)$	$2 x_2 y_2$	1	

त्रिभुजांक होने के प्रतिबंध पर- त्रिभुजांक x_1 y_1 1 से $x_1^2 + y_1^2 = 1$ तथा त्रिभुजांक x_2 y_2 1 से $x_2^2 + y_2^2 = 1$

अतः बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \frac{(x_2^2 - y_2^2) - (x_1^2 - y_1^2)}{2 x_2 y_2 + 2 x_1 y_1} = \frac{(x_2^2 - y_2^2)(x_1^2 + y_1^2) - (x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{(2 x_2 y_2)(x_1^2 + y_1^2) + (2 x_1 y_1)(x_2^2 + y_2^2)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x_1^2 x_2^2 - x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 - y_1^2 y_2^2 - (x_1^2 x_2^2 - x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 - y_1^2 y_2^2)}{2 x_2 y_2 x_1^2 + 2 x_2 y_2 y_1^2 + 2 x_1 y_1 x_2^2 + 2 x_1 y_1 y_2^2} \\
&= \frac{2 x_2^2 y_1^2 - 2 x_1^2 y_2^2}{2 x_2 y_2 x_1^2 + 2 x_1 y_1 x_2^2 + 2 x_2 y_2 y_1^2 + 2 x_1 y_1 y_2^2} \\
&= \frac{2(x_2 y_1 + x_1 y_2)(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{2(x_1 x_2 + y_1 y_2)(x_2 y_1 + x_1 y_2)} = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_1 x_2 + y_1 y_2} = \tan(A - B) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}
\end{aligned}$$

अथवा अध्याय 5 गुणन सूत्र द्वारा- बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2B + \sin 2A} = \frac{2 \sin \frac{2B+2A}{2} \sin \frac{2A-2B}{2}}{2 \sin \frac{2B+2A}{2} \cos \frac{2B-2A}{2}} = \frac{\sin(A-B)}{\cos(B-A)}$

∴ $\cos(-\theta) = \cos \theta$ ∴ $\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \tan(A-B) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 7■ सिद्ध कीजिए $\tan(\frac{\pi}{4} + A) + \tan(\frac{\pi}{4} - A) = 2 \sec 2A$

हल 1• त्रिभुजांक द्वारा m ∠ $\frac{\pi}{4}$ = m ∠45° का त्रिभुजांक 1 1 $\sqrt{2}$
माना कि m ∠A का त्रिभुजांक x y I है।

∴ m ∠($\frac{\pi}{4} + A$) का त्रिभुजांक (x - y) (x + y) $\sqrt{2}$

m ∠($\frac{\pi}{4} - A$) का त्रिभुजांक (x + y) (x - y) $\sqrt{2}$

m ∠2A का त्रिभुजांक (x² - y²) 2xy 1

अतः बाँया पक्ष = $\tan(\frac{\pi}{4} + A) + \tan(\frac{\pi}{4} - A) = \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{x^2 - y^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$

त्रिभुजांक होने के प्रतिबंध पर- त्रिभुजांक x y I से $x^2 + y^2 = 1$

∴ $\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{2}{x^2 - y^2} = 2 \sec 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

हल 2• प्राप्त समिका द्वारा

अतः बाँया पक्ष = $\tan(\frac{\pi}{4} + A) + \tan(\frac{\pi}{4} - A) = \tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A)$

= $\frac{\tan 45^\circ + \tan A}{1 - \tan 45^\circ \tan A} + \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \tan A} = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

$$= \frac{(1+\tan A)^2 + (1-\tan A)^2}{1-\tan^2 A} = \frac{2(1+\tan^2 A)}{1-\tan^2 A} = 2 \frac{1+\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1-\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= 2 \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{1}{\cos 2A} = 2 \sec 2A = \text{दॉया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 8■ सिद्ध कीजिए $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = 4\cos^2 \frac{A+B}{2}$

हल • त्रिभुजांक द्वारा

m ∠A का त्रिभुजांक	x_1	y_1	1	तथा
m ∠B का त्रिभुजांक	x_2	y_2	1	
∴ m ∠(A+B) का त्रिभुजांक	$(x_1x_2 + y_1y_2)$	$(x_2y_1 - x_1y_2)$	1	
m ∠ $\frac{A-B}{2}$ का त्रिभुजांक	$\sqrt{1 + (x_1x_2 + y_1y_2)}$	$\sqrt{1 - (x_1x_2 + y_1y_2)}$	$\sqrt{2}$	

$$\begin{aligned} \text{अतः बाँया पक्ष} &= (\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2 = (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2) + (y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2) \\ &= (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= 1 + 1 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\ &= 2\{1 + (x_1x_2 + y_1y_2)\} \text{-----(1)} \end{aligned}$$

$$\text{दॉया पक्ष} = 4\cos^2 \frac{A+B}{2} = 4\left(\frac{\sqrt{1+(x_1x_2 + y_1y_2)}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\left(\frac{1+(x_1x_2 + y_1y_2)}{2}\right) = 2\{1 + (x_1x_2 + y_1y_2)\} \text{-----(2)}$$

(1) और (2) से बाँया पक्ष = दॉया पक्ष **सिद्ध।**

अथवा अध्याय 5 गुणन सूत्र द्वारा— बाँया पक्ष = $(\cos A + \cos B)^2 + (\sin A + \sin B)^2$

$$\begin{aligned} &= (2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2})^2 + (2\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2})^2 \\ &= 4\cos^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} + 4\sin^2 \frac{A+B}{2} \cos^2 \frac{A-B}{2} \\ &= 4\cos^2 \frac{A-B}{2} \left\{ \cos^2 \frac{A+B}{2} + \sin^2 \frac{A+B}{2} \right\} \cos^2 \frac{A-B}{2} + \sin^2 \frac{A+B}{2} = 1 \text{ से} \\ &= 4\cos^2 \frac{A-B}{2} = \text{दॉया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

-----04-----

अध्याय -5

गुणन-सूत्र

5.1 दो अलग-अलग कोण मापों के Sine एवं Cosine के प्रति योग एवं अन्तर का गुणन सूत्र

पिछले अध्याय में सिद्ध किया जा चुका है कि यदि—

m ∠A का त्रिभुजांक	x ₁	y ₁	1	एवं
m ∠B का त्रिभुजांक	x ₂	y ₂	1	हो तो
m ∠(A+B) का त्रिभुजांक	x ₁ * x ₂ - y ₁ * y ₂	x ₂ * y ₁ + x ₁ * y ₂	1	तथा
m ∠(A-B) का त्रिभुजांक	x ₁ * x ₂ + y ₁ * y ₂	x ₂ * y ₁ - x ₁ * y ₂	1	होगा ।

$$\therefore 1 \blacksquare \sin(A+B) + \sin(A-B) = (x_2 * y_1 + x_1 * y_2) + (x_2 * y_1 - x_1 * y_2) = 2x_2 * y_1 = 2 \cos B \sin A$$

$$2 \blacksquare \sin(A+B) - \sin(A-B) = (x_2 * y_1 + x_1 * y_2) - (x_2 * y_1 - x_1 * y_2) = 2x_1 * y_2 = 2 \cos A \sin B$$

$$3 \blacksquare \cos(A+B) + \cos(A-B) = (x_1 * x_2 - y_1 * y_2) + (x_1 * x_2 + y_1 * y_2) = 2x_1 * x_2 = 2 \cos A \cos B$$

$$4 \blacksquare \cos(A-B) - \cos(A+B) = (x_1 * x_2 + y_1 * y_2) - (x_1 * x_2 - y_1 * y_2) = 2y_1 * y_2 = 2 \sin A \sin B$$

उपरोक्त चारों समिका में— A+B=C तथा A-B=D प्रतिस्थापित किये जाने पर $A = \frac{C+D}{2}$ तथा $B = \frac{C-D}{2}$ प्रतिस्थापित करना होगा। तब—

$$\therefore 1 \blacksquare \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad 2 \blacksquare \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$$

$$3 \blacksquare \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \quad 4 \blacksquare \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \quad \text{होगा।}$$

5.2 दो अलग-अलग कोण मापों के आधे कोण मापों के योग एवं अन्तर की त्रिकोणमिति निष्पातियों

$$m \angle A \text{ का त्रिभुजांक} \quad x_1 \quad y_1 \quad 1 \quad \text{के सापेक्ष}$$

$$m \angle \frac{A}{2} \text{ का त्रिभुजांक} \quad \sqrt{1+x_1} \quad \sqrt{1-x_1} \quad \sqrt{2}$$

$$m \angle B \text{ का त्रिभुजांक} \quad x_2 \quad y_2 \quad 1 \quad \text{के सापेक्ष}$$

$$m \angle \frac{B}{2} \text{ का त्रिभुजांक} \quad \sqrt{1+x_2} \quad \sqrt{1-x_2} \quad \sqrt{2}$$

$$\therefore m \angle \frac{A+B}{2} \text{ का त्रिभुजांक} \quad [\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}], [\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}] \quad 2$$

$$m \angle \frac{A-B}{2} \text{ का त्रिभुजांक} \quad [\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}], [\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}] \quad 2$$

$$\text{अतः—} \sin \frac{A+B}{2} = \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} = \frac{[\sqrt{(1+\cos B)(1-\cos A)} + \sqrt{(1+\cos A)(1-\cos B)}]}{2}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} = \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} = \frac{[\sqrt{(1+\cos B)(1-\cos A)} - \sqrt{(1+\cos A)(1-\cos B)}]}{2}$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} = \frac{[\sqrt{(1+\cos A)(1+\cos B)} - \sqrt{(1-\cos A)(1-\cos B)}]}{2}$$

$$\cos \frac{A-B}{2} = \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} = \frac{[\sqrt{(1+\cos A)(1+\cos B)} + \sqrt{(1-\cos A)(1-\cos B)}]}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{A+B}{2} &= \frac{\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} = \frac{\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} * \frac{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} \\ &= \frac{(1+x_2)\sqrt{1-x_1^2} + (1+x_1)\left(\sqrt{1-x_2^2}\right) + (1-x_1)\left(\sqrt{1-x_2^2}\right) + (1-x_2)\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)}{(1+x_1)(1+x_2) - (1-x_1)(1-x_2)} \\ &= \frac{(1+x_2)y_1 + (1+x_1)y_2 + (1-x_1)y_2 + (1-x_2)y_1}{(1+x_1)(1+x_2) - (1-x_1)(1-x_2)} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} = \frac{\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}} * \frac{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}{\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+x_2)\sqrt{1-x_1^2} - (1+x_1)\left(\sqrt{1-x_2^2}\right) - (1-x_1)\left(\sqrt{1-x_2^2}\right) + (1-x_2)\left(\sqrt{1-x_1^2}\right)}{(1+x_1)(1+x_2) - (1-x_1)(1-x_1)} \\
&= \frac{(1+x_2)y_1 - (1+x_1)y_2 - (1-x_1)y_2 + (1-x_2)y_1}{(1+x_1)(1+x_2) - (1-x_1)(1-x_1)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 + x_2} = \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B}
\end{aligned}$$

5.3 अनुच्छेद 5.2 के अनुसार अनुच्छेद 5.1 में प्राप्त गुणन सूत्र की सदृश्यता

$$\begin{aligned}
1 \bullet \sin \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} * \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} \\
&= \frac{y_1(1-x_2) + y_2(1-x_1) + y_2(1+x_1) + y_1(1+x_2)}{4} = \frac{2(y_1 + y_2)}{4} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{\sin A + \sin B}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2} = \sin A + \sin B$$

$$\begin{aligned}
2 \bullet \cos \frac{A+B}{2} * \sin \frac{A-B}{2} &= \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} * \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} \\
&= \frac{y_1(1-x_2) - y_2(1-x_1) - y_2(1+x_1) + y_1(1+x_2)}{4} = \frac{2(y_1 - y_2)}{4} = \frac{y_1 - y_2}{2} = \frac{\sin A - \sin B}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{A+B}{2} * \sin \frac{A-B}{2} = \sin A - \sin B$$

$$\begin{aligned}
3 \bullet \cos \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2} &= \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} - \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} * \frac{[\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} + \sqrt{(1-x_1)(1-x_2)}]}{2} \\
&= \frac{(1+x_1)(1+x_2) - y_1y_2 + y_1y_2 - (1-x_1)(1-x_2)}{4} = \frac{2(x_1 + x_2)}{4} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\cos A + \cos B}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{A+B}{2} * \cos \frac{A-B}{2} = \cos A + \cos B$$

$$\begin{aligned}
4 \bullet \sin \frac{A+B}{2} * \sin \frac{A-B}{2} &= \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} + \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} * \frac{[\sqrt{(1+x_2)(1-x_1)} - \sqrt{(1+x_1)(1-x_2)}]}{2} \\
&= \frac{(1+x_2)(1-x_1) + y_1y_2 - y_1y_2 - (1+x_1)(1-x_2)}{4} = \frac{2(x_2 - x_1)}{4} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\cos B - \cos A}{2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{A+B}{2} * \sin \frac{A-B}{2} = \cos B - \cos A$$

अभ्यास उदाहरण ■

उदाहरण 1 ■ द्विपद में दर्शित कीजिए – (a) $2 \sin 3A \cos 2A$ (b) $2 \cos 6A \sin 2A$

(c) $2 \cos 3A \cos A$ (d) $2 \sin 8A \sin 2A$

हल (a) हल समिका $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$ के अनुसार–

$$2 \sin 3A \cos 2A = \sin(3A + 2A) + \sin(3A - 2A) = \sin 5A + \sin A \quad \text{उत्तर।}$$

हल (b) हल समिका $2 \cos A \sin B = \sin(A + B) - \sin(A - B)$ के अनुसार–

$$2 \cos 6A \sin 2A = \sin(6A + 2A) - \sin(6A - 2A) = \sin 8A - \sin 4A \quad \text{उत्तर।}$$

हल (c) हल समिका $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ के अनुसार–

$$2 \cos 3A \cos A = \cos(3A + A) + \cos(3A - A) = \cos 4A + \cos 2A \quad \text{उत्तर।}$$

हल (d) हल समिका $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ के अनुसार–

$$2 \sin 8A \sin 2A = \cos(8A - 2A) - \cos(8A + 2A) = \cos 6A - \cos 10A \quad \text{उत्तर।}$$

उदाहरण 2 ■ द्विपद में दर्शित कर मान ज्ञात कीजिए। (a) $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$ (b) $2 \cos(45 + A)^\circ \cos(45 - A)^\circ$

हल (a) हल समिका $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ के अनुसार–

$$\begin{aligned}
\sin 45^\circ \sin 15^\circ &= \frac{1}{2} (2 \sin 45^\circ \sin 15^\circ) = \frac{1}{2} \{ \cos(45 - 15)^\circ - \cos(45 + 15)^\circ \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}-1}{4} \quad \text{उत्तर।}
\end{aligned}$$

हल (b) हल समिका $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ के अनुसार

$$\begin{aligned}\cos(45 + A)^\circ \cos(45 - A)^\circ &= \cos\{(45 + A)^\circ + (45 - A)^\circ\} + \cos\{(45 + A)^\circ - (45 - A)^\circ\} \\ &= \cos 90^\circ + \cos 2A = 0 + \cos 2A = \cos 2A \quad \text{उत्तर।}\end{aligned}$$

उदाहरण 3■ सिद्ध कीजिए $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

$$\begin{aligned}\text{बाँया पक्ष} &= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} [\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ] \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ प्रतिस्थापित करने पर} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{1}{2} [(2 \sin 80^\circ \sin 40^\circ) \sin 20^\circ] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [(\cos 40^\circ - \cos 120^\circ) \sin 20^\circ] \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} \text{ प्रतिस्थापित करने पर} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} [(\cos 40^\circ + \frac{1}{2}) \sin 20^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{4} [(\cos 40^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} * \frac{1}{2} [(2 \cos 40^\circ \sin 20^\circ + \sin 20^\circ)] = \frac{\sqrt{3}}{8} [(\sin 60^\circ - \sin 20^\circ + \sin 20^\circ)] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} [\sin 60^\circ] = \frac{\sqrt{3}}{8} [\frac{\sqrt{3}}{2}] = \frac{3}{16} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

माना कि 20° का त्रिभुजांक	x	y	1	
60° का त्रिभुजांक	1	$\sqrt{3}$	2	
$= 3 * 20^\circ$ का त्रिभुजांक	$x(x^2 - 3y^2)$	$y(3x^2 - y^2)$	1	
$\therefore 80^\circ = (60 + 20)^\circ$ का त्रिभुजांक	$(x - \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x + y)$	2	तथा
$40^\circ = (60 - 20)^\circ$ का त्रिभुजांक	$(x + \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x - y)$	2	होंगे

$$\begin{aligned}\text{अतः बाँया पक्ष} &= \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = y * \frac{\sqrt{3}x - y}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}x + y}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} [y(3x^2 - y^2)] = \frac{\sqrt{3}}{8} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} [\frac{\sqrt{3}}{2}] = \frac{3}{16} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

उदाहरण 4■ सिद्ध कीजिए (a) $\sin A \sin(60 + A)^\circ \sin(60 - A)^\circ = \frac{1}{4} \sin 3A$

$$(b) \cos A \cos(60 + A)^\circ \cos(60 - A)^\circ = \frac{1}{4} \cos 3A$$

हल 1• गुणन सूत्र द्वारा

$$\begin{aligned}(a) \text{ बाँया पक्ष} &= \sin A \sin(60 + A)^\circ \sin(60 - A)^\circ = \frac{1}{2} [\sin A * 2(\sin(60 + A)^\circ \sin(60 - A)^\circ)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin A * (\cos 2A - \cos 120^\circ)] = \frac{1}{2} [\sin A * (\cos 2A + \frac{1}{2})] \\ &= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} [2 \cos 2A \sin A + \sin A] \\ &= \frac{1}{4} [\sin 3A - \sin A + \sin A] = \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b) \text{ बाँया पक्ष} &= \cos A \cos(60 + A)^\circ \cos(60 - A)^\circ = \frac{1}{2} [\cos A * 2 \cos(60 + A)^\circ \cos(60 - A)^\circ] \\ &= \frac{1}{2} [\cos A (\cos 120^\circ + \cos 2A)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos A (-\frac{1}{2} + \cos 2A)] = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} [2 \cos 2A \cos A - \cos A] \\ &= \frac{1}{4} [\cos 3A + \cos A - \cos A] = \frac{1}{4} \cos 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}\end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

60° का त्रिभुजांक	1	$\sqrt{3}$	2
माना कि m $\angle A$ का त्रिभुजांक	x	y	1
$\therefore (60 + A)^\circ$ का त्रिभुजांक	$(x - \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x + y)$	2
$(60 - A)^\circ$ का त्रिभुजांक	$(x + \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x - y)$	2
m $\angle 3A$ का त्रिभुजांक	$x(x^2 - 3y^2)$	$y(3x^2 - y^2)$	1

$$(a) \text{ बाँया पक्ष } = \sin A \sin (60 + A)^\circ \sin (60 - A)^\circ = y * \frac{\sqrt{3}x + y}{2} * \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = \frac{1}{4} [y(3x^2 - y^2)]$$

$$= \frac{1}{4} \sin 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$(b) \text{ बाँया पक्ष } = \cos A \cos (60 + A)^\circ \cos (60 - A)^\circ = x * \frac{x - \sqrt{3}y}{2} * \frac{x + \sqrt{3}y}{2} = \frac{1}{4} [x(x^2 - 3y^2)]$$

$$= \frac{1}{4} \cos 3A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 5■ यदि $(A+B)=(C+D)$ हो तो सिद्ध कीजिए $\sin A \cos B - \sin C \cos D = \cos \frac{(A-B)+(C-D)}{2} \sin \frac{(A-B)-(C-D)}{2}$

हल बाँया पक्ष $= \sin A \cos B - \sin C \cos D = \frac{1}{2} [2 \sin A \cos B - 2 \sin C \cos D]$

$$= \frac{1}{2} [(\sin(A+B) + \sin(A-B) - (\sin(C+D) + \sin(C-D))]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(A-B) - \sin(C-D)]$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cos \frac{(A-B)+(C-D)}{2} \sin \frac{(A-B)-(C-D)}{2}]$$

$$= \cos \frac{(A-B)+(C-D)}{2} \sin \frac{(A-B)-(C-D)}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

जैसे $(8A+A)=(6A+3A)$ के प्रति $\sin 8A \cos A - \sin 6A \cos 3A = \cos \frac{(8A-A)+(6A-3A)}{2} \sin \frac{(8A-A)-(6A-3A)}{2}$

$$= \cos \frac{10A}{2} \sin \frac{4A}{2} = \cos 5A \sin 2A \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 6■ यदि $(A-B) = (C-D)$ हो तो सिद्ध कीजिए

$$\sin A \cos B - \sin C \cos D = \cos \frac{(A+B)+(C+D)}{2} \sin \frac{(A+B)-(C+D)}{2}$$

हल बाँया पक्ष $= \sin A \cos B - \sin C \cos D = \frac{1}{2} [2 \sin A \cos B - 2 \sin C \cos D]$

$$= \frac{1}{2} [(\sin(A+B) + \sin(A-B) - (\sin(C+D) + \sin(C-D))]$$

$$= \frac{1}{2} [\sin(A+B) - \sin(C+D)]$$

$$= \frac{1}{2} [2 \cos \frac{(A+B)+(C+D)}{2} \sin \frac{(A+B)-(C+D)}{2}]$$

$$= \cos \frac{(A+B)+(C+D)}{2} \sin \frac{(A+B)-(C+D)}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

जैसे $(9A-4A)=(6A-A)$ के प्रति $\sin 9A \cos 4A - \sin 6A \cos A = \cos \frac{(9A+4A)+(6A+A)}{2} \sin \frac{(9A+4A)-(6A+A)}{2}$

$$= \cos \frac{20A}{2} \sin \frac{6A}{2} = \cos 10A \sin 3A \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 7■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} = \sqrt{3}$

हल 1• गुणन सूत्र द्वारा बाँया पक्ष $= \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} = \frac{2 \cos \frac{(40+20)}{2}^\circ \sin \frac{(40-20)}{2}^\circ}{2 \sin \frac{(40+20)}{2}^\circ \sin \frac{(40-20)}{2}^\circ}$

$$= \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \cot 30^\circ = \sqrt{3} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

30° का त्रिभुजांक	$\sqrt{3}$	1	2
माना कि 10° का त्रिभुजांक	x	y	1
∴ 40° = (30 + 10)° का त्रिभुजांक	($\sqrt{3}x - y$)	($x + \sqrt{3}y$)	2
20° = (30 - 10)° का त्रिभुजांक	($\sqrt{3}x + y$)	($x - \sqrt{3}y$)	2

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \frac{\sin 40^\circ - \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 20^\circ} = \frac{\frac{x + \sqrt{3}y}{2} - \frac{x - \sqrt{3}y}{2}}{\frac{\sqrt{3}x - y}{2} - \frac{\sqrt{3}x + y}{2}} = \frac{2\sqrt{3}y}{2y} = \sqrt{3} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{\sin (30+A)^\circ - \sin (30-A)^\circ}{\cos (30+A)^\circ - \cos (30-A)^\circ} = \sqrt{3} \text{ सिद्ध कीजिए।}$$

उदाहरण 8■ सिद्ध कीजिए $\cos A + \cos(120 + A)^\circ + \cos(120 - A)^\circ = 0$

हल 1• गुणन सूत्र द्वारा बाँया पक्ष $\cos A + \cos(120 + A)^\circ + \cos(120 - A)^\circ = \cos A + 2\cos 120^\circ \cos A$
 $= \cos A + 2(-\frac{1}{2}) \cos A = \cos A - \cos A = 0 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

120° का त्रिभुजांक	-1	$\sqrt{3}$	2
माना कि m ∠A का त्रिभुजांक	x	y	1
∴ (120 + A)° का त्रिभुजांक	-($x + \sqrt{3}y$)	($\sqrt{3}x - y$)	2
(120 - A)° का त्रिभुजांक	-($x - \sqrt{3}y$)	($\sqrt{3}x + y$)	2

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \cos A + \cos(120 + A)^\circ + \cos(120 - A)^\circ = x + \frac{-(x + \sqrt{3}y)}{2} + \frac{-(x - \sqrt{3}y)}{2}$$

$$= \frac{2x - x - \sqrt{3}y - x + \sqrt{3}y}{2} = \frac{0}{2} = 0 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 9■ सिद्ध कीजिए $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{2}[\cos 20^\circ \{2 \cos 80^\circ \cos 40^\circ\}] = \frac{1}{2}[\cos 20^\circ \{\cos 120^\circ + \cos 40^\circ\}] \\ &= \frac{1}{2}[\cos 20^\circ \{(-\frac{1}{2}) + \cos 40^\circ\}] = \frac{1}{2}[\cos 20^\circ \{\frac{2\cos 40^\circ - 1}{2}\}] \\ &= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}[\cos 20^\circ \{2\cos 40^\circ - 1\}] = \frac{1}{4}[2 \cos 40^\circ \cos 20^\circ - \cos 20^\circ] \\ &= \frac{1}{4}[(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ - \cos 20^\circ)] = \frac{1}{4}[\cos 60^\circ] = \frac{1}{4}[\frac{1}{2}] = \frac{1}{8} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

माना कि 20° का त्रिभुजांक	x	y	1
60° का त्रिभुजांक	1	$\sqrt{3}$	2
= 3*20° का त्रिभुजांक	$x(x^2 - 3y^2)$	$y(3x^2 - y^2)$	1
∴ 80° = (60 + 20)° का त्रिभुजांक	($x - \sqrt{3}y$)	($\sqrt{3}x + y$)	2 तथा
40° = (60 - 20)° का त्रिभुजांक	($x + \sqrt{3}y$)	($\sqrt{3}x - y$)	2 होंगे

$$\text{अतः बाँया पक्ष} = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = x * \frac{x + \sqrt{3}y}{2} * \frac{x - \sqrt{3}y}{2} = \frac{1}{4}x(x^2 - 3y^2)$$

$$= \frac{1}{4} \cos 60^\circ = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

उदाहरण 10 ■ सिद्ध कीजिए

$$(a) \frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{\tan(A+B)}{\tan(A-B)} \quad (b) \frac{\cos 2A + \cos 2B}{\cos 2A - \cos 2B} = \frac{\cot(A+B)}{\cot(A-B)} \quad (c) \frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A + \sin 2B} = \tan(A-B)$$

हल 1 • गुणनसूत्र द्वारा (a) बाँया पक्ष = $\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{2\sin \frac{2A+2B}{2} \cos \frac{2A-2B}{2}}{2\cos \frac{2A+2B}{2} \sin \frac{2A-2B}{2}} = \frac{\sin(A+B)\cos(A-B)}{\cos(A+B)\sin(A-B)}$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} * \frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)} = \tan(A+B)\cot(A-B)$$

$$= \tan(A+B) * \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{\tan(A+B)}{\tan(A+B)} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

(b) बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2A + \cos 2B}{\cos 2B - \cos 2A} = \frac{2\cos \frac{2A+2B}{2} \cos \frac{2A-2B}{2}}{2\sin \frac{2A+2B}{2} \sin \frac{2A-2B}{2}} = \frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)} * \frac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)} = \cot(A+B) * \cot(A-B)$

$$= \cot(A+B) * \frac{1}{\tan(A-B)} = \frac{\cot(A+B)}{\tan(A-B)} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

(c) बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{2\sin \frac{2A+2B}{2} \sin \frac{2A-2B}{2}}{2\sin \frac{2A+2B}{2} \cos \frac{2A-2B}{2}} = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \tan(A-B) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

हल 2 • त्रिभुजांक विधि द्वारा

माना कि $m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक x_1 y_1 1 तथा

$m \angle(A-B)$ का त्रिभुजांक x_2 y_2 1

$\therefore m \angle 2A = m \angle\{(A+B) + (A-B)\}$ का त्रिभुजांक $(x_1x_2 - y_1y_2)$ $(x_2y_1 + x_1y_2)$ 1 तथा

$m \angle 2B = m \angle\{(A+B) - (A-B)\}$ का त्रिभुजांक $(x_1x_2 + y_1y_2)$ $(x_2y_1 - x_1y_2)$ 1

(a) अतः बाँया पक्ष = $\frac{\sin 2A + \sin 2B}{\sin 2A - \sin 2B} = \frac{(x_2y_1 + x_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)}{(x_2y_1 + x_1y_2) - (x_2y_1 - x_1y_2)} = \frac{2x_2y_1}{2x_1y_2} = \frac{y_1}{x_1} * \frac{x_2}{y_2}$

$$= \tan(A+B)\cot(A-B) = \tan(A+B) * \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{\tan(A+B)}{\tan(A+B)} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

(b) अतः बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2A + \cos 2B}{\cos 2B - \cos 2A} = \frac{(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_2 + y_1y_2)}{(x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1x_2 - y_1y_2)} = \frac{2x_1x_2}{2y_1y_2} = \frac{x_1}{y_1} * \frac{x_2}{y_2} = \cot(A+B) * \cot(A-B)$

$$= \cot(A+B) * \frac{1}{\tan(A-B)} = \frac{\cot(A+B)}{\tan(A-B)} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

(c) अतः बाँया पक्ष = $\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A + \sin 2B} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) - (x_1x_2 - y_1y_2)}{(x_2y_1 + x_1y_2) + (x_2y_1 - x_1y_2)} = \frac{2y_1y_2}{2x_2y_1} = \frac{y_2}{x_2} = \tan(A-B) = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 11 ■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 3A \cos 4A - \sin A \cos 3A}{\sin A \sin 4A + \cos A \cos 6A} = \tan 2A$

हल 1 • गुणनसूत्र द्वारा

$$\begin{aligned} \text{बाँया पक्ष} &= \frac{\sin 3A \cos 4A - \sin A \cos 3A}{\sin A \sin 4A + \cos A \cos 6A} = \frac{2\cos 4A \sin 3A - 2\cos 2A \sin A}{2\sin 4A \sin A + 2\cos 6A \cos A} \\ &= \frac{\{\sin(4A+3A) - \sin(4A-3A)\} - [\sin(2A+A) - \sin(2A-A)]}{[\cos(4A-A) - \cos(4A+A)] + [\cos(6A+A) - \cos(6A-A)]} = \frac{\{\sin 7A - \sin A\} - [\sin 3A - \sin A]}{[\cos 3A - \cos 5A] + [\cos 7A + \cos 5A]} \\ &= \frac{\sin 7A - \sin 3A}{\cos 7A + \cos 3A} = \frac{2\cos \frac{7A+3A}{2} \sin \frac{7A-3A}{2}}{2\cos \frac{7A+3A}{2} \cos \frac{7A-3A}{2}} = \frac{\cos 5A \sin 2A}{\cos 5A \cos 2A} = \frac{\sin 2A}{\cos 2A} = \tan 2A = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

माना कि $m \angle 2A$ का त्रिभुजांक x y 1

$\therefore m \angle A$ का त्रिभुजांक $\sqrt{1+x}$ $\sqrt{1-x}$ $\sqrt{2}$

$= (1+x)$ y $\sqrt{2(1+x)}$

$m \angle 4A$ का त्रिभुजांक $(x^2 - y^2)$ $2xy$ 1

$m \angle 3A$ का त्रिभुजांक $(x+x^2 - y^2)$ $y(1+2x)$ $\sqrt{2(1+x)}$

$m \angle 6A$ का त्रिभुजांक $x(x^2 - 3y^2)$ $y(3x^2 - y^2)$ 1

अतः बाँया पक्ष $= \frac{\sin 3A \cos 4A - \sin A \cos 2A}{\sin A \sin 4A + \cos A \cos 6A} = \frac{\left[\frac{y(1+2x)}{\sqrt{2(1+x)}} \cdot (x^2 - y^2)\right] - \left[\frac{y}{\sqrt{2(1+x)}} \cdot x\right]}{\left[\frac{y}{\sqrt{2(1+x)}} \cdot (2xy)\right] + \left[\frac{1+x}{\sqrt{2(1+x)}} \cdot x(x^2 - 3y^2)\right]} = \frac{[y(1+2x) \cdot (x^2 - y^2)] - [yx]}{[y(2xy)] + [(1+x) \cdot x(x^2 - 3y^2)]}$

$= \frac{y}{x} \left[\frac{(1+2x)(x^2 - y^2) - x}{2y^2 + (1+x)(x^2 - 3y^2)} \right] = \frac{y}{x} \left[\frac{(1+2x)(2x^2 - 1) - x}{2(1-x^2) + (1+x)(4x^2 - 3)} \right]$

$= \frac{y}{x} \left[\frac{2x^2 + 4x^3 - 1 - 2x - x}{2 - 2x^2 + 4x^2 + 4x^3 - 3 - 3x} \right] = \frac{y}{x} \left[\frac{4x^3 + 2x^2 - 3x - 1}{4x^3 + 2x^2 - 3x - 1} \right] = \frac{y}{x} = \tan 2A =$ दाँया पक्ष सिद्ध।

उदाहरण 12■ सिद्ध कीजिए $\sin 80^\circ + \sin 20^\circ = \sqrt{3} \sin 50^\circ$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

बाँया पक्ष $= \sin 80^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin \frac{(80+20)^\circ}{2} \cos \frac{(80-20)^\circ}{2} = 2 \sin 50^\circ \cos 30^\circ$

$= 2 \sin 50^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \sin 50^\circ =$ दाँया पक्ष सिद्ध।

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

60° का त्रिभुजांक 1 $\sqrt{3}$ 2

30° का त्रिभुजांक $\sqrt{3}$ 1 2

माना कि 10° का त्रिभुजांक x y 1

$\therefore 80^\circ$ का त्रिभुजांक y x 1 पूरक कोण का त्रिभुजांक नियम से

$20^\circ = (30 - 10)^\circ$ का त्रिभुजांक $(\sqrt{3}x + y)$ $(x - \sqrt{3}y)$ 2

$50^\circ = (60 - 10)^\circ$ का त्रिभुजांक $(x + \sqrt{3}y)$ $(\sqrt{3}x - y)$ 2

अतः बाँया पक्ष $= \sin 80^\circ + \sin 20^\circ = x + \frac{x - \sqrt{3}y}{2} = \frac{3x - \sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = \sqrt{3} \sin 50^\circ =$ दाँया पक्ष सिद्ध।

उदाहरण 13■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin 7A - \sin 5A}{\cos 7A + \cos 5A} = \tan A$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

बाँया पक्ष $= \frac{\sin 7A - \sin 5A}{\cos 7A + \cos 5A} = \frac{2 \cos \frac{7A+5A}{2} \sin \frac{7A-5A}{2}}{2 \cos \frac{7A+5A}{2} \cos \frac{7A-5A}{2}} = \frac{\cos 6A \sin A}{\cos 6A \cos A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A =$ दाँया पक्ष सिद्ध।

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

माना कि $m \angle 6A$ का त्रिभुजांक x_1 y_1 1 तथा

$m \angle A$ का त्रिभुजांक x_2 y_2 1

$\therefore m \angle 7A = m \angle (6A + A)$ का त्रिभुजांक $(x_1 x_2 - y_1 y_2)$ $(x_2 y_1 + x_1 y_2)$ 1 तथा

$m \angle 5A = m \angle (6A - A)$ का त्रिभुजांक $(x_1 x_2 + y_1 y_2)$ $(x_2 y_1 - x_1 y_2)$ 1 तथा

अतः बाँया पक्ष $= \frac{\sin 7A - \sin 5A}{\cos 7A + \cos 5A} = \frac{(x_2 y_1 + x_1 y_2) - (x_2 y_1 - x_1 y_2)}{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 x_2 - y_1 y_2)} = \frac{2x_1 y_2}{2x_1 x_2} = \frac{y_2}{x_2} = \tan A =$ दाँया पक्ष सिद्ध।

उदाहरण 14■ सिद्ध कीजिए $\sin 85^\circ + \sin 25^\circ - \cos 55^\circ = 0$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

$$\begin{aligned}
\text{बाँया पक्ष} &= \sin 85^\circ - \sin 25^\circ - \cos 55^\circ = 2 \cos \frac{85+25}{2} \sin \frac{85-25}{2} - \cos 55^\circ \\
&= 2 \cos 55^\circ \sin 30^\circ - \cos 55^\circ \\
&= 2 \cos 55^\circ * \frac{1}{2} - \cos 55^\circ \\
&= \cos 55^\circ - \cos 55^\circ = 0 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}
\end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

60° का त्रिभुजांक	1	$\sqrt{3}$	2	
30° का त्रिभुजांक	$\sqrt{3}$	1	2	
माना कि 5° का त्रिभुजांक	x	y	1	
∴ 85° का त्रिभुजांक	y	x	1	पूरक कोण का त्रिभुजांक नियम से
25° = (30 - 5)° का त्रिभुजांक	$(\sqrt{3}x + y)$	$(x - \sqrt{3}y)$	2	
55° = (60 - 5)° का त्रिभुजांक	$(x + \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x - y)$	2	

अतः बाँया पक्ष = $\sin 85^\circ - \sin 25^\circ - \cos 55^\circ = x - \frac{x - \sqrt{3}y}{2} - \frac{x + \sqrt{3}y}{2} = x - x = 0 = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 15 सिद्ध कीजिए $\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$

हल त्रिभुजांक विधि द्वारा

45° का त्रिभुजांक	1	1	$\sqrt{2}$
माना कि 8° का त्रिभुजांक	x	y	1
∴ 37° = (45 - 8)° का त्रिभुजांक	(x + y)	(x - y)	$\sqrt{2}$

अतः बाँया पक्ष = $\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \frac{(x+y) + (x-y)}{(x+y) - (x-y)} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y} = \cot 8^\circ = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

विस्तार में $\frac{\cos (45-A)^\circ + \sin (45-A)^\circ}{\cos (45-A)^\circ - \sin (45-A)^\circ} = \cot A$ सिद्ध होगा।

उदाहरण 16■ सिद्ध कीजिए $\sin 70^\circ - \sin 50^\circ = \sin 10^\circ$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

$$\begin{aligned}
\text{बाँया पक्ष} &= \sin 70^\circ + \sin 50^\circ = 2 \cos \frac{70+50}{2} \sin \frac{70-50}{2} = 2 \cos 60^\circ \sin 10^\circ = 2 * \frac{1}{2} \sin 10^\circ \\
&= \sin 10^\circ = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}
\end{aligned}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

60° का त्रिभुजांक	1	$\sqrt{3}$	2
माना कि 10° का त्रिभुजांक	x	y	1
∴ 70° = (60 + 10)° का त्रिभुजांक	$(x - \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x + y)$	2
50° = (60 - 10)° का त्रिभुजांक	$(x + \sqrt{3}y)$	$(\sqrt{3}x - y)$	2

अतः बाँया पक्ष = $\sin 70^\circ - \sin 50^\circ = \frac{\sqrt{3}x + y}{2} - \frac{\sqrt{3}x - y}{2} = \frac{2y}{2} = y = \sin 10^\circ = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$

उदाहरण 17■ सिद्ध कीजिए $\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A+B}{2}$

हल 1• गुणनसूत्र द्वारा

$$\text{बाँया पक्ष} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} = \tan \frac{A+B}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}$$

हल 2• त्रिभुजांक विधि द्वारा

$$\begin{aligned}
&\text{माना कि } m \angle \frac{A+B}{2} \text{ का त्रिभुजांक } \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \end{matrix} \text{ तथा} \\
&m \angle \frac{A-B}{2} \text{ का त्रिभुजांक } \begin{matrix} x_2 & y_2 & 1 \end{matrix} \\
\therefore m \angle A = m \angle \left\{ \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} \right\} \text{ का त्रिभुजांक } \begin{matrix} (x_1x_2 - y_1y_2) & (x_2y_1 + x_1y_2) & 1 \end{matrix} \text{ तथा} \\
m \angle B = m \angle \left\{ \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \right\} \text{ का त्रिभुजांक } \begin{matrix} (x_1x_2 + y_1y_2) & (x_2y_1 - x_1y_2) & 1 \end{matrix} \\
\text{अतः बाँया पक्ष} = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{2x_2y_1}{2x_1x_2} = \frac{y_1}{x_1} = \tan \frac{A+B}{2} = \text{दाँया पक्ष सिद्ध।}
\end{aligned}$$

विवेचना— अध्याय 2,3,4 एवं 5 के अध्ययन से स्पष्ट है कि त्रिकोणमिति समिकाएँ एवं सूत्र संग्रह त्रिभुजांकों के योगान्तर नियम से ही प्राप्त हुए हैं। जिन्हें आत्मसात कर सरलता से हल प्राप्त किये जा सकते हैं। समिकाएँ एवं सूत्र संग्रह की संख्या की उत्तरोत्तर वृद्धि की ओर होना कंठस्थी करण को सरलता प्रदान करने में बाधक ही है। जबकि त्रिभुजांकों के योगान्तर नियम कंठस्थी करण से मुक्त करता है और अध्ययन को रोचकता प्रदान करता है। कुछ प्रसंगों में त्रिभुजांकों का चयन के प्रति $m \angle \theta$ का चयन विचारणीय हो जाता है। जो कि हमारे गणित अध्ययन का एक महत्वपूर्ण उद्देश्य तर्क शक्ति विकसित करने में सहायक ही है।

-----05-----

अध्याय -6 बीजांक (उत्पत्ति अंक)

6-1 प्रस्तावना सभी भाषाएँ जिनका उत्पत्ति श्रोत प्राचीन आध्यात्मिक पाली एवं वैदिक भाषा संस्कृत है। ऑग्ल भाषा के गणित शब्द-कोष के शब्द एलजेबरा [ALGEBRA] के लिए बीजगणित ही स्वीकारा गया है। बीजगणित का सारभूत अर्थ बीज (अक्षर) राशियों का गणित है। इसीलिए बीजगणित में बीज (अक्षर) राशियों का विभिन्न पहलु में सारभूत अध्ययन है कि यह एक स्पष्टतः संकल्पित एवं विचारा हुआ प्राचीन आध्यात्मिक वैदिक गणित विधि है। गणित की समस्त शाखा प्रशाखाओं के अध्ययन की विकास यात्रा में एक शक्ति स्वरूपा आत्मसाती है। इसी तारतम्य में त्रिकोणमिति में किसी त्रिभुजांकों के बीजांक (उत्पत्ति अंक) से परिचित होंगे। जिसे अध्ययन विस्तार में त्रिकोणमिति के विशिष्ट अध्ययन में आत्मसात करना रोमांचकारी सिद्ध होगा।

बीजांक की ओर माना कि $m\angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजांक का प्रथम अवयव आधार x एवं द्वितीय अवयव लम्ब y के लिए क्रमशः p और q दर्शाया जाय। अर्थात् $m\angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजांक $[p \quad q \quad \dots]$ का क्रमशः प्रथम दो अवयव आधार p एवं द्वितीय अवयव लम्ब q से तृतीय अवयव कर्ण $\sqrt{p^2 + q^2}$ होगा। अतः $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $[p \quad q \quad \sqrt{p^2 + q^2}]$ क्रमशः तीनों अवयव आधार लम्ब और कर्ण का दर्शित अनुपात होगा।

$\therefore m\angle A$ का त्रिभुजांक $[\{p^2 - q^2\} \quad \{2pq\} \quad \{p^2 + q^2\}]$ होगा। जहाँ $m\angle A$ का त्रिभुजांक के सभी अवयव तर्क संगत होंगे। आगे p और q का उपयोग कर $m\angle A$ के तीनों अवयव आधार लम्ब और कर्ण के साथ सही त्रिभुजांक उत्पन्न कर सकते हैं। इस प्रकार (p, q) को $m\angle A$ के त्रिभुजांक का **बीजांक (उत्पत्ति अंक)** कहा जाता है। अर्थात् $m\angle A$ के त्रिभुजांक के उत्पत्ति श्रोत युग्म अंक या संख्या $[p \quad q]$ जो स्वयं में कि $m\angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजांक का प्रथम दो अवयव आधार और लम्ब होंगे $m\angle A$ का **बीजांक** कहलाता है।

अर्थात् किसी कोण माप $m\angle A$ का **बीजांक** ससके प्रति प्राप्त $m\angle \frac{A}{2}$ के दक्ष त्रिभुजांक के प्राप्त आधार एवं लम्ब का संख्यांक होता है।

आदर्श बीजांक बीजांक (p, q) में $q=1$ होगा। इस प्रकार केवल p ही $m\angle A$ का **आदर्श बीजांक** कहलाता है। जिसके सापेक्ष $m\angle A$ का त्रिभुजांक $[\{p^2 - 1\} \quad 2p \quad \{p^2 + 1\}]$ होगा।

बीजांक (p, q) का आदर्श बीजांक में संकेतन बीजांक (p, q) का आदर्श बीजांक में संकेतन $F[\frac{p}{q}]$ माना जाना चाहिए।

आदर्श बीजांक का आदर्श संकेतन अध्ययन विशेष में आदर्श बीजांक p का आदर्श संकेतन $F[p]$ माना प्रथम आदर्श बीजांक $F[p] \geq 3$ के प्रति त्रिभुजांक सारणी निम्नानुसार अवलोकित कीजिए –

सारिणी 6-1

$F[p] \geq 3$ के प्रति त्रिभुजांक

आदर्श बीजांक $F[p]$	त्रिभुजांक गणना $[p^2 - 1] \quad 2p \quad [p^2 + 1]$			दक्ष त्रिभुजांक			दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव
1	2			3			4
F[3]	8	6	10	4	3	5	3
F[4]	15	8	17	15	8	17	8
F[5]	24	10	26	12	5	13	5
F[6]	35	12	37	35	12	37	12
F[7]	48	14	50	24	7	25	7
F[8]	63	16	65	63	16	65	16
F[9]	80	18	82	40	9	41	9
F[10]	99	20	101	99	20	101	20
F[11]	120	22	122	60	11	61	11

F[12]	143	24	145	143	24	145	12
F[13]	168	26	170	84	13	85	13
F[14]	195	28	197	195	28	197	28
F[15]	224	30	226	112	15	113	15
F[16]	255	32	257	255	32	257	32
F[17]	288	34	290	144	17	145	17
F[18]	323	36	325	323	36	325	36
F[19]	360	38	362	180	19	181	19
F[20]	399	40	401	399	40	401	40

इस प्रकार आदर्श बीजांक $F[p] \geq 3$ के प्रति त्रिभुजांको की लम्बी सूची प्राप्त कर सकते हैं। सामान्यतः बीजांक (p, q) का अनुप्रयोग होता है। उक्त सारिणी में आदर्श बीजांक नियम के अनुसार $q=1$ है। जिसका वर्गमान $1^2 = 1$ को त्रिभुजांक गणना में प्रथम अवयव (आधार) एवं तीसरा अवयव (कर्ण) मान प्राप्त करने आदर्श बीजांक संकेतन $F[p]$ के बीजांक के वर्गमान p^2 में छत्तीसगढ़ी गणित शब्दावली में क्रमशः उना कर एवं आगर कर (घटाकर एवं जोड़कर) प्राप्त किया गया है। वैदिक गणित संक्रिया सूत्र संग्रह में संकलन कलनाभ्यां का प्रतिलोम कलन संकलनाभ्यां = जोड़ने के द्वारा ही है। और मध्य (दूसरा) अवयव (लम्ब) $p * q$ का दूना मान $2p * q$ के लिए $2p * 1 = 2p$ लिया गया है। वैदिक गणित संक्रिया सूत्र संग्रह में उपसूत्र संग्रह में द्वंदयोगा सूत्र द्वारा प्राप्त करना कहा गया है।

6-2 आदर्श बीजांक $F[p] \geq 3$ के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक की विशेषताएँ आदर्श बीजांक $F[p] \geq 3$ का उपयोग कर त्रिभुजांकों के अस्तित्व निर्माण का सावधानी पूर्वक अध्ययन करे तो स्पष्ट है दक्ष त्रिभुजांकों की विशेषताओं की व्याख्या करने के लिए स्पष्ट समूह प्राप्त होते हैं।

- 1• आदर्श बीजांक के सम संख्या $(4, 6, 8, 10, \dots, 2n)$ होने के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक
- 2• आदर्श बीजांक के विषम संख्या $\{3, 5, 7, \dots, (2n+1)\}$ होने के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक

व्याख्या

(1) आदर्श बीजांक के सम संख्या $(4, 6, 8, 10, \dots, 2n)$ होने के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक की विशेषताएँ

A• दक्ष त्रिभुजांक का मध्य (लम्ब) अवयव बीजांक का दूना होता है।

जैसे $F[4]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव $2 * 4 = 8$
 $F[6]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव $2 * 6 = 12$
 $F[8]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव $2 * 8 = 16$
 $F[10]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव $2 * 10 = 20$

B• दक्ष त्रिभुजांक का तीसरा (कर्ण) अवयव प्रथम (आधार) अवयव से 2 (दो) अधिक होता है।

जैसे $F[4]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव $= 17 - 15 = 2$
 $F[6]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव $= 37 - 35 = 2$
 $F[8]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव $= 65 - 63 = 2$
 $F[10]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव $= 101 - 99 = 2$

.....
 $F[2n]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव $= (p^2 + 1) - (p^2 - 1) = 2$

C• प्रथम (आधार) अवयव और तीसरा (कर्ण) अवयव का योगमान का दूना मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान के बराबर होता है।

जैसे $F[4]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → $2 * [\text{प्रथम (आधार) अवयव} + \text{तीसरा (कर्ण) अवयव}]$
 $= 2 * [15 + 17] = 64 = 8^2 = \text{मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान}$
 $F[6]$ से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से → $2 * [\text{प्रथम (आधार) अवयव} + \text{तीसरा (कर्ण) अवयव}]$
 $= 2 * [35 + 37] = 144 = 12^2 = \text{मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान}$

(2) आदर्श बीजांकके विषम {3,5,7,------(2n+1)} संख्या होने के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक की विशेषताएँ

A• दक्ष त्रिभुजांक का मध्य (लम्ब) अवयव बीजांक ही होता है।

जैसे F[3] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव 3 ही है।

F[5] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव 5 ही है।

F[7] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव 7 ही है।

F[9] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक का मध्य अवयव 9 ही है।

B• दक्ष त्रिभुजांक का तीसरा (कर्ण) अवयव प्रथम (आधार) अवयव से 1 (एक) अधिक होता है।

जैसे F[3] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव = 5–4 =1

F[5] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव = 13–12 =1

F[7] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव = 25 –24 =1

F[9] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव = 41–40 =1

.....
F[2n+1] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ तीसरा (कर्ण) अवयव — प्रथम (आधार) अवयव = $(\frac{p^2+1}{2}) - (\frac{p^2-1}{2}) = 1$

C• प्रथम (आधार) अवयव और तीसरा (कर्ण) अवयव का योगमान मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान के बराबर होता है।

जैसे F[3] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ [प्रथम (आधार) अवयव + तीसरा (कर्ण) अवयव]

= [4 + 5] =9 = 3² = मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान

F[5] से प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक से→ [प्रथम (आधार) अवयव + तीसरा (कर्ण) अवयव]

= [12 + 13] =25 = 5² = मध्य (लम्ब) अवयव का वर्गमान

दूसरे शब्दों में कह सकते हैं कि दोनों प्रकार के समूह में एक ही जैसा गुण है सिवाय सम बीजांक एवं उनसे प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के मध्य अवयव में गुणनखण्ड 2 की उपस्थिति है तथा विषम बीजांक एवं उनसे प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के मध्य अवयव में योग्य गुणनखण्ड 1 ही है। इसका कारण पूरी तरह स्पष्ट है कि विषम बीजांक के प्रति प्राप्त दक्ष त्रिभुजांको के तीनों अवयव को 2 द्वारा विभाजित कर दक्ष त्रिभुजांको के तीनों अवयव प्राप्त किये गये हैं।

बीजांक से प्राप्त त्रिभुजांको की विशेषताओं के अन्तर्गत प्राप्त प्रगुण बबुत ही उपयोगी है जो दो वैकल्पिक विधियों में स्पष्टतः उपयोगी होना प्रमाणित करता है।

1• बीजांक से त्रिभुजांक के तीनों अवयव प्राप्त कर सकते हैं।

2• प्राप्त त्रिभुजांक के अवयव की शुद्धता की जाँच एवं आकलन कर सकते हैं।

जाँच एवं आकलन सूत्र

m ∠A का आदर्श बीजांक F[p] के प्रति m ∠A का त्रिभुजांक – $[p^2 - 1] \quad 2p \quad [p^2 + 1]$

m ∠A का आदर्श बीजांक F[p] के प्रति m ∠ $\frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक – $P \quad 1 \quad \sqrt{p^2 + 1}$

ये मजेदार विकल्प जो एक-दूसरे के निकट सम्बंध के प्रतिरूप आश्रित हैं वैदिक गणित से बाहर जुटाया गया है।

उदाहरण■ उन कोण मापों का दक्ष त्रिभुजांक प्राप्त कर इनके सही होने की जाँच भी कीजिए जिनके आदर्श बीजांक –

(a) F[27] , (b) F[32] , (c) F[44] , (d) F[56] , (e) F[71] , (f) F[101] है।

(a) **हल** F[27] में p=27 विषम संख्या है

∴ आदर्श बीजांक F[27] के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक $[27^2 - 1] \quad 2*27 \quad [27^2 + 1]$

= 728 54 730 अदक्ष है।

= 364 27 365 दक्ष होगा।

प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने कीजाँच– (कर्ण माप) – (आधार माप) = 365 – 364 =1

$$(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप}) = 365 + 364 = 729 = 27^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

(b) हल $F[32]$ में $p=32$ सम संख्या है

$$\therefore \text{आदर्श बीजांक } F[32] \text{ के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} [32^2 - 1] & 2*32 & [32^2 + 1] \\ = 1023 & 64 & 1025 \end{array} \text{ दक्ष है।}$$

$$\text{प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने कीजाँच- (कर्ण माप) - (आधार माप) = 1025 - 1023 = 2}$$

$$2*\{(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप})\} = 2 * \{1025 + 1023\} = 4096 = 64^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

(c) हल $F[44]$ में $p=44$ सम संख्या है

$$\therefore \text{आदर्श बीजांक } F[44] \text{ के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} [44^2 - 1] & 2*44 & [44^2 + 1] \\ = 1935 & 88 & 1937 \end{array} \text{ दक्ष है।}$$

$$\text{प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने कीजाँच- (कर्ण माप) - (आधार माप) = 1937 - 1935 = 2}$$

$$2*\{(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप})\} = 2 * \{1937 + 1935\} = 7744 = 88^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

(d) हल $F[56]$ में $p=56$ सम संख्या है

$$\therefore \text{आदर्श बीजांक } F[56] \text{ के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} [56^2 - 1] & 2*56 & [56^2 + 1] \\ = 3135 & 112 & 3137 \end{array} \text{ दक्ष है।}$$

$$\text{प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने की जाँच- (कर्ण माप) - (आधार माप) = 3137 - 3135 = 2}$$

$$2*\{(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप})\} = 2 * \{3137 + 3135\} = 12544 = 112^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

(e) हल $F[71]$ में $p=71$ चिषम संख्या है

$$\therefore \text{आदर्श बीजांक } F[71] \text{ के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} [71^2 - 1] & 2*71 & [71^2 + 1] \\ = 5040 & 142 & 5042 \end{array} \text{ अदक्ष है।}$$

$$= 2520 \quad 71 \quad 2521 \text{ दक्ष होगा।}$$

$$\text{प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने कीजाँच- (कर्ण माप) - (आधार माप) = 2521 - 2520 = 1}$$

$$(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप}) = 2521 + 2520 = 5041 = 71^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

(f) हल $F[101]$ में $F=101$ चिषम संख्या है।

$$\therefore \text{आदर्श बीजांक } F[101] \text{ के प्रति कोण माप का त्रिभुजांक } \begin{array}{ccc} [101^2 - 1] & 2*101 & [101^2 + 1] \\ = 10200 & 202 & 10202 \end{array} \text{ अदक्ष है।}$$

$$= 5100 \quad 101 \quad 5101 \text{ दक्ष होगा।}$$

$$\text{प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने कीजाँच- (कर्ण माप) - (आधार माप) = 5101 - 5100 = 1}$$

$$(\text{कर्ण माप}) + (\text{आधार माप}) = 5101 + 5100 = 10201 = 101^2$$

निष्कर्ष प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक सही है।

6-3 त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक (त्रि. स. बी.) यह बहुत ही उपयोगी ज्ञान है जो यह कि $m \angle A$ का आदर्श बीजांक $F[p]$ स्वतः(स्वयं में) $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक है। तब $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $[p \quad 1 \quad \sqrt{p^2 + 1}]$ होगा। पुनः $m \angle A$ का बीजांक $[p \quad q]$ स्वतः(स्वयं में) $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक है। तब $m \angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $[p \quad q \quad \sqrt{p^2 + q^2}]$ होगा।

जबकि वास्तविक गणना के आधार पर यदि : $m\angle A$ का बीजांक p हो तो $m\angle \frac{A}{2}$ का बीजांक $[(\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}+p), (\sqrt{\frac{p^2+1}{2}}-p)]$

होगा। और यदि $m\angle A$ का बीजांक $[p, q]$ हो तो $m\angle \frac{A}{2}$ का बीजांक $[(\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}+p), (\sqrt{\frac{p^2+q^2}{2}}-p)]$ होगा। ये केवल

$m\angle \frac{A}{2}$ का बीजांक होंगे। इन्हें त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक कदापि पढ़े न समझे।

अदक्ष एवं दक्ष बीजांक सारिणी 6-1 में त्रिभुजांकों के आकलन में आदर्श बीजांक $F[p] \geq 3$ पूर्णांकों को चुना गया है। हम त्रिभुजांकों का वह समूह भी प्राप्त कर सकते हैं जिनके बीजांक अपूर्णांक हो। (उदाहरणार्थ बीजांक 2.5, 3.5) या दूसरे शब्दों में बीजांक (2.5, 1), (3.5, 1) को पूर्णांक में दर्शित करने पर क्रमशः (5, 2), (7, 2) के रूप में पूर्णांकित होंगे। इस प्रकार त्रिभुजांकों की भाँति बीजांकों को भी अदक्ष एवं दक्ष बीजांक के रूप में जाना जा सकता है। अदक्ष बीजांक (n^*p, n^*q) के सदृश्य होता है। जहाँ n अदक्ष बीजांक के दोनों अवयव में निहित उभयनिष्ठ परिमेय / अपरिमेय गुणनखण्ड या गुणनखण्डों का गुणनफल है। जिसे विलोपित करने पर प्राप्त बीजांक (p, q) दक्ष बीजांक होगा। इस दक्ष बीजांक (p, q) द्वारा त्रिभुजांक प्राप्त करने का सामान्य नियम सारिणी 6-1 की भँति ही है। अर्थात् बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$ होगा।

दक्ष बीजांक (p, q) द्वारा प्राप्त दक्ष त्रिभुजांक के सही होने की जाँच दक्ष बीजांक (p, q) द्वारा एवं प्राप्त त्रिभुजांक

(x, y, z) के अवलोकन मात्र से— **जाँच समिका 1**• $\frac{1}{2}[z + x] = p^2$, **समिका 2**• $\frac{1}{2}[z - x] = q^2$ एवं

3• $y = 2(p^*q)$ में से कोई दो समिका सत्यापित होने पर दक्ष बीजांक (p, q) द्वारा प्राप्त त्रिभुजांक सही होगा।

उदाहरण■ उन कोण मापों का दक्ष त्रिभुजांक (x, y, z) प्राप्त कर इनके सही होने की जाँच प्रस्तुति भी देवे जिनके दक्ष बीजांक (p, q)

(a) 7 2 (b) 9 2 (c) 12 5 (d) 6 4 (e) 4 $\frac{3}{4}$ (f) 8.25 3

(a) **हल** बीजांक $(p, q) = (7, 2)$

बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक (7, 2) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(7^2 - 2^2), (2*7*2), (7^2 + 2^2)] = [45, 28, 53]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की **जाँच 1**• $\frac{1}{2}(53 + 45) = 49 = 7^2$ **जाँच 2**• $\frac{1}{2}(53 - 45) = 4 = 2^2$

जाँच 3• $28 = 2*7*2$ **निष्कर्ष** प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

(b) **हल** बीजांक $(p, q) = (9, 2)$

बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक (9, 2) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(9^2 - 2^2), (2*9*2), (9^2 + 2^2)] = [77, 36, 85]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की **जाँच 1**• $\frac{1}{2}(85 + 77) = 81 = 9^2$ **जाँच 2**• $\frac{1}{2}(85 - 77) = 4 = 2^2$

जाँच 3• $36 = 2*9*2$ **निष्कर्ष** प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

(c) **हल** बीजांक $(p, q) = (12, 5)$

बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक (12, 5) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(12^2 - 5^2), (2*12*5), (12^2 + 5^2)] = [119, 120, 169]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की **जाँच 1**• $\frac{1}{2}(169 + 119) = 144 = 12^2$ **जाँच 2**• $\frac{1}{2}(169 - 119) = 25 = 5^2$

जाँच 3• $120 = 2*12*5$ **निष्कर्ष** प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

(d) **हल** बीजांक $(p, q) = (6, 4) = (3, 2)$ दक्ष बीजांक

दक्ष बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक (3, 2) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(3^2 - 2^2), (2*3*2), (3^2 + 2^2)] = [5, 12, 13]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की जाँच 1• $\frac{1}{2}(13 + 5) = 9 = 3^2$ जाँच 2• $\frac{1}{2}(13 - 5) = 4 = 2^2$

जाँच 3• $12 = 2 \cdot 3 \cdot 2$ निष्कर्ष प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

(e) हल बीजांक $(p \ q) = (4 \ \frac{3}{4}) = (16 \ 3)$ दक्ष बीजांक होगा।

दक्ष बीजांक $(p \ q)$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक $(16 \ 3)$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(16^2 - 3^2), (2 \cdot 16 \cdot 3), (16^2 + 3^2)] = [247 \ 96 \ 265]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की जाँच 1• $\frac{1}{2}(265 + 247) = 256 = 16^2$ जाँच 2• $\frac{1}{2}(265 - 247) = 9 = 3^2$

जाँच 3• $96 = 2 \cdot 16 \cdot 3$ निष्कर्ष प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

(f) हल बीजांक $(p \ q) = (8.25 \ 3) = (4 \cdot 8.25 \ 4 \cdot 3) = (33 \ 12) = (11 \ 4)$ दक्ष बीजांक होगा।

दक्ष बीजांक $(p \ q)$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$

∴ बीजांक $(11 \ 4)$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(11^2 - 4^2), (2 \cdot 11 \cdot 4), (11^2 + 4^2)] = [105 \ 88 \ 137]$

प्राप्त त्रिभुजांक के सही होने की जाँच 1• $\frac{1}{2}(137 + 105) = 121 = 11^2$ जाँच 2• $\frac{1}{2}(137 - 105) = 16 = 4^2$

जाँच 3• $88 = 2 \cdot 11 \cdot 4$ निष्कर्ष प्राप्त त्रिभुजांक सही है।

6-4 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष-योज्य प्रतिलोम कोण $3m \angle \bar{A}^\circ$ परक काण $m \angle (90 - A)^\circ$ अधिक काण, $m \angle (90 + A)^\circ$ सम्पूरक काण $m \angle (180 - A)^\circ$, अधि कोण $m \angle (180 + A)^\circ$, अधिपूरक कोण $m \angle (270 - A)^\circ$, अधिक अधि-कोण $m \angle (270 + A)^\circ$, सम्पूर्ण-पूरक कोण $m \angle (n \cdot 360 + A)$ और अधिकसम्पूर्ण कोण $m \angle (n \cdot 360 - A)$ का बीजांक प्रमेय-

1. योज्य प्रतिलोम कोण $m \angle \bar{A}$ का बीजांक प्रमेय

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष योज्य प्रतिलोम कोण $m \angle \bar{A}$ का बीजांक $= [p \ \bar{q}]$ होगा।

प्रमाण. $m \angle 0^\circ$ का त्रिभुजांक $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $= [(p^2 - q^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$

∴ $m \angle \bar{A} = m \angle (0 - A)$ का त्रिभुजांक $= [(p^2 - q^2) \ (-2pq) \ (p^2 + q^2)]$

अतः $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष योज्य प्रतिलोम कोण $m \angle \bar{A}$ का बीजांक

$= [(p^2 + q^2) + (p^2 - q^2)] \ (-2pq) = [2p^2 \ (-2pq)] = [p \ \bar{q}]$ सिद्ध।

2. पूरक कोण का $m \angle (90 - A)^\circ$ बीजांक प्रमेय

प्रमेय 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसके पूरक कोण $m \angle (90 - A)^\circ$ का बीजांक $= [(p+q) \ (p-q)]$ होगा।

प्रमाण. $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $= [(p^2 - q^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$

∴ अनुच्छेद 1-6 के अनुसार $m \angle (90 - A)^\circ$ का त्रिभुजांक $= [(2pq) \ (p^2 - q^2) \ (p^2 + q^2)]$

अतः अनुच्छेद 6-3 के अनुसार $m \angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष उसी $m \angle A$ बीजांक आकलन करने की विधि 2 के अनुसार-

$m \angle (90 - A)^\circ$ का बीजांक $\left[\sqrt{(p^2 + q^2) + (2pq)} \ \sqrt{(p^2 + q^2) - (2pq)} \right]$
 $= [\sqrt{(p+q)^2} \ \sqrt{(p-q)^2}] = [(p+q) \ (p-q)]$ सिद्ध।

टीप इस प्रमेय को बीजांकों का योगान्तर प्रमेय कहते हैं। जिसे वैदिक गणित सूत्र शब्दावली में संकलनभ्याम् च व्यकनाभ्याम् सूत्र का सरल अनुप्रयोग सुझाया है। छत्तीसगढ़ी में जोड़ना अउ घटाना सूत्र के नाम पर प्रतिपादित किया जा सकता है।

उदाहरण■ $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष $m \angle A$ के पूरक कोण का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसके पूरक कोण $m \angle (90 - A)^\circ$ का बीजांक $= [(p+q) \ (p-q)]$ से-

$m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष उसके पूरक कोण $m \angle (90 - A)^\circ$ का बीजांक $= [(12+5) \ (12-5)]$

$$= [17 \ 7] \text{ उत्तर।}$$

उत्तर जाँच (उत्तर से के प्रश्न की ओर) $m \angle (90 - A)^\circ$ का बीजांक $[17 \ 7]$ के सापेक्ष उसके पूरक कोण $m \angle A$ का बीजांक $[(17+7) \ (17-7)] = [24 \ 10] = [12 \ 5]$ प्रश्नांकित बीजांक है।

निष्कर्ष प्राप्त उत्तर सही है।

3• अधिक कोण $m \angle (90 + A)^\circ$ बीजांक प्रमेय

प्रमेय 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष अधिककोण $m \angle (90 + A)^\circ$ का बीजांक $[(p-q) \ (p+q)]$ होगा।

प्रमाण 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$
 $m \angle 90^\circ$ का त्रिभुजांक $= \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \end{matrix}$

$$\therefore m \angle (90 + A)^\circ \text{ का त्रिभुजांक } = [(-2pq) \ (p^2 - q^2) \ (p^2 + q^2)]$$

अतः अनुच्छेद 6-3 $m \angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष उसी $m \angle A$ बीजांक आकलन करने की विधि 2 के अनुसार—

$$\begin{aligned} m \angle (90 + A)^\circ \text{ का बीजांक } & \left[\frac{\sqrt{(p^2 + q^2)} + (-2pq)}{\sqrt{(p^2 + q^2)} - (-2pq)} \right] \\ & = \left[\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - 2pq}{\sqrt{p^2 + q^2} + 2pq} \right] \\ & = \left[\frac{\sqrt{(p-q)^2}}{\sqrt{(p+q)^2}} \right] = [(p-q) \ (p+q)] \text{ सिद्ध।} \end{aligned}$$

उदाहरण $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष अधिक कोण $m \angle (90 + A)^\circ$ का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष अधिक कोण $m \angle (90 + A)^\circ$ का बीजांक $[(p-q) \ (p+q)]$ से—
 $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष

$$\text{उसके पूरक कोण } m \angle (90 + A)^\circ \text{ का बीजांक } = [(12-5) \ (12+5)] = [7 \ 17]$$

4• सम्पूरक कोण $m \angle (180 - A)^\circ$ का बीजांक प्रमेय

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसके सम्पूरक कोण $m \angle (180 - A)^\circ$ का बीजांक $[q \ p]$ होगा।

प्रमाण $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$
 $m \angle A$ का त्रिभुजांक के सापेक्ष $m \angle A$ के सम्पूरक कोण $m \angle (180 - A)^\circ$ का त्रिभुजांक

$$[\{-(p^2 - q^2)\} \ (2pq) \ (p^2 + q^2)] = [(q^2 - p^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$$

$\therefore m \angle A$ के सम्पूरक कोण $m \angle (180 - A)^\circ$ का बीजांक $= m \angle (180 - A)^\circ$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष बीजांक

$$= [\{ (p^2 + q^2) + (q^2 - p^2) \} \ (2pq)] = [2q^2 \ 2pq] = [q \ p] \text{ सिद्ध।}$$

टीप इस प्रमेय को बीजांकों का स्थान परिवर्तन प्रमेय कहते हैं। जिसे वैदिक गणित सूत्र शब्दावली में सीधे परावर्त्ययोज्यते (स्थान परिवर्तन) सूत्र का सरल अनुप्रयोग सुझाया है। जिसके लिये छत्तीगढ़ी में अदला-बदली करना है।

उदाहरण $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष उसके सम्पूरक कोण $m \angle (180 - A)^\circ$ का बीजांक $= [5 \ 12]$ होगा।

5• समधिक कोण $m \angle (180 + A)^\circ$ बीजांक प्रमेय

प्रमेय 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष समधिकोण $m \angle (180 + A)^\circ$ का बीजांक $[q \ \bar{p}]$ होगा।

प्रमाण $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2) \ (2pq) \ (p^2 + q^2)]$
 $m \angle 180^\circ$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} \bar{1} & 0 & 1 \end{matrix}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{समधिकोण } m \angle (180 + A)^\circ \text{ का त्रिभुजांक } & [\{-(q^2 - p^2)\} \ (-2pq) \ (q^2 + p^2)] \\ & = [(q^2 - p^2) \ (-2pq) \ (p^2 + q^2)] \end{aligned}$$

$\therefore$ समधिकोण $m \angle (180 + A)^\circ$ का बीजांक =

$$[\{ (p^2 + q^2) + (q^2 - p^2) \} \ (-2pq)] = [2q^2 \ -2pq] = [q \ \bar{p}] \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष समधिकोण $m \angle (180 + A)^\circ$ का बीजांक $= [5 \ \bar{12}]$ होगा।

6• अधि-पूरक कोण $m \angle (270 - A)^\circ$ बीजांक प्रमेय

प्रमेय 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष पुनर्युक्त कोण $m \angle (270 - A)^0$ का बीजांक $= [(p - q) \ (\overline{p + q})]$ होगा।

प्रमाण- $m \angle 270^0$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} 0 & \bar{1} & 1 \end{matrix}$
 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} (p^2 - q^2) & (2pq) & (p^2 + q^2) \end{bmatrix}$
 $\therefore m \angle (270 - A)^0$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} \{-2pq\} & (q^2 - p^2) & (p^2 + q^2) \end{bmatrix}$
 $\therefore m \angle (270 - A)^0$ का बीजांक $= [\{(p^2 + q^2) + (-2pq)\} \ (q^2 - p^2)]$
 $= [\{p^2 + q^2 - 2pq\} \ (q^2 - p^2)]$
 $= [\{(p - q)^2\} \ \{(q + p)(q - p)\}]$
 $= [(p - q) \ \overline{-(p + q)}] = [(p - q) \ (\overline{p + q})]$ **सिद्ध।**

उदाहरण ■ $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष पुनर्युक्त कोण $m \angle (270 - A)^0$ का बीजांक
 $= [(12 - 5) \ (\overline{12 + 5})] = [7 \ \overline{17}]$ होगा। **76. 6.**

7. अधिक अधि-कोण $m \angle (270 + A)^0$ बीजांक प्रमेय

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष पुनर्युक्ताधिकोण $m \angle (270 + A)^0$ का बीजांक $= [(p - q) \ (p + q)]$ होगा।

प्रमाण. $m \angle 270^0$ का त्रिभुजांक $\begin{matrix} 0 & \bar{1} & 1 \end{matrix}$
 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष उसी $m \angle A$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} (p^2 - q^2) & (2pq) & (p^2 + q^2) \end{bmatrix}$
 $\therefore m \angle (270 + A)^0$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} \{-2pq\} & (p^2 - q^2) & (p^2 + q^2) \end{bmatrix}$
 $\therefore m \angle (270 + A)^0$ का बीजांक $= [\{(p^2 + q^2) + (-2pq)\} \ (p^2 - q^2)]$
 $= [\{p^2 + q^2 - 2pq\} \ (p^2 - q^2)]$
 $= [\{(p - q)^2\} \ \{(p + q)(p - q)\}]$
 $= [(p - q) \ (p + q)]$ **सिद्ध।**

उदाहरण ■ $m \angle A$ के बीजांक $[12 \ 5]$ के सापेक्ष पुनर्युक्ताधिकोण $m \angle (270 + A)^0$ का बीजांक
 $= [(12 - 5) \ (12 + 5)] = [7 \ 17]$ होगा।

8. $m \angle (360 * n - A)^0$ बी प्रमेय

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle (360 * n - A)^0$ का बीजांक $= [p \ \bar{q}]$ होगा।

प्रमाण. $\therefore m \angle (360 * n - A)^0$ का त्रिभुजांक $= m \angle \bar{A}$ के त्रिभुजांक
 $\therefore m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle (360 * n - A)^0$ का बीजांक
 $= m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle \bar{A}$ का बीजांक $= [p \ \bar{q}]$ **सिद्ध।**

9. $m \angle (360 * n + A)^0$ बीजांक प्रमेय -

प्रमेय 1 $m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle (360 * n + A)^0$ का बीजांक $= [p \ q]$ होगा।

प्रमाण $\therefore m \angle (360 * n + A)^0$ का त्रिभुजांक $= m \angle A$ के त्रिभुजांक
 $\therefore m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle (360 * n + A)^0$ का बीजांक
 $= m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का बीजांक $= [p \ q]$ **सिद्ध।**

6-5 $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसी कोण माप $m \angle A^0$, योज्य प्रतिलोम कोण $3m \angle \bar{A}^0$, पूरक कोण $m \angle (90 - A)^0$, अधिक कोण, $m \angle (90 + A)^0$, सम्पूरक कोण माप $m \angle (180 - A)^0$, अधि कोण माप $m \angle (180 + A)^0$, अधि-पूरक कोण माप $m \angle (270 - A)^0$, अधिक अधि-कोण माप $m \angle (270 + A)^0$ ए, सम्पूर्ण-पूरक कोण माप $m \angle (n * 360 - A)$ और अधिकसम्पूर्ण कोण $m \angle (n * 360 + A)$ का बीजांक आकलन प्रमेय-

[1 ■] $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसी कोण माप $m \angle A^0$ का बीजांक आकलन प्रमेय-

किसी $m\angle A$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसी कोण माप $m\angle A$ का दक्ष (मानक) बीजांक $(p \ q) = [(z+x) \ y]$ प्रथम सरल प्रस्तुती में होगा। जिसका 5 और रूपान्तर—

$$\begin{aligned} 1. [y \ (z-x)] \quad 2. [\sqrt{z+x} \ \sqrt{z-x}] \quad 3. [\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}\}] \\ 4. [\{x+(z-y)\} \ \{x-(z-y)\}] \quad 5. [\{(z+y)+x\} \ \{(z+y)-x\}] \text{ होंगे।} \end{aligned}$$

प्रमाण ज्ञात है कि $m\angle A$ का बीजांक $(p \ q) = m\angle \frac{A}{2}$ त्रिभुजांक का प्रथम दो अवयव आधार और लम्ब होता है। अतः

$m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक प्राप्त करने की विधि का उपयोग कर आसानी से $m\angle A$ के त्रिभुजांक के सापेक्ष उसी $m\angle A$ का बीजांक आकलन निम्नानुसार कीजिए।

$m\angle A$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक $[(z+x) \ y \ (\sqrt{2z(z+x)})]$ से

$m\angle A$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m\angle A$ का बीजांक $(p \ q) = m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक के प्रथम दो अवयव $[(z+x) \ y]$ होगा।

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \theta$ का बीजांक $[(5+3) \ 4] = [8 \ 4] = [2 \ 1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \beta$ का बीजांक $[(13+12) \ 5] = [25 \ 5] = [5 \ 1]$ होगा।

रूपान्तर विषयक — 1. $[y \ (z-x)]$ के प्रति—

$$\begin{aligned} [(z+x) \ y] &= [(z+x) \cdot (z-x) \ y \cdot (z-x)] \\ &= [(z^2 - y^2) \ y \cdot (z-x)] = [y^2 \ y \cdot (z-x)] = [y \ (z-x)] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \theta$ का बीजांक $[4 \ (5-3)] = [4 \ 2] = [2 \ 1]$

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \beta$ का बीजांक $[5 \ (13-12)] = [5 \ 1]$ होगा।

2. $[\sqrt{z+x} \ \sqrt{z-x}]$ के प्रति—

$$\begin{aligned} [(z+x) \ y] &= [(z+x) \ \sqrt{z^2 - x^2}] \\ &= [\sqrt{(z+x) \cdot (z+x)} \ \sqrt{(z+x) \cdot (z-x)}] = [\sqrt{(z+x)} \ \sqrt{(z-x)}] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

अथवा $[y \ (z-x)] = [\sqrt{z^2 - x^2} \ (z-x)]$

$$= [\sqrt{(z+x) \cdot (z-x)} \ \sqrt{(z-x) \cdot (z-x)}] = [\sqrt{(z+x)} \ \sqrt{(z-x)}] \text{ प्रमाणित।}$$

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \theta$ का बीजांक $[\sqrt{5+3} \ \sqrt{5-3}] = [\sqrt{8} \ \sqrt{2}] = [2\sqrt{2} \ \sqrt{2}] = [2 \ 1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी $m\angle \beta$ का बीजांक $[\sqrt{13+12} \ \sqrt{13-12}] = [\sqrt{25} \ \sqrt{1}] = [5 \ 1]$ होगा।

3. $[\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}\}]$ के प्रति—

$$\begin{aligned} &[\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}\}] \\ &= [\{(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}) \cdot (\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y})\} \ \{(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}) \cdot (\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y})\}] \\ &= [\{(z+y) + (z-y) + 2\sqrt{(z+y) \cdot (z-y)}\} \ \{(z+y) - (z-y)\}] \end{aligned}$$

$$= [\{2z + 2\sqrt{z^2 - y^2}\} \quad \{2y\}] = [(z+x) \quad y]$$

$$\therefore [(z+x) \quad y] = [\{ \sqrt{z+y} + \sqrt{z-y} \} \quad \{ \sqrt{z+y} + \sqrt{z-y} \}] \text{ प्रमाणित।}$$

उदाहरण 1■ $m \angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

$$\begin{aligned} \text{उसी } m \angle \theta \text{ का बीजांक} &= [\{(\sqrt{5+4} + \sqrt{5-4})\} \quad \{(\sqrt{5+4} - \sqrt{5-4})\}] \\ &= [\{\sqrt{9} + \sqrt{1}\} \quad \{\sqrt{9} - \sqrt{1}\}] \\ &= [\{3 + 1\} \quad \{3 - 1\}] = [4 \ 2] = [2 \ 1] \text{ होगा।} \end{aligned}$$

उदाहरण 2■ $m \angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

$$\begin{aligned} \text{उसी } m \angle \beta \text{ का बीजांक} &= [\{(\sqrt{13+5} + \sqrt{13-5})\} \quad \{(\sqrt{13+5} - \sqrt{13-5})\}] \\ &= [\{\sqrt{18} + \sqrt{8}\} \quad \{\sqrt{18} - \sqrt{8}\}] \\ &= [\{3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\} \quad \{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\}] = [\{3+2\} \quad \{3-2\}] = [5 \ 1] \text{ होगा।} \end{aligned}$$

4. $[\{x+(z-y)\} \quad \{x-(z-y)\}]$ के प्रति-

$$\begin{aligned} &[\{x+(z-y)\} \quad \{x-(z-y)\}] = [\{x+(z-y)\} * \{x+(z-y)\} \quad \{x-(z-y)\} \{x+(z-y)\}] \\ &= [\{(x+z-y)^2\} \quad \{x^2 - (z-y)^2\}] \\ &= [\{x^2 + z^2 + y^2 - 2zy + 2zx - 2xy\} \quad \{x^2 - z^2 - y^2 + 2zy\}] \\ &= [\{2z^2 - zy + 2zx - 2xy\} \quad \{2zy - 2y^2\}] \\ &= [\{z^2 - zy + zx - xy\} \quad \{zy - y^2\}] = [\{(z+x)(z-y)\} \quad \{y(z-y)\}] \\ &= [(z+x) \quad y] \end{aligned}$$

$$\therefore [\{x+(z-y)\} \quad \{x-(z-y)\}] = [(z+x) \quad y] \text{ प्रमाणित।}$$

उदाहरण 1■ $m \angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

$$\text{उसी } m \angle \theta \text{ का बीजांक} = [\{3+(5-4)\} \quad \{3-(5-4)\}] = [4 \ 2] = [2 \ 1] \text{ होगा।}$$

उदाहरण 2■ $m \angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

$$\text{उसी } m \angle \beta \text{ का बीजांक} = [\{12+(13-5)\} \quad \{12-(13-5)\}] = [20 \ 4] = [5 \ 1] \text{ होगा।}$$

5. $[\{(z+y)+x\} \quad \{(z+y)-x\}]$ के प्रति-

$$\begin{aligned} &[\{(z+y)+x\} \quad \{(z+y)-x\}] \\ &= [\{(z+y)+x\} * \{(z+y)+x\} \quad \{(z+y)-x\} * \{(z+y)+x\}] \\ &= [\{(x+z+y)^2\} \quad \{(z+y)^2 - x^2\}] \\ &= [\{x^2 + z^2 + y^2 + 2zy + 2zx + 2xy\} \quad \{z^2 + y^2 + 2zy - x^2\}] = \\ &= [\{2z^2 + 2zy + 2zx - 2xy\} \quad \{2zy + 2y^2\}] \\ &= [\{z^2 + zy + zx + xy\} \quad \{zy + y^2\}] = [\{(z+x)(z+y)\} \quad \{y(z+y)\}] \\ &= [(z+x) \quad y] \end{aligned}$$

$$\therefore [\{(z+y)+x\} \quad \{(z+y)-x\}] \text{ प्रमाणित।}$$

उदाहरण 1■ $m \angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

$$\text{उसी } m \angle \theta \text{ का बीजांक} = [\{(5+4)+3\} \quad \{3-(5+4)-3\}] = [12 \ 6] = [2 \ 1] \text{ होगा।}$$

उदाहरण 2■ $m \angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

$$\text{उसी } m \angle \beta \text{ का बीजांक} = [\{(13+5)+12\} \quad \{(13+5)-12\}] = [30 \ 6] = [5 \ 1] \text{ होगा।}$$

[2■] $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसके योज्य प्रतिलोम कोण माप $m \angle \bar{A}$ का त्रिभुजांक एवं बीजांक आकलन प्रमेय-

$m\angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष योज्य प्रतिलोम कोण $m\angle \bar{A}$ का त्रिभुजांक $[x \ -y \ z]$ एवं बीजांक प्रथम सरल हल मान $[p \ q] = [(z+x) \ -y]$ होगा। जिसका 5 और रूपान्तर –

- 1• $[y \ (x-z)]$ 2• $[\sqrt{z+x} \ -\sqrt{z-x}]$ 3• $[\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{-(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y})\}]$
 4• $[\{x+(z+y)\} \ \{x-(z+y)\}]$ 5• $[\{z-y+x\} \ \{z-y-x\}]$ होगा।

प्रमाण. $m\angle 0^\circ$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m\angle A$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$

$\therefore m\angle \bar{A} = m\angle(0-A)$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} x & y^- & z \end{bmatrix}$

अतः $m\angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष योज्य प्रतिलोम कोण $m\angle \bar{A}$ का बीजांक $[(z+x) \ -y]$ सिद्ध।

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle \theta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle \bar{\theta}$ का बीजांक $[(5+3) \ -4] = [8 \ -4] = [2 \ -1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle \beta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle \bar{\beta}$ का बीजांक $[(13+12) \ -5] = [25 \ -5] = [5 \ -1]$ होगा।

रूपान्तर विषयक –

1• $[y \ (x-z)]$ के प्रति–

$$\begin{aligned} [(z+x) \ -y] &= [(z+x)(z-x) \ -y(z-x)] = [z^2 - x^2 \ -y(z-x)] \\ &= [y^3 \ -y(z-x)] = [y \ -(z-x)] = [y \ (x-z)] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle \theta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle \bar{\theta}$ का बीजांक $[4 \ (3-5)] = [4 \ -2] = [2 \ -1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle \beta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle \bar{\beta}$ का बीजांक $[5 \ (12-13)] = [5 \ -1]$ होगा।

2• $[\sqrt{z+x} \ -\sqrt{z-x}]$ के प्रति–

$$\begin{aligned} [(z+x) \ -y] &= [(z+x) \ -\sqrt{z^2 - x^2}] = [\sqrt{(z+x) * (z+x)} \ -\sqrt{(z+x) * (z-x)}] \\ &= [\sqrt{(z+x)} \ -\sqrt{(z-x)}] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{अथवा } [y \ -(z-x)] &= [\sqrt{z^2 - x^2} \ -(z-x)] = [\sqrt{(z+x) * (z-x)} \ -\sqrt{(z-x) * (z-x)}] \\ &= [\sqrt{(z+x)} \ -\sqrt{(z-x)}] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

उदाहरण 1■ $m\angle \theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

$$\begin{aligned} \text{उसी कोण माप } m\angle \theta \text{ का योज्य प्रतिलोम माप } m\angle \bar{\theta} \text{ का बीजांक} &= [\sqrt{5+3} \ -\sqrt{5-3}] = [\sqrt{8} \ -\sqrt{2}] \\ &= [2\sqrt{2} \ -\sqrt{2}] = [2 \ -1] \text{ होगा।} \end{aligned}$$

उदाहरण 2■ $m\angle \beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

$$\begin{aligned} \text{उसी कोण माप } m\angle \beta \text{ का योज्य प्रतिलोम माप } m\angle \bar{\beta} \text{ का बीजांक} &= [\sqrt{13+12} \ -\sqrt{13-12}] \\ &= [\sqrt{25} \ -\sqrt{1}] = [5 \ -1] \text{ होगा।} \end{aligned}$$

3• $[\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{-(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y})\}]$ के प्रति–

$$\begin{aligned} &[\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\} \ \{-(\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y})\}] \\ &= [\{(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}) * (\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y})\} \ \{-(\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}) * (\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y})\}] \\ &= [\{(z+y) + (z-y) + 2\sqrt{(z+y) * (z-y)}\} \ -\{(z+y) - (z-y)\}] \\ &= [\{2z + 2\sqrt{z^2 - y^2}\} \ -\{2y\}] = [(z+x) \ -y] \end{aligned}$$

∴ $[(z+x) - y] = [\{ \sqrt{z+y} + \sqrt{z-y} \} \{ \sqrt{z+y} + \sqrt{z-y} \}]$ प्रमाणित।

उदाहरण 1■ $m\angle\theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\theta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\theta}$ का बीजांक $= [\{ (\sqrt{5+4} + \sqrt{5-4}) \} \{ -(\sqrt{5+4} - \sqrt{5-4}) \}]$
 $= [\{ \sqrt{9} + \sqrt{1} \} \{ -(\sqrt{9} - \sqrt{1}) \}]$
 $= [\{ 3 + 1 \} \{ -3 - 1 \}] = [4 \ -2] = [2 \ -1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle\beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\beta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\beta}$ का बीजांक
 $= [\{ (\sqrt{13+5} + \sqrt{13-5}) \} \{ -(\sqrt{13+5} - \sqrt{13-5}) \}]$
 $= [\{ \sqrt{18} + \sqrt{8} \} \{ -(\sqrt{18} - \sqrt{8}) \}] = [\{ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \} \{ -(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) \}]$
 $= [\{ 3+2 \} \{ -(3-2) \}] = [5 \ 1]$ होगा।

4• $[\{ x+(z+y) \} \{ x-(z+y) \}]$ के प्रति—

$$\begin{aligned} & [\{ x+(z+y) \} [\{ x-(z+y) \}] \\ & = [\{ x+(z+y) \} * \{ x+(z+y) \} \{ x-(z+y) \} \{ x+(z+y) \}] \\ & = [\{ (x+z+y)^2 \} \{ x^2 - (z+y)^2 \}] \\ & = [\{ x^2 + z^2 + y^2 + 2zy + 2zx + 2xy \} \{ x^2 - z^2 - y^2 - 2zy \}] \\ & = [\{ 2z^2 + 2zy + 2zx + 2xy \} \{ -(2zy + 2y^2) \}] \\ & = [\{ z^2 + zy + zx + xy \} \{ -(zy + y^2) \}] = [\{ (z+x)(z+y) \} \{ -y(z+y) \}] = [(z+x) -y] \\ & \therefore [(z+x) -y] = [\{ x+(z+y) \} \{ x-(z+y) \}] = \text{प्रमाणित।} \end{aligned}$$

उदाहरण 1■ $m\angle\theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\theta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\theta}$ का बीजांक $= [\{ 3+(5+4) \} \{ 3-(5+4) \}]$
 $= [12 \ -6] = [2 \ -1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle\beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\beta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\beta}$ का बीजांक $= [\{ 12+(13+5) \} \{ 12-(13+5) \}]$
 $= [30 \ -6] = [5 \ -1]$ होगा।

5• $[\{ z-y+x \} \{ z-y-x \}]$ के प्रति—

$$\begin{aligned} & [\{ z-y+x \} \{ z-y-x \}] = [\{ (z-y)+x \} * \{ (z-y)+x \} \{ (z-y)-x \} * \{ (z-y)+x \}] \\ & = [\{ (z-y+x)^2 \} \{ (z-y)^2 - x^2 \}] \\ & = [\{ x^2 + z^2 + y^2 - 2zy + 2zx - 2xy \} \{ z^2 + y^2 - 2zy - x^2 \}] \\ & = [\{ 2z^2 - 2zy + 2zx - 2xy \} \{ 2y^2 - 2zy \}] \\ & = [\{ z^2 - zy + zx - xy \} \{ (y^2 - zy) \}] = [\{ (z+x)(z-y) \} \{ -y(z-y) \}] = [(z+x) -y] \\ & \therefore [(z+x) -y] = [\{ z-y+x \} \{ z-y-x \}] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

उदाहरण 1■ $m\angle\theta$ के त्रिभुजांक $[3 \ 4 \ 5]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\theta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\theta}$ का बीजांक $= [\{ (5-4)+3 \} \{ (5-4) \} - 3]$
 $= [4 \ -2] = [2 \ -1]$ होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle\beta$ के त्रिभुजांक $[12 \ 5 \ 13]$ के सापेक्ष

उसी कोण माप $m\angle\beta$ का योज्य प्रतिलोम माप $m\angle\bar{\beta}$ का बीजांक $= [\{ (13-5)+12 \} \{ (13-5) \} - 12]$
 $= [20 \ -4] = [5 \ -1]$ होगा।

उपरोक्तानुसार $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसी कोण माप $m \angle A^\circ$, एवं योज्य प्रतिलोम कोण माप के प्रति त्रिभुजांक एवं बीजांक प्रथम सरल हल मान प्राप्त कर उसके 5 और रूपान्तर –को सप्रमाण दर्शित कराया गया है। ठीक वैसा ही

$m \angle \bar{A}^\circ$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष— उसके प्रति पूरक कोण $m \angle (90 - A)^\circ$, अधिक कोण, $m \angle (90 + A)^\circ$, सम्पूरक कोण माप $m \angle (180 - A)^\circ$, अधि कोण माप $m \angle (180 + A)^\circ$ अधि—पूरक कोण माप $m \angle (270 - A)^\circ$, अधिक अधि—कोण माप $m \angle (270 + A)^\circ$, सम्पूर्ण—पूरक कोण माप $m \angle (n*360 - A)$ और अधिकसम्पूर्ण कोण $m \angle (n*360 + A)$ का त्रिभुजांक एवं बीजांक का प्रथम सरल हल मान प्राप्त कर उसके 5 और रूपान्तर –को सप्रमाण दर्शित कराया जा सकता है। स्वयं अपने तर्क शक्ति विकसित कीजिये। अथवा तालिका 6-1 A, 6-1B. और 6-1C का अवलोकन कीजिये।

तालिका 6-1 A

$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष— बीजांक
एवं $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष— त्रिभुजांक और सरल बीजांक

क्रमांक	कोण माप	$m \angle A$ के बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष बीजांक	$m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष	
			त्रिभुजांक	सरल बीजांक
1	$m \angle A$	$[p \ q]$	$[x \ y \ z]$	$[(z+x) \ y]$
2	$m \angle (-A) / m \angle \bar{A}$	$[p \ \bar{q}]$	$[x \ \bar{y} \ z]$	$[(z+x) \ \bar{y}]$
3	$m \angle (90 - A)^\circ$	$[(p+q) \ (p-q)]$	$[y \ x \ z]$	$[(z+y) \ x]$
4	$m \angle (90 + A)^\circ$	$[(p-q) \ (p+q)]$	$[\bar{y} \ x \ z]$	$[(z-y) \ x]$
5	$m \angle (180 - A)^\circ$	$[q \ p]$	$[\bar{x} \ \bar{y} \ z]$	$[(z-x) \ y]$
6	$m \angle (180 + A)^\circ$	$[q \ \bar{p}]$	$[\bar{x} \ \bar{y} \ z]$	$[(z-x) \ \bar{y}]$
7	$m \angle (270 - A)^\circ$	$[(p-q) \ (p+q)]$	$[\bar{y} \ \bar{x} \ z]$	$[(z-y) \ \bar{x}]$
8	$m \angle (270 + A)^\circ$	$[(q-p) \ (q+p)]$	$[y \ \bar{x} \ z]$	$[(z+y) \ \bar{x}]$
9	$m \angle (360 * n - A)^\circ$	$[p \ \bar{q}]$	$[x \ \bar{y} \ z]$	$[(z+x) \ \bar{y}]$
10	$m \angle (360 * n + A)^\circ$	$[p \ q]$	$[x \ y \ z]$	$[(z+x) \ y]$

तालिका 6-1 B

तालिका 6-1 A में का $m \angle A^\circ$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष प्राप्त $m \angle A^\circ$ $m \angle \bar{A}^\circ$ $m \angle (90 - A)^\circ$ और $m \angle (90 + A)^\circ$ के सरल बीजांक का रूपान्तरण स्वरूप

क्रमांक	$m \angle A^\circ$	$m \angle \bar{A}^\circ$	$m \angle (90 - A)^\circ$	$m \angle (90 + A)^\circ$
1	$[(z+x) \ y]$	$[(z+x) \ -y]$	$[(z+y) \ x]$	$[(z-y) \ x]$
2	$[y \ (z-x)]$	$[y \ (x-z)]$	$[x \ (z-y)]$	$[x \ (z+y)]$
3	$[\sqrt{z+x} \ \sqrt{z-x}]$	$[\sqrt{z+x} \ -\sqrt{z-x}]$	$[\sqrt{z+y} \ \sqrt{z-y}]$	$[\sqrt{z-y} \ \sqrt{z+y}]$
4	$[\{ \sqrt{z+y} + \sqrt{z-y} \} \{ \sqrt{z+y} - \sqrt{z-y} \}]$	$[\{ \sqrt{z-y} + \sqrt{z+y} \} \{ \sqrt{z-y} - \sqrt{z+y} \}]$	$[\{ \sqrt{z+x} + \sqrt{z-x} \} \{ \sqrt{z+x} - \sqrt{z-x} \}]$	$[\{ \sqrt{z+x} - \sqrt{z-x} \} \{ \sqrt{z+x} + \sqrt{z-x} \}]$
5	$[\{ x+(z-y) \} \{ x-(z-y) \}]$	$[\{ x+(z+y) \} \{ x-(z+y) \}]$	$[\{ (z+x)+y \} \{ (z+x)-y \}]$	$[\{ (z+x)-y \} \{ (z+x)+y \}]$
6	$[\{ (z+y)+x \} \{ (z+y)-x \}]$	$[\{ (z-y)+x \} \{ (z-y)-x \}]$	$[\{ y+(z-x) \} \{ y-(z-x) \}]$	$[\{ y-(z-x) \} \{ y+(z-x) \}]$

तालिका 6-1 C

तालिका 6-1 A में का $m \angle A^\circ$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष प्राप्त $m \angle(180-A)^\circ$, $m \angle(180+A)^\circ$, $m \angle(270-A)^\circ$ और $m \angle(270+A)^\circ$ के सरल बीजांक का रूपान्तरण स्वरूप

क्रमांक	$m \angle(180-A)^\circ$	$m \angle(180+A)^\circ$	$m \angle(270-A)^\circ$	$m \angle(270+A)^\circ$
1	$[(z-x) \ y]$	$[(z-x) \ -y]$	$[(z-y) \ -x]$	$[(z+y) \ -x]$
2	$[y \ (z+x)]$	$[y \ -(z+x)]$	$[x \ -(z+y)]$	$[x \ -(z-y)]$
3	$[\sqrt{z-x} \ \sqrt{z+x}]$	$[\sqrt{z-x} \ -\sqrt{z+x}]$	$[\sqrt{z-y} \ -\sqrt{z+y}]$	$[\sqrt{z+y} \ -\sqrt{z-y}]$
4	$[[\{\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}\} \ \{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\}]]$	$[[\{\sqrt{z+y} - \sqrt{z-y}\} \ -\{\sqrt{z+y} + \sqrt{z-y}\}]]$	$[\{\sqrt{z+x} - \sqrt{z-x}\} \ -\{\sqrt{z+x} + \sqrt{z-x}\}]$	$[\{\sqrt{z-x} + \sqrt{z+x}\} \ \{\sqrt{z-x} - \sqrt{z+x}\}]$
5	$[\{(z+y)-x\} \ \{(z+y)+x\}]$	$[x - \{(z-y)\} \ -\{x+(z-y)\}]$	$[y - \{(z-x)\} \ -\{y+(z-x)\}]$	$[\{(z-x)+y\} \ \{(z-x)-y\}]$
6	$[\{x-(z-y)\} \ \{x+(x-y)\}]$	$[\{(z+y)-x\} \ -\{(z+y)+x\}]$	$[\{(z+x)-y\} \ -\{(z+x)+y\}]$	$[\{y+(z+x)\} \ \{y-(z+x)\}]$

टीप— चूँकि $m \angle(360 * n - A)^\circ$ का त्रिभुजांक = $m \angle A^\circ$ का त्रिभुजांक

तथा $m \angle(360 * n + A)^\circ$ का त्रिभुजांक = $m \angle A^\circ$ का त्रिभुजांक

$\therefore m \angle(360 * n - A)^\circ$ के प्रति $m \angle A^\circ$ और $m \angle(360 * n + A)^\circ$ के प्रति $m \angle A^\circ$ के रूपांतर ही होंगे।

तालिका 6-2

कोणों के विशिष्ट मापों के त्रिभुजांक के सापेक्ष उनके बीजांक

अंश माप	त्रिभुजांक			बीजांक
	आधार	लम्ब	कर्ण	
	x	y	z	[P q]
0°	1	0	1	[1 0]
15°	$(\sqrt{3} + 1)$	$(\sqrt{3} - 1)$	$2\sqrt{2}$	[$\{2\sqrt{2} + (\sqrt{3} + 1)\}$ $(\sqrt{3} - 1)$]
30°	$\sqrt{3}$	1	2	[$(2 + \sqrt{3})$ 1]
45°	1	1	$\sqrt{2}$	[$(\sqrt{2} + 1)$ 1]
60°	1	$\sqrt{3}$	2	[$\sqrt{3}$ 1]
75°	$(\sqrt{3} - 1)$	$(\sqrt{3} + 1)$	$2\sqrt{2}$	[$\{2\sqrt{2} + (\sqrt{3} - 1)\}$ $(\sqrt{3} + 1)$]
90°	0	1	1	[1 1]
105°	$-(\sqrt{3} - 1)$	$(\sqrt{3} + 1)$	$2\sqrt{2}$	[$\{2\sqrt{2} - (\sqrt{3} + 1)\}$ $(\sqrt{3} + 1)$]
120°	-1	$\sqrt{3}$	2	[1 $\sqrt{3}$]
135°	-1	1	$\sqrt{2}$	[$(\sqrt{2} - 1)$ 1]
150°	$-\sqrt{3}$	1	2	[$(2 - \sqrt{3})$ 1]
165°	$-(\sqrt{3} + 1)$	$(\sqrt{3} - 1)$	$2\sqrt{2}$	[$\{2\sqrt{2} - (\sqrt{3} + 1)\}$ $(\sqrt{3} - 1)$]
180°	-1	0	1	[0 1]
195°	$-(\sqrt{3} + 1)$	$-(\sqrt{3} - 1)$	$2\sqrt{2}$	[$\{2\sqrt{2} - (\sqrt{3} + 1)\}$ $-(\sqrt{3} - 1)$]

210°	$-\sqrt{3}$	-1	2	$[(2-\sqrt{3})$	$-1]$
225°	-1	-1	$\sqrt{2}$	$[(\sqrt{2}-1)$	$-1]$
240°	-1	$-\sqrt{3}$	2	[1	$-\sqrt{3}]$
255°	$-(\sqrt{3}-1)$	$-(\sqrt{3}+1)$	$2\sqrt{2}$	$[\{2\sqrt{2}-(\sqrt{3}-1)\}$	$-(\sqrt{3}+1)]$
270°	0	-1	1	[1	$-1]$
285°	$(\sqrt{3}-1)$	$-(\sqrt{3}+1)$	$2\sqrt{2}$	$[\{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}-1)\}$	$-(\sqrt{3}+1)]$
300°	1	$-\sqrt{3}$	2	[$\sqrt{3}$	$-1]$
315°	1	-1	$\sqrt{2}$	$[(\sqrt{2}+1)$	$-1]$
330°	$\sqrt{3}$	-1	2	$[(2+\sqrt{3})$	$-1]$
345°	$(\sqrt{3}+1)$	$-(\sqrt{3}-1)$	$2\sqrt{2}$	$[\{2\sqrt{2}+(\sqrt{3}+1)\}$	$-(\sqrt{3}-1)]$
360°	1	0	1	[1	0]

विवेचना

$0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ तथा 360° के प्रति बीजांक क्रमशः $[1\ 0]=p(\infty)$, $[1\ 1]=p(1)$, $[0\ 1]=p(0)$, $[1\ \bar{1}]=p(\bar{1})$ तथा $[1\ 0]=p(\infty)$ होगा। आगे हम स्वयं वृत्त के प्रत्येक चौथाई भागो (प्रथम पाद, द्वितीय पाद तृतीय पाद एवं चतुर्थ पाद) के अन्तर्गत कोण मापों θ के लिए बीजांक p की विशिष्टता एवं परिणाम प्राप्त कर सकते हैं। प्रथम पाद ($0^\circ < \theta \leq 90^\circ$) के प्रति बीजांक ∞ से 1 तक, द्वितीय पाद ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$) के प्रति बीजांक 1 से 0 तक, तृतीय पाद ($180^\circ < \theta \leq 270^\circ$) के प्रति बीजांक 0 से $\bar{1}$ तक तथा चतुर्थ पाद ($270^\circ < \theta \leq 360^\circ$) के प्रति बीजांक $\bar{1}$ से ∞ तक परिवर्तित होता है।

6-14 बीजांक का बीजांक किसी कोण माप के बीजांक का बीजांक उसके आधे कोण माप का बीजांक होता है।

विश्लेषित शब्दों में चूँकि $m \angle A$ का बीजांक $[p\ q]$ स्वयं में ही $m \angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजाक $[x\ y\ z]$ के प्रथम दो अवयव आधार x और लम्ब y होता है। अर्थात् $m \angle A$ का बीजांक $[p\ q]$ के सापेक्ष $m \angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजाक $[p\ q\ \sqrt{p^2+q^2}]$ होगा।

$m \angle \frac{A}{2}$ के त्रिभुजाक $[p\ q\ \sqrt{p^2+q^2}]$ के सापेक्ष उसी कोण $m \angle \frac{A}{2}$ के प्रति प्राप्त बीजांक मान $[(\sqrt{p^2+q^2}+p)\ q]$

बीजांक का बीजांक होने के प्रतिबंधानुसार बीजांक $[p\ q]$ का बीजांक $[(\sqrt{p^2+q^2}+p)\ q]$ होगा।

टीप बीजांक का बीजांक होने के प्रतिबंधानुसार इसका तात्पर्य विपरीत भाव में यह कदापि नहीं है कि—

बीजांक $[(\sqrt{p^2+q^2}+p)\ q]$ का बीजांक $[p\ q]$ होगा।

उदाहरण बीजांक $[12\ 5]$ का बीजांक $[(\sqrt{12^2+5^2}+12)\ 5] = [(13+12)\ 5]$

$= [25\ 5] = [5\ 1]$ होगा।

6-6 त्रिभुजांक एवं बीजांक का बीजांक प्रमेय

$m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x\ y\ z]$ के सापेक्ष $m \angle A$ के बीजांक का बीजांक $[(\sqrt{2z} + \sqrt{z+x})\ \sqrt{z-x}]$ होगा।

प्रमाण

चूँकि किसी कोण माप के बीजांक का बीजांक उसके आधे कोण माप का बीजांक होता है।

$m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x\ y\ z]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का बीजांक $[(z+x)\ y]$

$m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x\ y\ z]$ के सापेक्ष $m \angle \frac{A}{2}$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[\sqrt{z+x}\ \sqrt{z-x}\ \sqrt{2z}]$

$\therefore m \angle \frac{A}{2}$ के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष $m \angle \frac{A}{2}$ का बीजांक $[(\sqrt{2z} + \sqrt{z+x})\ \sqrt{z-x}]$ होगा।

चूँकि किसी कोण माप के बीजांक का बीजांक उसके आधे कोण माप का बीजांक होता है।

$\therefore m \angle A$ के त्रिभुजांक $[x\ y\ z]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का बीजांक $[(z+x)\ y]$ का बीजांक

= त्रिभुजांक के सापेक्ष $m \angle \frac{A}{2}$ का बीजांक $[(\sqrt{2z} + \sqrt{z+x}) \quad \sqrt{z-x}]$ होगा सिद्ध।

उदाहरण ■ $m \angle A$ के त्रिभुजांक $[119 \ 120 \ 169]$ के सापेक्ष

$m \angle A$ का बीजांक $[(169+119) \ 120] = [288 \ 120] = [12 \ 5]$ होगा।

∴ त्रिभुजांक एवं बीजांक का बीजांक प्रमेय के अनुसार—

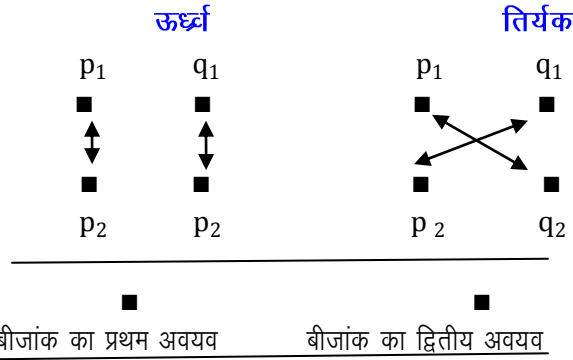
$m \angle A$ के त्रिभुजांक $[119 \ 120 \ 169]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का प्राप्त बीजांक $[12 \ 5]$ का बीजोक्त

$$= [(\sqrt{2 * 169} + \sqrt{169 + 119}) \quad \sqrt{169 - 119}] = [(13\sqrt{2} + 12\sqrt{2}) \quad 5\sqrt{2}]$$

$$=[(25\sqrt{2} \quad 5\sqrt{2})] = [25 \quad 5] = [5 \quad 1] \text{ होगा।}$$

6-7 बीजांकों का योग एवं अन्तर प्रमेय अनुच्छेद 1.4 दो त्रिभुजांकों का योग एवं अन्तर के अनुसार ही ये दोनों क्रियाएँ वैदिक गणित सूत्र ऊर्ध्वतिर्यकभ्यां का अनुप्रयोग कर आसानी से किया जा सकता है। ऊर्ध्वतिर्यकभ्यां का अर्थ ऊर्ध्व (खड़ा VERTICOLLY) एवं तिर्यक (तिरछा CROSSWISE) द्वारा है। विशिष्ट कार्य विधि अवलोकित करें।

[1]. यदि $m \angle A$ तथा $m \angle B$ के बीजांक क्रमशः $[p_1 \ q_1]$ तथा $[p_2 \ q_2]$ हो तो —



संकेतन व्याख्या

	बीजांक	
कोण माप	का प्रथम अवयव p	का द्वितीय अवयव q
m ∠A का बीजांक	p ₁	q ₁
m ∠B का बीजांक	p ₂	q ₂
m ∠(A+B) का बीजांक =	[(p ₁ * p ₂ - q ₁ * q ₂) (p ₂ * q ₁ + p ₁ * q ₂)]	
m ∠(A-B) का बीजांक =	[(p ₁ * p ₂ + q ₁ * q ₂) (p ₂ * q ₁ - p ₁ * q ₂)] होगा।	

उपरोक्त संकेतन के अनुसार दो बीजांकों का योग एवं अन्तर प्रमेय एवं प्रमेय की उपपत्ति

प्रमेय 1 यदि $m \angle A$ तथा $m \angle B$ के बीजांक क्रमशः $[p_1 \ q_1]$ तथा $[p_2 \ q_2]$ हो तो—

1• $m \angle (A+B)$ का बीजांक $= [(p_1 * p_2 - q_1 * q_2) \quad (p_2 * q_1 + p_1 * q_2)]$

2• $m \angle (A-B)$ का बीजांक $= [(p_1 * p_2 + q_1 * q_2) \quad (p_2 * q_1 - p_1 * q_2)]$ होगा।

उपपत्ति

$m \angle A$ का बीजांक $[p_1 \ q_1]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का त्रिभुजांक $= (p_1^2 - q_1^2) \quad (2p_1 * q_1) \quad (p_1^2 + q_1^2)$ तथा $m \angle B$ का बीजांक $[p_2 \ q_2]$ के सापेक्ष $m \angle B$ का त्रिभुजांक $= (p_2^2 - q_2^2) \quad (2p_2 * q_2) \quad (p_2^2 + q_2^2)$

1• $m \angle (A+B)$ का त्रिभुजांक का प्रथम अवयव (आधार x) $= \{(p_1^2 - q_1^2) * (p_2^2 - q_2^2) - (2p_1 * q_1) * (2p_2 * q_2)\}$
द्वितीय अवयव (लम्ब y) $= \{(p_2^2 - q_2^2) * (2p_1 * q_1) + (p_1^2 - q_1^2) * (2p_2 * q_2)\}$
तृतीय अवयव (कर्ण z) $= \{(p_1^2 + q_1^2) * (p_2^2 + q_2^2)\}$

∴ $m \angle (A+B)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m \angle (A+B)$ का बीजांक $[p \ q] = [(z+x) \ y]$ के प्रति

$$(z+x) = \{(p_1^2 + q_1^2) * (p_2^2 + q_2^2)\} + \{(p_1^2 - q_1^2) * (p_2^2 - q_2^2) - (2p_1 * q_1) * (2p_2 * q_2)\}$$

$$= 2 p_1^2 p_2^2 + 2 q_1^2 q_2^2 - 4 (p_1 p_2) * (q_1 q_2) = 2 (p_1 p_2 - q_1 q_2)^2$$

$$y = \{(p_2^2 - q_2^2) * (2p_1 * q_1) + (p_1^2 - q_1^2) (2p_2 * q_2)\}$$

$$= (2p_1 q_1 p_2^2 - 2p_1 q_1 q_2^2 + 2p_2 q_2 p_1^2 - 2p_2 q_2 q_1^2)$$

$$= (2p_1 q_1 p_2^2 + 2p_2 q_2 p_1^2 - 2p_2 q_2 q_1^2 - 2p_1 q_1 q_2^2)$$

$$= 2p_1 p_2 (q_1 p_2 + q_2 p_1) - 2q_1 q_2 (q_1 p_2 + q_2 p_1) = 2(p_1 p_2 - q_1 q_2) * (q_1 p_2 + q_2 p_1)$$

अतः $m\angle A$ का बीजांक $[p_1 \quad q_1]$ तथा $m\angle B$ का बीजांक $[p_2 \quad q_2]$ के सापेक्ष

$$m\angle(A+B) \text{ का बीजांक } = \{[2(p_1 p_2 - q_1 q_2)^2] \quad [2(p_1 p_2 - q_1 q_2) * (q_1 p_2 + q_2 p_1)]\} \text{ अदक्ष बीजांक है।}$$

$$= [(p_1 p_2 - q_1 q_2) \quad (p_2 q_1 + p_1 q_2)] \text{ अदक्ष/दक्ष बीजांक होगा।}$$

2• $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक का प्रथम अवयव (आधार x) $= \{(p_1^2 - q_1^2) * (p_2^2 - q_2^2) + (2p_1 * q_1) * (2p_2 * q_2)\}$

द्वितीय अवयव (लम्ब y) $= \{(p_2^2 - q_2^2) * (2p_1 * q_1) - (p_1^2 - q_1^2) (2p_2 * q_2)\}$

तृतीय अवयव (कर्ण z) $= \{(p_1^2 + q_1^2) * (p_2^2 + q_2^2)\}$

∴ $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m\angle(A-B)$ का बीजांक $[p \ q] = [(z+x) \ y]$ के प्रति

$$(z+x) = \{(p_1^2 + q_1^2) * (p_2^2 + q_2^2)\} + \{(p_1^2 - q_1^2) * (p_2^2 - q_2^2) + (2p_1 * q_1) * (2p_2 * q_2)\}$$

$$= 2 p_1^2 p_2^2 + 2 q_1^2 q_2^2 + 4 (p_1 p_2) * (q_1 q_2) = 2 (p_1 p_2 + q_1 q_2)^2$$

$$y = \{(p_2^2 - q_2^2) * (2p_1 * q_1) - (p_1^2 - q_1^2) (2p_2 * q_2)\}$$

$$= (2p_1 q_1 p_2^2 - 2p_1 q_1 q_2^2 - 2p_2 q_2 p_1^2 + 2p_2 q_2 q_1^2)$$

$$= (2p_1 q_1 p_2^2 - 2p_2 q_2 p_1^2 + 2p_2 q_2 q_1^2 - 2p_1 q_1 q_2^2)$$

$$= 2p_1 p_2 (q_1 p_2 - q_2 p_1) + 2q_1 q_2 (q_1 p_2 - q_2 p_1) = 2(p_1 p_2 + q_1 q_2) * (q_1 p_2 - q_2 p_1)$$

अतः $m\angle A$ का बीजांक $[p_1 \quad q_1]$ तथा $m\angle B$ का बीजांक $[p_2 \quad q_2]$ के सापेक्ष $m\angle(A-B)$ का बीजांक

$$= \{[2(p_1 p_2 + q_1 q_2)^2] \quad [2(p_1 p_2 + q_1 q_2) * (q_1 p_2 - q_2 p_1)]\} \text{ अदक्ष बीजांक है।}$$

$$= [(p_1 p_2 + q_1 q_2) \quad (p_2 q_1 - p_1 q_2)] \text{ अदक्ष/दक्ष बीजांक होगा।}$$

ध्यानाकर्षण उपरोक्त दो बीजांको का योग एवं अन्तर प्रमेय एवं प्रमेय की उपपत्ति के तारतम्य में उक्त दो बीजांको का योग एवं अन्तर मान के प्रति विश्लेषित प्रमेय निम्नानुसार होगा।

दो बीजांको का योग एवं अन्तर मान के प्रति विश्लेषित प्रमेय किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।

उदाहरण ■ दो बीजांको का योग एवं अन्तर मान गणना सूत्र का अनुप्रयोग कर $m\angle A$ का बीजांक $\{4 \ 3\}$ तथा $m\angle B$ का बीजांक $\{12 \ 5\}$ के प्रति $m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ का बीजांक गणना कीजिए। और विश्लेषित कीजिए कि— किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।

हल दो बीजांको का योग एवं अन्तर मान गणना सूत्र का अनुप्रयोग—

$m\angle A$ का बीजांक	$\{ p_1 \quad q_1 \}$	$= [\ 4 \quad 3]$	
$m\angle B$ का बीजांक	$\{ p_2 \quad q_2 \}$	$= [12 \quad 5]$	

$$m\angle(A+B) \text{ का बीजांक } = \{(p_1 * p_2 - q_1 * q_2) \quad (p_2 * q_1 + p_1 * q_2)\} = \{33 \quad 56\}$$

$$m\angle(A-B) \text{ का बीजांक } = \{(p_1 * p_2 + q_1 * q_2) \quad (p_2 * q_1 - p_1 * q_2)\} = \{63 \quad 16\} \text{ होगा}$$

प्रमेय 1 “किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।” का विश्लेषण—

$$m\angle A \text{ का बीजांक } [4 \ 3] \text{ के सापेक्ष } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } = [(4^2 - 3^2) \quad (2 * 4 * 3) \quad (4^2 + 3^2)]$$

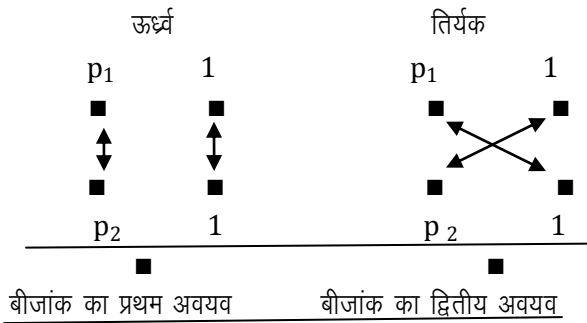
$$= [\ 7 \quad 24 \quad 25] \text{ तथा}$$

$$m\angle B \text{ का बीजांक } [12 \ 5] \text{ के सापेक्ष } m\angle B \text{ का त्रिभुजांक } = [(12^2 - 5^2) \quad (2 * 12 * 5) \quad (12^2 + 5^2)]$$

$$\begin{aligned}
&= [\begin{matrix} 119 & 120 & 169 \end{matrix}] \\
\therefore m \angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक} &= [(7*119-24*120) \quad (119*24+7*120) \quad (25*169)] \\
&= [\begin{matrix} -2047 & 3696 & 4225 \end{matrix}] \text{ तथा} \\
m \angle(A-B) \text{ का त्रिभुजांक} &= [(7*119+24*120) \quad (119*24-7*120) \quad (25*169)] \\
&= [\begin{matrix} 3713 & 2016 & 4225 \end{matrix}] \text{ तथा} \\
m \angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक के सापेक्ष } m \angle(A+B) \text{ का बीजांक} &= [(4225+(-2047)) \quad 3696] = [2178 \quad 3696] \\
&= [33 \quad 56] \text{ तथा} \\
m \angle(A-B) \text{ का त्रिभुजांक के सापेक्ष } m \angle(A-B) \text{ का बीजांक} &= [(4225+3713) \quad 2016] = [7938 \quad 2016] \\
&= [63 \quad 16]
\end{aligned}$$

सूत्र द्वारा प्राप्त बीजांक = प्रमेय विश्लेषण द्वारा प्राप्त बीजांक

[2] यदि $m \angle A$ तथा $m \angle B$ के आदर्शबीजांक क्रमशः $F(p_1) = [p_1 \quad 1]$ तथा $F(p_2) = [p_2 \quad 1]$ हो तो -



संकेतन व्याख्या

कोण माप	बीजांक	
	का प्रथम अवयव p	का प्रथम अवयव q
$m \angle A$ का आदर्श बीजांक	p_1	1
$m \angle B$ का आदर्श बीजांक	p_2	1
$m \angle(A+B)$ का बीजांक =	$[(p_1 * p_2 - 1)]$	$(p_2 + p_1)$
$m \angle(A-B)$ का बीजांक =	$[(p_1 * p_2 + 1)]$	$(p_2 - p_1)$ होगा।

उपरोक्त संकेतन के अनुसार दो बीजांको का योग एवं अन्तर प्रमेय और प्रमेय की उपपत्ति

प्रमेय 2 यदि $m \angle A$ तथा $m \angle B$ के आदर्श बीजांक क्रमशः $[p_1 \quad 1]$ तथा $[p_2 \quad 1]$ हो तो-

- $m \angle(A+B)$ का बीजांक = $[(p_1 * p_2 - 1) \quad (p_2 + p_1)]$
- $m \angle(A-B)$ का बीजांक = $[(p_1 * p_2 + 1) \quad (p_2 - p_1)]$ होगा।

उपपत्ति

$m \angle A$ का आदर्श बीजांक $F[p_1 \quad 1]$ के सापेक्ष $m \angle A$ का त्रिभुजांक = $(p_1^2 - 1) \quad (2p_1) \quad (p_1^2 + 1)$ तथा

$m \angle B$ का आदर्श बीजांक $F[p_2 \quad 1]$ के सापेक्ष $m \angle B$ का त्रिभुजांक = $(p_2^2 - 1) \quad (2p_2) \quad (p_2^2 + 1)$

- $m \angle(A+B)$ का त्रिभुजांक का प्रथम अवयव (आधार x) = $\{(p_1^2 - 1) * (p_2^2 - 1) - 4 p_1 p_2\}$
द्वितीय अवयव (लम्ब y) = $\{(p_2^2 - 1) * (2p_1) + (p_1^2 - 1)(2p_2)\}$
तृतीय अवयव (कर्ण z) = $\{(p_1^2 + 1) * (p_2^2 + 1)\}$

∴ $m\angle(A+B)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m\angle(A+B)$ का बीजांक $[p \ q] = [(z+x) \ y]$ के प्रति

$$\begin{aligned}(z+x) &= \{(p_1^2 + 1) * (p_2^2 + 1)\} + \{(p_1^2 - 1) * (p_2^2 - 1) - 4p_1p_2\} \\ &= \{(2p_1^2p_2^2 + 2) - 4p_1p_2\} = 2(p_1^2p_2^2 - 2p_1p_2 + 1) = 2(p_1p_2 - 1)^2 \\ y &= \{(p_2^2 - 1) * (2p_1) + (p_1^2 - 1)(2p_2)\} \\ &= (2p_1p_2^2 - 2p_1 + 2p_2p_1^2 - 2p_2) \\ &= (2p_1p_2^2 + 2p_2p_1^2 - 2p_2 - 2p_1) \\ &= 2p_1p_2(p_2 + p_1) - 2(p_2 + p_1) = 2(p_1p_2 - 1) * (p_2 + p_1)\end{aligned}$$

अतः $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F[p_1 \ 1]$ तथा $m\angle B$ का आदर्श बीजांक $F[p_2 \ 1]$ के सापेक्ष $m\angle(A+B)$ का बीजांक

$$\begin{aligned}&= [\{2(p_1p_2 - 1)^2\} \quad \{2(p_1p_2 - 1) * (p_2 + p_1)\}] \text{ अदक्ष बीजांक है।} \\ &= [(p_1p_2 - 1) \quad (p_2 + p_1)] \text{ अदक्ष/दक्ष बीजांक होगा।}\end{aligned}$$

2• $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक का प्रथम अवयव (आधार x) $= \{(p_1^2 - 1) * (p_2^2 - 1) + (2p_1) * (2p_2)\}$

$$\text{द्वितीय अवयव (लम्ब } y) = \{(p_2^2 - 1) * (2p_1) - (p_1^2 - 1)(2p_2)\}$$

$$\text{तृतीय अवयव (कर्ण } z) = \{(p_1^2 + 1) * (p_2^2 + 1)\}$$

∴ $m\angle(A-B)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष $m\angle(A-B)$ का बीजांक $[p \ q] = [(z+x) \ y]$ के प्रति

$$\begin{aligned}(z+x) &= \{(p_1^2 + 1) * (p_2^2 + 1)\} + \{(p_1^2 - 1) * (p_2^2 - 1) + (2p_1) * (2p_2)\} \\ &= 2p_1^2p_2^2 + 2 + 4(p_1p_2) = 2(p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1) = 2(p_1p_2 + 1)^2 \\ y &= \{(p_2^2 - 1) * (2p_1) - (p_1^2 - 1)(2p_2)\} \\ &= (2p_1p_2^2 - 2p_1 - 2p_2p_1^2 + 2p_2) \\ &= (2p_1p_2^2 - 2p_2p_1^2 + 2p_2 - 2p_1) \\ &= 2p_1p_2(p_2 - p_1) + 2(p_2 - p_1) = 2(p_1p_2 + 1) * (p_2 - p_1)\end{aligned}$$

ततः $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $[p_1 \ 1]$ तथा $m\angle B$ का आदर्श बीजांक $[p_2 \ 1]$ के सापेक्ष $m\angle(A-B)$ का बीजांक

$$\begin{aligned}&= [\{2(p_1p_2 + 1)^2\} \quad \{2(p_1p_2 + 1) * (p_2 - p_1)\}] \text{ अदक्ष बीजांक है।} \\ &= [(p_1p_2 + 1) \quad (p_2 - p_1)] \text{ अदक्ष/दक्ष बीजांक होगा। सिद्ध।}\end{aligned}$$

ध्यानाकर्षण उपरोक्त दो आदर्श बीजांको का योग एवं अन्तर प्रमेय और प्रमेय की उपपत्ति के तारतम्य में उक्त दो आदर्श बीजांको का योग एवं अन्तर मान के प्रति विश्लेषित प्रमेय निम्नानुसार होगा।

दो आदर्श बीजांको का योग एवं अन्तर मान के प्रति विश्लेषित प्रमेय

प्रमेय 1 किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।

उदाहरण ■ दो आदर्श बीजांको का योग एवं अन्तर मान गणना सूत्र का अनुप्रयोग कर $m\angle A$ का बीजांक $\{4 \ 1\}$ तथा $m\angle B$ का बीजांक $\{12 \ 1\}$ के प्रति $m\angle(A+B)$ एवं $m\angle(A-B)$ का बीजांक गणना कीजिए। और विश्लेषित कीजिए कि— किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।

हल— दो बीजांको का योग एवं अन्तर मान गणना सूत्र का अनुप्रयोग—

$$m\angle A \text{ का आदर्श बीजांक } \begin{matrix} p_1 & 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m\angle B \text{ का आदर्श बीजांक } \begin{matrix} p_2 & 1 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$m\angle(A+B) \text{ का बीजांक } = \begin{bmatrix} (p_1 * p_2 - 1) & (p_2 + p_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 & 16 \end{bmatrix}$$

$$m\angle(A-B) \text{ का बीजांक } = \begin{bmatrix} (p_1 * p_2 + 1) & (p_2 - p_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 & 8 \end{bmatrix} \text{ होगा}$$

प्रमेय 2 “किन्हीं दो कोण मापों के बीजांकों का योग एवं अन्तर मान क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान के त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त बीजांक के बराबर होता है।” का विश्लेषण—

$$m\angle A \text{ का बीजांक } \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ के सापेक्ष } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } = [(4^2 - 1^2) \quad (2 * 4 * 1) \quad (4^2 + 1^2)]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 15 & 8 & 17 \end{bmatrix} \text{ तथा} \\
m\angle B \text{ का बीजांक } \begin{bmatrix} 12 & 1 \end{bmatrix} \text{ के सापेक्ष } m\angle B \text{ का त्रिभुजांक} &= [(12^2 - 1^2) \quad (2 * 12 * 1) \quad (12^2 + 1^2)] \\
&= \begin{bmatrix} 143 & 24 & 145 \end{bmatrix} \\
\therefore m\angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक} &= [(15*143-8*24) \quad (143*8 + 15*24) \quad (17*145)] \\
&= \begin{bmatrix} 1953 & 1504 & 2465 \end{bmatrix} \text{ तथा} \\
m\angle(A-B) \text{ का त्रिभुजांक} &= [(15*143+8*24) \quad (143*8 - 15*24) \quad (17*145)] \\
&= \begin{bmatrix} 2337 & 784 & 2465 \end{bmatrix} \text{ तथा} \\
m\angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक के सापेक्ष } m\angle(A+B) \text{ का बीजांक } &[\{2465+1953\} \quad 1504] = \begin{bmatrix} 4418 & 1504 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 47 & 16 \end{bmatrix} \text{ तथा} \\
m\angle(A-B) \text{ का त्रिभुजांक के सापेक्ष } m\angle(A-B) \text{ का बीजांक } &[\{2465+2337\} \quad 784] = \begin{bmatrix} 4802 & 784 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 49 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

सूत्र द्वारा प्राप्त बीजांक = प्रमेय विश्लेषण द्वारा प्राप्त बीजांक

प्रमेय 3 $m\angle A$ के बीजांक के सापेक्ष $m\angle 2A$ तथा का बीजांक

$m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$ के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक $[(p^2 - q^2) \quad 2pq]$ होगा।

उपपत्ति $m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$ के सापेक्ष -

$$\begin{aligned}
m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} &= [(p^2 - q^2) \quad (2pq) \quad (p^2 + q^2)] \\
m\angle 2A = m\angle(A+A) \text{ का त्रिभुजांक} &= [\{(p^2 - q^2)^2 - (2pq)^2\} \quad \{2(p^2 - q^2)(2pq)\} \quad \{(p^2 + q^2)^2\}] \\
m\angle 2A \text{ का बीजांक} &= [\{(p^2 + q^2)^2 + (p^2 - q^2)^2 - (2pq)^2\} \quad \{2(p^2 - q^2)(2pq)\}] \\
&= [\{2p^4 + 2q^4 - 4p^2q^2\} \quad \{2(p^2 - q^2)(2pq)\}] \\
&= [\{2(p^4 + q^4 - 2p^2q^2)\} \quad \{2(p^2 - q^2)(2pq)\}] \\
&= [\{2(p^2 - q^2)^2\} \quad \{2(p^2 - q^2)(2pq)\}] \text{ अदक्ष बीजांक है।} \\
&= [(p^2 - q^2) \quad 2pq] \text{ अदक्ष/दक्ष बीजांक होगा। सिद्ध।}
\end{aligned}$$

ऊर्ध्व तिर्यक विधि

$$m\angle A \text{ का बीजांक} = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$$

$$m\angle A \text{ का बीजांक} = \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$$

$$m\angle 2A = m\angle(A+A) \text{ का बीजांक} = [(p^2 - q^2) \quad (pq + p q)] = [(p^2 - q^2) \quad 2pq]$$

इसी तारतम्य में $m\angle 0^\circ = m\angle(A-A)$ का बीजांक $[(p^2 + q^2) \quad (pq - p q)] = [(p^2 + q^2) \quad 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ होगा।

उदाहरण ■ $m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल 1• $m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix}$ के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक $[(p^2 - q^2) \quad 2pq]$ के अनुप्रयोग से।

$m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक $[(5^2 - 2^2) \quad 2*5*2] = \begin{bmatrix} 21 & 20 \end{bmatrix}$ उत्तर।

हल 2• $m\angle A$ के बीजांक $\begin{bmatrix} 5 & 2 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष $m\angle A$ का त्रिभुजांक $[(5^2 - 2^2) \quad 2*5*2 \quad (5^2 + 2^2)]$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 20 & 29 \end{bmatrix}$$

$$m\angle 2A \text{ का त्रिभुजांक} = [(21^2 - 20^2) \quad 2*21*20 \quad 29^2]$$

$$= \begin{bmatrix} 41 & 840 & 841 \end{bmatrix}$$

$\therefore m\angle 2A$ का त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक $[(841+41) \quad 840] = [882 \quad 840] = \begin{bmatrix} 21 & 20 \end{bmatrix}$ उत्तर।

6-8 दो कोण मापों के त्रिभुजांकों के सापेक्ष उनके योग एवं अंतर कोण माप का बीजांक

प्रमेय 1 $m\angle A$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$ तथा $m\angle B$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष -

1• $m\angle(A+B)$ का बीजांक $[\{(z_1 + x_1)*(z_2 + x_2) - y_1 * y_2\} \quad \{(z_2 + x_2)*y_1 + (z_1 + x_1)*y_2\}]$

2• $m\angle(A-B)$ का बीजांक $[\{(z_1 + x_1)*(z_2 + x_2) + y_1 * y_2\} \quad \{(z_2 + x_2)*y_1 - (z_1 + x_1)*y_2\}]$ होगा।

प्रमाण $m\angle A$ के त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष - $m\angle A$ का बीजांक $\{(z_1 + x_1) \quad y_1\}$

$m\angle B$ का त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}$ के सापेक्ष - $m\angle B$ का बीजांक $\{(z_2 + x_2) \quad y_2\}$

- ∴ 1• $m\angle(A+B)$ का बीजांक $\{(z_1 + x_1)*(z_2 + x_2) - y_1 * y_2\} \quad \{(z_2 + x_2)*y_1 + (z_1 + x_1)*y_2\}$
 2• $m\angle(A+B)$ का बीजांक $\{(z_1 + x_1)*(z_2 + x_2) + y_1 * y_2\} \quad \{(z_2 + x_2)*y_1 - (z_1 + x_1)*y_2\}$

उदाहरण ■ $m\angle A$ का त्रिभुजांक [4 3 5] तथा $m\angle B$ का त्रिभुजांक [12 5 13] के सापेक्ष

- ∴ 1• $m\angle(A+B)$ का बीजांक $\{(5+4)*(13+12) - 3*5\} \quad \{(13+12)*3 + (5+4)*5\}$
 $= \{9*25 - 15\} \quad \{75 + 45\} = [210 \quad 120] = [7 \quad 4]$
 2• $m\angle(A-B)$ का बीजांक $\{(5+4)*(13+12) + 3*5\} \quad \{(13+12)*3 - (5+4)*5\}$
 $= \{9*25 + 15\} \quad \{75 - 45\} = [240 \quad 30] = [8 \quad 1]$

उत्तर जाँच $m\angle A$ के त्रिभुजांक [4 3 5] के सापेक्ष $m\angle A$ का बीजांक $\{(5+4) \quad 3\} = [9 \quad 3] = [3 \quad 1]$
 $m\angle B$ का त्रिभुजांक [12 5 13] के सापेक्ष $m\angle B$ का बीजांक $\{(13+12) \quad 5\} = [25 \quad 5] = [5 \quad 1]$

- ∴ 1• $m\angle(A+B)$ का बीजांक $\{(3*5 - 1) \quad (5+3)\} = \{14 \quad 8\} = [7 \quad 4]$
 2• $m\angle(A-B)$ का बीजांक $\{(3*5 + 1) \quad (5-3)\} = \{16 \quad 2\} = [8 \quad 1]$

प्रमेय 2 $m\angle A$ का त्रिभुजांक [x y z] के सापेक्ष $-m\angle 2A$ का बीजांक = [x y] होगा।

प्रमाण $m\angle A$ का त्रिभुजांक [x y z] के सापेक्ष $m\angle A$ का बीजांक [(z+x) y]

$$\begin{aligned} \therefore m\angle 2A &= m\angle(A+A) \text{ का बीजांक } \{ \{(z+x)^2 - y^2\} \quad \{2 * (z+x) * y\} \} \\ &= \{ \{z^2 + x^2 + 2zx - y^2\} \quad \{2 * (z+x) * y\} \} \\ &= \{ \{x^2 + y^2 + x^2 + 2zx - y^2\} \quad 2 * (z+x) * y \} \\ &= \{ \{2x^2 + 2zx\} \quad 2 * (z+x) * y \} \\ &= [2x \{x+z\} \quad 2 * (z+x) * y] = [x \quad y] \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

टीप चूँकि $m\angle A$ का बीजांक [p q] से $m\angle \frac{A}{2}$ का त्रिभुजांक विस्तार [x y z] = [p q $\sqrt{p^2 + q^2}$]

⇒ $m\angle 2A$ का बीजांक [p q] से $m\angle A$ का त्रिभुजांक विस्तार [x y z] = [p q $\sqrt{p^2 + q^2}$]

⇒ $m\angle A$ का त्रिभुजांक विस्तार [p q $\sqrt{p^2 + q^2}$] से $m\angle 2A$ का बीजांक = [p q] होगा।

∴ $m\angle A$ का त्रिभुजांक विस्तार [x y z] से $m\angle 2A$ का बीजांक = [x y] होगा।

प्रमेय को अभिगृहीत (आत्मसाती प्रमेय/कथन) होने की ओर संकेत करता है।

उदाहरण ■ $m\angle A$ का त्रिभुजांक [12 5 13] के सापेक्ष $-m\angle 2A$ का बीजांक [12 5] होगा।

6-9 आदर्श बीजांक अभिगृहीत

[1] किसी आदर्श बीजांक $F(c)$ को दो आदर्श बीजांको $F(a)$ एवं $F(b)$ के अन्तर मान $[F(a) - F(b)]$ के प्रति—
 यदि $b > a$ और आदर्श बीजांक $F(c) = [c \quad 1] = [g*c \quad g]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(a*b+1) = g*c$ तथा $(b-a) = g$ हो तो $F(c) = [F(a) - F(b)]$ होगा।

[2] किसी आदर्श बीजांक $F(c)$ को दो आदर्श बीजांको $F(m)$ एवं $F(n)$ के योग मान $[F(m) + F(n)]$ के प्रति—
 यदि $n > m$ और आदर्श बीजांक $F(c) = [c \quad 1] = [r*c \quad r]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(m*n-1) = r*c$ तथा $(m+n) = r$ हो तो $F(c) = [F(m) + F(n)]$ होगा।

अभिगृहीत 1 और 2 के तारतम्य में हलित उदाहरण

उदाहरण 1 ■ आदर्श बीजांक $p(3)$ को दो आदर्श बीजांको के योग एवं अन्तर मानों में प्रस्तुत कीजिए।

हल आदर्श बीजांक $F(3)$ को दो आदर्श बीजांको के योग मानों में प्रस्तुति—

माना कि $F(3) = F(c) = [F(m) + F(n)]$ है। तब $F(c) = [F(m) + F(n)]$ होने का प्रतिबंध —

आदर्श बीजांक $F(c) = [c \quad 1] = [r*c \quad r]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(m*n-1) = r*c$ तथा $(m+n) = r$ होने के परिपालन में —

समिका $\frac{m*n-1}{c} = m+n = r \Rightarrow (m*n-1) = c(m+n) = r*c \Rightarrow m*n-1 = 3(m+n) = r*3$ का तार्किक

हल 1 • $m=5$ और $n=8$ होगा। अतः $F(3) = [F(5) + F(8)]$ होगा। **उत्तर।**

$m=4$ और $n=13$ होगा। अतः $F(3) = [F(4) + F(13)]$ होगा। **उत्तर।**

हल 2• आदर्श बीजांक $F(3)$ को दो आदर्श बीजांको के अन्तर मानों में प्रस्तुति-

माना कि $F(3) = F(c) = [F(a) - F(b)]$ है। तब $F(c) = [F(a) - F(b)]$ होने का प्रतिबंध - यदि $b > a$ और आदर्श बीजांक $F(c) = [c - 1] = [g * c - g]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(a * b + 1) = g * c$ तथा $(b - a) = g$ होने के परिपालन में-

समिका $\frac{a * b + 1}{c} = b - a = g \Rightarrow (a * b + 1) = c(b - a) = g * c \Rightarrow (a * b + 1) = 3(b - a) = g * 3$ का तार्किक

हल 1• $a=1$ और $b=2$ होगा। अतः $F(3) = [F(1) - F(2)]$ होगा। **उत्तर।**

हल 2• $a=2$ और $b=7$ होगा। अतः $F(3) = [F(2) - F(7)]$ होगा। **उत्तर।**

उदाहरण 2■ आदर्श बीजांक $F(2)$ को दो आदर्श बीजांको के योग एवं अन्तर मानों में प्रस्तुत कीजिए।

हल आदर्श बीजांक $F(2)$ को दो आदर्श बीजांको के योग मानों में प्रस्तुति-

माना कि $F(2) = F(c) = [F(m) + F(n)]$ है। तब $F(c) = [F(m) + F(n)]$ होने का प्रतिबंध - आदर्श बीजांक $F(c) = [c - 1] = [r * c - r]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(m * n) - 1 = r * c$ तथा $(m + n) = r$ होने के परिपालन में -

समिका $\frac{m * n - 1}{c} = m + n = r \Rightarrow (m * n - 1) = c(m + n) = r * c \Rightarrow m * n - 1 = 2(m + n) = r * 2$ का तार्किक

हल $m=3$ और $n=7$ होगा। अतः $F(2) = [F(3) + F(7)]$ होगा। **उत्तर।**

आदर्श बीजांक $F(2)$ को दो आदर्श बीजांको के अन्तर मानों में प्रस्तुति-

माना कि $F(2) = F(c) = [F(a) - F(b)]$ है। तब $F(c) = [F(a) - F(b)]$ होने का प्रतिबंध - यदि $b > a$ और आदर्श बीजांक $F(c) = [c - 1] = [g * c - g]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(a * b + 1) = g * c$ तथा $(b - a) = g$ होने के परिपालन में-

समिका $\frac{a * b + 1}{c} = b - a = g \Rightarrow (a * b + 1) = c(b - a) = g * c \Rightarrow (a * b + 1) = 2(b - a) = g * 2$ का तार्किक

हल- $a=1$ और $b=3$ होगा। अतः $p(2) = [p(1) - p(3)]$ होगा। **उत्तर।**

[3] अभिगृहीत 1 एवं 2 के सयुक्तिकरण में $b > a, n > m$, के प्रतिबंध पर

1• $[F(m) + F(n)] = F(c) = F(2c - a) + F(2c + b)$ तथा

2• $[F(a) - F(b)] = F(c) = F(2c - m) - F(n - 2c)$ हो तो $(n - m) = (b + a)$ होगा।

उदाहरण 1■ $b > a, n > m$ के प्रतिबंध पर $[F(m) + F(n)] = F(3) = F(2c - a) + F(2c + b)$ हो तो $(n - m) = (b + a)$ सिद्ध कीजिए।

हल माना कि $F(3) = F(c) = [F(m) + F(n)]$ है। तब $F(c) = [F(m) + F(n)]$ होने का प्रतिबंध -

आदर्श बीजांक $F(c) = [c - 1] = [r * c - r]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(m * n - 1) = r * c$ तथा $(m + n) = r$ होने के परिपालन में -

समिका $\frac{m * n - 1}{c} = m + n = r \Rightarrow (m * n - 1) = c(m + n) = r * c \Rightarrow m * n - 1 = 3(m + n) = r * 3$ का तार्किक

हल 1• $m=5$ और $n=8$ होगा। अतः $F(3) = [F(5) + F(8)]$ होगा।

हल 2• $m=4$ और $n=13$ होगा। अतः $F(3) = [F(4) + F(13)]$ होगा।

हल 1 से $m=5$, $n=8$, $n > m$, $(n - m) = (8 - 5) = 3$ ----- (1)

$[F(5) + F(8)] = F(3) = F(2 * 3 - a) + F(2 * 3 + b)$ की तुलना करने पर-

$2 * 3 - a = 5 \Rightarrow a = 1$, $2 * 3 + b = 8 \Rightarrow b = 2$, $(a + b) = (1 + 2) = 3$ ----- (2)

$\therefore$ (1) और (2) से $(n - m) = (b + a)$ सिद्ध।

हल 2 से $m=4$, $n=13$, $n > m$, $(n - m) = (13 - 4) = 9$ ----- (1)

$[F(4) + F(13)] = F(3) = F(2 * 3 - a) + F(2 * 3 + b)$ की तुलना करने पर-

$2 * 3 - a = 4 \Rightarrow a = 2$, $2 * 3 + b = 13 \Rightarrow b = 7$, $(a + b) = (2 + 7) = 9$ ----- (2)

∴ (1) और (2) से $(n-m)=(b+a)$ सिद्ध।

उदाहरण 2 ■ $b > a, n > m$ के प्रतिबंध पर $F(a) - F(b) = F(3) = F(2c-m) - F(n-2c)$ हो तो $(b+a)=(n-m)$ सिद्ध कीजिए।

हल माना कि $F(3) = F(c) = F(a) - F(b)$ है। तब $F(c) = [F(m) + F(n)]$ होने का प्रतिबंध -

आदर्श बीजांक $F(c) = [c \ 1] = [g*c \ g]$ स्वरूप के किसी प्रस्तुति के प्रति में $(a * b + 1) = g*c$ तथा $(b-a) = r$ होने के परिपालन में -

समिका $\frac{a*b+1}{c} = b-a = g \Rightarrow (a*b+1) = c(b-a) = g*c \Rightarrow (a*b+1) = 3(b-a) = g*3$ का तार्किक

हल1• $a=1$ और $b=2$ होगा। अतः $F(3) = [F(1) - F(2)]$ होगा।

हल2• $a=2$ और $b=7$ होगा। अतः $F(3) = [F(2) - F(7)]$ होगा।

हल1 से $a=1 \ b=2 \ b > a \ (a+b) = (1+2) = 3 \text{ -----}(1)$

$[F(1) - F(2)] = F(3) = F(2c-m) - F(n-2c) = F(2*3 - m) - F(n - 2*3)$ की तुलना करने पर-
 $2*3 - m = 1 \Rightarrow m=5, \ n - 2*3 = 2 \Rightarrow n=8, \ (n-m) = (8-5) = 3 \text{ -----}(2)$

∴ (1) और (2) से $(b+a) = (n-m)$ सिद्ध।

हल2 से $a=2 \ b=7 \ b > a \ (a+b) = (2+7) = 9 \text{ -----}(1)$

$[F(2) - F(7)] = F(3) = F(2c-m) - F(n-2c) = F(2*3 - m) - p - F(n - 2*3)$ की तुलना करने पर-
 $2*3 - m = 2 \Rightarrow m=4, \ n - 2*3 = 7 \Rightarrow n=13, \ (n-m) = (13-4) = 9 \text{ -----}(2)$

∴ (1) और (2) से $(b+a) = (n-m)$ सिद्ध।

[4] व्यापकता में $b > a, n > m$ के प्रतिबंध पर

(1) $F(m) + F(n) = F(c) = F(a) - F(b) = F(2c-m) - F(n-2c)$ तथा

(2) $F(a) - F(b) = F(c) = F(m) + F(n) = F(2c-a) + F(2c+b)$ होगा।

जिनके प्रति हल मानो में $(b+a) = (n-m)$ होगा।

उदाहरण 1 ■ समिका $F(107) + F(122) = F(a) - F(b)$ के प्रति-

1• $F(a)$ और $F(b)$ को दर्शित कीजिए। **2**• $(122-107)=(n-m)=(a+b)$ दर्शित कीजिए।

हल $F(107) + F(122)$ में - $n > m$ के प्रति $m=107, n=122$ होगा।

माना कि $F(107) + F(122) = F(c)$ है। ∴ दो आदर्श बीजांकों के योग नियम-

$$F(m) + F(n) = F\{(m*n-1) \ (m+n)\} \text{ से } F(c) = F\{(107*122 -1) \ (107+122)\} \\ = F\{13053 \ 229\} = F(57 \ 1) = F(57) \Rightarrow c=57$$

$$\therefore F(a) - F(b) = F(2c-m) - F(n-2c) = F(2*57-107) - F(122 - 2*57) = F(7) - F(8)$$

अतः $F(a) = 7, F(b) = 8$

उक्त हल $F(m) + F(n) = F(c) = F(a) - F(b) \Rightarrow F(107) + F(122) = F(57) = F(7) - F(8)$ में

$$(n-m) = (122-107) = 15, (a+b) = (7+8) = 15 \text{ से } (n-m)=(a+b) \text{ दर्शित।}$$

उत्तर जाँच दो आदर्श बीजांकों के अन्तर नियम से-

$$F(c) = F(a) - F(b) = F\{(a*b+1) \ (b-a)\} \text{ से } F(c) = F\{(7*8 -1) \ (8-7)\} \\ = F(57 \ 1) = F(57) \Rightarrow F(c)=57$$

निष्कर्ष प्राप्त उत्तर सही है।

उदाहरण 2 ■ यदि $F(m) + F(n) = F(c) = F(a) - F(b) = F(73)$ के प्रति-

1 $F(m), F(n), F(a)$ और $F(b)$ को दर्शित कीजिए। **2** $(n-m)=(a+b)$ दर्शित कीजिए।

हल• दो बीजांकों के अन्तर मान नियम से $F(a) - F(b) = F(73) \Rightarrow F\{(ab+1) \ (b-a)\} = F(73 \ 1)$ से

$$ab+1 = 73 \Rightarrow ab=72 \text{ -----}(1) \text{ तथा } (b-a) = 1 \text{ -----}(2)$$

समीकरण (1) और (2) से $b > a$ के प्रतिबंध पर- $a=8, b=9 \ (a+b)=17 \text{ -----}(1)$

$$\begin{aligned}\therefore F(a) - F(b) &= F(c) = F(m) + F(n) = F(2c-a) + F(2c+b) \\ \Rightarrow F(8) - F(9) &= F(73) = F(m) + F(n) = F(2*73-8) + F(2*73+9) \\ &= F(138) + F(155) \text{ से } m=138, n=155 \quad (n-m)=17 \text{ -----(2)}\end{aligned}$$

(1) और (2) से $(n-m)=(a+b)$ दर्शित।

उत्तर जाँच दो आदर्श बीजांकों के योग नियम से- $F(m) + F(n) = F(138) + F(155)$

$$\begin{aligned}&= F\{(138*155-1) \quad (155+138)\} \\ &= F(21389 \quad 293) = F(73 \quad 1) = F(73) \text{ -----(1)}\end{aligned}$$

दो आदर्श बीजांकों के अन्तर नियम से- $F(a) - F(b) = F(8) - F(9)$

$$= F\{8*9+1 \quad (9-8)\} = F(73 \quad 1) = F(73) \text{ ---- (2)}$$

हल मान (1) और (2) से $F(m) + F(n) = F(c) = F(a) - F(b) = F(73)$ प्रस्तावित है।

निष्कर्ष प्राप्त उत्तर सही है।

6-10 अनुच्छेद 6-9 अभिगृहीत 4 से प्रमेय

दो क्रमागत संख्या k और $(k+1)$ के प्रति बीजांकों के योग एवं अन्तर प्रमेय

$$(1) \text{ योग प्रमेय } [F(k) + F(k+1)] = F\left(\frac{k(k+1)-1}{2k+1}\right) = F\left(\frac{k-2}{2k+1}\right) - F\left(\frac{k+3}{2k+1}\right)$$

तथा बाँया पक्ष से $(k+1)-(k)=1$

$$= \text{दाँया पक्ष से } \frac{k+3}{2k+1} + \frac{k-2}{2k+1} = \frac{2k+1}{2k+1} = 1 \text{ होगा।}$$

$$(2) \text{ अन्तर प्रमेय } [F(k) - F(k+1)] = F\{k(k+1)+1\} = F\{k(2k+1)+2\} + F\{k(2k+3)+3\}$$

तथा बाँया पक्ष से- $(k) + (k+1) = 2k+1$

$$= \text{दाँया पक्ष से } \{k(2k+3)+3\} - \{k(2k+1)+2\} = 2k+1$$

उपपत्ति

$$(1) [F(k) + F(k+1)] = F\{k*(k+1)-1\} \quad (2k+1) \quad \text{अनुच्छेद 6-15 आदर्श बीजांक का योग प्रमेय से}$$

$$= F\left(\frac{k(k+1)-1}{2k+1}\right)$$

$$\begin{aligned}&= F\left[2\left(\frac{k(k+1)-1}{2k+1}\right) - k\right] + F\left[(k+1) - 2\left(\frac{k(k+1)-1}{2k+1}\right)\right] \quad \text{अनुच्छेद 6-17 अभिगृहीत (4) 1 से} \\ &= F\left(\frac{k-2}{2k+1}\right) - F\left(\frac{k+3}{2k+1}\right) \text{ सिद्ध। उदाहरणार्थ तलिका 6-3 का अवलोकन करे।}\end{aligned}$$

$$(2) [F(k) - F(k+1)] = F\{k(k+1)+1\} \text{ अनुच्छेद 6-15 आदर्श बीजांक का अन्तर प्रमेय से}$$

$$= F[2k(k+1)+1] - k + F[2k(k+1) + (k+1)] \text{ अनुच्छेद 6-17 अभिगृहीत (4) 2 से}$$

$$= F\{k(2k+1)+2\} + F\{k(2k+3)+3\} \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरणार्थ तलिका 6-3 का अवलोकन करे

$$\text{इसी प्रकार उक्त अभिगृहीत 4 (1) } F(m) + F(n) = F(c) = F(a) - F(b) = F(2c-m) - F(n-2c)$$

एवं अभिगृहीत 4 (2) $F(a) - F(b) = F(c) = F(m) + F(n) = F(2c-a) + F(2c+b)$ से सिद्ध किया जा सकता है-

$$1. F(0) - F(n) = F\left(\frac{1}{n}\right) = F\left(\frac{2}{n}\right) + F\left(\frac{n^2+2}{n}\right)$$

$$2. F(0) + F(n) = F\left(\frac{-1}{n}\right) = F\left(\frac{-2}{n}\right) - F\left(\frac{n^2+2}{n}\right)$$

$$3. F(n) - F(n+a) = F\left(\frac{n(n+a)+1}{a}\right) = F\left(\frac{n(2n+a)+2}{a}\right) + F\left(\frac{n(2n+3a)+a^2+2}{a}\right)$$

$$4. F(n) + F(n+a) = F\left(\frac{n(n+1)+1}{2n+a}\right) = F\left(\frac{an-2}{2n+a}\right) - F\left(\frac{a(n+a)+2}{2n+a}\right)$$

तलिका 6-3

दो क्रमागत संख्या n और $(n+1)$ के प्रति बीजांकों के योग एवं अन्तर

योग प्रमेय $[F(k) + F(k+1)] = F(\frac{k(k+1)-1}{2k+1})$ $= F(\frac{k-2}{2k+1}) - F(\frac{k+3}{2k+1})$	अन्तर प्रमेय $[F(k) - F(k+1)] = F\{k(k+1)+1\}$ $= F\{k(2k+1)+2\} + F\{k(2k+3)+3\}$
$F(0) + F(1) = \mathbf{F(-1)} = F(-2) - F(3)$	$F(0) - F(1) = \mathbf{F(1)} = F(2) + F(3)$
$F(1) + F(2) = \mathbf{F(\frac{1}{3})} = F(\frac{-1}{3}) - F(\frac{4}{3})$	$F(1) - F(2) = \mathbf{F(3)} = F(5) + F(8)$
$F(2) + F(3) = \mathbf{F(1)} = F(0) - F(1)$	$F(2) - F(3) = \mathbf{F(7)} = F(12) + F(17)$
$F(3) + F(4) = \mathbf{F(\frac{11}{7})} = F(\frac{1}{7}) - F(\frac{6}{7})$	$F(3) - F(4) = \mathbf{F(13)} = F(23) + F(30)$
$F(4) + F(5) = \mathbf{F(\frac{19}{9})} = F(\frac{2}{9}) - F(\frac{7}{9})$	$F(4) - F(5) = \mathbf{F(21)} = F(38) + F(47)$
$F(5) + F(6) = \mathbf{F(\frac{29}{11})} = F(\frac{3}{11}) - F(\frac{8}{11})$	$F(5) - F(6) = \mathbf{F(31)} = F(57) + F(68)$
$F(6) + F(7) = \mathbf{F(\frac{41}{13})} = F(\frac{4}{13}) - F(\frac{9}{13})$	$F(6) - F(7) = \mathbf{F(43)} = F(80) + F(93)$
$F(7) + F(8) = \mathbf{F(\frac{11}{3})} = F(\frac{1}{3}) - F(\frac{2}{3})$	$F(7) - F(8) = \mathbf{F(57)} = F(107) + F(122)$
$F(8) + F(9) = \mathbf{F(\frac{71}{17})} = F(\frac{6}{17}) - F(\frac{11}{17})$	$F(8) - F(9) = \mathbf{F(73)} = F(138) + F(155)$
$F(9) + F(10) = \mathbf{F(\frac{89}{19})} = F(\frac{7}{19}) - F(\frac{12}{19})$	$F(9) - F(10) = \mathbf{F(91)} = F(173) + F(192)$
$F(10) + F(11) = \mathbf{F(\frac{109}{21})} = F(\frac{8}{21}) - F(\frac{13}{21})$	$F(10) - F(11) = \mathbf{F(111)} = F(212) + F(233)$
टीप- अभिगृहीत 4 (1) $F(m) + F(n) = \mathbf{F(c)}$ $= F(a) - F(b) = F(2c-m) - F(n-2c)$ के सदृश्य ही है। जहाँ $F(a) = F(k)$, $F(b) = F(k+1)$ तथा $\mathbf{F(c)} = F\{\frac{k(k+1)-1}{2k+1}\}$ होगा। आदर्श बीजांक $F(\frac{d}{e}) =$ दक्ष बीजांक $F(d \ e)$ जाने।	टीप- अभिगृहीत 4 (2) $F(a) - F(b) = \mathbf{F(c)}$ $= F(m) + F(n) = F(2c-a) + F(2c+b)$ के सदृश्य ही है। जहाँ $F(m) = F(k)$, $F(n) = F(k+1)$ तथा $\mathbf{F(c)} = F\{k(k+1)+1\}$ होगा।

उदाहरण 1 ■ $F(6) - F(13) = F(m) + F(n)$ के प्रति $F(m)$ और $F(n)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल समिका $F(n) - F(n+a) = F(\frac{n(2n+a)+2}{a}) + F(\frac{n(2n+3a)+a^2+2}{a})$ के प्रति-

$n=6$ तथा $a=13-6=7$ प्रतिस्थापित करने पर-

$$F(6) - F(6+7) = F(\frac{6(2*6+7)+2}{7}) + F(\frac{6(2*6+3*7)+7^2+2}{7})$$

$$\Rightarrow F(6) - F(13) = F(\frac{116}{7}) + F(\frac{249}{7}) \text{ से}$$

$$F(m) = F(\frac{116}{7}) = F(116 \ 7) \text{ और } F(n) = F(\frac{249}{7}) = F(249 \ 7) \text{ उत्तर।}$$

सरल उत्तर जाँच $\Rightarrow F(6) - F(13) = F(6 \ 1) - F(13 \ 1)$

$$= \text{बीजांक } [(6*13+1) \ (13-6)] = \text{बीजांक } (79 \ 7) \text{ -----(1)}$$

$$F(\frac{116}{7}) + F(\frac{249}{7}) = \text{बीजांक } (116 \ 7) + \text{बीजांक } (249 \ 7) = \text{बीजांक } [(116*249 - 7*7) \ 7*(249+116)]$$

$$= \text{बीजांक } [(28884 - 49) \ (7*365)] = \text{बीजांक } [28835 \ (7*365)]$$

$$= \text{बीजांक } (79 \ 7) \text{ -----(2)}$$

निष्कर्ष (1) और (2) से प्राप्त उत्तर सही है।

उदाहरण 2 ■ $F(107) + F(122) = F(a) - F(b)$ के प्रति $F(a)$ और $F(b)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल समिका $F(n) + F(n+a) = F(\frac{an-2}{2n+a}) - F(\frac{a(n+a)+2}{2n+a})$ के प्रति-

$n=107$ तथा $a=122-107=15$ प्रतिस्थापित करने पर-

$$F(107) + F(107+15) = F(\frac{15*107-2}{2*107+15}) - F(\frac{15(107+15)+2}{2*107+15})$$

$$\Rightarrow F(107) + F(122) = F(\frac{1603}{229}) - F(\frac{1832}{229}) = F(7) - F(8) \text{ से}$$

$$F(a) = F(7) = F(7-1) \text{ और } F(b) = F(8) = F(8-1) \text{ उत्तर।}$$

$$\text{सरल उत्तर जाँच} \Rightarrow F(107) + F(122) = F(107-1) + F(122-1)$$

$$= \text{बीजांक} [(107*122-1) - (107+122)] = \text{बीजांक} (13053 - 229) \\ = F(57-1) = F(57) \text{-----(1)}$$

$$F(7) - F(8) = F(7-1) - F(8-1) = \text{बीजांक} [(7*8-1) - (8-7)] = F(57-1) = F(57) \text{-----(2)}$$

निष्कर्ष (1) और (2) से प्राप्त उत्तर सही है।

-----06-----

अध्याय -7

आदर्श बीजांक एवं त्रिभुजांक के सापेक्ष कोण माप का आकलन

7-1 रेडियन कोण माप को अंश कोण माप में एवं अंश कोण माप को रेडियन कोण में बदलना

अध्ययन संकेत में θ रेडियन के लिए θ^r तथा θ अंश के लिए θ^o लिया गया है।

$$\therefore 2\pi^r = 360^o \Rightarrow 2 * \frac{22^r}{7} = 360^o$$

$$\therefore \theta^r = \theta * \frac{630^o}{11} = \theta * (57.272727 - \dots)^o = \theta * (57.27)^o \text{ अंशमान से कोण के रेडियन माप को अंश में मान बदला जाना चाहिए।}$$

इसके विपरीत $360^o = 2\pi^r$ से $\theta^o = \theta * (0.0174603 - \dots)^r = \theta * (0.0174603)^r$ से कोण के अंश माप को रेडियन में मान बदला जाना चाहिए।

7-2 आदर्श बीजांक के सापेक्ष कोण माप का आकलन प्रमेय

प्रमेय 1 कोण माप इकाई रेडियन में लिये जाने पर $m\angle A^r$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p का मान ज्यों-ज्यों ($p \rightarrow \infty$) बढ़ता जाता है त्यों-त्यों $p * A^r$ का मान 2^r के निकटतर होने की ओर अग्रसर होता है।

उपपत्ति केपलर समीकरण 2^x के अनुसार- A^r के उच्च विषम घातों मानों $[(A^r), (A^r)^3, (A^r)^5, (A^r)^7, (A^r)^9, \dots]$ में विस्तार

$$\text{प्रमेय } \sin A^r = (A^r) - \frac{(A^r)^3}{!3} + \frac{(A^r)^5}{!5} - \frac{(A^r)^7}{!7} + \frac{(A^r)^9}{!9} - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \text{ प्रमाणित है।}$$

$$\text{अतः } \frac{\sin A^r}{A^r} = 1 - \frac{(A^r)^2}{!3} + \frac{(A^r)^4}{!5} - \frac{(A^r)^6}{!7} + \frac{(A^r)^8}{!9} - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \text{ प्रमाणित होगा।}$$

$$A^r \rightarrow 0 \text{ के प्रति } \frac{\sin A^r}{A^r} = 1 \text{ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होगा।}$$

$$\text{अर्थात् } \sin A^r = A^r \text{ होने की ओर अग्रसर होगा।} \quad \text{----- (1)}$$

$m\angle A^r$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक $[x \quad y \quad z]$

$$= [(p^2 - 1) \quad 2p \quad (p^2 + 1)] \text{ से } \sin A^r = \frac{2p}{p^2 + 1} \quad \text{----- (2)}$$

$$\text{समिका (1) और (2) से } A^r = \left(\frac{2p}{p^2 + 1}\right)^r \Rightarrow 2p^r = A^r * (p^2 + 1) \Rightarrow \frac{A^r * (p^2 + 1)}{p} = 2^r$$

$$\Rightarrow A^r * p \left(1 + \frac{1}{p^2}\right) = 2^r \text{ में } p \text{ Lim} \rightarrow \infty \text{ होने पर } \frac{1}{p^2} = 0 \text{ होगा। } \therefore A^r * p = 2^r \text{ सिद्ध।}$$

$$A^r * p = 2^r = 2 * \frac{630^o}{11} = \frac{1260^o}{11} \text{ से } A^r = \frac{2^r}{p} = \frac{2 * \frac{630^o}{11}}{p} = \frac{1260^o}{11p} \text{ होने की ओर अग्रसर होगा।}$$

उप प्रमेय कोण माप इकाई रेडियन में लिये जाने पर $m\angle \theta^r$ का बीजांक $(p \quad q)$ के प्रति $\theta^r = \frac{2^r * q}{p}$ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होता है।

उपपत्ति $m\angle \theta^r$ का बीजांक $(p \quad q)$ का आदर्श बीजांक प्रतिरूपण $F\left(\frac{p}{q}\right)$ होगा। अतः $m\angle \theta^r$ का आदर्श बीजांक $F(P)$ के

सापेक्ष $\theta^r = \frac{2^r}{p}$ होने की ओर अग्रसर होने के नियम प्रमाणित हैं। अतः $m\angle \theta^r$ का बीजांक $(p \quad q)$ का आदर्श बीजांक प्रतिरूपण

$$F\left(\frac{p}{q}\right) \text{ होने पर - } \theta^r = \frac{2^r}{\frac{p}{q}} = \frac{2^r * q}{p} = \frac{1260}{11} * \frac{q^o}{p} \text{ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होगा। सिद्ध।}$$

उदाहरण 1 ■- $m\angle \theta^r$ का त्रिभुजांक $[899 \quad 60 \quad 901]$ के प्रति $m\angle \theta^r$ का आकलन कीजिए।

■ केपलर समीकरण 2 का विस्तारित अध्ययन (समीकरण एवं उसकी उपपत्ति) के लिए अध्याय 10 त्रिकोणमिति भाग 2 पृष्ठ अनुच्छेद 10-4 में प्रस्तुत हैं।

हल $m\angle\theta^r$ का त्रिभुजांक [899 60 901] $\therefore m\angle\theta^r$ का बीजांक [p q] = [(901+899) 60] = [1800 60] = [30 1]
 $m\angle\theta^r$ का आदर्श बीजांक $F(p) = F(30) \Rightarrow p=30$ को हल समिका $\theta^r * p = 2^r$ में प्रस्थापित करने पर-

$$\theta^r * 30 = 2^r \Rightarrow \theta^r = \frac{2^r}{30} = \frac{1^r}{15} = 0.0666^r$$

अंशमान में $\theta^o = \frac{1260^0}{11P} = \frac{1260^0}{11*30} = \frac{42^0}{11} = 3.818$ आकलन मान होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle A^r = 0.05^r$ के प्रति $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल माना कि $m\angle A^r = 0.05^r$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ है।

$$\therefore A^r * p = 2^r \Rightarrow 0.05^r * p = 2^r \Rightarrow p = \frac{2}{0.05} = F(40) \text{ होगा। जिसके सापेक्ष } m\angle A^r \text{ का त्रिभुजांक } [(40^2 - 1)$$

$$2*40 (40^2 + 1)] = [1599 40 1601] \text{ होगा।}$$

उदाहरण 3■ $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक [608 105 617] के प्रति $m\angle A^r$ का आकलन कीजिए।

हल $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक [608 105 617] $\therefore m\angle A^r$ का बीजांक [p q] = [(617+608) 105]
 $= [1225 105] = [35 3]$ से $p=35, q=3$

$$\text{को } A^r = \frac{2^r * q}{p} \text{ में प्रस्थापित करने पर } A^r = \frac{2^r * 3}{35} = \frac{6^r}{35} = 0.17143^r = \frac{114.59^0 * 3}{35} = 9.822^o \text{ आकलन मान होगा।}$$

सारिणी 7-1

$m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक एवं $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष कोण इकाई मापों (रेडियन एवं अंश माप) में कोण माप आकलन

आदर्श बीजांक $F(p)$	दक्ष त्रिभुजांक [x y z] = [(p ² - 1) 2p (p ² + 1)] का दक्ष हल मान			$m\angle\theta$ का आकलन			
				आकलन माप		वास्तविक मान $R = \sin^{-1} \frac{y}{z}$	
				रेडियन माप में	अंश माप में	रेडियन माप में	अंश माप में
	X	y	Z	$\frac{2}{p}$	$\frac{1260^0}{11P}$		
1	2	3	4	5	6	7	8
F(1)	0	1	1	2.0000 ^r	114.54 ^o	1.5714 ^r	90 ^o
F(2)	3	4	5	1.0000 ^r	57.27 ^o	0.9273 ^r	53.13 ^o
F(3)	4	3	5	0.6667 ^r	38.18 ^o	0.6435 ^r	35.74 ^o
F(4)	15	8	17	0.5000 ^r	28.64 ^o	0.4900 ^r	28.07 ^o
F(5)	12	5	13	0.4000 ^r	22.91 ^o	0.3948 ^r	22.62 ^o
F(6)	35	12	37	0.3333 ^r	19.09 ^o	0.3303 ^r	18.91 ^o
F(7)	24	7	25	0.2857 ^r	16.36 ^o	0.2838 ^r	16.26 ^o
F(8)	63	16	65	0.2500 ^r	14.32 ^o	0.2487 ^r	14.25 ^o
F(9)	40	9	41	0.2222 ^r	12.73 ^o	0.2213 ^r	12.68 ^o
F(10)	99	20	101	0.2000 ^r	11.45 ^o	0.19993 ^r	11.42 ^o
F(11)	60	11	61	0.1818 ^r	10.42 ^o	0.1813 ^r	10.39 ^o
F(12)	143	24	145	0.1666 ^r	9.54 ^o	0.1663 ^r	9.52 ^o
F(13)	84	13	85	0.1538 ^r	8.81 ^o	0.1535 ^r	8.79 ^o
F(14)	195	28	197	0.1428 ^r	8.18 ^o	0.1426 ^r	8.17 ^o
F(15)	112	15	113	0.1333 ^r	7.64 ^o	0.1331 ^r	7.64 ^o
F(16)	255	32	257	0.1250 ^r	7.16 ^o	0.1248 ^r	7.15 ^o
F(17)	144	17	145	0.1176 ^r	6.74 ^o	0.1175 ^r	6.73 ^o
F(18)	323	38	325	0.1111 ^r	6.33 ^o	0.1110 ^r	6.36 ^o

F(19)	180	19	361	0.1053 ^r	6.03 ^o	0.1051 ^r	6.02
F(20)	399	40	401	0.1000 ^r	5.73 ^o	0.0999 ^r	5.72 ^o
F(21)	220	20	221	0.0953 ^r	5.45 ^o	0.0951 ^r	5.45 ^o
F(22)	483	44	485	0.0909 ^r	5.21 ^o	0.0908 ^r	5.21 ^o
F(23)	264	23	265	0.0870 ^r	4.98 ^o	0.0869 ^r	4.99 ^o
F(24)	575	48	576	0.0833 ^r	4.77 ^o	0.0832 ^r	4.77 ^o
F(25)	312	25	313	0.0800 ^r	4.58 ^o	0.0800 ^r	4.58 ^o
F(26)	675	52	677	0.0769 ^r	4.40 ^o	0.0769 ^r	4.40 ^o
F(27)	364	27	365	0.0740 ^r	4.24 ^o	0.0740 ^r	4.24 ^o
F(28)	783	56	785	0.0714 ^r	4.09 ^o	0.0714 ^r	4.09 ^o
F(29)	420	29	421	0.0689 ^r	3.95 ^o	0.0689 ^r	3.95 ^o
F(30)	899	60	901	0.0666 ^r	3.81 ^o	0.0666 ^r	3.81 ^o
F(31)	480	31	481	0.0645 ^r	3.69 ^o	0.0645 ^r	3.69 ^o
F(32)	1023	64	1025	0.0625 ^r	3.58 ^o	0.0625 ^r	3.58 ^o
F(33)	544	33	545	0.0606 ^r	3.47 ^o	0.0606 ^r	3.47 ^o
F(34)	1155	68	1157	0.0588 ^r	3.37 ^o	0.0588 ^r	3.37 ^o
F(35)	612	35	613	0.0571 ^r	3.27 ^o	0.0571 ^r	3.27 ^o
F(36)	1295	72	1296	0.0555 ^r	3.18 ^o	0.0555 ^r	3.18 ^o
F(37)	684	37	683	0.0540 ^r	3.10 ^o	0.0540 ^r	3.10 ^o
F(38)	1443	76	1445	0.0526 ^r	3.01 ^o	0.0526 ^r	3.01 ^o
F(39)	760	39	761	0.0513 ^r	2.94 ^o	0.0513 ^r	2.94 ^o
F(40)	1599	80	1601	0.0500 ^r	2.86 ^o	0.0500 ^r	2.86 ^o
F(41)	840	41	841	0.0488 ^r	2.79 ^o	0.0488 ^r	2.79 ^o
F(42)	1763	84	1765	0.0476 ^r	2.73 ^o	0.0476 ^r	2.73 ^o
F(43)	928	43	929	0.0465 ^r	2.66 ^o	0.0465 ^r	2.66 ^o
F(44)	1935	88	1937	0.0454 ^r	2.60 ^o	0.0454 ^r	2.60 ^o
F(45)	1012	45	1013	0.0444 ^r	2.54 ^o	0.0444 ^r	2.54 ^o
F(46)	2115	92	2117	0.0434 ^r	2.48 ^o	0.0434 ^r	2.44 ^o
F(47)	1104	47	1105	0.0424 ^r	2.44 ^o	0.0424 ^r	2.38 ^o
F(48)	2303	96	2305	0.0416 ^r	2.38 ^o	0.0416 ^r	2.38 ^o
F(49)	1200	49	1201	0.0408 ^r	2.33 ^o	0.0408 ^r	2.33 ^o
F(50)	2499	100	2501	0.0400 ^r	2.29 ^o	0.0400 ^r	2.29 ^o
F(51)	1300	51	1301	0.0392 ^r	2.24 ^o	0.0392 ^r	2.24 ^o
F(52)	2703	104	2705	0.0384 ^r	2.20 ^o	0.0384 ^r	2.20 ^o
F(53)	1402	53	1403	0.0377 ^r	2.16 ^o	0.0377 ^r	2.16 ^o
F(54)	2915	108	2917	0.0370 ^r	2.12 ^o	0.0370 ^r	2.12 ^o
F(55)	1512	55	1513	0.0363 ^r	2.08 ^o	0.0363 ^r	2.08 ^o
F(56)	3135	112	3137	0.0357 ^r	2.04 ^o	0.0357 ^r	2.04 ^o
F(57)	1624	57	1625	0.0351 ^r	2.01 ^o	0.0351 ^r	2.01 ^o
F(58)	3363	116	3365	0.0345 ^r	1.97 ^o	0.0345 ^r	1.97 ^o
F(59)	1740	59	1741	0.0338 ^r	1.94 ^o	0.0338 ^r	1.94 ^o
F(60)	3599	120	3601	0.0333 ^r	1.91 ^o	0.0333 ^r	1.91 ^o
F(61)	1860	61	1861	0.0328 ^r	1.88 ^o	0.0328 ^r	1.88 ^o
F(62)	3843	124	3845	0.0322 ^r	1.85 ^o	0.0322 ^r	1.85 ^o
F(63)	1984	63	1985	0.0317 ^r	1.82 ^o	0.0317 ^r	1.82 ^o
F(64)	4095	128	4097	0.0312 ^r	1.79 ^o	0.0312 ^r	1.79 ^o

F(65)	2112	65	2113	0.0307 ^r	1.76 ^o	0.0307 ^r	1.76 ^o
F(66)	4355	132	5357	0.0303 ^r	1.73 ^o	0.0303 ^r	1.73 ^o
F(67)	2244	67	2245	0.0298 ^r	1.71 ^o	0.0298 ^r	1.71 ^o
F(68)	4623	136	4625	0.0294 ^r	1.68 ^o	0.0294 ^r	1.68 ^o
F(69)	2380	69	2381	0.0290 ^r	1.66 ^o	0.0290 ^r	1.66 ^o
F(70)	4899	140	4901	0.0285 ^r	1.63 ^o	0.0285 ^r	1.63 ^o
F(71)	2520	71	2521	0.0281 ^r	1.61 ^o	0.0281 ^r	1.61 ^o
F(72)	5183	144	5185	0.0277 ^r	1.59 ^o	0.0277 ^r	1.59 ^o
F(73)	2664	73	2665	0.0274 ^r	1.57 ^o	0.0274 ^r	1.57 ^o
F(74)	5474	148	5476	0.0270 ^r	1.55 ^o	0.0270 ^r	1.55 ^o
F(75)	2812	75	2813	0.0266 ^r	1.52 ^o	0.0266 ^r	1.52 ^o
F(76)	5775	152	5777	0.0263 ^r	1.50 ^o	0.0263 ^r	1.50 ^o
F(77)	2964	77	2965	0.0259 ^r	1.48 ^o	0.0259 ^r	1.48 ^o
F(78)	6083	156	6085	0.0256 ^r	1.47 ^o	0.0256 ^r	1.47 ^o
F(79)	3120	79	3121	0.0253 ^r	1.45 ^o	0.0253 ^r	1.45 ^o
F(80)	6399	160	6401	0.0250 ^r	1.43 ^o	0.0250 ^r	1.43 ^o
F(81)	3280	81	3281	0.0247 ^r	1.41 ^o	0.0247 ^r	1.41 ^o
F(82)	6723	164	6725	0.0244 ^r	1.39 ^o	0.0244 ^r	1.39 ^o
F(83)	3444	83	3445	0.0241 ^r	1.38 ^o	0.0241 ^r	1.38 ^o
F(84)	7055	168	7057	0.0238 ^r	1.36 ^o	0.0238 ^r	1.36 ^o
F(85)	3612	85	3613	0.0235 ^r	1.35 ^o	0.0235 ^r	1.35 ^o
F(86)	7395	172	7397	0.0232 ^r	1.33 ^o	0.0232 ^r	1.33 ^o
F(87)	3784	87	3785	0.0229 ^r	1.31 ^o	0.0229 ^r	1.31 ^o
F(88)	7743	176	7785	0.0227 ^r	1.30 ^o	0.0227 ^r	1.30 ^o
F(89)	3960	89	3961	0.0224 ^r	1.28 ^o	0.0224 ^r	1.28 ^o
F(90)	8099	180	8101	0.0222 ^r	1.27 ^o	0.0222 ^r	1.27 ^o
F(91)	4140	91	4141	0.0219 ^r	1.26 ^o	0.0219 ^r	1.26 ^o
F(92)	8463	184	8465	0.0217 ^r	1.24 ^o	0.0217 ^r	1.24 ^o
F(93)	4324	93	4325	0.0215 ^r	1.23 ^o	0.0215 ^r	1.23 ^o
F(94)	8835	188	8837	0.0212 ^r	1.22 ^o	0.0212 ^r	1.22 ^o
F(95)	4512	95	4513	0.0210 ^r	1.20 ^o	0.0210 ^r	1.20 ^o
F(96)	9215	192	9217	0.0208 ^r	1.19 ^o	0.0208 ^r	1.19 ^o
F(97)	4704	97	4705	0.0206 ^r	1.18 ^o	0.0206 ^r	1.18 ^o
F(98)	9603	196	9305	0.0204 ^r	1.17 ^o	0.0204 ^r	1.17 ^o
F(99)	4900	99	4901	0.0202 ^r	1.15 ^o	0.0202 ^r	1.15 ^o
F(100)	9999	200	10001	0.0200 ^r	1.1459 ^o	0.0200 ^r	1.1459 ^o
F(101)	5100	101	5101	0.01980 ^r	1.1345 ^o	0.01980 ^r	1.1345 ^o
F(102)	10403	204	10405	0.01960 ^r	1.1234 ^o	0.01960 ^r	1.1234 ^o
F(103)	5304	103	5305	0.01941 ^r	1.1125 ^o	0.01941 ^r	1.1125 ^o
F(104)	10815	208	10817	0.01923 ^r	1.1018 ^o	0.01923 ^r	1.1018 ^o
F(105)	5512	105	5513	0.01904 ^r	1.0913 ^o	0.01904 ^r	1.0913 ^o
F(106)	11235	212	11237	0.01886 ^r	1.0810 ^o	0.01886 ^r	1.0810 ^o
F(107)	5724	107	5725	0.01869 ^r	1.0709 ^o	0.01869 ^r	1.0709 ^o
F(108)	11663	216	11665	0.01851 ^r	1.0610 ^o	0.01851 ^r	1.0610 ^o
F(109)	5940	109	5941	0.01834 ^r	1.0512 ^o	0.01834 ^r	1.0512 ^o
F(110)	12099	220	12101	0.01818 ^r	1.0417 ^o	0.01818 ^r	1.0417 ^o

F(111)	6160	111	6161	0.01801 ^r	1.0323 ^o	0.01801 ^r	1.0323 ^o
F(112)	12543	224	12545	0.01785 ^r	1.0231 ^o	0.01785 ^r	1.0231 ^o
F(113)	6384	113	6385	0.01770 ^r	1.0140 ^o	0.01770 ^r	1.0140 ^o
F(114)	12995	228	12997	0.01754 ^r	1.0051 ^o	0.01754 ^r	1.0051 ^o
F(115)	6612	115	6613	0.01740 ^r	0.9964 ^o	0.01740 ^r	0.9964 ^o
F(116)	13455	232	13457	0.01724 ^r	0.9878 ^o	0.01724 ^r	0.9878 ^o
F(117)	6844	117	6845	0.01710 ^r	0.9794 ^o	0.01710 ^r	0.9794 ^o
F(118)	13923	236	13925	0.01694 ^r	0.9711 ^o	0.01694 ^r	0.9711 ^o
F(119)	7080	119	7081	0.01680 ^r	0.9629 ^o	0.01680 ^r	0.9629 ^o
F(120)	14399	240	14401	0.01666 ^r	0.9549 ^o	0.01666 ^r	0.9549 ^o
F(121)	7320	121	7321	0.01652 ^r	0.9470 ^o	0.01652 ^r	0.9470 ^o

7-3 आदर्श बीजांक के सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष कोण माप का आकलन

केपलर समीकरण 2 से प्रमाणित है कि—

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = A^r$ के प्रति $A^r \text{ Lim} \rightarrow 0$ होने पर $\frac{\sin A^r}{A^r} = 1$ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होगा।

अर्थात् $\sin A^r = A^r$ होने की ओर अग्रसर होगा।

अतः 1• $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के प्रति $A^r = \sin A^r = \left(\frac{y}{z}\right)^r = \left(\frac{630}{11} * \frac{y}{x}\right)^o$ होने की ओर अग्रसर होगा।

2• $m\angle A^r$ का बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष प्राप्त $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2) \ 2pq \ (p^2 + q^2)]$ से

$$A^r = \sin A^r = \left(\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^r = \left(\frac{630}{11} * \frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^o = \left(\frac{1260}{11} * \frac{pq}{p^2+q^2}\right)^o \text{ होने की ओर अग्रसर होगा।}$$

3• $m\angle A^r$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष प्राप्त $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - 1) \ 2p \ (p^2 + 1)]$ से—

$$A^r = \sin A^r = \left(\frac{2p}{p^2+1}\right)^r = \left(\frac{630}{11} * \frac{2p}{p^2+1}\right)^o = \left(\frac{1260}{11} * \frac{p}{p^2+1}\right)^o \text{ होने की ओर अग्रसर होगा।}$$

सारिणी 7.2

$m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक एवं प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष कोण इकाई मापों (रेडियन एवं अंश माप) में कोण माप आकलन

आदर्श बीजांक $F(p)$	दक्ष त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(p^2 - 1) \ 2p \ (p^2 + 1)]$			$m\angle\theta$ का आकलन			
	का दक्ष हल मान			आकलन माप		वास्तविक मान $R = \sin^{-1} \frac{y}{z}$	
				रेडियन माप में $\left(\frac{y}{z}\right)^r$	अंश माप में $\left(\frac{630}{11} * \frac{y}{x}\right)^o$	रेडियन माप में	अंश माप में
	X	Y	Z				
1	2	3	4	5	6	7	8
F(1)	0	1	1	1.0000 ^r	57.27 ^o	1.5714 ^r	90 ^o
F(2)	3	4	5	0.8000 ^r	45.82 ^o	0.9273 ^r	53.13 ^o
F(3)	4	3	5	0.6000 ^r	34.36 ^o	0.6435 ^r	35.74 ^o
F(4)	15	8	17	0.4705 ^r	26.95 ^o	0.4900 ^r	28.07 ^o
F(5)	12	5	13	0.3846 ^r	22.03 ^o	0.3948 ^r	22.62 ^o
F(6)	35	12	37	0.3243 ^r	18.57 ^o	0.3303 ^r	18.91 ^o
F(7)	24	7	25	0.2800 ^r	16.04 ^o	0.2838 ^r	16.26 ^o
F(8)	63	16	65	0.2461 ^r	14.10 ^o	0.2487 ^r	14.25 ^o
F(9)	40	9	41	0.2195 ^r	12.57 ^o	0.2213 ^r	12.68 ^o

F(10)	99	20	101	0.1980 ^r	11.34 ^o	0.19993 ^r	11.42 ^o
F(11)	60	11	61	0.1803 ^r	10.33 ^o	0.1813 ^r	10.39 ^o
F(12)	143	24	145	0.1655 ^r	9.48 ^o	0.1663 ^r	9.52 ^o
F(13)	84	13	85	0.1529 ^r	8.76 ^o	0.1535 ^r	8.79 ^o
F(14)	195	28	197	0.1421 ^r	8.14 ^o	0.1426 ^r	8.17 ^o
F(15)	112	15	113	0.1327 ^r	7.60 ^o	0.1331 ^r	7.64 ^o
F(16)	255	32	257	0.1245 ^r	7.13 ^o	0.1248 ^r	7.15 ^o
F(17)	144	17	145	0.1172 ^r	6.71 ^o	0.1175 ^r	6.73 ^o
F(18)	323	38	325	0.1107 ^r	6.32 ^o	0.1110 ^r	6.36 ^o
F(19)	180	19	361	0.1049 ^r	6.01	0.1051 ^r	6.02
F(20)	399	40	401	0.0997 ^r	5.71 ^o	0.0999 ^r	5.72 ^o
F(21)	220	20	221	0.0950 ^r	5.44 ^o	0.0951 ^r	5.45 ^o
F(22)	483	44	485	0.0907 ^r	5.19 ^o	0.0908 ^r	5.21 ^o
F(23)	264	23	265	0.0868 ^r	4.97 ^o	0.0869 ^r	4.99 ^o
F(24)	575	48	576	0.0831 ^r	4.76 ^o	0.0832 ^r	4.77 ^o
F(25)	312	25	313	0.0798 ^r	4.57 ^o	0.0800 ^r	4.58 ^o
F(26)	675	52	677	0.0768 ^r	4.40 ^o	0.0769 ^r	4.40 ^o
F(27)	364	27	365	0.0740 ^r	4.24 ^o	0.0740 ^r	4.24 ^o
F(28)	783	56	785	0.0713 ^r	4.08 ^o	0.0714 ^r	4.09 ^o
F(29)	420	29	421	0.0688 ^r	3.94	0.0689 ^r	3.95 ^o
F(30)	899	60	901	0.0666 ^r	3.81 ^o	0.0666 ^r	3.81 ^o
F(31)	480	31	481	0.0644 ^r	3.69 ^o	0.0645 ^r	3.69 ^o
F(32)	1023	64	1025	0.0624 ^r	3.57 ^o	0.0625 ^r	3.58 ^o
F(33)	544	33	545	0.0605 ^r	3.47 ^o	0.0606 ^r	3.47 ^o
F(34)	1155	68	1157	0.0587 ^r	3.36 ^o	0.0588 ^r	3.37 ^o
F(35)	612	35	613	0.0571 ^r	3.27 ^o	0.0571 ^r	3.27 ^o
F(36)	1295	72	1296	0.0555 ^r	3.18 ^o	0.0555 ^r	3.18 ^o
F(37)	684	37	683	0.0540 ^r	3.10 ^o	0.0540 ^r	3.10 ^o
F(38)	1443	76	1445	0.0526 ^r	3.01 ^o	0.0526 ^r	3.01 ^o
F(39)	760	39	761	0.0513 ^r	2.94 ^o	0.0513 ^r	2.94 ^o
F(40)	1599	80	1601	0.0500 ^r	2.86 ^o	0.0500 ^r	2.86 ^o
F(41)	840	41	841	0.0488 ^r	2.79 ^o	0.0488 ^r	2.79 ^o
F(42)	1763	84	1765	0.0476 ^r	2.73 ^o	0.0476 ^r	2.73 ^o
F(43)	928	43	929	0.0465 ^r	2.66 ^o	0.0465 ^r	2.66 ^o
F(44)	1935	88	1937	0.0454 ^r	2.60 ^o	0.0454 ^r	2.60 ^o
F(45)	1012	45	1013	0.0444 ^r	2.54 ^o	0.0444 ^r	2.54 ^o
F(46)	2115	92	2117	0.0434 ^r	2.48 ^o	0.0434 ^r	2.44 ^o
F(47)	1104	47	1105	0.0424 ^r	2.44 ^o	0.0424 ^r	2.38 ^o
F(48)	2303	96	2305	0.0416 ^r	2.38 ^o	0.0416 ^r	2.38 ^o
F(49)	1200	49	1201	0.0408 ^r	2.33 ^o	0.0408 ^r	2.33 ^o
F(50)	2499	100	2501	0.0400 ^r	2.29 ^o	0.0400 ^r	2.29 ^o
F(51)	1300	51	1301	0.0392 ^r	2.24 ^o	0.0392 ^r	2.24 ^o
F(52)	2703	104	2705	0.0384 ^r	2.20 ^o	0.0384 ^r	2.20 ^o
F(53)	1402	53	1403	0.0377 ^r	2.16 ^o	0.0377 ^r	2.16 ^o
F(54)	2915	108	2917	0.0370 ^r	2.12 ^o	0.0370 ^r	2.12 ^o
F(55)	1512	55	1513	0.0363 ^r	2.08 ^o	0.0363 ^r	2.08 ^o

F(56)	3135	112	3137	0.0357 ^r	2.04 ^o	0.0357 ^r	2.04 ^o
F(57)	1624	57	1625	0.0351 ^r	2.01 ^o	0.0351 ^r	2.01 ^o
F(58)	3363	116	3365	0.0345 ^r	1.97 ^o	0.0345 ^r	1.97 ^o
F(59)	1740	59	1741	0.0338 ^r	1.94 ^o	0.0338 ^r	1.94 ^o
F(60)	3599	120	3601	0.0333 ^r	1.91 ^o	0.0333 ^r	1.91 ^o
F(61)	1860	61	1861	0.0328 ^r	1.88 ^o	0.0328 ^r	1.88 ^o
F(62)	3843	124	3845	0.0322 ^r	1.85 ^o	0.0322 ^r	1.85 ^o
F(63)	1984	63	1985	0.0317 ^r	1.82 ^o	0.0317 ^r	1.82 ^o
F(64)	4095	128	4097	0.0312 ^r	1.79 ^o	0.0312 ^r	1.79 ^o
F(65)	2112	65	2113	0.0307 ^r	1.76 ^o	0.0307 ^r	1.76 ^o
F(66)	4355	132	5357	0.0303 ^r	1.73 ^o	0.0303 ^r	1.73 ^o
F(67)	2244	67	2245	0.0298 ^r	1.71 ^o	0.0298 ^r	1.71 ^o
F(68)	4623	136	4625	0.0294 ^r	1.68 ^o	0.0294 ^r	1.68 ^o
F(69)	2380	69	2381	0.0290 ^r	1.66 ^o	0.0290 ^r	1.66 ^o
F(70)	4899	140	4901	0.0285 ^r	1.63 ^o	0.0285 ^r	1.63 ^o
F(71)	2520	71	2521	0.0281 ^r	1.61 ^o	0.0281 ^r	1.61 ^o
F(72)	5183	144	5185	0.0277 ^r	1.59 ^o	0.0277 ^r	1.59 ^o
F(73)	2664	73	2665	0.0274 ^r	1.57 ^o	0.0274 ^r	1.57 ^o
F(74)	5474	148	5476	0.0270 ^r	1.55 ^o	0.0270 ^r	1.55 ^o
F(75)	2812	75	2813	0.0266 ^r	1.52 ^o	0.0266 ^r	1.52 ^o
F(76)	5775	152	5777	0.0263 ^r	1.50 ^o	0.0263 ^r	1.50 ^o
F(77)	2964	77	2965	0.0259 ^r	1.48 ^o	0.0259 ^r	1.48 ^o
F(78)	6083	156	6085	0.0256 ^r	1.47 ^o	0.0256 ^r	1.47 ^o
F(79)	3120	79	3121	0.0253 ^r	1.45 ^o	0.0253 ^r	1.45 ^o
F(80)	6399	160	6401	0.0250 ^r	1.43 ^o	0.0250 ^r	1.43 ^o
F(81)	3280	81	3281	0.0247 ^r	1.41 ^o	0.0247 ^r	1.41 ^o
F(82)	6723	164	6725	0.0244 ^r	1.39 ^o	0.0244 ^r	1.39 ^o
F(83)	3444	83	3445	0.0241 ^r	1.38 ^o	0.0241 ^r	1.38 ^o
F(84)	7055	168	7057	0.0238 ^r	1.36 ^o	0.0238 ^r	1.36 ^o
F(85)	3612	85	3613	0.0235 ^r	1.35 ^o	0.0235 ^r	1.35 ^o
F(86)	7395	172	7397	0.0232 ^r	1.33 ^o	0.0232 ^r	1.33 ^o
F(87)	3784	87	3785	0.0229 ^r	1.31 ^o	0.0229 ^r	1.31 ^o
F(88)	7743	176	7785	0.0227 ^r	1.30 ^o	0.0227 ^r	1.30 ^o
F(89)	3960	89	3961	0.0224 ^r	1.28 ^o	0.0224 ^r	1.28 ^o
F(90)	8099	180	8101	0.0222 ^r	1.27 ^o	0.0222 ^r	1.27 ^o
F(91)	4140	91	4141	0.0219 ^r	1.26 ^o	0.0219 ^r	1.26 ^o
F(92)	8463	184	8465	0.0217 ^r	1.24 ^o	0.0217 ^r	1.24 ^o
F(93)	4324	93	4325	0.0215 ^r	1.23 ^o	0.0215 ^r	1.23 ^o
F(94)	8835	188	8837	0.0212 ^r	1.22 ^o	0.0212 ^r	1.22 ^o
F(95)	4512	95	4513	0.0210 ^r	1.20 ^o	0.0210 ^r	1.20 ^o
F(96)	9215	192	9217	0.0208 ^r	1.19 ^o	0.0208 ^r	1.19 ^o
F(97)	4704	97	4705	0.0206 ^r	1.18 ^o	0.0206 ^r	1.18 ^o
F(98)	9603	196	9305	0.0204 ^r	1.17 ^o	0.0204 ^r	1.17 ^o
F(99)	4900	99	4901	0.0202 ^r	1.15 ^o	0.0202 ^r	1.15 ^o
F(100)	9999	200	10001	0.0200 ^r	1.1459 ^o	0.0200 ^r	1.1459 ^o
F(101)	5100	101	5101	0.01980 ^r	1.1345 ^o	0.01980 ^r	1.1345 ^o

F(102)	10403	204	10405	0.01960 ^r	1.1234 ^o	0.01960 ^r	1.1234 ^o
F(103)	5304	103	5305	0.01941 ^r	1.1125 ^o	0.01941 ^r	1.1125 ^o
F(104)	10815	208	10817	0.01923 ^r	1.1018 ^o	0.01923 ^r	1.1018 ^o
F(105)	5512	105	5513	0.01904 ^r	1.0913 ^o	0.01904 ^r	1.0913 ^o
F(106)	11235	212	11237	0.01886 ^r	1.0810 ^o	0.01886 ^r	1.0810 ^o
F(107)	5724	107	5725	0.01869 ^r	1.0709 ^o	0.01869 ^r	1.0709 ^o
F(108)	11663	216	11665	0.01851 ^r	1.0610 ^o	0.01851 ^r	1.0610 ^o
F(109)	5940	109	5941	0.01834 ^r	1.0512 ^o	0.01834 ^r	1.0512 ^o
F(110)	12099	220	12101	0.01818 ^r	1.0417 ^o	0.01818 ^r	1.0417 ^o
F(111)	6160	111	6161	0.01801 ^r	1.0323 ^o	0.01801 ^r	1.0323 ^o
F(112)	12543	224	12545	0.01785 ^r	1.0231 ^o	0.01785 ^r	1.0231 ^o
F(113)	6384	113	6385	0.01770 ^r	1.0140 ^o	0.01770 ^r	1.0140 ^o
F(114)	12995	228	12997	0.01754 ^r	1.0051 ^o	0.01754 ^r	1.0051 ^o
F(115)	6612	115	6613	0.01740 ^r	0.9964 ^o	0.01740 ^r	0.9964 ^o
F(116)	13455	232	13457	0.01724 ^r	0.9878 ^o	0.01724 ^r	0.9878 ^o
F(117)	6844	117	6845	0.01710 ^r	0.9794 ^o	0.01710 ^r	0.9794 ^o
F(118)	13923	236	13925	0.01694 ^r	0.9711 ^o	0.01694 ^r	0.9711 ^o
F(119)	7080	119	7081	0.01680 ^r	0.9629 ^o	0.01680 ^r	0.9629 ^o
F(120)	14399	240	14401	0.01666 ^r	0.9549 ^o	0.01666 ^r	0.9549 ^o
F(121)	7320	121	7321	0.01652 ^r	0.9470 ^o	0.01652 ^r	0.9470 ^o

अवलोकन एवं निष्कर्ष (1) सारिणी 7.1 से सारिणी 7-1 के कालम 5, 6, 7, 8 के अवलोकन से स्पष्ट प्रतीत हो रहा है कि— $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p का मान ज्यों-ज्यों ($p \rightarrow \infty$) बढ़ता जाता है त्यों-त्यों $m\angle\theta = \frac{2^r}{p} = \frac{114.55^0}{p}$ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होते-होते वास्तविक (कम्प्यूटर से प्राप्त) मान के सकिन्नत होता है।

सारिणी में $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p के सापेक्ष $m\angle\theta$ का रेडियन इकाई माप में प्राप्त मान निम्नानुसार वास्तविक मान के बराबर होंगे।—

1. दशमलव बाद 3 स्थान के लिए— $p \geq 13$
2. दशमलव बाद 4 स्थान के लिए— $p \geq 24$
3. दशमलव बाद 5 स्थान के लिए— $p \geq 52$

(2) सारिणी 7.2 से सारिणी 7.2 के कालम 5, 6, 7, 8 के अवलोकन से स्पष्ट प्रतीत हो रहा है कि— $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p का मान ज्यों-ज्यों p का मान ($p \rightarrow \infty$) बढ़ता जाता है त्यों-त्यों आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांक से $m\angle\theta = \left(\frac{y}{z}\right)^r = \left(\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)^r = \left(\frac{630}{11} * \frac{y}{z}\right)^o = \left(\frac{630}{11} * \frac{2p}{p^2+1}\right)^o = \left(\frac{1260}{11} * \frac{p}{p^2+1}\right)^o$ के निकटतर होने की ओर अग्रसर होते-होते वास्तविक (कम्प्यूटर से प्राप्त) के सकिन्नत होता है।

सारिणी में $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष के प्राप्त त्रिभुजांक से प्राप्त $m\angle\theta$ का रेडियन इकाई माप में प्राप्त मान निम्नानुसार वास्तविक मान के बराबर होंगे।—

1. दशमलव बाद 3 स्थान के लिए— $p \geq 20$
2. दशमलव बाद 4 स्थान के लिए— $p \geq 35$
3. दशमलव बाद 5 स्थान के लिए— $p \geq 59$

(3) मूलतः [सारिणी 7.1 से प्राप्त $m\angle\theta = \frac{2^r}{p} = \frac{1260}{11 * p}$] $\neq$

$$[\text{सारिणी 7.2 से प्राप्त } m\angle\theta = \left(\frac{y}{z}\right)^r = \left(\frac{2p}{p^2+1}\right)^r = \left(\frac{630}{11} * \frac{y}{z}\right)^o = \left(\frac{1260}{11} * \frac{p}{p^2+1}\right)^o]$$

केवल आदर्श बीजांक $F(p)$ में p के बढ़ते मानों के संदर्भ में- (दशमलव बाद 3 स्थान के लिए- $(p \geq 20)$), (दशमलव बाद 4 स्थान के लिए- $(p \geq 35)$), एवं (दशमलव बाद 5 स्थान के लिए- $(p \geq 59)$),

[सारिणी 7.1 से प्राप्त $m\angle\theta = \frac{2^r}{p} = \frac{1260^\circ}{11*p}$] =

[सारिणी 7.2 से प्राप्त $m\angle\theta = (\frac{y}{z})^r = (\frac{2p}{p^2+1})^r = (\frac{630}{11} * \frac{y}{z})^o = (\frac{1260}{11} * \frac{p}{p^2+1})$] होने की ओर अग्रसर है।

(4) सारिणी 7.1 और 7.2 के संयुक्त अवलोकन से सारिणी 7.1 और 7.2 के संयुक्त अवलोकन से स्पष्ट प्रतीत हो रहा है - कि $m\angle\theta$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p का मान ज्यों-ज्यों p का मान $(p \rightarrow \infty)$ बढ़ता जाता है त्यों-त्यों (सारिणी 7.1 से आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p से प्राप्त कोण माप $(m\angle\theta = \frac{2^r}{p} = \frac{12.60^\circ}{11*p})$ और (सारिणी 7.2 से आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति p के सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांक से प्राप्त कोण माप $m\angle\theta = \theta = \sin\theta = (\frac{2p}{p^2+1})^r = (\frac{12.60^\circ}{11} * \frac{p}{p^2+1})^o$ का मध्यमान (औसत मान) वास्तविक कोण माप $R = \sin^{-1} \frac{2p}{p^2+1}$ के सकिन्लट होते-होते वास्तविक कोण माप R ही प्राप्त होने लगता है।

अर्थात् कोण इकाई माप रेडियन में $m\angle\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{p} + \frac{2p}{p^2+1} \right]^r = \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1} \right]^r$

तथा कोण इकाई माप अंश मान में $m\angle\theta = \frac{630}{11} * \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1} \right]^r$ यथेष्ट होगा।

$m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q]$ से $\frac{p}{q} = u \frac{v}{w}$ मं u के बढ़ते मानों के प्रति

वास्तविक कोण माप $R = \sin^{-1} \frac{2pq}{p^2+q^2}$ के सकिन्लट होते-होते वास्तविक कोण माप R ही देने की ओर होता है।

कोण इकाई माप रेडियन में $m\angle\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{2q}{p} + \frac{2pq}{p^2+q^2} \right]^r = \left[\frac{q}{p} + \frac{pq}{p^2+q^2} \right]^r$

तथा कोण इकाई माप अंश मान में $m\angle\theta = \frac{630}{11} * \left[\frac{q}{p} + \frac{pq}{p^2+q^2} \right]^r$ यथेष्ट होगा।

उदाहरण 1■ $m\angle 45^\circ$ का त्रिभुजांक $1 \quad 1 \quad \sqrt{2}$ से

$m\angle 45^\circ$ का बीजांक $= [(\sqrt{2} + 1) \quad 1] =$ आदर्श बीजांक $F(p) = F(\sqrt{2} + 1)$ होगा।

तब जाँच 1• संगत त्रिभुजांक $1 \quad 1 \quad \sqrt{2}$ के सापेक्ष

कोण मान $m\angle\theta^\circ = \sin\theta = (\frac{y}{z})^r = (\frac{1}{\sqrt{2}})^r = 0.707106^r = \{ \frac{630}{11} * 0.707106 \}^\circ = 40.497889$

प्राप्त होता है। जो वास्तविक कोण माप $m\angle 45^\circ$ से 4.502111° कम है।

जाँच 2• संगत आदर्श बीजांक $F(p) = F(\sqrt{2} + 1)$ के सापेक्ष

कोण मान $m\angle\beta^\circ = \frac{1260}{11*p} = \frac{1260}{11(\sqrt{2}+1)} = \frac{1260}{11}(\sqrt{2} - 1) = \frac{1260}{11} * (0.41421) = 47.446280^\circ$

प्राप्त होता है। जो वास्तविक कोण माप $m\angle 45^\circ$ से 2.446280° अधिक है।

जाँच 3• $m\angle\theta^\circ$ और $m\angle\beta^\circ$ के मध्यमान से $\frac{1}{2}(m\angle\theta^\circ + m\angle\beta^\circ)$

$= \frac{1}{2}(40.497889^\circ + 47.446280^\circ) = 43.872084^\circ$

प्राप्त होता है। जो वास्तविक कोण माप $m\angle 45^\circ$ 1.128916° से कम है। विकटतर होने को सत्यापित करता है।

उदाहरण 2■ $m\angle 15^\circ$ का त्रिभुजांक $(\sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{3} - 1) \quad 2\sqrt{2}$ से

$m\angle 15^\circ$ का बीजांक $= [(2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{3} - 1)]$

$= [(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 4) \quad 2]$

$= [(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) \quad 1]$

= आदर्श बीजांक $F(p) = F(\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2) = F(7.595742)$ होगा।

तब जाँच 1• संगत त्रिभुजांक $[(\sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{3} - 1) \quad 2\sqrt{2}]$ के सापेक्ष

$$\text{कोण मान } m\angle\theta^{\circ} = \sin\theta = \left(\frac{y}{z}\right)^r = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)^r = 0.258819^r = \left\{\frac{630}{11} * 0.258819\right\}^{\circ} = 14.823270^{\circ}$$

प्राप्त होता है। जो वास्तविक कोण माप $m\angle 15^{\circ}$ से 0.176730° कम है।

जाँच 2• संगत आदर्श बीजांक $F(p) = F(7.595742)$ के सापेक्ष

$$\text{कोण मान } m\angle\beta^{\circ} = \frac{1260}{11 * (7.595742)} = 15.080219^{\circ} \text{ जो वास्तविक कोण माप } m\angle 15^{\circ} \text{ से } 0.080219^{\circ} \text{ अधिक है।}$$

जाँच 3• $m\angle\theta^{\circ}$ और $m\angle\beta^{\circ}$ के मध्यमान से— $\frac{1}{2}(m\angle\theta^{\circ} + m\angle\beta^{\circ}) = \frac{1}{2}(14.823270^{\circ} + 15.080219^{\circ})$

=14.951745⁰ प्राप्त होता है। जो वास्तविक कोण माप $m\angle 15^{\circ}$ से 0.048255° कम है। सन्निकट होने को सत्यापित करता है।

उदाहरण 3■ $m\angle\theta$ का बीजांक $[7 \ 3]$ के प्रति $m\angle\theta$ का आकलन कोण माप इकाई रेडियन एवं अंश मान में कीजिए। तथा कोण के वास्तविक मान $m\angle\theta = 0.8097839^r = 46.641238^{\circ}$ से तुलना कीजिए।

हल $\therefore$ कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q]$ के प्रति $m\angle\theta$ का आकलन मान $= \left[\frac{q}{p} + \frac{pp}{p^2+q^2}\right]^r$

$$\therefore \text{कोण माप इकाई रेडियन में } m\angle\theta \text{ का बीजांक } [7 \ 3] \text{ के प्रति } m\angle\theta \text{ का आकलन मान} = \left[\frac{3}{7} + \frac{7*3}{7^2+3^2}\right]^r = \left[\frac{3}{7} + \frac{21}{58}\right]^r$$

$$= \left[\frac{321}{406}\right]^r = 0.7906403^r \text{ होगा। जो कि वास्तविक मान } 0.8097839^r \text{ से } 0.0191436^r \text{ कम है।}$$

$$\text{अंश माप में } 0.7906403^r = \frac{630}{11} (0.7906403)^{\circ} = 45.282126^{\circ} \text{ होगा। जो कि वास्तविक मान } 46.641238^{\circ} \text{ से } 1.359112^{\circ} \text{ कम है।}$$

उदाहरण 4■ $m\angle\theta$ का बीजांक $[10 \ 3]$ के प्रति $m\angle\theta$ का आकलन कोण माप इकाई रेडियन एवं अंश मान में कीजिए। तथा कोण के वास्तविक मान $m\angle\theta = 0.5829135^r = 33.398029^{\circ}$ से तुलना कीजिए।

हल $\therefore$ कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q]$ के प्रति $m\angle\theta$ का आकलन मान $= \left[\frac{q}{p} + \frac{pp}{p^2+q^2}\right]^r$

$$\therefore \text{कोण माप इकाई रेडियन में } m\angle\theta \text{ का बीजांक } [10 \ 3] \text{ के प्रति } m\angle\theta \text{ का आकलन मान} = \left[\frac{3}{10} + \frac{10*3}{10^2+3^2}\right]^r = \left[\frac{3}{10} + \frac{21}{109}\right]^r$$

$$= \left[\frac{627}{1090}\right]^r = 0.5752293^r \text{ होगा। जो कि वास्तविक मान } 0.5829135^r \text{ से } 0.0076842^r \text{ कम है।}$$

$$\text{अंश माप में } 0.5752293^r = \frac{630}{11} (0.5752293)^{\circ} = 32.944951^{\circ} \text{ होगा। जो कि वास्तविक मान } 33.398029^{\circ} \text{ से } 0.453078^{\circ} \text{ कम है।}$$

प्रमेय 2 कोण माप इकाई रेडियन में लिये जाने पर $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(P)$ के प्रति P का मान ज्यों-ज्यों $(p \rightarrow \infty)$ बढ़ता जाता है त्यों-त्यों $\tan A * P$ का मान 2^r के निकटतर होने की ओर अग्रसर होता है।

उपपत्ति $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(P)$ के प्रति $m\angle A^r$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(P^2 - 1) \ 2P \ (P^2 + 1)]$ से

$$\cot A = \frac{x}{y} = \frac{P^2-1}{2P} = \frac{P^2}{2P} - \frac{1}{2P} = \frac{P}{2} - 0 \quad \{ (p \rightarrow \infty) \text{ के प्रति } \frac{1}{2P} = 0 \text{ होगा।} \}$$

$$\Rightarrow \cot A = \frac{P}{2} \Rightarrow \frac{1}{\tan A} = \frac{P}{2} \therefore \Rightarrow \tan A * P = 2 \text{ सिद्ध।}$$

इस प्रकार प्रमेय 1 और प्रमेय 2 का संयुक्त प्रमेय कोण माप इकाई रेडियन में लिये जाने पर $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(P)$ के प्रति P का मान ज्यों-ज्यों $(p \rightarrow \infty)$ बढ़ता जाता है त्यों-त्यों $A * P = \tan A * P = 2$ होने की ओर अग्रसर होता है।

अर्थात् $m\angle A = \tan A = \frac{2}{P}$ रेडियन $= \frac{1260}{11P}$ अंश में होने की ओर अग्रसर होता है।

अनुप्रयोग अध्याय 11 अनुच्छेद 11-8 $\theta = \tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{15}x^{15} + \dots - \dots + \dots \infty$ के द्वारा प्राप्त $m\angle\theta$ का आकलन की जाँच में किया गया है।

-----07-----

अध्याय 8

m∠θ के सापेक्ष m∠θ का बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन

8-1 m∠θ के सापेक्ष m∠θ का बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन m∠θ के सापेक्ष m∠θ का बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन की व्यापकता में-

[1] आदर्श बीजांक के सापेक्ष कोण माप का आकलन प्रमेय 7-2 का उपप्रमेय

[2] आदर्श बीजांक के प्रति प्राप्त सारिणी 7-1 एवं 7-2 का अनुप्रयोग करने का नियम प्रतिपादित है। प्रस्तुत है।

[1] आदर्श बीजांक के सापेक्ष कोण माप का आकलन प्रमेय 7-2 का उपप्रमेय का अनुप्रयोग नियम

m∠θ के प्रति बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन

(1) रेडियन कोण इकाई माप में $m\angle\theta = A^r$ हो

प्रमेय 1 से सिद्ध कर चुके हैं कि - रेडियन कोण इकाई माप में $m\angle\theta = A^r \rightarrow 0$ तथा A^r का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति $p \cdot A^r = 2^r \therefore m\angle\theta = A^r$ का आदर्श बीजांक $F(p) = \frac{2}{A} =$ बीजांक आकलन मान $[2 \ A]$ होगा। जिसके सापेक्ष $m\angle\theta = A^r$ का त्रिभुजांक आकलन मान $= [(2^2 - A^2) \quad 2 \cdot 2 \cdot A \quad (2^2 + A^2)]$
 $= [(4 - A^2) \quad 4A \quad (4 + A^2)]$

उदाहरण ■ $m\angle\theta = A^r = 1$ रेडियन का आदर्श बीजांक $F(p) = \frac{2}{1} = 2 =$ बीजांक आकलन मान $[2 \ 1]$ होगा। जिसके सापेक्ष $m\angle\theta = 1$ रेडियन का त्रिभुजांक आकलन मान $= [(2^2 - 1^2) \quad 2 \cdot 2 \cdot 1 \quad (2^2 + 1^2)] = [3 \ 4 \ 5]$ होगा।

(2) अंश इकाई माप में $m\angle\theta = A^\circ$ हो

$$2\pi \text{ रेडियन} = 360^\circ \Rightarrow 2 \cdot \frac{22}{7} \text{ रेडियन} = 360^\circ \Rightarrow \frac{11}{7} \text{ रेडियन} = 90^\circ$$

$$\therefore 1^\circ = \frac{11}{630} \text{ रेडियन} \Rightarrow m\angle\theta = \emptyset^\circ = \frac{11 \cdot \emptyset}{630} \text{ रेडियन होगा।}$$

प्रमेय 1 से सिद्ध कर चुके हैं कि - रेडियन कोण इकाई माप में $m\angle\theta = A^r \rightarrow 0$ तथा A^r का आदर्श बीजांक $F(p)$ के प्रति $p \cdot A^r = 2 \therefore m\angle\theta = \emptyset^\circ = \frac{11 \cdot \emptyset}{630}$ रेडियन का आदर्श बीजांक $F(p) = \frac{2}{\frac{11 \cdot \emptyset}{630}} = \frac{1260}{11 \cdot \emptyset}$ बीजांक आकलन मान

$[1260 \ 11 \cdot \emptyset]$ होगा। जिसके सापेक्ष $m\angle\theta = \emptyset^\circ = \frac{11 \cdot \emptyset}{630}$ रेडियन का त्रिभुजांक आकलन मान $=$
 $\{[1260^2 - (11 \cdot \emptyset)^2] \quad \{2 \cdot 1260 \cdot 11 \cdot \emptyset\} \quad [1260^2 + (11 \cdot \emptyset)^2]\}$ होगा।

उदाहरण ■ अंश इकाई माप में $m\angle\theta = 10^\circ$ का बीजांक $= [1260 \quad 11 \cdot 10] = [1260 \ 110] = [126 \ 11]$

अतः $m\angle\theta$ के बीजांक के सापेक्ष $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक ज्ञात करने के नियम से

$m\angle\theta = 10^\circ$ के बीजांक $= [126 \ 11]$ के सापेक्ष $m\angle 10^\circ$ का त्रिभुजांक आकलन

$$[(126^2 - 11^2) \quad \{2 \cdot 126 \cdot 11\} \quad (126^2 + 11^2)] = [15755 \quad 2772 \quad 15997], \text{ होगा।}$$

सारिणी 8.1

**$m\angle A^0 = m\angle 1^0$ से $m\angle 15^0$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(p)$ एवं
आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष त्रिभुजांक आकलन**

$m\angle\theta$ $= \emptyset^\circ$	$\emptyset^\circ =$ $\frac{11 \cdot \emptyset}{630}$ रेडियन	आदर्श बीजांक आकलन $F(\frac{a}{b})$ $= \frac{1260}{11 \cdot \emptyset}$	आदर्श बीजांक हल मान $\frac{a}{b}$ के सापेक्ष दक्ष त्रिभुजांक का आकलन		
			X $[a^2 - b^2]$	Y $\{2 \cdot a \cdot b\}$	Z $[a^2 + b^2]$
1	2	3	4	5	6

1°	0.017463	$\frac{1260}{11*1} = \frac{1260}{11}$	$[1260^2 - 11^2]$ 1587479	$2*1260*11$ 27720	$[1260^2 + 11^2]$ 1587721
2°	0.034920	$\frac{1260}{11*2} = \frac{630}{11}$	$[630^2 - 11^2]$ 396779	$2*630*11$ 13860	$[630^2 + 11^2]$ 397021
3°	0.052380	$\frac{1260}{11*3} = \frac{420}{11}$	$[420^2 - 11^2]$ 176279	$2*420*11$ 9240	$[420^2 + 11^2]$ 176521
4°	0.069841	$\frac{1260}{11*4} = \frac{315}{11}$	$[315^2 - 11^2]$ 99104 49552	$2*315*11$ 6930 3465	$[315^2 + 11^2]$ 99346 49673
5°	0.087301	$\frac{1260}{11*5} = \frac{252}{11}$	$[252^2 - 11^2]$ 63383	$2*252*11$ 5544	$[252^2 + 11^2]$ 63625
6°	0.104762	$\frac{1260}{11*6} = \frac{210}{11}$	$[210^2 - 11^2]$ 43979	$2*210*11$ 4620	$[210^2 + 11^2]$ 44221
7°	0.122222	$\frac{1260}{11*7} = \frac{180}{11}$	$[180^2 - 11^2]$ 32279	$2*180*11$ 3960	$[180^2 + 11^2]$ 32521
8°	0.139682	$\frac{1260}{11*8} = \frac{315}{22}$	$[315^2 - 22^2]$ 98741	$2*315*22$ 13860	$[315^2 + 22^2]$ 99709
9°	0.157142	$\frac{1260}{11*9} = \frac{140}{11}$	$[140^2 - 11^2]$ 19479	$2*140*11$ 3080	$[140^2 + 11^2]$ 19721
10°	0.174603	$\frac{1260}{11*10} = \frac{126}{11}$	$[126^2 - 11^2]$ 15755	$2*126*11$ 2772	$[126^2 + 11^2]$ 15997
11°	0.192063	$\frac{1260}{11*11} = \frac{1260}{121}$	$[1260^2 - 121^2]$ 1572959	$2*1260*121$ 30692	$[1260^2 + 121^2]$ 1602241
12°	0.209523	$\frac{1260}{11*12} = \frac{105}{11}$	$[105^2 - 11^2]$ 10904 5452	$2*105*11$ 2310 1155	$[105^2 + 11^2]$ 11146 5573
13°	0.226984	$\frac{1260}{11*13} = \frac{1260}{143}$	$[1260^2 - 143^2]$ 1567151	$2*1260*143$ 360360	$[1260^2 + 143^2]$ 1608049
14°	0.244444	$\frac{1260}{11*14} = \frac{90}{11}$	$[90^2 - 11^2]$ 7979	$2*90*11$ 1980	$[90^2 + 11^2]$ 8221
15°	0.261904	$\frac{1260}{11*15} = \frac{84}{11}$	$[84^2 - 11^2]$ 6935	$2*84*11$ 1848	$[84^2 + 11^2]$ 7177

सारिणी 8.2

$m\angle\theta = \emptyset^\circ$ के लिए 1° से 15° के प्रति प्राप्त रेडियन इकाई माप $m\angle\theta^r$ एवं इनके प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक $F(p)$ तथा आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष त्रिभुजांक एवं आदर्श बीजांक $F(p)$ एवं त्रिभुजांक के सापेक्ष रेडियन इकाई माप में प्राप्त आंकलन माप का $m\angle\theta^r$ के सन्निकट होने का सत्यापन

$m\angle\theta = \emptyset^\circ$	$\emptyset^\circ = \frac{11 \times \emptyset}{630}$ रेडियन	आदर्श बीजांक	त्रिभुजांक(x y z) से		रेडियन इकाई माप में कोण माप आंकलन मान		
			y	z	बीजांक $F(\frac{a}{b})$ के सापेक्ष $m\angle A^r = \frac{2^r}{p} = (\frac{2b}{a})^r$	त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle B^r = (\frac{2ab}{a^2+b^2})^r = (\frac{y}{z})^r$	$m\angle A^r$ और $m\angle B^r$ का मध्यमान $= m\angle C^r$
1	2	3	4	5	6	7	8
1°	0.017463	$\frac{1260}{11}$	27720	1587721	$(\frac{2 \times 11}{1260})^r = 0.017463$	$\frac{27720}{1587721}^r = 0.017459$	0.017461
2°	0.034920	$\frac{630}{11}$	13860	397021	$(\frac{2 \times 11}{630})^r = 0.034920$	$(\frac{13860}{397021})^r = 0.034910$	0.034915
3°	0.052380	$\frac{420}{11}$	9240	176521	$(\frac{2 \times 11}{420})^r = 0.052380$	$(\frac{9240}{176521})^r = 0.052345$	0.052362
4°	0.069841	$\frac{315}{11}$	6930	99346	$(\frac{2 \times 11}{315})^r = 0.069841$	$(\frac{6930}{99346})^r = 0.069756$	0.069788
5°	0.087301	$\frac{252}{11}$	5544	63625	$(\frac{2 \times 11}{252})^r = 0.087301$	$(\frac{5544}{63625})^r = 0.087135$	0.087218
6°	0.104762	$\frac{210}{11}$	4620	44221	$(\frac{2 \times 11}{210})^r = 0.104762$	$(\frac{4620}{44221})^r = 0.104475$	0.104762
7°	0.122222	$\frac{180}{11}$	3960	32521	$(\frac{2 \times 11}{180})^r = 0.122222$	$(\frac{3960}{32521})^r = 0.121767$	0.121894
8°	0.139682	$\frac{315}{22}$	13860	99709	$(\frac{2 \times 22}{3 \times 15})^r = 0.139682$	$(\frac{13890}{99709})^r = 0.139004$	0.139343
9°	0.157142	$\frac{140}{11}$	3080	19721	$(\frac{2 \times 11}{140})^r = 0.157142$	$(\frac{3080}{19721})^r = 0.156178$	0.156660
10°	0.174603	$\frac{126}{11}$	2772	15997	$(\frac{2 \times 11}{126})^r = 0.174603$	$(\frac{2772}{15997})^r = 0.173282$	0.173942
11°	0.192063	$\frac{1260}{121}$	304920	1602241	$(\frac{2 \times 121}{1260})^r = 0.192063$	$(\frac{30692}{1602241})^r = 0.192308$	0.192191
12°	0.209523	$\frac{105}{11}$	1155	5573	$(\frac{2 \times 11}{105})^r = 0.209523$	$(\frac{1155}{5573})^r = 0.207249$	0.208386
13°	0.226984	$\frac{1260}{143}$	360360	1608049	$(\frac{2 \times 143}{1260})^r = 0.226984$	$(\frac{360360}{1608049})^r = 0.224097$	0.225531
14°	0.244444	$\frac{90}{11}$	1980	8281	$(\frac{2 \times 11}{90})^r = 0.244444$	$(\frac{980}{8281})^r = 0.239101$	0.241772
15°	0.261904	$\frac{84}{11}$	1848	7177	$(\frac{2 \times 11}{84})^r = 0.261904$	$(\frac{1848}{7177})^r = 0.257489$	0.259697

सारिणी 8.3

$m\angle A^0 = m\angle 1^0$ से $m\angle 15^0$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(p)$ एवं आदर्श बीजांक $F(p)$ के सापेक्ष त्रिभुजांक तथा आदर्श बीजांक $F(p)$ एवं त्रिभुजांक के सापेक्ष अंश माप में कोण माप आंकलन मान का $m\angle A^0$ के सन्निकट होने का सत्यापन

$m\angle \theta = \theta^0$	आदर्श बीजांक आकलन $F(P) = F(\frac{a}{b})$	त्रिभुजांक(x y z) से		अंश माप में कोण माप आंकलन मान		
		y	z	बीजांक $F(\frac{a}{b})$ के सापेक्ष $m\angle A^0 = \frac{1260}{11} * \frac{b^0}{a}$	त्रिभुजांक के सापेक्ष $m\angle B^0 = \frac{630}{11} * \frac{y^0}{z}$	$m\angle A^0$ और $m\angle B^0$ का मध्यमान = $m\angle C^0$
	3	4	5	6	8	9
1^0	$\frac{1260}{11}$	27720	1587721	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{1260} = 1.000^0$	$\frac{630}{11} * \frac{27720^0}{1587721} = 0.999923$	0.999961
2^0	$\frac{630}{11}$	13860	397021	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{630} = 2.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{13860}{397021})^r = 1.999390$	1.999695
3^0	$\frac{420}{11}$	9240	176521	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{420} = 3.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{9240}{176521})^r = 2.997943$	2.998971
4^0	$\frac{315}{11}$	6930	99346	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{315} = 4.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{6930}{99346})^r = 3.999153$	3.999576
5^0	$\frac{252}{11}$	5544	63625	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{252} = 5.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{5544}{63625})^r = 4.990491$	4.995240
6^0	$\frac{210}{11}$	4620	44221	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{210} = 6.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{4620}{99346})^r = 5.983582$	5.991791
7^0	$\frac{180}{11}$	3960	32521	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{180} = 7.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{3960}{32521})^r = 6.973955$	6.986977
8^0	$\frac{315}{22}$	13860	99709	$\frac{1260}{11} * \frac{22^0}{315} = 8.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{13890}{99709})^r = 7.961167$	7.960588
9^0	$\frac{140}{11}$	3080	19721	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{140} = 9.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{3080}{19721})^r = 8.944779$	8.972389
10^0	$\frac{126}{11}$	2772	15997	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{126} = 10.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{2772}{1599})^r = 9.924360$	9.962180
11^0	$\frac{1260}{121}$	304920	1602241	$\frac{1260}{11} * \frac{121^0}{1260} = 11.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{30692}{1602241})^r = 10.899183$	10.949591
12^0	$\frac{105}{11}$	1155	5573	$\frac{1260}{11} * \frac{11^0}{105} = 12.000^0$	$\frac{630}{11} * (\frac{1155}{5573})^r = 11.866972$	11.933486

13°	$\frac{1260}{143}$	360360	1608049	$\frac{1260}{11} * \frac{143}{1260}^o$ =13.000°	$\frac{630}{11} * \left(\frac{360360}{1608049}\right)^r$ = 12.834683	12.967391
14°	$\frac{90}{11}$	1980	8281	$\frac{1260}{11} * \frac{11}{90}^o$ =14.000°	$\frac{630}{11} * \left(\frac{980}{8281}\right)^r$ = 13.693998	13.846999
15°	$\frac{84}{11}$	1848	7177	$\frac{1260}{11} * \frac{11}{84}^o$ =15.000°	$\frac{630}{11} * \left(\frac{1848}{7177}\right)^r$ = 14.747108	14.873554

ध्यानाकर्षण अध्याय 7 प्रमेय 1 के तारतम्य में प्राप्त सारिणी 7.1 एवं 7.2, के अवलोकन और निष्कर्ष के परिपालन में $m\angle\theta$ के बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन करने के तारतम्य में प्राप्त सारिणी 8.1, 8.2 एवं 8.3 स्पष्टतः विदित कराता है कि $m\angle\theta$ के बीजांक एवं त्रिभुजांक आकलन के प्रति प्रमेय 1 का अनुप्रयोग के कोण इकाई माप अंश में $m\angle\theta \leq 1^0$ लिया जाकर $m\angle\theta$ के इस मान से बढ़ते मानों के प्रति दो कोण मापों के बीजांक एवं त्रिभुजांक का योग नियम का अनुप्रयोग करना यथेष्ट होगा।

जैसे 0.5^0 का बीजांक ज्ञात कर 1^0 का बीजांक ज्ञात करना और इस प्राप्त बीजांक के सापेक्ष प्राप्त कोण माप को 1^0 के सन्निकट होना दर्शित करने –

$0.5^0 = \frac{1^0}{2} = \left\{\frac{11}{630} * \frac{1}{2}\right\}^r = \frac{11}{1260}^r$ से 0.5^0 का आदर्श बीजांक $F(p) = \frac{2*1260}{11} = \frac{2520}{11} =$ बीजांक [2520 11]
 $\therefore m\angle A$ के सापेक्ष $m\angle 2A$ का बीजांक नियम से- $1^0 = 2(0.5^0)$ का बीजांक $= [(2520^2 - 11^2) 2*2520*11]$
 $= [6350279 \ 55440] = [1259.97599 \ 11] = [1260 \ 11] = F\left(\frac{1260}{11}\right)$ जो कि सारिणी 8-2 दर्शित मान ही है।
 इस प्राप्त बीजांक [6350279 55440] के सापेक्ष कोण माप को 1^0 के सन्निकट होना दर्शित करने –

हल 1• बीजांक [p q] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} * \frac{2q}{p}$ से

बीजांक [6250279 55440] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} * \frac{2*55440}{6250279} = 1.000019^0$

हल 2• बीजांक [p q] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} \left[\frac{2pq}{p^2+q^2}\right]^o$ से

बीजांक [6250279 55440] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} \left[\frac{2*6350279*55440}{6350279^2+55440^2}\right]^o$
 $= 0.999942^0$

हल 3• बीजांक [p q] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} \left[\frac{q}{p} + \frac{pq}{p^2+q^2}\right]^o$ से

बीजांक [6250279 55440] के सापेक्ष अंश इकाई माप में कोण माप $m\angle\theta^0 = \frac{630}{11} \left[\frac{55440}{6350279} + \frac{6350279}{6350279^2+55440^2}\right]^o$
 $= \frac{630}{11} [0.500009 + 0.499971]^o = \frac{630}{11} [0.0087290.008730]^o = \frac{630}{11} [0.017459]^o = 0.999924$
 ,तीनों हल मान 1^0 के सन्निकट होना स्पष्टतः दर्शित करता है।

[2] आदर्श बीजांक के प्रति प्राप्त सारिणी 7-1 एवं 7-2 का अनुप्रयोग

(1) **रेडियन इकाई माप में $m\angle\theta = A^r$ हो** $m\angle\theta$ के प्रति बीजांक [p q] के आकलन की यह क्रिया अध्याय 7 में वर्णित आदर्श बीजांक [p 1] एवं त्रिभुजांक [x y z] के प्रति कोण माप आकलन की विपरीत क्रिया है। जिसके अनुसार–

प्रक्रम 1 $m\angle\theta$ के प्रति बीजांक [p q] के आकलन करने सारिणी 7.1 अथवा 7.2 के वास्तविक मान R स्तम्भ के रेडियन अनुभाग में $m\angle\theta$ के निकटतर मान $m\angle\theta_n$ प्राप्त कर इसके प्रति आदर्श बीजांक $F(p)$ स्तम्भ से आदर्श बीजांक $F(n) =$ बीजांक [n 1] सुनिश्चित कीजिए।

प्रक्रम 2 $m\angle\theta_n$ और $m\angle\theta$ का अन्तर मान $m\angle\theta_n - m\angle\theta = \pm m\angle\beta$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 $m\angle\beta$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(m) = \frac{2}{\beta} =$ बीजांक $[2 \quad \beta]$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 अतः 1• $m\angle\theta = (m\angle\theta_n + m\angle\beta)$ का बीजांक आकलन मान=

$$(m\angle\theta_n \text{ का बीजांक}) + (m\angle\beta \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक } [n \quad 1] + \text{बीजांक } [2 \quad \beta] \\ = [(2n-\beta) \quad (2+n\beta)] \text{ होगा।}$$

तब $m\angle\theta$ के प्रति त्रिभुजांक $m\angle\theta$ के प्रति प्राप्त बीजांक $[(2n-\beta) \quad (2+n\beta)]$ के हल मान के सापेक्ष प्राप्त कीजिए।

2• $m\angle\theta = (m\angle\theta_n - m\angle\beta)$ का बीजांक आकलन मान=

$$(m\angle\theta_n \text{ का बीजांक}) - (m\angle\beta \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक } [n \quad 1] + \text{बीजांक } [2 \quad \beta] \\ = [(2n+\beta) \quad (2-n\beta)] \text{ होगा।}$$

तब $m\angle\theta$ के प्रति त्रिभुजांक $m\angle\theta$ के प्रति प्राप्त बीजांक $[(2n+\beta) \quad (2-n\beta)]$ के हल मान के सापेक्ष प्राप्त कीजिए।

(2) अंश इकाई माप में $m\angle\theta = A^\circ$ हो- $m\angle\theta = A^\circ =$ रेडियन इकाई माप में $\frac{11 \cdot A^\circ}{630}$ प्राप्त कर रेडियन इकाई माप के प्रति की गई गणना प्रक्रमों का अनुसरण करें।

अथवा

प्रक्रम 1 $m\angle\theta$ के प्रति बीजांक $[p \quad q]$ के आकलन करने सारिणी 7.1 अथवा 7.2 के वास्तविक मान R स्तम्भ के अंशमान अनुभाग में $m\angle\theta$ के निकटतम मान $m\angle\theta_n$ प्राप्त कर इसके प्रति आदर्श बीजांक $F(p)$ स्तम्भ से आदर्श बीजांक $F(n) =$ बीजांक $[n \quad 1]$ सुनिश्चित कीजिए।

प्रक्रम 2 $m\angle\theta_n$ और $m\angle\theta$ का अन्तर मान $(m\angle\theta_n - m\angle\theta) = \pm m\angle\beta$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 3 $m\angle\beta$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(m) = \frac{630 \cdot 2}{11 \cdot \beta} =$ बीजांक $[1260 \quad 11\beta]$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 अतः 1• $m\angle\theta = (m\angle\theta_n + m\angle\beta)$ का बीजांक आकलन मान=

$$(m\angle\theta_n \text{ का बीजांक}) + (m\angle\beta \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक } [n \quad 1] + \text{बीजांक } [1260 \quad 11\beta] \\ = [(1260n-11\beta) \quad (1260+11n\beta)] \text{ होगा।}$$

तब $m\angle\theta$ के प्रति त्रिभुजांक $m\angle\theta$ के प्रति प्राप्त बीजांक $[(1260n-11\beta) \quad (1260+11n\beta)]$ के हल मान के सापेक्ष प्राप्त कीजिए।

2• $m\angle\theta = (m\angle\theta_n - m\angle\beta)$ का बीजांक आकलन मान=

$$(m\angle\theta_n \text{ का बीजांक}) - (m\angle\beta \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक } [n \quad 1] - \text{बीजांक } [2 \quad \beta] \\ = [(1260n+11\beta) \quad (1260-11n\beta)] \text{ होगा।}$$

तब $m\angle\theta$ के प्रति त्रिभुजांक $m\angle\theta$ के प्रति प्राप्त बीजांक $[(1260n+11\beta) \quad (1260-11n\beta)]$ के हल मान के सापेक्ष प्राप्त कीजिए।

उदाहरण 1■ $m\angle\theta = 1^\circ$ का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल 1• प्रक्रम 1 सारिणी 7.1 अथवा 7.2 के वास्तविक मान R स्तम्भ में $m\angle\theta = 1^\circ$ के निकटतम कोण माप $m\angle\theta_n = 0.9273^\circ$ है। जिसका आदर्श बीजांक $F(p) = F(2) =$ बीजांक $[2 \quad 1]$ है।

प्रक्रम 2 $m\angle\theta_n$ और $m\angle\theta$ का अन्तर मान $m\angle\beta = m\angle\theta_n - m\angle\theta = 1^\circ - 0.9273^\circ = 0.0727^\circ$

प्रक्रम 3 $m\angle\beta$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(m) = \frac{2}{\beta} = \frac{2}{0.0727} =$ बीजांक $[20000 \quad 727]$ प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 अतः $m\angle\theta = 1^\circ = (0.9273^\circ + 0.0727^\circ)$ का बीजांक आकलन मान=

$$(0.9273^\circ \text{ का बीजांक}) + (0.0727^\circ \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक } [2 \quad 1] + \text{बीजांक } [20000 \quad 727] \\ = [(40000-727) \quad (20000+1454)] \\ = [39273 \quad 21454] \text{ होगा।} \\ = \text{आदर्श बीजांक } \frac{39279}{21454} = 1.8305$$

∴ $m\angle\theta = 1^r$ का त्रिभुजांक [x y z]

1• बीजांक [39273 21454] के सापेक्ष त्रिभुजांक

$$= [(39273^2 - 21454^2) \quad (2 \cdot 39273 \cdot 21454) \quad (39273^2 + 21454^2)]$$

$$= [(1542368529 - 460274116) \quad (1685125884) \quad (1542368529 + 460274116)]$$

$$= [1082094413 \quad 1685125884 \quad 2002642645]$$

2• आदर्श बीजांक [1.8305] के सापेक्ष $[1.8305^2 - 1] \quad (2 \cdot 1.8305) \quad (1.8305^2 + 1)]$

$$= [2.3507 \quad 3.6610 \quad 4.3507]$$

$$= [23507 \quad 36610 \quad 43507] \text{ होगा।}$$

मानक जाँच 1• आकलन की व्यापक समिका $m\angle\theta$ के बीजांक [p q] के सापेक्ष $m\angle\theta$ का आकलन $= [\frac{q}{p} + \frac{p \cdot q}{p^2 + q^2}]^r$ से

$$m\angle\theta \text{ के बीजांक [39273 21454] के सापेक्ष } m\angle\theta \text{ का आकलन} = [\frac{21454}{39273} + \frac{39273 \cdot 21454}{31729^2 + 21454^2}]^r$$

$$= [\frac{21454}{39273} + \frac{39273 \cdot 21454}{2002642645}]^r$$

$$= [0.546278 + 0.420725]^r = 0.967003^r \text{ होगा } 1^r \text{ के निकतर मान्य है।}$$

मानक जाँच 2• आकलन की व्यापक समिका $m\angle\theta$ के आदर्श बीजांक F(P) के सापेक्ष $m\angle\theta$ का आकलन $= [\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}]^r$ से

$$m\angle\theta \text{ के आदर्श बीजांक } F(1.8305) \text{ के सापेक्ष } m\angle\theta \text{ का आकलन} = [\frac{1}{1.8305} + \frac{1.8305}{4.3507}]^r$$

$$= [0.546298 + 0.420736]^r = 0.967034^r \text{ होगा } 1^r \text{ के निकतर मान्य है।}$$

टीप प्रक्रम 4 में आदर्श बीजांक प्राप्त करना और मानक जाँच में आकलन की व्यापक समिका $m\angle\theta$ के आदर्श बीजांक F(P) के सापेक्ष $m\angle\theta$ का आकलन $= [\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}]^r$ का अनुप्रयोग किया जाना यथेष्ट होगा।

उदाहरण 2■ $m\angle\theta = 0.439^r$ का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल• प्रक्रम 1 सारिणी 7.1 अथवा 7.2 के वास्तविक मान R स्तम्भ में $m\angle\theta = 0.439^r$ के निकटतर कोण माप $m\angle\theta_n = 0.3948^r$ है। जिसका आदर्श बीजांक F(p) = F(5) = बीजांक [5 1] है।

प्रक्रम 2 $m\angle\theta_n$ और $m\angle\theta$ का अन्तर मान $m\angle\beta = m\angle\theta - m\angle\theta_n = 0.439^r - 0.3948^r = 0.0442^r$

प्रक्रम 3 $m\angle\beta$ के प्रति आदर्श बीजांक $F(m) = \frac{2}{\beta} = \frac{2}{0.0442} =$

$$\text{बीजांक [20000 442] = [10000 221] प्राप्त कीजिए।}$$

प्रक्रम 4 अतः $m\angle\theta = 0.439^r = (0.3948^r + 0.0442^r)$ का बीजांक आकलन मान

$$= (0.3948^r \text{ का बीजांक}) + (0.0442^r \text{ का बीजांक}) = \text{बीजांक [5 1]} + \text{बीजांक [10000 221]}$$

$$= [(50000 - 221) \quad (1105 + 10000)]$$

$$= [49779 \quad 11105] \text{ होगा।}$$

$$= \text{आदर्श बीजांक } \frac{49779}{11105} = 4.4825$$

∴ $m\angle\theta = 0.439^r$ का त्रिभुजांक [x y z]

$$\text{आदर्श बीजांक [4.4825] के सापेक्ष त्रिभुजांक} = [4.4825^2 - 1] \quad (2 \cdot 4.4825) \quad (4.4825^2 + 1)]$$

$$= [19.0928 \quad 8.965 \quad 21.0928] = [190928 \quad 8965 \quad 210928] \text{ होगा।}$$

मानक जाँच आकलन की व्यापक समिका $m\angle\theta$ के आदर्श बीजांक F(P) के सापेक्ष $m\angle\theta$ का आकलन $= [\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}]^r$ से

$$m\angle\theta \text{ के आदर्श बीजांक } F(4.4825) \text{ के सापेक्ष } m\angle\theta \text{ का आकलन} = [\frac{1}{4.4825} + \frac{4.4825}{21.0928}]^r$$

$$= [0.22309 + 0.21251]^r = 0.4356^r \text{ होगा } 0.439^r \text{ के निकतर मान्य है।}$$

उदाहरण 3■ $m\angle\theta = 58.58^\circ$ का बीजांक ज्ञात कीजिए।

हल • प्रक्रम 1 $m\angle\theta$ के प्रति बीजांक [p q] के आकलन करने सारिणी 7.1 अथवा 7.2 के वास्तविक मान R स्तम्भ के अंशमान अनुभाग में $m\angle\theta = 58.58^\circ$ के निकटतर मान $m\angle\theta_n = 53.13^\circ$ है। जिसका आदर्श बीजांक $F(p) = F(2) =$ बीजांक [2 1] है।

प्रक्रम 2 $m\angle\theta_n$ और $m\angle\theta$ का अन्तर मान $m\angle\beta = m\angle\theta - m\angle\theta_n = 58.58^\circ - 53.13^\circ = 5.45^\circ$

प्रक्रम 3 $m\angle\beta = 5.45^\circ$ का आदर्श बीजांक $F(m) = \frac{630*2}{11*5.45} = 21.0175 = 21 =$ बीजांक [21 1]

प्रक्रम 4 अतः $m\angle\theta = 58.58^\circ = (53.13^\circ + 5.45^\circ)$ का बीजांक आकलन मान =
= बीजांक [2 1] + बीजांक [21 1] = [41 23] होगा।

$\therefore m\angle\theta = 58.58^\circ$ का त्रिभुजांक [x y z]

बीजांक [41 23] के सापेक्ष $[(41^2 - 23^2) \quad (2 * 41 * 23) \quad (41^2 + 23^2)]$
= [1152 1866 2210] = [576 933 1105] होगा।

मानक जाँच आकलन की व्यापक समिका $m\angle\theta$ के बीजांक [P q] के सापेक्ष $m\angle\theta$ का अंश मान में आकलन

$$= \frac{630}{11} \left[\frac{q}{p} + \frac{p*q}{p^2+q^2} \right]^\circ \text{ स } m\angle\theta \text{ के बीजांक [41 23] के सापेक्ष } m\angle\theta \text{ का आकलन} = \frac{630}{11} \left[\frac{23}{41} + \frac{41*23}{2210} \right]^\circ$$

$$= \frac{630}{11} [0.560975 + 0.426696]^\circ = \frac{630}{11} [0.987671]^\circ = 56.57^\circ \text{ होगा। } 58.58^\circ \text{ के निकतर मान्य है।}$$

उदाहरण 4■ यदि $\cos A + 7\sin A = 5$ हो तो $m\angle A$ त्रिभुजांक, बीजांक एवं $m\angle A$ का मान कोण माप के दोनों इकाई मानों में प्राप्त कीजिए।

हल माना कि $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ है। जिसके सापेक्ष

$m\angle A$ का त्रिभुजांक $[(p^2 - 1) \quad 2p \quad (p^2 + 1)]$ होगा।

$\therefore$ त्रिभुजांक के सापेक्ष त्रिकोण मिति निष्पत्तियाँ $\sin A = \frac{2p}{p^2+1}$ तथा $\cos A = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ होगा।

$$\therefore \cos A + 7\sin A = 5 \Rightarrow \frac{p^2-1}{p^2+1} + 7 \frac{2p}{p^2+1} = 5 \Rightarrow 4p^2 - 14p + 6 = 0 \Rightarrow 2p^2 - 7p + 3 = 0$$

$\Rightarrow ((2p - 1)(p - 3) = 0$ से p के दो हल मान $\frac{1}{2}$ और 3 प्राप्त होंगे।

इस प्रकार आदर्श बीजांक $F(p)$ के दो हल मान $F\left(\frac{1}{2}\right)$ और $F(3)$ प्राप्त होंगे।

$\therefore$ बीजांक के सापेक्ष त्रिभुजांक के 2 हल - 1- $F\left(\frac{1}{2}\right)$ के सापेक्ष [-3 4 5]

2- $F(3)$ के सापेक्ष [8 6 10] = [4 3 5]

उपरोक्त प्राप्त त्रिभुजांक की प्रयुक्ता जाँच-

$F\left(\frac{1}{2}\right)$ के सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांक [-3 4 5] की प्रयुक्ता की जाँच-

$$\text{बाँया पक्ष} = \cos A + 7\sin A = \frac{-3}{5} + 7 \frac{4}{5} = \frac{-3+28}{5} = \frac{25}{5} = 5 = \text{दाँया पक्ष अतः प्रयुक्ता मान्य होगा।}$$

$F(3)$ के सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांक [4 3 5] की प्रयुक्ता की जाँच-

$$\text{बाँया पक्ष} = \cos A + 7\sin A = \frac{4}{5} + 7 \frac{3}{5} = \frac{4+21}{5} = \frac{25}{5} = 5 = \text{दाँया पक्ष अतः प्रयुक्त मान्य होगा।}$$

तब 1• आदर्श बीजांक $F(p) = F\left(\frac{1}{2}\right) = F(0.5)$ के प्रति- कोण के सन्निकट माप का आकलन $= \left[\frac{1}{0.5} + \frac{0.5}{(0.5)^2+1} \right]$
= [2+0.4] = 2.4^r

$$= \frac{630}{11} * 2.4 = 137.4545^\circ$$

2• आदर्श बीजांक $F(p) = F(3)$ के प्रति- कोण के सन्निकट माप का आकलन $= \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{(3)^2+1} \right]$

$$= [0.333333 + 0.3] = 0.633333^r$$

$$= \frac{630}{11} * 0.63333 = 36.2527^\circ$$

इस प्रकार $\cos A + 7\sin A = 5$ के प्रति

$$m\angle A \text{ के सन्निकट आकलन के 2 हल मान } 1. \quad 2.4^r = 137.4545^\circ$$

$$2. \quad 0.63333^r = 36.2527^\circ \text{ होंगे।}$$

जबकि आधुनिक गणित में हल

$$\cos A + 7\sin A = 5 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 A} + 7\sin A = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \sin^2 A} = 5 - 7\sin A$$

$$\Rightarrow 1 - \sin^2 A = 25 - 70\sin A + 49\sin^2 A \quad \text{दोनों पक्ष का वर्गमान से}$$

$$\Rightarrow 50\sin^2 A - 70\sin A + 24 = 0 \Rightarrow 25\sin^2 A - 35\sin A + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (5\sin A - 4)(5\sin A - 3) = 0 \quad \text{से } \sin A = \frac{4}{5} \text{ और } \frac{3}{5}$$

$$\sin A = \frac{4}{5} \text{ के प्रति } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } = [\begin{smallmatrix} - & 4 & 5 \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix}] \text{ -----(1)}$$

$$\sin A = \frac{3}{5} \text{ के प्रति } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } = [\begin{smallmatrix} - & 3 & 5 \end{smallmatrix}] = [\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}] \text{ -----(2)}$$

उपरोक्त प्राप्त त्रिभुजांक प्रयुक्ता की जाँच—

(1) त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} 3 & 4 & 5 \end{smallmatrix}]$ की प्रयुक्ता की जाँच—

$$\text{बाँया पक्ष} = \cos A + 7\sin A = \frac{3}{5} + 7 * \frac{4}{5} = \frac{3+28}{5} = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5} \neq \text{दाँया पक्ष} \quad \text{अतः प्रयुक्ता मान्य नहीं होगा।}$$

(2) त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}]$ की प्रयुक्ता की जाँच—

$$\text{बाँया पक्ष} = \cos A + 7\sin A = \frac{4}{5} + 7 * \frac{3}{5} = \frac{4+21}{5} = \frac{25}{5} = 5 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{अतः प्रयुक्ता मान्य होगा।}$$

अतः त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}]$ की प्रयुक्ता मान्य होने पर

$m\angle A$ का त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix}]$ के सापेक्ष $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $[(5+4) \ 3] = [9 \ 3] = [3 \ 1] = F(3)$ एक मात्र

हल होगा। जिसके प्रति कोण के सन्निकट माप का आकलन $= \left[\frac{1}{3} + \frac{3}{(3)^2+1} \right]$

$$= [0.333333 + 03] = 0.63333^r$$

$$= \frac{630}{11} * 0.63333 = 36.2527^\circ \text{ होगा।}$$

उदाहरण 5■ यदि $3\cos A + 2\sin A = 3$ हो तो $m\angle A$ त्रिभुजांक, बीजांक एवं $m\angle A$ का मान कोण माप के दोनों इकाई मानों में प्राप्त कीजिए।

हल माना कि $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(p)$ है। जिसके सापेक्ष

$m\angle A$ का त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} (p^2 - 1) & 2p & (p^2 + 1) \end{smallmatrix}]$ होगा।

∴ त्रिभुजांक के सापेक्ष त्रिकोण मिति निष्पत्तियाँ $\sin A = \frac{2p}{p^2+1}$ तथा $\cos A = \frac{p^2-1}{p^2+1}$ होगा।

$$\therefore 3\cos A + 2\sin A = 3 \Rightarrow 3 * \frac{p^2-1}{p^2+1} + 2 * \frac{2p}{p^2+1} = 3 \Rightarrow 3p^2 - 3 + 4p = 3p^2 + 3$$

$$\Rightarrow 4p = 6 \text{ से } p = \frac{3}{2} = F\left(\frac{3}{2}\right) = F(1.5) \text{ आदर्श बीजांक होगा।}$$

∴ $F\left(\frac{3}{2}\right) = F(1.5)$ के सापेक्ष $m\angle A$ का त्रिभुजांक $[\begin{smallmatrix} 5 & 12 & 13 \end{smallmatrix}]$

उपरोक्त प्राप्त त्रिभुजांक की प्रयुक्ता जाँच—

$$\text{बाँया पक्ष} = 3\cos A + 2\sin A = 3 * \frac{5}{13} + 2 * \frac{12}{13} = \frac{15+24}{13} = \frac{39}{13} = 3 = \text{दाँया पक्ष} \quad \text{अतः प्रयुक्ता मान्य होगा।}$$

$$F(1.5) \text{ के प्रति—कोण के सन्निकट माप का आकलन } = \left[\frac{1}{1.5} + \frac{1.5}{(1.5)^2+1} \right] = [0.66666 + 0.46135]$$

$$=1.12801^r$$

$$= \frac{630}{11} * 1.12801 = 64.6042^o \text{ होगा।}$$

जबकि आधुनिक गणित में हल $3\cos A + 2\sin A = 3 \Rightarrow 3 * \sqrt{1 - \sin^2 A} + 2\sin A = 3$

$$\Rightarrow 3 * \sqrt{1 - \sin^2 A} = 3 - 2\sin A$$

$$\Rightarrow 9 - 9\sin^2 A = 9 - 12\sin A + 4\sin^2 A \text{ दोनों पक्ष का वर्गमान से}$$

$$\Rightarrow 13\sin^2 A - 12\sin A = 0 \Rightarrow \sin A(13\sin A - 12) = 0 \text{ से } \sin A = 0 \text{ और } \frac{12}{13}$$

$$\sin A = 0 \text{ के प्रति } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} - & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ -----(1)}$$

$$\sin A = \frac{12}{13} \text{ के प्रति } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} - & 12 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 13 \end{bmatrix} \text{ -----(2)}$$

उपरोक्त प्राप्त त्रिभुजांक की प्रयुक्ता जाँच-

(1) त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ की प्रयुक्ता जाँच-

$$\text{बाँया पक्ष} = 3\cos A + 2\sin A = 3*1 + 2*0 = 3 = \text{दाँया पक्ष अतः प्रयुक्ता मान्य होगा।}$$

$$\text{अतः } 1 \cdot m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ के सापेक्ष } m\angle A \text{ का बीजांक } [(1+1) \ 0] = [2 \ 0] = [1 \ 0] = F(1) - F(1)$$

$$\text{होगा। } \therefore m\angle A = \theta^r = \text{बीजांक के प्रति कोण मान} = \{ F(1) \text{ के प्रति कोण मान} \} - \{ F(1) \text{ के प्रति कोण मान} \}$$

$$= 1.5714^r - 1.5714^r = 0.0^r = 0.0^o$$

2. त्रिभुजांक $\begin{bmatrix} 5 & 12 & 13 \end{bmatrix}$ की प्रयुक्ता जाँच

$$\text{बाँया पक्ष} = 3\cos A + 2\sin A = 3 * \frac{5}{13} + 2 * \frac{12}{13} = \frac{39}{13} = 3 \text{ दाँया पक्ष अतः प्रयुक्ता मान्य होगा।}$$

$$\text{अतः } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक } \begin{bmatrix} 5 & 12 & 13 \end{bmatrix} \text{ के सापेक्ष } m\angle A \text{ का आदर्श बीजांक } [(5+13) \ 12] = [18 \ 12] = [3 \ 2]$$

$$= F(1.5) \text{ के प्रति-कोण के सन्निकट माप का आकलन} = \left[\frac{1}{1.5} + \frac{1.5}{(1.5)^2 + 1} \right] = [0.66666 + 0.46135]$$

$$=1.12801^r$$

$$= \frac{630}{11} * 1.12801 = 64.6042^o \text{ होगा।}$$

इस प्रकार $3\cos A + 2\sin A = 3$ के प्रति $m\angle A$ के 2 हलमान $0.0^r = 0.0^o$ और $1.12801^r = 64.6042^o$ होंगे।

8-2 $m\angle \theta$ का बीजांक $F(\infty)$ के सापेक्ष $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक

$$m\angle A \text{ का बीजांक } F(p) \text{ के सापेक्ष } m\angle \theta \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} (p^2 - 1) & 2P & (p^2 + 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{p^2}) & \frac{2}{p} & (1 + \frac{1}{p^2}) \end{bmatrix} \text{ के नियम से।}$$

$$m\angle \theta \text{ का बीजांक } F(\infty) \text{ के सापेक्ष } m\angle \theta \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{1}{\infty^2}) & \frac{2}{\infty} & (1 + \frac{1}{\infty^2}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 0) & 0 & (1 + 0) \end{bmatrix} \quad \frac{1}{\infty^2} = 0 \text{ एवं } \frac{2}{\infty} = 0 \text{ प्रतिस्थापित करने पर।}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.0^r = 0.0^o \text{ कोण माप का त्रिभुजांक होगा।}$$

$$\text{जिसके सापेक्ष बीजांक } [2 \ 0] = [1 \ 0] = F(1) - F(1) \text{ होगा।}$$

$$\text{अर्थात् बीजांक } F(\infty) = \text{बीजांक } [2 \ 0] = [1 \ 0] = F(1) - F(1) \text{ होगा। तथा } m\angle \theta = 0.0^r = 0.0^o \text{ होगा।}$$

-----08-----

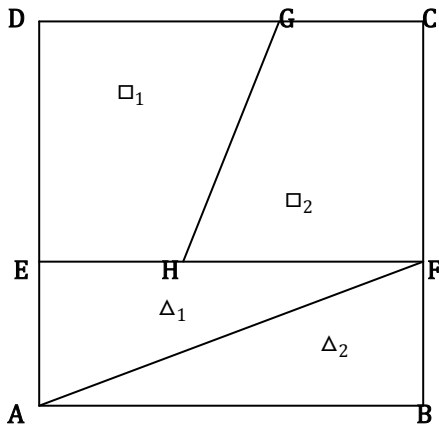
अध्याय -9 समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन

9-1 प्रस्तावना समस्त ज्ञान-विज्ञान को ज्ञान के दो क्षेत्र कला एवं विज्ञान में बाँटा गया है। गणित विषय ज्ञान के दोनों क्षेत्र का विषय है। अर्थात् गणित कला और विज्ञान दोनों है। गणित के क्षेत्र में छत्तीसगढ़ियों का ज्ञान विस्तार अंकगणित बीजगणित ज्योतिष के साथ ज्यामिति के क्षेत्र में प्राचीन वास्तु (निर्माण) विज्ञान पर भी गहरा पकड़ रहा है। भवन, मन्दिर निर्माण के साथ हवन –पूजन में विभिन्न प्रकार ज्यामिति आकृति रचना की जाती है। जिनका अपना-अपना विशेष महत्व होता है। इनको बनाने में अनुपातों का ज्ञान कमतर नहीं आका जा सकता है। इनके ज्ञान सागर के गहराई में डुबकी लगाने पर आप तथाकथित आधुनिक गणित को पीछे होता पायेंगे। ऐसा ही एक उदाहरण समांतर चतुर्भुज लुका-छुपी खेल के साथ-साथ संख्याओं के समांतर श्रेढ़ी, गुणोत्तर श्रेढ़ी एवं हरात्मक श्रेढ़ी से अलग हटकर एक विशिष्ट प्रकार की संख्या श्रेढ़ी के उत्पत्ति के आधार से अवगत कराता है। जिसे उसके मूल गुण (श्रेढ़ी का r वां पद का मान अपने पूर्व के प्रथम दो पद $(r - 2)$ वॉ और $(r - 1)$ वॉ पद मानों का योगमान होता है) पर **योग-योग संख्याश्रेढ़ी** कहा जा सकता है। जिसे आधुनिक गणित में लियोनार्दो फिबानिको को प्रथम अन्वेषक मानकर उनके नाम पर **फिबोनिकी संख्याश्रेढ़ी** कहा जाता है। एक विस्तार में **लुकस संख्याश्रेढ़ी** कहा गया है। चूँकि व्यापक विस्तार के मूल में फिबोनिकी संख्याश्रेढ़ी की संगता है। अतः बीजगणित की दृष्टि **बीजीय फिबोनिकी संख्याश्रेढ़ी** कहा जाना यथेष्ट होगा। आश्चर्य होगा यह संख्या श्रेढ़ी छत्तीसगढ़ी पूर्वजों के गणित ज्ञान के मुखान्तरित प्रश्नों के गूढार्थ में छुपा हुआ है। इस गूढार्थ में छुपे रहस्य का व्यापक विश्लेषण के लिए लेखक की प्रथम कृति ग्रंथ **छत्तीसगढ़ गणित दर्शन** में अध्याय 13 से 20 तक अध्ययन करें। त्रिकोण मिति अध्ययन क्रम में योग-योग संख्याश्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर छत्तीसगढ़ी पूर्वजों के गणित ज्ञान के मुखान्तरित प्रश्नों का रचना विश्लेषण प्रस्तुत है।

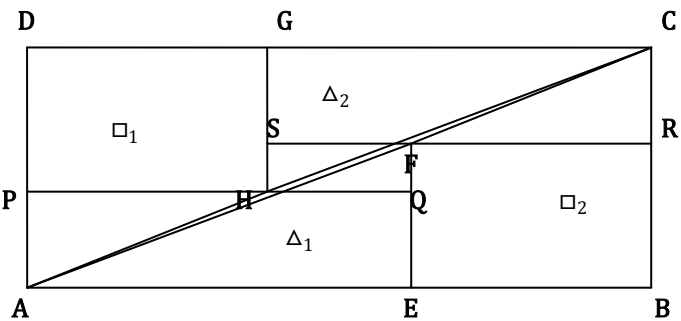
9-2 योग-योग संख्या श्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर योग-योग संख्याश्रेढ़ी की उत्पत्ति की ओर प्रवेश करने के क्रम में समांतर चतुर्भुज का दर्शन एवं विलोपन कराने विषयक संगत प्रश्न 1 और प्रश्न 2 के हल की ओर अवलोकन कीजिए।

रचना [1] समांतर चतुर्भुज का दर्शन कराने विषयक आकृति 9.1(a) ABCD 8*8 वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। EF द्वारा आयत₁ EFCD और आयत₂ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत₁ EFCD की लम्बाई EF = CD = 8 इकाई माप तथा चौड़ाई DE = CF = 5 इकाई माप और आयत₂ ABFE की लम्बाई EF = AB = 8 इकाई माप तथा चौड़ाई EA = FB = 3 इकाई माप है। बिन्दु G CD को DC = 5 इकाई GC = 3 इकाई तथा बिन्दु H EF को EH = 3 इकाई HF = 5 इकाई में बाँटती है। बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1 = \text{EHGD}$ और $\square_2 = \text{HFCG}$ प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष AF को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\Delta_1 = \triangle AEF$ और $\Delta_2 = \triangle ABF$ प्राप्त कीजिए।

2 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप



आकृति 9.1(a)



आकृति 9.1(b)

आकृति 9.1(a) से प्राप्त $\square_1$, $\square_2$, Δ_1 , Δ_2 को अलग-अलग काटकर आकृति 9.1(b) ABCD 13*5 वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में अग्रानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

आकृति 9.1 (a) का	$\square_1 = \text{EHGD}$	$\square_2 = \text{HFCG}$	$\Delta_1 = \text{AEF}$	$\Delta_2 = \text{ABF}$
आकृति 9.1(b) में स्थापन	$\square_1 = \text{AHGD}$	$\square_2 = \text{EBCF}$	$\Delta_1 = \text{AEF}$	$\Delta_2 = \text{CGH}$

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव से मुक्त रह जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का दर्शन** होना कहते हैं।

दर्शित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति

समलम्ब चतुर्भुज $\square_1 \square_2$ एवं समकोण त्रिभुज $\Delta_1 \Delta_2$ स्थापन से $\overline{AD}$, $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ आयत ABCD के AB सम्मुख CD भुजा के सापेक्ष समकोणिक- समांतर होंगे। शीर्ष H से $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ पर $\overline{AE} \parallel \overline{PQ}$ और शीर्ष F से $\overline{GH} \parallel \overline{CB}$ पर $\overline{GC} \parallel \overline{SR}$ की रचना कीजिए। उक्त रचना से $\overline{AE}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{CH}$ आयत ABCD के AD सम्मुख BC भुजा के सापेक्ष समकोणिक-समांतर होंगे।

तब – समकोण त्रिभुज $\triangle APH \cong$ साकोण त्रिभुज $\triangle FRC$ और आयत HQFS दर्शित होगा।

तथा $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = 5$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = 3$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = 2$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = 8$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = 13$ इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = 3 - 2 = 1$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे।

इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय $(X) = [1, 2, 3, 5, 8, 13,]$ का अवलोकन में— (पद₃ = 3 = 1 + 2 = पद₁ + पद₂) , (पद₄ = 5 = 2 + 3 = पद₂ + पद₃), (पद₅ = 8 = 3 + 5 = पद₃ + पद₄) , (पद₆ = 13 = 5 + 8 = पद₄ + पद₅) , योग-योग श्रेणी की ओर होने को दर्शित करता है।

दर्शन में आए समांतर चतुर्भुज AFCH का ज्यामिति विश्लेषण

1■ क्षेत्रफल ■_A = 1 इकाई वर्ग

2■ सम्मुख भुजा युग्म

$$\begin{aligned} \text{युग्म}_1 \ S_1 & \begin{cases} \text{AF} = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{\text{AE}^2 + \text{EF}^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \\ \text{CH} = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{\text{CG}^2 + \text{GH}^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \end{cases} \\ \text{युग्म}_2 \ S_2 & \begin{cases} \text{FC} = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{\text{FR}^2 + \text{RC}^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \\ \text{AH} = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{\text{PH}^2 + \text{PA}^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \end{cases} \end{aligned}$$

3■ विकर्ण₁ AC = आयत ABCD का विकर्ण $\text{AC} = \sqrt{\text{AB}^2 + \text{BC}^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194}$

विकर्ण₂ FH = आयत HQFS का विकर्ण $\text{FH} = \sqrt{\text{HQ}^2 + \text{QF}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

4■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी

लाम्बिक दूरी = (समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल) ÷ (संगत समांतर भुजा के माप) से—

$$\overline{AF} \parallel \overline{CH} \text{ की लाम्बिक दूरी } h_1 = 1 \div \sqrt{73} = \frac{1}{\sqrt{73}}$$

$$\overline{AH} \parallel \overline{FC} \text{ की लाम्बिक दूरी } h_2 = 1 \div \sqrt{29} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

5■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]

1• $m\angle \text{HAF} = m\angle \text{HCF}$ का त्रिभुजांक = [---- ■_A ($S_1 * S_2$)] = [---- 1 ($\sqrt{73} * \sqrt{29}$)]
= [$\sqrt{2116}$ 1 $\sqrt{2117}$] = [46 1 $\sqrt{2117}$]

2• $m\angle \text{AFC} = m\angle \text{AHC}$ का त्रिभुजांक = $m\angle \text{HAF} = m\angle \text{HCF}$ के सम्पूरक कोण मापका त्रिभुजांक
= [46 1 $\sqrt{2117}$]

6■ $m\angle \text{HAF} = m\angle \text{HCF} = m\angle \theta$ का आकलन

[इसी अध्याय के अनुच्छेद 9-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता अन्तर्गत बिन्दु 8■ में प्राप्त पाँच समिका का अनुप्रयोग से]

(1) $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(46 \quad 1 \quad \sqrt{2117})]$ से.

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = (\sin \theta)^r = \left(\frac{A}{S_1 \cdot S_2}\right)^r = \frac{1}{\sqrt{2117}} = \frac{1}{46.01} = 0.021734$ रेडियन

(2) $m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [\{\sqrt{2117} + 46\} \quad 1] = [92.01 \quad 1]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{2q}{p} = \frac{2 \cdot 1}{92.1} = \frac{2}{92.1} = 0.021715$ रेडियन

(3) बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त $m\angle\theta$ के मापों के मध्यमान नियम में

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = q \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = 1 * \left[\frac{1}{92.01} + \frac{92.01}{(92.01)^2 + 1^2} \right]$
 $= [0.010868 + 0.010867] = 0.021735$ रेडियन

(4) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(46 \quad 1)]$ के सापेक्ष

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{46} + \frac{46}{46^2 + 1^2} \right]$
 $= \frac{1}{2} [0.021739 + 0.0217288] = 0.021733$ रेडियन

(5) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(46 \quad 1)]$ के सापेक्ष $m\angle 2\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(p^2 - q^2) \quad 2pq \quad (p^2 + q^2)]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{1}{2} * \left[\frac{y}{z} \right] = \left[\frac{pq}{p^2 + q^2} \right] = \left[\frac{46}{46^2 + 1^2} \right] = 0.0217288$ रेडियन

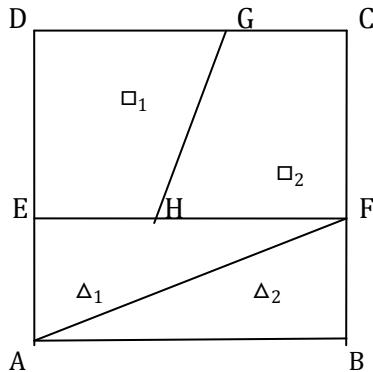
उपरोक्त पाँचों समिका हल अन्तर्गत दशमलव बाद पाँच स्थान के लिए—

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = 0.02173$ रेडियन मान्य होगा। जिसके प्रति

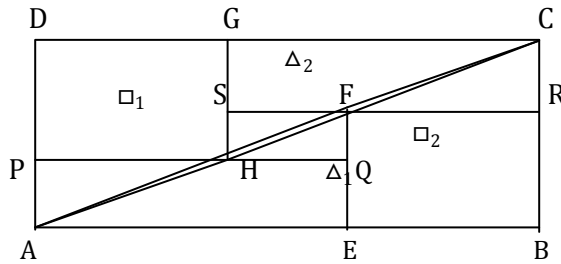
कोण माप इकाई अंश में $m\angle\theta = 0.02173 * \frac{630}{11} = 1.24453$ अंश मान्य होगा।

रचना [2] समांतर चतुर्भुज का विलोपन कराने विषयक आकृति 9.2 (a) ABCD 13 * 13 वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। EF द्वारा आयत₁ EFCD और आयत₂ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत₁ EFCD की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{CD} = 13$ इकाई माप तथा चौड़ाई $\overline{DE} = \overline{CF} = 8$ इकाई माप और आयत₂ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = 13$ इकाई माप तथा चौड़ाई $\overline{EA} = \overline{FB} = 5$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = 8$ इकाई $\overline{GC} = 5$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = 5$ इकाई $\overline{HF} = 5$ इकाई में बाँटती है बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1 = \text{EHGD}$ और $\square_2 = \text{HFCG}$ प्राप्त कीजिए। आयत

1 ग्रीड लाइन = 1 इकाई माप



आकृति 9.2 (a)



आकृति 9.2 (b)

EFCD के सम्मुख शीर्ष AF को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\triangle_1 = \triangle AEF$ और $\triangle_2 = \triangle ABF$ प्राप्त कीजिए। इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय $(X) = [1, 2, 3, 5, 8, 13,]$

आकृति 9.2 (a) से प्राप्त $\square_1$, $\square_2$, Δ_1 , Δ_2 को अलग-अलग काटकर आकृति 9.2(b) ABCD 21*8 वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में निम्नानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

आकृति 9.2 (a) का	$\square_1 = \text{EHGD}$	$\square_2 = \text{HFCG}$	$\Delta_1 = \triangle AEF$	$\Delta_2 = \triangle ABF$
आकृति 9.2(b) में स्थापन	$\square_1 = \text{AHGD}$	$\square_2 = \text{EBCF}$	$\Delta_1 = \triangle AEF$	$\Delta_2 = \triangle CGH$

इस प्रकार के स्थापन में आयत ABCD के अन्तःनिष्ठ 1 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH चिपकाव में दो बार आ जाता है। इसे ही **समांतर चतुर्भुज का विलोपन** होना कहते हैं।

विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति

समलम्ब चतुर्भुज $\square_1$ $\square_2$ एवं समकोण त्रिभुज Δ_1 Δ_2 स्थापन से $\overline{AD}$, $\overline{GH}$, $\overline{EF}$, $\overline{BC}$ आयत ABCD के AB सम्मुख CD भुजा के सापेक्ष समकोणिक- समांतर होंगे। शीर्ष H से $\overline{AD} \parallel \overline{EF}$ पर $\overline{AE} \parallel \overline{PQ}$ और शीर्ष F से $\overline{GH} \parallel \overline{CB}$ पर $\overline{GC} \parallel \overline{SR}$ की रचना कीजिए। उक्त रचना से $\overline{AE}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RS}$, $\overline{CH}$ आयत ABCD के AD सम्मुख BC भुजा के सापेक्ष समकोणिक- समांतर होंगे।

तब - समकोण त्रिभुज $\triangle APH \cong$ समकोण त्रिभुज $\triangle FRC$ और आयत HQFS दर्शित होगा।

तथा $\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = 8$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = 5$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = 3$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = 13$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = 21$ इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = 5 - 3 = 2$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे।

इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय (Y) = [2, 3, 5, 8, 13, 21] का अवलोकन में- (पद₃ = 5 = 2 + 3 = पद₁ + पद₂), (पद₄ = 8 = 3 + 5 = पद₂ + पद₃), (पद₅ = 13 = 5 + 8 = पद₃ + पद₄), .. (पद₆ = 21 = 8 + 13 = पद₄ + पद₅), .. योग-योग श्रेणी की ओर होने को दर्शित करता है।

विलोपन में आए समांतर चतुर्भुज AHCF का ज्यामिति एवं त्रिकोणमिति विश्लेषण

1 ■ क्षेत्रफल $\blacksquare_A = 1$ इकाई वर्ग

2 ■ सम्मुख भुजा युग्म

$$\begin{aligned} \text{युग्म}_1 \ S_1 & \begin{cases} \text{AF} = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EF}^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \\ = \\ \text{CH} = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{GH}^2} = \sqrt{13^2 + 5^2} = \sqrt{194} \end{cases} \\ \text{युग्म}_2 \ S_2 & \begin{cases} \text{FC} = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{\overline{FR}^2 + \overline{RC}^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \\ = \\ \text{AH} = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{PA}^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73} \end{cases} \end{aligned}$$

3 ■ विकर्ण, AC = आयत ABCD का विकर्ण $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{21^2 + 8^2} = \sqrt{505}$

विकर्ण₂ FH = आयत HQFS का विकर्ण $\overline{FH} = \sqrt{\overline{HQ}^2 + \overline{QF}^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

4 ■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी

लाम्बिक दूरी = (समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल) ÷ (संगत समांतर भुजा के माप) से-

$$\overline{AF} \parallel \overline{CH} \text{ की लाम्बिक दूरी } h_1 = 1 \div \sqrt{194} = \frac{1}{\sqrt{194}}$$

$$\overline{AH} \parallel \overline{FC} \text{ की लाम्बिक दूरी } h_2 = 1 \div \sqrt{73} = \frac{1}{\sqrt{73}}$$

5 ■ कोणों के त्रिभुजांक [x y z]

$$\begin{aligned} 1 \bullet m\angle HAF = m\angle HCF \text{ का त्रिभुजांक} &= [\text{----} \blacksquare_A (S_1 * S_2)] = [\text{----} \ 1 \ (\sqrt{194} * \sqrt{73})] \\ &= [\sqrt{14161} \ 1 \ \sqrt{14162}] = [119 \ 1 \ \sqrt{14162}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \bullet m\angle AFC = m\angle AHC \text{ का त्रिभुजांक} &= m\angle HAF = m\angle HCF \text{ के सम्पूरक कोण मापका त्रिभुजांक} \\ &= [119 \ 1 \ \sqrt{14162}] \end{aligned}$$

6 ■ $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ का आकलन

[इसी अध्याय के अनुच्छेद 9-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता अन्तर्गत बिन्दु 8■ में प्राप्त पाँच समिका का अनुप्रयोग से]

(1) $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(119 \quad 1 \quad \sqrt{14162})]$ से.

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = (\sin \theta)^r = \left(\frac{A}{S_1 S_2}\right)^r = \frac{1}{\sqrt{14162}} = \frac{1}{119.004} = 0.008403$ रेडियन

(2) $m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [\{\sqrt{14162} + 119\} \quad 1] = [238.004 \quad 1]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{2q}{p} = \frac{2 \times 1}{238.004} = \frac{1}{119.002} = 0.008403$ रेडियन

(3) बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त $m\angle\theta$ के मापों के मध्यमान नियम में

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = q \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = 1 * \left[\frac{1}{238.004} + \frac{238.004}{(238.004)^2 + 1^2} \right]$
 $= [0.004201 + 0.004201] = 0.008402$ रेडियन

(4) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(119 \quad 1)]$ के सापेक्ष

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{119} + \frac{119}{119^2 + 1^2} \right]$
 $= \frac{1}{2} [0.008403 + 0.008402] = 0.008402$ रेडियन

(5) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(119 \quad 1)]$ के सापेक्ष $m\angle 2\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(p^2 - q^2) \quad 2pq \quad (p^2 + q^2)]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{1}{2} * \left[\frac{y}{z} \right] = \left[\frac{pq}{p^2 + q^2} \right] = \left[\frac{119 \times 1}{119^2 + 1^2} \right] = 0.008402$ रेडियन

उपरोक्त पाँचों समिका हल अन्तर्गत दशमलव बाद छह स्थान के लिए—

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = 0.008402$ रेडियन मान्य होगा। जिसके प्रति

कोण माप इकाई अंश में $m\angle\theta = 0.008402 * \frac{630}{11} = 0.481205$ अंश मान्य होगा।

पुनः समुच्चय (Y) = [2, 3, 5, 8, 13, 21] में से समुच्चय (X) = [1, 2, 3, 5, 8, 13,] के अवयव को यथा क्रम जोड़ने घटाने पर प्राप्त क्रमशः समुच्चय (S) = [3, 5, 8, 13, 21, 34] समुच्चय (Z) = [1, 1, 2, 3, 5, 8] योग-योग श्रेढ़ी की ओर होने को दर्शित करता है।

9-3 मूल योग-योग संख्या श्रेढ़ी समुच्चय (Z) = [1, 1, 2, 3, 5, 8] का विस्तार = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, —, —, —] है जिसे गणित प्रेमी लियोनार्दो फिबोनिकी ने अपने आयु के 72 वें बसंत पर प्राप्त किये। कहते हैं इस पर उन्होंने कोई विशेष कार्य नहीं किये। आधुनिक गणित अध्ययन में लियोनार्दो फिबोनिकी के नाम पर फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी कहते हैं।

आगे चलकर महान गणितज्ञ लुकस ने योग-योग संख्या श्रेढ़ी एक दूसरा स्वरूप— [1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, —, —, —] विकसित कर उन्होंने अपने इस श्रेढ़ी पर कार्य किये। जो उनके नाम पर लुकस संख्या श्रेढ़ी के नाम गणित जगत में प्रसिद्ध हुआ।

व्यापक विस्तार में योग-योग संख्या श्रेढ़ी का बीजीय स्वरूप का मार्ग प्रशस्त करता है। यथा अवलोकित करें।—

$[a, b, (a+b), (a+2b), (2a+3b), (3a+5b), (5a+8b), (8a+13b), (13a+21b), —, —, —, —]$

संकेतन में योग-योग संख्या श्रेढ़ी $A_1, A_2, A_3, A_4, —, —, —, —, A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ के प्रति पदों की संख्या $n \geq 3$ के लिए $A_r = A_{r-1} + A_{r-2}$ का प्रतिबंध होगा।

जैसे योग-योग संख्या श्रेढ़ी 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555 —, —, —, —, में

$$A_{10} = A_9 + A_8 \Rightarrow 343 = 212 + 131$$

अध्ययन संकेत योग-योग संख्या श्रेढ़ी में— **n वाँ** फिबोनिकी संख्या का अध्ययन संकेत F_n ,

n वाँ लुकस संख्या का अध्ययन संकेत L_n

तथा **n वाँ** बीजीय योग-योग संख्या श्रेढ़ी संख्या का अध्ययन संकेत A_n लिया गया है।

सरिणी 9.1
योग-योग संख्या श्रेढी

फिबोनिकी संख्या		लुकस संख्या		योग-योग संख्या श्रेढी	
F ₁	1	L ₁	1	A ₁	A
F ₂	1	L ₂	3	A ₂	B
F ₃	2	L ₃	4	A ₃	a + b
F ₄	3	L ₄	7	A ₄	a + 2b
F ₅	5	L ₅	11	A ₅	2a + 3b
F ₆	8	L ₆	18	A ₆	3a + 5b
F ₇	13	L ₇	29	A ₇	5a + 8b
F ₈	21	L ₈	47	A ₈	8a + 13b
F ₉	34	L ₉	76	A ₉	13a + 21b
F ₁₀	55	L ₁₀	123	A ₁₀	21a + 34b
F ₁₁	89	L ₁₁	199	A ₁₁	34a + 55b
F ₁₂	144	L ₁₂	322	A ₁₂	55a + 89b
F ₁₃	233	L ₁₃	521	A ₁₃	89a + 144b
F ₁₄	377	L ₁₄	843	A ₁₄	144a + 233b
F ₁₅	610	L ₁₅	1364	A ₁₅	233a + 377b
F ₁₆	987	L ₁₆	2207	A ₁₆	377a + 610b
F ₁₇	1597	L ₁₇	3571	A ₁₇	610a + 987b
F ₁₈	2584	L ₁₈	5778	A ₁₈	987a + 1597b
F ₁₉	4181	L ₁₉	9349	A ₁₉	1597a + 2584b
F ₂₀	6765	L ₂₀	15127	A ₂₀	2584a + 4181b
F ₂₁	10946	L ₂₁	24476	A ₂₁	4181a + 6765b
F ₂₂	17711	L ₂₂	39603	A ₂₂	6765a + 10946b
F ₂₃	28657	L ₂₃	64079	A ₂₃	10946a + 17711b
F ₂₄	46368	L ₂₄	103682	A ₂₄	17711a + 28657b
F ₂₅	75025	L ₂₅	167761	A ₂₅	28657a + 46368b
F ₂₆	121393	L ₂₆	271443	A ₂₆	46368a + 75025b
F ₂₇	196418	L ₂₇	439204	A ₂₇	75025a + 121393b
F ₂₈	317811	L ₂₈	710647	A ₂₈	121393a + 196418b
F ₂₉	514229	L ₂₉	1149851	A ₂₉	196418a + 317811b
F ₃₀	832040	L ₃₀	1860498	A ₃₀	317811a + 514229b
F ₃₁	1346269	L ₃₁	3010349	A ₃₁	514229a + 832040b
F ₃₂	2178309	L ₃₂	4870847	A ₃₂	832040a + 1346269b
F ₃₃	3524578	L ₃₃	7881196	A ₃₃	1346269a + 2178309b
F ₃₄	5702887	L ₃₄	12752043	A ₃₄	2178309a + 3524578b
F ₃₅	9227465	L ₃₅	20633239	A ₃₅	3524578a + 5702887b
F ₃₆	14930352	L ₃₆	33385282	A ₃₆	5702887a + 9227465b
F ₃₇	24157817	L ₃₇	54018521	A ₃₇	9227465a + 14930352b
F ₃₈	39088169	L ₃₈	87403803	A ₃₈	14930352a + 24157817b
F ₃₉	63245986	L ₃₉	141422324	A ₃₉	24157817a + 39088169b
F ₄₀	102334155	L ₄₀	228826127	A ₄₀	39088169a + 63245986b
F ₄₁	165580141	L ₄₁	370248451	A ₄₁	63245986a + 102334155b
F ₄₂	267914296	L ₄₂	599074578	A ₄₂	102334155a + 165580141b

F ₄₃	433494437	L ₄₃	969323029	A ₄₃	165580141a + 267914296b
F ₄₄	701408733	L ₄₄	1568397609	A ₄₄	267914296a + 433494437b
F ₄₅	1134903170	L ₄₅	2537720636	A ₄₅	433494437a + 701408733b
F ₄₆	1836311903	L ₄₆	4106118243	A ₄₆	701408733a + 1134903170b
F ₄₇	2971215073	L ₄₉	6643838879	A ₄₇	1134903170a + 1836311903b
F ₄₈	4807526976	L ₄₈	10749957122	A ₄₈	1836311903a + 2971215073b
F ₄₉	7778742049	L ₄₉	17393796001	A ₄₉	2971215073a + 4807526976b
F ₅₀	125862269025	L ₅₀	28143753123	A ₅₀	4807526976a + 7778742049b

9-4 योग –योग संख्या श्रेढी का स्तर यदि किसी योग-योग संख्या श्रेढी A का प्रथम पद a और द्वितीय पद b हो तो-
योग-योग संख्या श्रेढी A का स्तर (a, b) होगा। संकेत में (a, b)A दर्शित होगा। अतः फिबोनिकी संख्या का स्तर (1,1) होगा।
संकेत में (1, 1)F दर्शित होगा। लुस संख्या का स्तर (1,3) होगा। संकेत में (1, 3)L दर्शित होगा।

(1,1)F और (a,b)A में सम्बंध का अभिगृहीत समिका

सारिणी के अवलोकन से $r > 3$ के प्रति $A_r = aF_{r-2} + bF_{r-1}$ स्पष्टतः प्रमाणित है।

$$\text{स्वयं जाँच करें } L_r = F_{r-2} + 3F_{r-1}$$

9-5 योग –योग संख्या श्रेढी का स्थिरांक नियम का अभिगृहीत समिका किसी भी स्तर के योग-योग संख्या श्रेढी $[A_1, A_2, A_3, A_4, -, -, -, -, -, A_{n-3}, A_{n-2}, A_{n-1}, A_n]$ में स्थित भी दो क्रमागत पद अवयव A_r और A_{r+1} से $(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)$ का मापांक मान उस श्रेढी के प्रथम पद अवयव A_1 और द्वितीय पद, A_2 से $(A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2)$ का मापांक मान में स्थिरांक नियम का पालन करता है।

$$\text{अर्थात् } \left| \begin{array}{c} (A_1^2 + A_1 * A_2 - A_2^2) \\ (A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} (A_2^2 + A_2 * A_3 - A_3^2) \\ (A_{n-2}^2 + A_{n-2} * A_{n-1} - A_{n-1}^2) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} (A_3^2 + A_3 * A_4 - A_4^2) \\ (A_{n-1}^2 + A_{n-1} * A_n - A_n^2) \end{array} \right| = \dots = \dots = \dots = \dots$$

मापांक का प्रतिबंध होने का स्पष्टीकरण यदि योग-योग श्रेढी विस्तार में क्रमांक मान r के सम (2m)/विषम क्रमांक (2m+1) के प्रति $(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)$ का हल मान धनात्मक होने पर इसके विपरीत क्रमांक मान r के विषम (2m+1)/सम क्रमांक (2m) के प्रति $(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)$ का हल मान ऋणात्मक होगा। जिनके मापांक मान तुल्यता को सत्यापित करेगा।

9-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की व्यापकता समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन के संदर्भ में आकृति 9-1(a) अथवा 9-2(a) में ABCD $A_{r+3} * A_{r+3}$ वर्ग इकाई माप का वर्ग आकृति है। EF द्वारा आयत₁ EFCD और आयत₂ ABFE में इस प्रकार विभाजित है कि आयत₁ EFCD की लम्बाई $EF = \overline{CD} = A_{r+3}$ इकाई माप तथा चौड़ाई $\overline{DE} = \overline{CF} = A_{r+2}$ इकाई माप और आयत₂ ABFE की लम्बाई $\overline{EF} = \overline{AB} = A_{r+3}$ इकाई माप तथा चौड़ाई $\overline{EA} = \overline{FB} = A_{r+1}$ इकाई माप है। बिन्दु G $\overline{CD}$ को $\overline{DC} = A_{r+2}$ इकाई $\overline{GC} = A_{r+1}$ इकाई तथा बिन्दु H $\overline{EF}$ को $\overline{EH} = A_{r+1}$ इकाई $\overline{HF} = A_{r+2}$ इकाई में बाँटती है। बिन्दु H और G मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज $\square_1 = \text{EHGD}$ और $\square_2 = \text{HFCG}$ प्राप्त कीजिए। आयत EFCD के सम्मुख शीर्ष A F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज $\triangle_1 = AEF$ और $\triangle_2 = ABF$ प्राप्त कीजिए।

आकृति **9.1 (a)** अथवा 9.2(a) से प्राप्त $\square_1$, $\square_2$, $\triangle_1$ $\triangle_2$ को अलग-अलग काटकर आकृति **9.1(b)** अथवा 9.2(b)

ABCD $A_{r+2} * A_{r+2}$ वर्ग इकाई माप का आयत आकृति है में निम्नानुसार बतौर स्थापन चिपकाइए।

आकृति 9.1 (a) अथवा 9.2(a) का	$\square_1 = \text{EHGD}$	$\square_2 = \text{HFCG}$	$\triangle_1 = AEF$	$\triangle_2 = ABF$
आकृति 9.2(b) अथवा 9.2(b) में स्थापन	$\square_1 = \text{AHGD}$	$\square_2 = \text{EBCF}$	$\triangle_1 = AEF$	$\triangle_2 = \text{CGH}$

उक्त स्थापन से समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के दर्शन अथवा विलोपन की व्यापकता प्रस्तुति बनती है। जिसके दो व्युत्क्रमीय निर्देशांक ज्यामिति में स्थिति, क्षेत्रफल, समस्त अंगों (चारों भुजा, दोनों विकर्ण, समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी एवं चारों अन्तः कोणों के माप) सहित सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ का त्रिभुजांक ज्ञात कर $m\angle 2\theta$ का बीजांक प्राप्त कर सकते हैं।

दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH के प्रति

$\overline{AD} = \overline{BC} = \overline{PH} = \overline{RF} = \overline{DG} = \overline{EB} = A_{r+2}$ इकाई माप, $\overline{GH} = \overline{EF} = \overline{DP} = \overline{BR} = A_{r+1}$ इकाई माप, $\overline{PA} = \overline{RC} = \overline{GS} = \overline{EQ} = A_r$ इकाई माप, $\overline{AE} = \overline{CG} = A_{r+3}$ इकाई माप, (वर्ग की भुजा माप) $\overline{AB} = \overline{CD} = A_{r+4}$ इकाई माप, (आयत की लम्बाई) $\overline{SH} = \overline{FQ} = A_{r+1} - A_r = A_{r-1}$ इकाई माप, में प्राप्त होंगे। इन मापों का आरोही क्रम समुच्चय (A) $= [A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}]$ 6 पदी योग-योग संख्या श्रेणी के अवयव प्राप्त होंगे। इन अवयवों का अनु प्रयाग कर दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का दो व्युत्क्रमीय निर्देशांक ज्यामिति में स्थिति क्षेत्रफल एवं समस्त अंगों मापों की गणना एवं सम्मुख कोण $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक ज्ञात कर $m\angle 2\theta$ का बीजांक प्राप्त कर सकते हैं। क्रमशः अवलोकिता कीजिए।

$$1 \blacksquare \text{ चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = |(A_{r-1}^2 + A_{r-1} * A_r - A_r^2)| = |(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)| \\ = |(A_{r+1}^2 + A_{r+1} * A_{r+2} - A_{r+2}^2)| = |(A_{r+2}^2 + A_{r+2} * A_{r+3} - A_{r+3}^2)| \\ = |(A_{r+3}^2 + A_{r+3} * A_{r+4} - A_{r+4}^2)| \text{ होगा।}$$

2 ■ सम्मुख समांतर भुजा युग्म

$$\text{युग्म}_1 \ S_1 = AF = \text{समकोण त्रिभुज AEF का कर्ण} = \sqrt{AE^2 + EF^2} = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ = CH = \text{समकोण त्रिभुज CGH का कर्ण} = \sqrt{CG^2 + GH^2} = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} \\ \text{युग्म}_2 \ S_2 = FC = \text{समकोण त्रिभुज FRC का कर्ण} = \sqrt{FR^2 + RC^2} = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \\ = AH = \text{समकोण त्रिभुज APH का कर्ण} = \sqrt{PH^2 + PA^2} = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2}$$

$$3 \blacksquare \text{ विकर्ण}_1 \ h_1 = AC = \text{आयत ABCD का विकर्ण} \ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{A_{r+4}^2 + A_{r+2}^2}$$

$$\text{विकर्ण}_2 \ h_2 = FH = \text{आयत HQFS का विकर्ण} \ FH = \sqrt{HQ^2 + QF^2} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r-1}^2}$$

4 ■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी लाम्बिक दूरी = (समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल) ÷ (संगत समांतर भुजा के माप) से—

$$1 \bullet \overline{AF} // \overline{CH} \text{ की लाम्बिक दूरी } d_1 = \text{क्षेत्रफल} \div \text{समांतर भुजाओं के माप} \\ = \blacksquare_A \div \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \frac{\blacksquare_A}{\sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2}}$$

$$2 \bullet \overline{AH} // \overline{FC} \text{ की लाम्बिक दूरी } d_2 = \text{क्षेत्रफल} \div \text{समांतर भुजाओं के माप} \\ \blacksquare_A \div \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2} = \frac{\blacksquare_A}{\sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2}}$$

$$5 \blacksquare \ m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta \text{ का त्रिभुजांक } [x \ y \ z] = [\dots \ \blacksquare_A \ S_1 * S_2] \\ = [\sqrt{(S_1 * S_2)^2 - (\blacksquare_A)^2} \ \blacksquare_A \ S_1 * S_2] \\ = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \ \blacksquare_A \ S_1 * S_2]$$

$$6 \blacksquare \ m\angle 2\theta \text{ का बीजांक } [p \ q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \ \blacksquare_A]$$

$$m\angle 2\theta \text{ का आदर्श बीजांक } F[p] = \frac{p}{q} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{\blacksquare_A} \text{ होगा।}$$

$$\text{अथवा } m\angle\theta \text{ का त्रिभुजांक } [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \ \blacksquare_A \ \sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2}] \text{ के सापेक्ष} \\ m\angle\theta \text{ का बीजांक } [p \ q] = [\{ S_1 * S_2 + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \} \ \blacksquare_A]$$

$$7 \blacksquare \ m\angle\theta \text{ की त्रिकोण मिति निष्पत्तियाँ - } \sin \theta = \frac{y}{z} = \frac{\blacksquare_A}{S_1 * S_2}, \cos \theta = \frac{x}{z} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{S_1 * S_2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\blacksquare_A}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}{\blacksquare_A} \\ \sec \theta = \frac{z}{x} = \frac{S_1 * S_2}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{z}{y} = \frac{S_1 * S_2}{\blacksquare_A}$$

8 ■ $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का आकलन

(1) $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$ से.

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = (\sin \theta)^r = \left(\frac{\blacksquare_A}{S_1 * S_2}\right)^r$

(2) $m\angle\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2} + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\} \quad \blacksquare_A]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{2q}{p} = \frac{2\blacksquare_A}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2} + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}}$

(3) बीजांक और बीजांक के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक के सापेक्ष प्राप्त $m\angle\theta$ के मापों के मध्यमान नियम में

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = q\left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2}\right]$

$$= \blacksquare_A \left[\frac{1}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2} + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}} + \frac{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2} + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}}{\{\sqrt{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + (\blacksquare_A)^2} + (A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)\}^2 + (\blacksquare_A)^2} \right]$$

(4) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A]$ के सापेक्ष

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \frac{\blacksquare_A}{2} \left[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (\blacksquare_A)^2} \right]$

(5) $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A]$ के सापेक्ष $m\angle 2\theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$
 $= [(p^2 - q^2) \quad 2pq \quad (p^2 + q^2)]$ से

कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle\theta = \frac{1}{2} * \left[\frac{y}{z}\right] = \left[\frac{pq}{p^2 + q^2}\right] = \left[\frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) * \blacksquare_A}{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)^2 + \blacksquare_A^2}\right] = \text{रेडियन}$

कोण माप इकाई अंश में $m\angle\theta = \frac{630}{11} * (m\angle\theta \text{ का इकाई रेडियन में माप})$ अंश होगा।

टीप $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ के आकलन में सामान्यतः हल क्रमांक (3) कठिनतर गणना में और हल क्रमांक (4) सरल गणना में वास्तविक मान के निकटतर अथवा अतिनिकटतर अथवा वास्तविक मान ही होता है। जबकि हल क्रमांक (1), (2) और (3) विशेषतः आदर्श बीजांक $F(p) > 25$ के प्रति मान्य होने को होगा।

9■ विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति . $A_{r+4} * A_{r+2}$ की आयत ABCD के आधार भुजा AB के शीर्ष A और B का निर्देशांक ज्यामिति स्थिति क्रमशः $(0, 0)$ और $(A_{r+4}, 0)$ माने जाने पर - . विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति के तारतम्य में- **1•** शीर्ष A का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष A का निर्देशांक = $(0, 0)$ **2•** शीर्ष F का निर्देशांक (A_{r+3}, A_{r+1}) **3•** शीर्ष C का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष C का निर्देशांक = (A_{r+4}, A_{r+2}) **4•** शीर्ष H का निर्देशांक (A_{r+2}, A_r) होगा।

ध्यानाकर्षण : उपरोक्त गणना विश्लेषण के अनुसार समुच्चय $(A) = [A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}]$ में r के मान बढ़ते मानों $(r \rightarrow \infty)$ के प्रति $m\angle\theta$ और $m\angle 2\theta$ का मान शून्य के निकटतर होता जावेगा। अर्थात् दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AFCH की आसन्न भुजाएँ समरेख होने की ओर अग्रसर होते हुए विकर्ण AC के माप पर ही उसके प्रति अध्यारोपित होने की ओर अग्रसर होगा।

उदाहरण■ $r=0$ से 6 पदी योग-योग संख्या श्रेणी समुच्चय $(A) = [A_{r-1}, A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] =$

$[A_0, A_r, A_1, A_2, A_3, A_4] = [1, 4, 5, 9, 14, 23]$ लिया जाकर आयत ABCD $A_{r+4} * A_{r+2} = 23 * 9$ वर्ग इकाई माप के अन्तःनिष्ठ समांतर चतुर्भुज AFCH की रचना कीजिए जिसका विकर्ण₁ $AC = \sqrt{A_{r+4}^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{23^2 + 9^2} = \sqrt{610}$ और विकर्ण₂ $HF = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$ इकाई माप की है। उक्त रचित समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समांतर भुजा युग्मों के माप, सम्मुख तुल्य न्यूनकोण $\angle HAF = m\angle HCF = m\angle\theta$ का त्रिभुजांक त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ, बीजांक एवं कोण माप की गणना कीजिए।

बिन्दुवार हल 1■ प्रश्नानुसार प्रतिबंध पर विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति

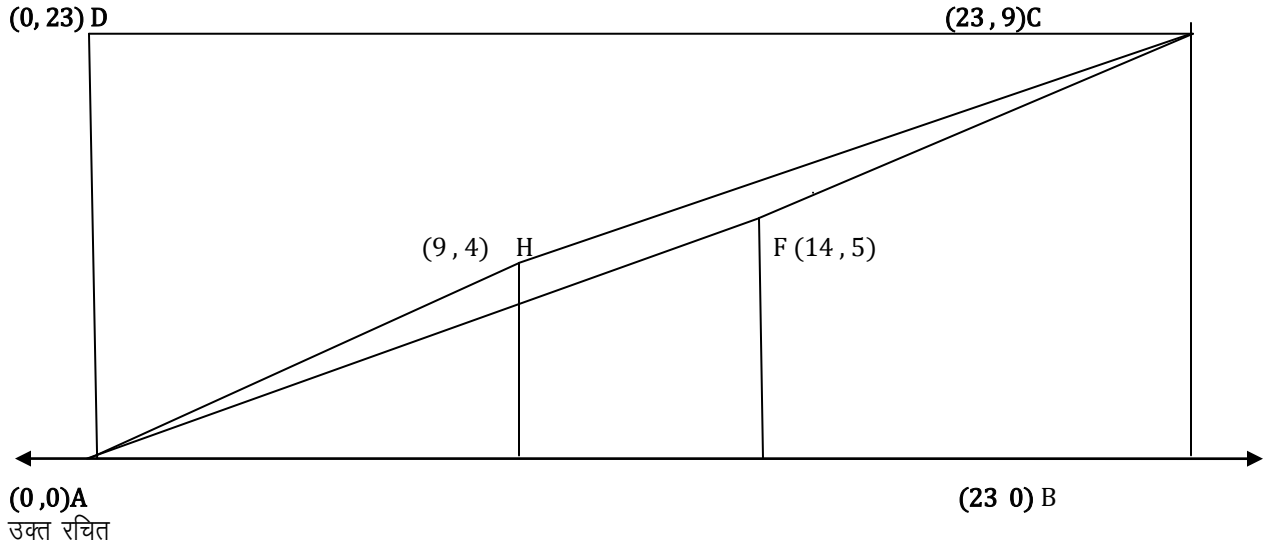
स्थिति $A_{r+4} * A_{r+2} = 23 * 9$ की आयत ABCD के आधार भुजा AB के शीर्ष A और B का निर्देशांक ज्यामिति स्थिति क्रमशः $(0, 0)$ और $(A_{r+4}, 0)$ माने जाने पर - . विलोपित / दर्शित समांतर चतुर्भुज AFCH की निर्देशांक ज्यामिति स्थिति के तारतम्य में- **1•** शीर्ष A का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष A का निर्देशांक = $(0, 0)$

2• शीर्ष F का निर्देशांक $(A_{r+3}, A_{r+1}) = (14, 5)$

3• शीर्ष C का निर्देशांक = आयत ABCD के शीर्ष C का निर्देशांक = $(A_{r+4} \cdot A_{r+2}) = (23 \ 9)$

4• शीर्ष H का निर्देशांक $(A_{r+2}, A_r) = (9 \ 4)$ होगा।

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, समांतर भुजा युग्मों के माप, सम्मुख तुल्य न्यूनकोण $\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ का त्रिभुजांक त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ, बीजांक एवं कोण माप की गणना—



1■ चतुर्भुज क्षेत्र AFCH का क्षेत्रफल $\blacksquare_A = |(A_{r-1}^2 + A_{r-1} * A_r - A_r^2)| = |(A_r^2 + A_r * A_{r+1} - A_{r+1}^2)|$
 $= |(A_{r+1}^2 + A_{r+1} * A_{r+2} - A_{r+2}^2)| = |(A_{r+2}^2 + A_{r+2} * A_{r+3} - A_{r+3}^2)|$
 $= |(A_{r+3}^2 + A_{r+3} * A_{r+4} - A_{r+4}^2)| = 11$ इकाई माप वर्ग।

2■ सम्मुख समांतर भुजा युग्म

युग्म₁ $S_1 = AF = CH = \sqrt{A_{r+3}^2 + A_{r+1}^2} = \sqrt{14^2 + 5^2} = \sqrt{221}$ इकाई माप

युग्म₂ $S_2 = FC = AH = \sqrt{A_{r+2}^2 + A_r^2} = \sqrt{9^2 + 4^2} = \sqrt{97}$ इकाई माप

3■ समांतर भुजाओं की लाम्बिक दूरी लाम्बिक दूरी = (समांतर चतुर्भुज क्षेत्र AHCF का क्षेत्रफल) ÷ (संगत समांतर भुजा के माप) से—

1• $\overline{AF} // \overline{CH}$ की लाम्बिक दूरी $d_1 = \text{क्षेत्रफल} \div \text{समांतर भुजाओं के माप} = 11 \div \sqrt{221} = \frac{11}{\sqrt{221}}$ इकाई माप

2• $\overline{AH} // \overline{FC}$ की लाम्बिक दूरी $d_2 = \text{क्षेत्रफल} \div \text{समांतर भुजाओं के माप} = 11 \div \sqrt{97} = \frac{11}{\sqrt{97}}$ इकाई माप

4■ $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A \quad S_1 * S_2]$
 $= [(14^2 - 2 * 5^2) \quad 11 \quad \sqrt{221} * \sqrt{97}]$
 $= [\quad 146 \quad \quad 11 \quad \sqrt{21437} \quad]$
 $= [\quad 146 \quad \quad 11 \quad 146.4138 \quad]$

5■ $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ की त्रिकोण मिति निष्पत्तियाँ

$\sin \theta = \frac{11}{146.4138} = 0.07513$ $\cos \theta = \frac{146}{146.4138} = 0.99717$

$\tan \theta = \frac{11}{146} = 0.07534$ $\cot \theta = \frac{146}{11} = 13.27272$

$\sec \theta = \frac{146.4138}{146} = 1.00283$ $\csc \theta = \frac{146.4138}{11} = 13.31034$

6■ $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [146 \ 11]$

$m\angle 2\theta$ का आदर्श बीजांक $F[p] = \frac{p}{q} = \frac{146}{11} = 13.27272$ होगा ।

$m\angle \theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(146.4138 + 146) \ 11] = [292.4138 \ 11]$

$m\angle \theta$ का आदर्श बीजांक $F[p] = \frac{p}{q} = \frac{292.4138}{11} = 26.58307$ होगा

7■ $m\angle HAF = m\angle HCF = m\angle \theta$ का आकलन

1• $m\angle \theta$ का आदर्श बीजांक $F[P] = \frac{p}{q} = \frac{292.4138}{11} = 26.58307$ के सापेक्ष

$$m\angle \theta = [\frac{1}{26.58307} + \frac{26.58307}{(26.58307)^2 + 1^2}] = [0.03762 + 0.03756] = 0.07518 \text{ रेडियन} = 4.30576 \text{ अंश}$$

2• $m\angle 2\theta$ का बीजांक $F[p \ q] = (146 \ 11)$ के सापेक्ष

$$m\angle \theta = \frac{1}{2} [\frac{11}{146} + \frac{146 \cdot 11}{146^2 + 11^2}] = \frac{1}{2} [\frac{11}{146} + \frac{146 \cdot 11}{21437}] = \frac{1}{2} [0.07534 + 0.07491]$$

$$= \frac{1}{2} [0.15025] = 0.07512 \text{ रेडियन} = 4.30232 \text{ अंश} ।$$

तलिका 9-6(a)

योग –योग संख्या श्रेढी $(1 \ 1)F$ के प्रति $F_{r+4} * F_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle \theta$ का कोण माप इकाई रेडियन में आकलन मान

A_θ और वास्तविक मान R_θ की तुलना

क्रमांक	r का मान	$m\angle 2\theta$ का आदर्श बीजांक $F(P)$ में $p = (F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2)$	$m\angle \theta$ का आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2} [\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}]$ रेडियन	$m\angle \theta$ का वास्तविक मान $R_\theta = \frac{1}{2} [\text{Sin}^{-1} \frac{2p}{p^2 + 1}]$ रेडियन	$(R_\theta - A_\theta)$ रेडियन
1	2	3	4	5	6
1	0	F(2)	0.450000	0.463647	0.003647
2	1	F(7)	0.141428	0.141892	0.000464
3	2	F(17)	0.058722	0.058755	0.000033
4	3	F(46)	0.021734	0.021735	0.000001
5	4	F(119)	0.008203	0.008203	0.000000
6	5	F(313)	0.00319487	0.00319487	0.00000000
7	6	F(818)	0.001222492	0.001222493	0.00000001
8	7	F(2143)	0.000466635	0.000466635	0.00000000
9	8	F(5609)	0.000178284	0.000178285	0.000000001
10	9	F(14686)	0.000068092	0.000068092	0.000000000
11	10	F(38447)	0.0000260098	0.0000260098	0.000000000
12	11	F(100657)	0.000009334	0.000009334	0.000000000

टीप— $\therefore F(P)$ के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2 + 1}$ होने की ओर अग्रगणित होता है,।

$\therefore$ आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2} [\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 1}] = \frac{1}{p}$ का हल ही यथेष्ट होगा।

तलिका 9-6(b)

योग –योग संख्या श्रेढी (1 3)L के प्रति $L_{r+4} * L_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\theta$ का इकाई रेडियन कोणमाप में आकलन और वास्तविक आकलन मान A_θ वास्तविक मान R_θ की तुलना

क्रमांक	r का मान	$m\angle 2\theta$ का आदर्श बीजांक F(P) में $p = \frac{L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2}{5}$	$m\angle\theta$ का आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1} \right]$ रेडियन	$m\angle\theta$ का वास्तविक मान $R_\theta = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \frac{2p}{p^2+1} \right]$ रेडियन	$(R_\theta - A_\theta)$ रेडियन
1	2	3	4	5	6
1	0	F(2.8)	0.336942468	0.343023940	0.006081472
2	1	F(6.2)	0.159245566	0.159913123	0.000667557
3	2	F(17.8)	0.056081397	0.056120787	0.000039390
4	3	F(45.2)	0.022112729	0.022120285	0.000008556
5	4	F(119.8)	0.008346954	0.008347049	0.000001905
6	5	F(312.2)	0.003201359	0.003203464	0.000002105
7	6	F(818.8)	0.001221298	0.001221298	0.000000000
8	7	F(2142.2)	0.000466809	0.000466809	0.000000000
9	8	F(5609.8)	0.000178259	0.000178259	0.000000000
10	9	F(14685.2)	0.000068095	0.000068095	0.000000000
11	10	F(38447.8)	0.000026009	0.000026009	0.000000000
12	11	F(100656.2)	0.000009934	0.000009934	0.000000000

टीप $\therefore F(P)$ के बढ़ते मानों के प्रति $\frac{1}{p} = \frac{p}{p^2+1}$ होने की ओर अग्रेषित होता है।

$\therefore$ आकलन मान $A_\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1} \right] = \frac{1}{p}$ का हल ही यथेष्ट होगा।

अति महत्वपूर्ण अभिगृहीत

1■ योग-याग संख्या श्रेढी (1 1)F के प्रति $F_{r+4} * F_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\theta$ के दूनें मान $m\angle 2\theta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक एवं योग-योग संख्या श्रेढी (1 3)L के प्रति $L_{r+4} * L_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\beta$ के दूनें मान $m\angle 2\beta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक से प्राप्त अभिगृहीत –

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$ (0 और सम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \bar{4}$ होगा।

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ (विषम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ होगा।

जाँच तालिका अवलोकित कीजिए

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots$ (0 और सम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \bar{4}$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$	$L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$	$[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$	A – B
1	2	3	4	5	6	7
1	0	$5[F_3^2 - 2F_1^2]$	$5[2^2 - 2 * 1^2] = 10$	$L_3^2 - 2L_1^2$	$4^2 - 2 * 1^2 = 14$	$\bar{4}$
2	2	$5[F_5^2 - 2F_3^2]$	$5[5^2 - 2 * 2^2] = 85$	$L_5^2 - 2L_3^2$	$11^2 - 2 * 4^2 = 89$	$\bar{4}$
2	4	$5[F_7^2 - 2F_5^2]$	$5[13^2 - 2 * 5^2] = 595$	$L_7^2 - 2L_5^2$	$29^2 - 2 * 11^2 = 599$	$\bar{4}$
4	6	$5[F_9^2 - 2F_7^2]$	$5[34^2 - 2 * 13^2] = 4090$	$L_9^2 - 2L_7^2$	$76^2 - 2 * 29^2 = 4094$	$\bar{4}$
5	8	$5[F_{11}^2 - 2F_9^2]$	$5[89^2 - 2 * 34^2] = 28045$	$L_{11}^2 - 2L_9^2$	$199^2 - 2 * 76^2 = 28049$	$\bar{4}$

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ---- (विषम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$	$L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$	$[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$	A - B
1	2	3	4	5	6	7
1	1	$5[F_4^2 - 2F_2^2]$	$5[3^2 - 2 * 1^2] = 35$	$L_4^2 - 2L_2^2$	$7^2 - 2 * 3^2 = 31$	4
2	3	$5[F_6^2 - 2F_4^2]$	$5[8^2 - 2 * 3^2] = 230$	$L_6^2 - 2L_4^2$	$18^2 - 2 * 7^2 = 226$	4
2	5	$5[F_8^2 - 2F_6^2]$	$5[21^2 - 2 * 8^2] = 1565$	$L_8^2 - 2L_6^2$	$47^2 - 2 * 18^2 = 1561$	4
4	7	$5[F_{10}^2 - 2F_8^2]$	$5[55^2 - 2 * 21^2] = 10715$	$L_{10}^2 - 2L_8^2$	$123^2 - 2 * 47^2 = 10711$	4
5	9	$5[F_{12}^2 - 2F_{10}^2]$	$5[144^2 - 2 * 55^2] = 73430$	$L_{12}^2 - 2L_{10}^2$	$322^2 - 2 * 123^2 = 7426$	4

2■ योग-योग संख्या श्रेढी (1 1)F एवं योग-योग संख्या श्रेढी (1 3)L के तुल्य क्रमांक में अवयव के वर्ग मानों के प्रति -

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ---- (0 और सम मानों) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ होगा।

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ---- (विषम मानों) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ होगा।

जाँच तालिका अवलोकित कीजिए

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ---- (0 और सम मानों) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = 4$ का अवलोकन

क्रमांक	r	L_r^2	$5F_r^2$	$L_r^2 - 5F_r^2$
1	2	3	4	5
1	0	$L_0^2 = 2^2 = 4$	$5F_0^2 = 5 * 0^2 = 0$	4
2	2	$L_2^2 = 3^2 = 9$	$5F_2^2 = 5 * 1^2 = 5$	4
3	4	$L_4^2 = 7^2 = 49$	$5F_4^2 = 5 * 3^2 = 45$	4
4	6	$L_6^2 = 18^2 = 324$	$5F_6^2 = 5 * 8^2 = 320$	4
5	8	$L_8^2 = 47^2 = 2209$	$5F_8^2 = 5 * 21^2 = 2205$	4

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ---- (विषम मानों) के प्रति $L_r^2 - 5F_r^2 = \bar{4}$ का अवलोकन

क्रमांक	r	L_r^2	$5F_r^2$	$L_r^2 - 5F_r^2$
1	2	3	4	5
1	1	$L_1^2 = 1^2 = 1$	$5F_1^2 = 5 * 1^2 = 5$	$\bar{4}$
2	3	$L_3^2 = 4^2 = 16$	$5F_3^2 = 5 * 2^2 = 20$	$\bar{4}$
3	5	$L_5^2 = 11^2 = 121$	$5F_5^2 = 5 * 5^2 = 125$	$\bar{4}$
4	7	$L_7^2 = 29^2 = 841$	$5F_7^2 = 5 * 13^2 = 845$	$\bar{4}$
5	9	$L_9^2 = 76^2 = 5776$	$5F_9^2 = 5 * 34^2 = 5780$	$\bar{4}$

3■ योग-याग संख्या श्रेढी (1 1)F एवं योग-याग संख्या श्रेढी (1 3)L के तुल्य क्रमांक में दो क्रमागत

अवयव के गुणनफल मानों के प्रति -

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ---- (0 और सम मानों) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2$ होगा।

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ---- (विषम मानों) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \bar{2}$ होगा।

जॉच तालिका अवलोकित कीजिए

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ---- (0 और सम मानों) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = 2$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$L_r * L_{r+1}$	$5 * F_r * F_{r+1}$	$L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1}$
1	2	3	4	5
1	0	$L_0 * L_1 = 2*1=2$	$5*F_0 * F_1 = 5*0*1=0$	$=2$
2	2	$L_2 * L_3 = 3*4=12$	$5*F_2 * F_3 = 5*1*2=10$	2
3	4	$L_4 * L_5 = 7*11=77$	$5*F_4 * F_5 = 5*3*5=75$	2
4	6	$L_6 * L_7 = 18*29 = 522$	$5*F_6 * F_7 = 5*8*13=520$	2
5	8	$L_8 * L_9 = 47*76 = 3572$	$5*F_8 * F_9 = 5*21*34=3570$	2

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ---- (विषम मानों) के प्रति $L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1} = \bar{2}$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$L_r * L_{r+1}$	$5 * F_r * F_{r+1}$	$L_r * L_{r+1} - 5 * F_r * F_{r+1}$
1	2	3	4	5
1	1	$L_1 * L_2 = 1*3 = 3$	$5*F_1 * F_2 = 5*1*1 = 5$	$\bar{2}$
2	3	$L_3 * L_4 = 4*7 = 28$	$5*F_3 * F_4 = 5*2*3 = 30$	$\bar{2}$
3	5	$L_5 * L_6 = 11*18 = 198$	$5*F_5 * F_6 = 5*5*8 = 200$	$\bar{2}$
4	7	$L_7 * L_8 = 29*47 = 1363$	$5*F_7 * F_8 = 5*13*21 = 1365$	$\bar{2}$
5	9	$L_9 * L_{10} = 76*123 = 9348$	$5*F_9 * F_{10} = 5*34*55 = 9350$	$\bar{2}$

4■ ($r < x$) के प्रति योग-योग संख्या श्रेढ़ी (1 1)F एवं योग-योग संख्या श्रेढ़ी (1 3)L के rवें और xवें क्रमांक के युग्मीय अवयव के (F_r, L_r) और (F_x, L_x) के प्रति -

r	x	$L_x * L_r - 5 * F_x * F_r$ का हलमान	$L_x * F_r - F_x * L_r$ का हलमान
विषम	विषम	$\bar{2} * L_{x-r}$	$2 * F_{x-r}$
सम	सम	$2 * L_{x-r}$	$\bar{2} * F_{x-r}$
विषम	सम	$2 * L_{x-r}$	$\bar{2} * F_{x-r}$
सम	विषम	$\bar{2} * L_{x-r}$	$2 * F_{x-r}$

साधित उदाहरण

r और x दोनों सम संख्या क्रमांक होने के प्रति-

$$\begin{aligned}
 L_{10} * L_4 - 5 * F_{10} * F_4 &= 123 * 7 - 5 * 55 * 3 = 861 - 825 = 36 = 2 * 18 \\
 &= 2 * L_6 = 2 * L_{10-4} \\
 L_{10} * F_4 - F_{10} * L_4 &= 123 * 3 - 55 * 7 = 369 - 385 = \bar{16} = \bar{2} * 8 \\
 &= \bar{2} * F_6 = \bar{2} * F_{10-4}
 \end{aligned}$$

r और x दोनों विषम संख्या क्रमांक होने के प्रति-

$$\begin{aligned}
 L_7 * L_3 - 5 * F_7 * F_3 &= 29 * 4 - 5 * 13 * 2 = 116 - 130 = \bar{14} = \bar{2} * 7 \\
 &= \bar{2} * L_4 = \bar{2} * L_{7-3} \\
 L_7 * F_3 - F_7 * L_3 &= 29 * 2 - 13 * 4 = 58 - 52 = 6 = 2 * 3
 \end{aligned}$$

$$= 2 * F_4 = 2 * F_{7-3}$$

r और x क्रमशः विषम और सम संख्या क्रमांक होने के प्रति—

$$L_9 * L_4 - 5 * F_9 * F_4 = 76 * 7 - 5 * 34 * 3 = 532 - 510 = 22 = 2 * 11$$

$$= 2 * L_5 = 2 * L_{9-4}$$

$$L_9 * F_4 - F_9 * L_4 = 76 * 3 - 34 * 7 = 228 - 238 = \overline{10} = \overline{2} * 4$$

$$= \overline{2} * F_5 = \overline{2} * F_{9-4}$$

r और x क्रमशः सम और विषम संख्या क्रमांक होने के प्रति—

$$L_{10} * L_3 - 5 * F_{10} * F_3 = 123 * 4 - 5 * 55 * 2 = 492 - 550 = \overline{58} = \overline{2} * 29$$

$$= \overline{2} * L_7 = \overline{2} * L_{10-3}$$

$$L_{10} * F_3 - F_{10} * L_3 = 123 * 2 - 55 * 4 = 246 - 220 = 26 = 2 * 13$$

$$= 2 * F_7 = 2 * F_{10-3}$$

5■ योग-याग संख्या श्रेढी $(1 \ 1)F$ के प्रति $F_{r+4} * F_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\theta$ के दूनें मान $m\angle 2\theta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक एवं योग-याग संख्या श्रेढी $(1 \ 3)L$ के प्रति $L_{r+4} * L_{r+2}$ के आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित दर्शित अथवा विलोपित समांतर चतुर्भुज के सम्मुख तुल्य न्यून कोण $m\angle\beta$ के दूनें मान $m\angle 2\beta$ के प्रति प्राप्त आदर्श बीजांक से प्राप्त अभिगृहीत —

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ----- (0 और सम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \overline{4}$ होगा।

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ होगा।

जॉच तालिका अवलोकित कीजिए

1• $r = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ ----- (0 और सम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = \overline{4}$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$	$L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$	$[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$	A - B
1	2	3	4	5	6	7
1	0	$5[F_3^2 - 2F_1^2]$	$5[2^2 - 2 * 1^2] = 10$	$L_3^2 - 2L_1^2$	$4^2 - 2 * 1^2 = 14$	$\overline{4}$
2	2	$5[F_5^2 - 2F_3^2]$	$5[5^2 - 2 * 3^2] = 85$	$L_5^2 - 2L_3^2$	$11^2 - 2 * 3^2 = 89$	$\overline{4}$
2	4	$5[F_7^2 - 2F_5^2]$	$5[13^2 - 2 * 5^2] = 595$	$L_7^2 - 2L_5^2$	$29^2 - 2 * 5^2 = 599$	$\overline{4}$
4	6	$5[F_9^2 - 2F_7^2]$	$5[34^2 - 2 * 13^2] = 4090$	$L_9^2 - 2L_7^2$	$76^2 - 2 * 13^2 = 4094$	$\overline{4}$
5	8	$5[F_{11}^2 - 2F_9^2]$	$5[89^2 - 2 * 34^2] = 28045$	$L_{11}^2 - 2L_9^2$	$199^2 - 2 * 76^2 = 28049$	$\overline{4}$

2• $r = 1, 3, 5, 7, 9, 11$ ----- (विषम मानों) के प्रति $5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] - [L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = 4$ का अवलोकन

क्रमांक	r	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2]$	$5[F_{r+3}^2 - 2F_{r+1}^2] = A$	$L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2$	$[L_{r+3}^2 - 2L_{r+1}^2] = B$	A - B
1	2	3	4	5	6	7
1	1	$5[F_4^2 - 2F_2^2]$	$5[3^2 - 2 * 1^2] = 35$	$L_4^2 - 2L_2^2$	$7^2 - 2 * 1^2 = 31$	4
2	3	$5[F_6^2 - 2F_4^2]$	$5[8^2 - 2 * 3^2] = 230$	$L_6^2 - 2L_4^2$	$18^2 - 2 * 3^2 = 226$	4
2	5	$5[F_8^2 - 2F_6^2]$	$5[21^2 - 2 * 8^2] = 1565$	$L_8^2 - 2L_6^2$	$47^2 - 2 * 8^2 = 1561$	4
4	7	$5[F_{10}^2 - 2F_8^2]$	$5[55^2 - 2 * 21^2] = 10715$	$L_{10}^2 - 2L_8^2$	$123^2 - 2 * 21^2 = 10711$	4
5	9	$5[F_{12}^2 - 2F_{10}^2]$	$5[144^2 - 2 * 55^2] = 73430$	$L_{12}^2 - 2L_{10}^2$	$322^2 - 2 * 123^2 = 7426$	4

-----09-----

अध्याय -10

A_{r+4} * A_{r+2} आयत के अन्तःनिष्ठ समान्तर चतुर्भुज की रचना

समान्तर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन अध्ययन से स्पष्ट हो चुका है कि इनके न्यून कोण माप में अन्तरित सम्मुख शीर्ष युग्म आयत के सम्मुख शीर्ष युग्म होते हैं। जिसे दृष्टिगत करते हुए मानक प्रतिबंध पर A_{r+4} * A_{r+2} आयत के अन्तःनिष्ठ ऐसे समान्तर चतुर्भुज की रचना किया जा सकता है जिसका क्षेत्रफल ■_A इकाई माप वर्ग और (x > y) के प्रति आसन्न भुजाओं के माप $\sqrt{x}$ और $\sqrt{y}$ इकाई माप की हो।

[1] समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रतिबंध

माना कि (a < b) के प्रति योग-योग श्रेढी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय A = [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] = [(b-a), a, b, (a+b)] हो तो आसन्न भुजाओं में – बड़ी भुजा का माप S₁ = $\sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{x}$, और छोटी भुजा का माप S₂ = $\sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{y}$ होगा।

तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ■_A = |a² + a * b - b²| ⇒ a² + a * b - b² = ± ■_A

टीप उक्त प्रतिबंध में a, b, x, y और ■_A शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या होगी।

[2] समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

प्रक्रम 1 a और b का मान ज्ञात करने S₁ = $\sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{x}$ ⇒ S₁² = a² + (a+b)² = x
⇒ S₁² = 2a² + 2ab + b² = x ----- समिका (1)

S₂ = $\sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{y}$ ⇒ S₂² = (b-a)² + b² = y
⇒ S₂² = 2b² - 2ab + a² = y ----- समिका (2)

समिका (1) + समिका (2) से S₁² + S₂² = 3a² + 3b² = x+y ∴ a² + b² = $\frac{x+y}{3}$ ----- समिका (3)

समिका (1) - समिका (2) से S₁² - S₂² = a² + 4ab - b² = x - y ⇒ (a² + ab - b²) + 3ab = x - y
⇒ (± ■_A) + 3ab = x - y
⇒ 3ab = x - y ± ■_A

∴ ab के दो हल मान $\frac{x-y+■A}{3}$ और $\frac{x-y-■A}{3}$ प्राप्त होंगे। जिनमें से जो हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है लिया जाय। ----- समिका (4)

ध्यानाकर्षण ab के दो हल मान $\frac{x-y+■A}{3}$ और $\frac{x-y-■A}{3}$ में यदि ab = $\frac{x-y+■A}{3}$ का हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है तो समान्तर चतुर्भुज का दर्शन का नियम और यदि ab = $\frac{x-y-■A}{3}$ का हल मान शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या अथवा दशमलव निरूपण में शांत दशमलव संख्या देता है तो समान्तर चतुर्भुज का विलोपन का नियम प्रतिपादित होगा।

समिका (3) में $\frac{x+y}{3} = m$ दर्शित किये जाने पर a² + b² = m ----- समिका (5) तथा

समिका (4) में चयन प्रक्रिया नियम से ab = n ----- समिका (6) प्राप्त होंगे।

तब (a+b)² = (a² + b²) + 2ab ⇒ (a+b)² = m + 2n ⇒ a+b = $\sqrt{m+2n}$ ----- समिका (7) ...

चूँकि प्रतिबंधानुसार (a < b) है।

∴ (b-a)² = (a² + b²) - 2ab ⇒ (b-a)² = m - 2n ⇒ b-a = $\sqrt{m-2n}$ ----- समिका (8) ...

समिका (7) + समिका (8) से 2b = $\sqrt{m+2n} + \sqrt{m-2n}$ ⇒ b = $\frac{\sqrt{m+2n} + \sqrt{m-2n}}{2} = A_{r+2}$ इकाई माप

तथा समिका (7) - समिका (8) से 2a = $\sqrt{m+2n} - \sqrt{m-2n}$ ⇒ a = $\frac{\sqrt{m+2n} - \sqrt{m-2n}}{2} = A_{r+1}$ इकाई माप प्राप्त होंगे।

प्रक्रम 2 a और b के प्राप्त हल मान से योग-योग संख्या श्रेणी के 5 क्रमागत अवयव क्रमशः $A_r = (b - a)$, $A_{r+1} = a$, $A_{r+2} = b$, $A_{r+3} = (a + b)$, $A_{r+4} = (a + 2b)$ विस्तारित कीजिए।

प्रक्रम 3 $AB=CD=A_{r+4}$ तथा $AD=BC=A_{r+2}$ इकाई माप का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

प्रक्रम 4 प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर $BP=DQ=A_{r+2}$ इकाई माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब $PR = QS = A_{r+1}$ इकाई माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

प्रक्रम 6 लम्ब $PR = QS$ के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें $AR \parallel$ और $= CS$ तथा $AS \parallel$ और $= CR$ होगा।

अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में बड़ी भुजा युग्म $AR \parallel$ और $= CS$ का माप $S_1 = \sqrt{x} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$
और छोटी भुजा युग्म $AS \parallel$ और $= CR$ का माप $S_2 = \sqrt{y} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

2■ विकर्ण युग्म में बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2}$
छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ [$A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (2a - b)$ होगा।]

3■ $m\angle 2\theta$ का बीजांक [p q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) ■_A]

4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर में)
 $m\angle 2\theta$ का बीजांक [p q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) ■_A] के सापेक्ष

$$1\bullet \text{ कोण माप इकाई रेडियन में } m\angle \theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \frac{■_A}{2} \left[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (■_A)^2} \right]$$

$$2\bullet \text{ कोण माप इकाई अंश में } m\angle \theta = \frac{630}{11} * \frac{■_A}{2} \left[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (■_A)^2} \right]$$

$$= \frac{315 * ■_A}{11} \left[\frac{1}{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2} + \frac{(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2)}{\{A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2\}^2 + (■_A)^2} \right]$$

उदाहरण 1■ विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 0.11 वर्ग सेन्टी मीटर तथा भुजा $AS = RC = \sqrt{28.61}$ सेन्टी मीटर एवं $SC = AR = \sqrt{11.05}$ सेन्टी मीटर है।

हल माना कि $(a < b)$ के प्रति योग-योग श्रेणी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय $A = [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] = [(b-a), a, b, (a+b)]$ हो तो आसन्न भुजाओं में –

$$\text{बड़ी भुजा का माप } S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{28.61} \text{ सेन्टी मीटर}$$

$$\text{और छोटी भुजा का माप } S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{11.05} \text{ सेन्टी मीटर होगा।}$$

$$\text{तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल } ■_A = |a^2 + a * b - b^2| = 0.11 \text{ वर्ग सेन्टी मीटर}$$

$$\Rightarrow a^2 + a * b - b^2 = \pm 0.11$$

समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

प्रक्रम 1 a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{28.61} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 28.61$
 $\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 28.61$ ----- समिका (1)

$$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{11.05} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 11.05$$

$$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 11.05$$
----- समिका (2)

$$\text{समिका (1) + समिका (2) से } S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 39.66 \therefore a^2 + b^2 = \frac{39.66}{3} = 13.22$$
----- समिका (3)

$$\text{समिका (1) - समिका (2) से } S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 17.56 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 17.56$$

$$\Rightarrow (\pm 0.11) + 3ab = 17.56$$

$$\Rightarrow (3ab = 17.56 \pm 0.11$$

$\therefore ab$ के दो हल मान $\frac{17.56+0.11}{3} = \frac{17.67}{3} = 5.89$ शांत दशमलव भिन्न है और $\frac{17.56-0.11}{3} = \frac{17.45}{3} = 5.816666\ldots$ अशांत दशमलव भिन्न है। अतः $ab=5.89$ मान्य होगा ----- समिका (4)

$$\text{तब } (a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 13.22 + 2 * 5.89 = 25.00$$

$$\therefore a+b=\sqrt{25.00} = 5 \text{ ----- समिका (5) ...}$$

चूँकि प्रतिबंधानुसार ($a < b$) है।

$$\text{पुनः } (b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (b-a)^2 = 13.22 - 2 * 5.89 = 1.44$$

$$\therefore b-a=\sqrt{1.44} = 1.2 \text{ ----- समिका (6) ...}$$

$$\text{समिका (5) + समिका (6) से } 2b = 6.2 \therefore b = 3.1 \text{ सेन्टी मीटर } = A_{r+2}$$

$$\text{तथा समिका (5) - समिका (6) से } 2a = 3.8 \therefore a = 1.9 \text{ सेन्टी मीटर } = A_{r+1} \text{ होंगे।}$$

प्रक्रम 2 $a = A_{r+1} = 1.9$ से.मी और $b = A_{r+2} = 3.1$ से योग-योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव

$$[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [1.2, 1.9, 3.1, 5.0, 8.1] \text{ विस्तारित कीजिए।}$$

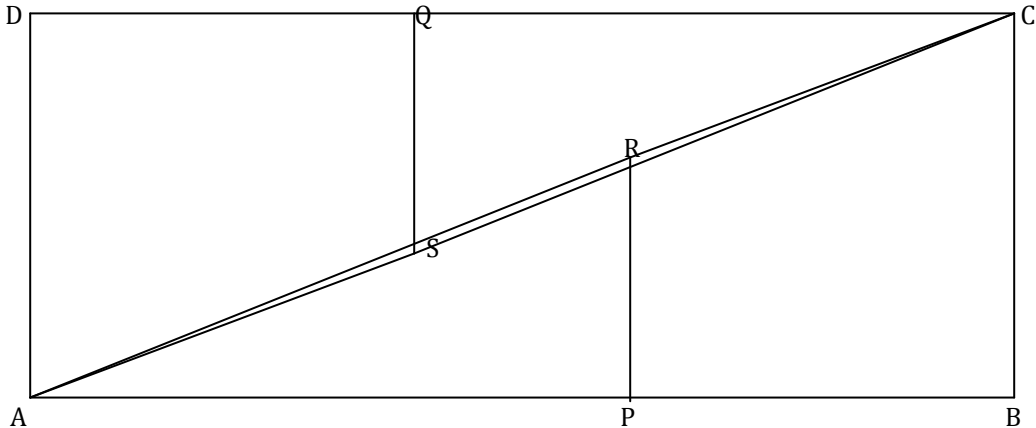
प्रक्रम 3 $AB=CD=A_{r+4} = 8$ से.मी जथा $AD=BC=A_{r+2}=3.1$ से.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

प्रक्रम 4 प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर $BP=DQ=A_{r+2} = 3.1$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब $PR = QS = A_{r+1} = 1.9$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

प्रक्रम 6 लम्ब $PR = QS$ के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें $AR \parallel CS$ और $AS \parallel CR$ होगा।

पैमाना 1 सेन्टी मीटर = 10 ग्रीड लाइन।



अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में बड़ी भुजा युग्म $AR \parallel CS$ का माप $S_1 = \sqrt{28.61} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$

$$\text{और छोटी भुजा युग्म } AS \parallel CR \text{ का माप } S_2 = \sqrt{11.05} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$$

2■ विकर्ण युग्म में बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{(3.1)^2 + (8.1)^2} = \sqrt{75.22}$ से.मी

$$\text{छोटा विकर्ण RS का माप } = \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2} \quad [A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (1.9 - 1.2) = 0.7 \text{ होगा।}]$$

$$= \sqrt{(0.7)^2 + (1.9)^2} = \sqrt{4.10} \text{ से.मी}$$

$$\mathbf{3■ m\angle 2\theta \text{ का बीजांक } [p \quad q] = [(A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2) \quad \blacksquare_A] = [(5^2 - 2 * 1.9^2) \quad 0.11]}$$

$$= [17.78 \quad 0.11] = [1778 \quad 11]$$

4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर में) -

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(1778 \ 11)]$ के सापेक्ष-

$$1\bullet\text{-कोण माप इकाई रेडियन में } m\angle\theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2} \right] = \frac{11}{2} \left[\frac{1}{1778} + \frac{1778}{1778^2+11^2} \right] = 0.000618764 \text{ रेडियन}$$

$$2\bullet\text{-कोण माप इकाई अंश में } m\angle\theta = \frac{630}{11} * 0.000618764 = 0.0354 \text{ अंश}$$

उदाहरण 2■ विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 31 वर्ग सेंटी मीटर तथा भुजा $AS = RC = \sqrt{425}$ सेंटी मीटर एवं $SC = AR = \sqrt{130}$ सेंटी मीटर है।

हल माना कि $(a < b)$ के प्रति योग-योग श्रेढी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय $A = [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] = [(b-a), a, b, (a+b)]$ हो तो आसन्न भुजाओं में - बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{425}$ सेंटी मीटर और छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{130}$ सेंटी मीटर होगा।

तथा समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\blacksquare_A = |a^2 + a * b - b^2| = 31$ वर्ग सेंटी मीटर

$$\Rightarrow a^2 + a * b - b^2 = \pm 31$$

समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

$$\text{प्रक्रम 1 } a \text{ और } b \text{ का मान ज्ञात करने } S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{425} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 425$$

$$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 425 \text{----- समिका (1)}$$

$$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{130} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 130$$

$$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 130 \text{----- समिका (2)}$$

$$\text{समिका (1)+ समिका (2) से } S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 555 \therefore a^2 + b^2 = \frac{555}{3} = 185 \text{----- समिका (3)}$$

$$\text{समिका (1)- समिका (2) से } S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 295 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 295$$

$$\Rightarrow (\pm 31) + 3ab = 295$$

$$\Rightarrow 3ab = 295 \pm 31$$

$$\therefore ab \text{ के दो हल मान } \frac{295+31}{3} = \frac{326}{3} = 108.666 \text{ -- अशांत दशमलव भिन्न है और } \frac{295-31}{3} = \frac{264}{3} = 88$$

$$\text{अतः } ab=88 \text{ मान्य होगा ----- समिका (4)}$$

$$\text{तब } (a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 185 + 2 * 88 = 185+176=361$$

$$\therefore a+b=\sqrt{361} \Rightarrow a+b=19 \text{----- समिका (5) ...}$$

चूँकि प्रतिबंधानुसार $(a < b)$ है।

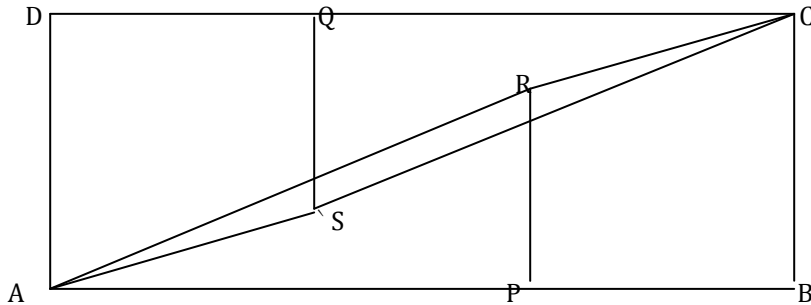
$$\text{पुनः } (b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (b-a)^2 = 185 - 2 * 88 = 185 - 176 = 9$$

$$\therefore b-a=\sqrt{9} \Rightarrow b-a=3 \text{----- समिका (6) ...}$$

$$\text{समिका (5) + समिका (6) से } 2b = 22 \therefore b = 11 \text{ सेंटी मीटर } = A_{r+2}$$

$$\text{तथा समिका (5) - समिका (6) से } 2a = 16 \therefore a = 8 \text{ सेंटी मीटर } = A_{r+1} \text{ होंगे।}$$

पैमाना 1 सेंटी मीटर = 1 ग्रीड लाइन।



प्रक्रम 2 $a = A_{r+1} = 8$ से.मी और $b = A_{r+2} = 11$ से योग-योग संख्या श्रेढ़ी के 5 क्रमागत अवयव $[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [3, 8, 11, 19, 30]$ विस्तारित कीजिए।

प्रक्रम 3 $AB=CD=A_{r+4} = 30$ से.मी जथा $AD=BC=A_{r+2} = 11$ से.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

प्रक्रम 4 प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर $BP=DQ=A_{r+2} = 11$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब $PR = QS = A_{r+1} = 8$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

प्रक्रम 6 लम्ब $PR = QS$ के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें $AR = CS$ और $AS = CR$ होगा।

अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में बड़ी भुजा युग्म AR और CS का माप $S_1 = \sqrt{425} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$
और छोटी भुजा युग्म AS और CR का माप $S_2 = \sqrt{130} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

2■ विकर्ण युग्म में बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{30^2 + 11^2} = \sqrt{1021}$ से.मी
छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ $[A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (8 - 3) = 5 \text{ होगा}]$
 $= \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{89}$ से.मी

3■ $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2] \quad \blacksquare_A = [(19^2 - 2 \cdot 8^2) \ 31]$
 $= [(361 - 128) \ 31] = [233 \ 31]$

4 ■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर में) –
 $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(233 \ 31)]$ के सापेक्ष–

1• कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle \theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \frac{31}{2} \left[\frac{1}{233} + \frac{233}{233^2 + 31^2} \right] = 0.131890$ रेडियन

2• कोण माप इकाई अंश में $m\angle \theta = \frac{630}{11} \cdot 0.131890 = 7.5537$ अंश

उदाहरण 3■ विश्लेषित रचना प्रक्रम दर्शित करते हुए समांतर चतुर्भुज ASCR की रचना कीजिए जिसका क्षेत्रफल 31 वर्ग सेन्टी मीटर तथा भुजा $AS = RC = \sqrt{130}$ सेन्टी मीटर एवं $SC = AR = \sqrt{89}$ सेन्टी मीटर है।

हल माना कि $(a < b)$ के प्रति योग-योग श्रेढ़ी के चार क्रमागत अवयव का समुच्चय $A = [A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}] = [(b-a), a, b, (a+b)]$ हो तो आसन्न भुजाओं में – बड़ी भुजा का माप $S_1 = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2} = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{130}$ सेन्टी मीटर और छोटी भुजा का माप $S_2 = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2} = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{89}$ सेन्टी मीटर होगा।

तथा समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $\blacksquare_A = |a^2 + a \cdot b - b^2| = 31$ वर्ग सेन्टी मीटर

$$\Rightarrow a^2 + a \cdot b - b^2 = \pm 31$$

समान्तर चतुर्भुज की रचना प्रक्रम

प्रक्रम 1 a और b का मान ज्ञात करने $S_1 = \sqrt{a^2 + (a+b)^2} = \sqrt{130} \Rightarrow S_1^2 = a^2 + (a+b)^2 = 130$

$$\Rightarrow S_1^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 130 \text{----- समिका (1)}$$

$$S_2 = \sqrt{(b-a)^2 + b^2} = \sqrt{89} \Rightarrow S_2^2 = (b-a)^2 + b^2 = 89$$

$$\Rightarrow S_2^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 89 \text{----- समिका (2)}$$

समिका (1)+ समिका (2) से $S_1^2 + S_2^2 = 3a^2 + 3b^2 = 219 \therefore a^2 + b^2 = \frac{219}{3} = 73 \text{----- समिका (3)}$

समिका (1)– समिका (2) से $S_1^2 - S_2^2 = a^2 + 4ab - b^2 = 41 \Rightarrow (a^2 + ab - b^2) + 3ab = 41$

$$\Rightarrow (\pm 31) + 3ab = 41$$

$$\Rightarrow 3ab = 41 \pm 31$$

∴ ab के दो हल मान $\frac{41+31}{3} = \frac{72}{3} = 24$ और $\frac{41-31}{3} = \frac{10}{3} = 3.3333\ldots$ अंशान्त दशमलव में है।

अतः $ab=24$ मान्य होगा ----- समिका (4)

तब $(a+b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab \Rightarrow (a+b)^2 = 73 + 2 * 24 = 73 + 48 = 121$

∴ $a+b=\sqrt{121} \Rightarrow a+b=11$ ----- समिका (5) ...

चूँकि प्रतिबंधानुसार ($a < b$) है।

पुनः $(b-a)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (b-a)^2 = 73 - 2 * 24 = 73 - 48 = 25$

∴ $b-a=\sqrt{25} \Rightarrow b-a=5$ ----- समिका (6) ...

समिका (5) + समिका (6) से $2b = 16 \therefore b = 8$ सेन्टी मीटर $=A_{r+2}$

तथा समिका (5) - समिका (6) से $2a = 6 \therefore a = 3$ सेन्टी मीटर $=A_{r+1}$ होंगे।

प्रक्रम 2 $a = A_{r+1} = 3$ से.मी और $b = A_{r+2} = 8$ से योग-योग संख्या श्रेणी के 5 क्रमागत अवयव $[A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, A_{r+3}, A_{r+4}] = [5, 3, 8, 11, 19]$ विस्तारित कीजिए।

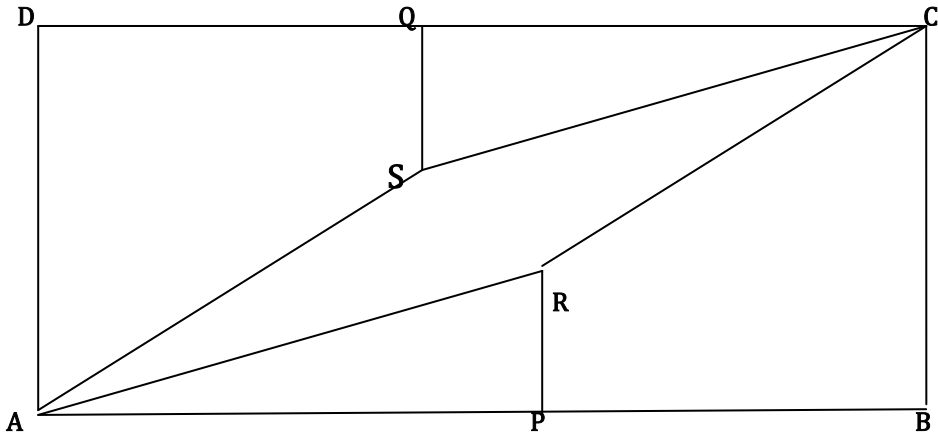
प्रक्रम 3 $AB=CD=A_{r+4} = 19$ से.मी तथा $AD=BC=A_{r+2} = 8$ से.मी. का आयत ABCD की रचना पूरा कीजिए।

प्रक्रम 4 प्राप्त आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष B और D से क्रमशः भुजा AB और CD पर $BP=DQ=A_{r+2} = 8$ से.मी. माप का रेखाखण्ड प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 रेखाखण्ड BP और DQ के शीर्ष बिन्दु क्रमशः P और Q पर क्रमशः भुजा AB और CD के प्रति लम्ब $PR = QS = A_{r+1} = 3$ से.मी. माप में आयत ABCD के अन्तिष्ठ अन्तरित कीजिए।

प्रक्रम 6 लम्ब $PR = QS$ के शीर्ष R और S को आयत ABCD के सम्मुख शीर्ष A और C से मिलाइये और अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR प्राप्त कीजिए। जिसमें AR और CS तथा AS और CR होगा।

पैमाना 1 सेन्टी मीटर = 2 ग्रीड लाइन।



अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ASCR के प्रति

1■ समान्तर और बराबर भुजा युग्म में बड़ी भुजा युग्म $AR \parallel CS$ का माप $S_1 = \sqrt{130} = \sqrt{A_{r+1}^2 + A_{r+3}^2}$
और छोटी भुजा युग्म $AS \parallel CR$ का माप $S_2 = \sqrt{89} = \sqrt{A_r^2 + A_{r+2}^2}$

2■ विकर्ण युग्म में बड़ा विकर्ण AC का माप $= \sqrt{A_{r+2}^2 + A_{r+4}^2} = \sqrt{19^2 + 8^2} = \sqrt{425}$ से.मी
छोटा विकर्ण RS का माप $= \sqrt{A_{r-1}^2 + A_{r+1}^2}$ [$A_{r-1} = A_{r+1} - A_r = (3 - 5) = -2$ होगा]
 $= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ से.मी

3■ $m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [A_{r+3}^2 - 2A_{r+1}^2 \quad \blacksquare_A]$
 $= [(11^2 - 2 * 3^2) \quad 31]$
 $= [(121 - 18) \quad 31] = [103 \quad 31]$

4■ बराबर माप के सम्मुख न्यून के माप का आकलन (वास्तविक मान के अतिसन्निकट होने की ओर में)

$m\angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(103 \ 31)]$ के सापेक्ष

- 1• कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle \theta = \frac{q}{2} \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+q^2} \right] = \frac{31}{2} \left[\frac{1}{103} + \frac{103}{103^2+31^2} \right] = 0.288471$ रेडियन
- 2• कोण माप इकाई अंश में $m\angle \theta = \frac{630}{11} * 0.288471 = 16.521520 = 16.52$ अंश

[2] गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी और समकोण त्रिभुज

मेरी कृति छत्तीसगढ़ गणित दर्शन के अध्याय 23 में गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी का अध्ययन किया गया है। जिसके तहत विदित कराया गया है कि— योग-योग संख्या श्रेणी (पद क्रमांक $t \geq 3$ के प्रति प्रत्येक पदमान अपने पूर्व के दो पदमानों का योगमान होता है।) प्राप्त किया गया है। जिसके सरल विस्तार में

1. फिबोनिकी संख्या श्रेणी (1 1) F का सरल विस्तार $[1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots]$
2. लुकस संख्या श्रेणी (1 3) L का सरल विस्तार $[1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots]$
3. बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेणी (a b) A का सरल विस्तार $[a, b, (a+b), (a+2b), (2a+3b), (3a+5b), (5a+8b), (8a+13b), (13a+21b), \dots]$ दर्शित है।

इनके प्रति यह भी विदित कराया है कि— पद क्रमांक r के बढ़ते मानों के क्रमागत दो अवयव r वाँ एवं $(r+1)$ वाँ पदमान के प्रति $[(r+1)$ वाँ पदमान] : $[r$ वाँ पदमान] का हलमान स्वर्णानुपात $(\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339)$ होता के निकटतर हाने की ओर होता है।

गुणात्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी

श्रेणी अध्ययन विकास क्रम में फिबोनिकी संख्या श्रेणी (1 1)F एवं लुकस संख्या श्रेणी (1 3)L के अचयव संयोजन से ऐसे संख्या श्रेणी से परिचित होने जा रहे हैं जिसका r वाँ पदमान $(L_{r-1} + \sqrt{5} * F_{r-1})$ होगा। जो श्रेणी विस्तार में योग-योग श्रेणी होने के साथ स्वर्णानुपात $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ के सर्वानुपात में गुणोत्तर श्रेणी भी होता है। अतः गुणोत्तर सह योग-योग नाम से परिभाषित करना यथेष्ट होगा।

अध्ययन संकेत और विस्तार—

1■ योग-योग संख्या श्रेणी के दृष्टि में—

अध्ययन संकेत— $[2 \ (1 + \sqrt{5})]M$ प्रथम पद $=M_1=2, = (L_0 + \sqrt{5} * F_0)$

दूसरा पद $=M_2=(1 + \sqrt{5})=(L_1 + \sqrt{5} * F_1)$ — n वाँ पद $वि=M_n = (L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1})$

श्रेणी विस्तार

$[M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, \dots, M_n]$ के प्रति क्रमशः—

$[2, (1 + \sqrt{5}), (3 + \sqrt{5}), (4 + 2 * \sqrt{5}), (7 + 3 * \sqrt{5}), (11 + 5 * \sqrt{5}), \dots]$

$(L_{r-1} + \sqrt{5} * F_{r-1}), \dots, (L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1})]$

2■ गुणोत्तर संख्या श्रेणी के दृष्टि में—

अध्ययन संकेत प्रथम पद $a=2$ सर्वानुपात $r = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ n वाँ पद $M_n = 2 * r^{n-1}$

श्रेणी विस्तार—

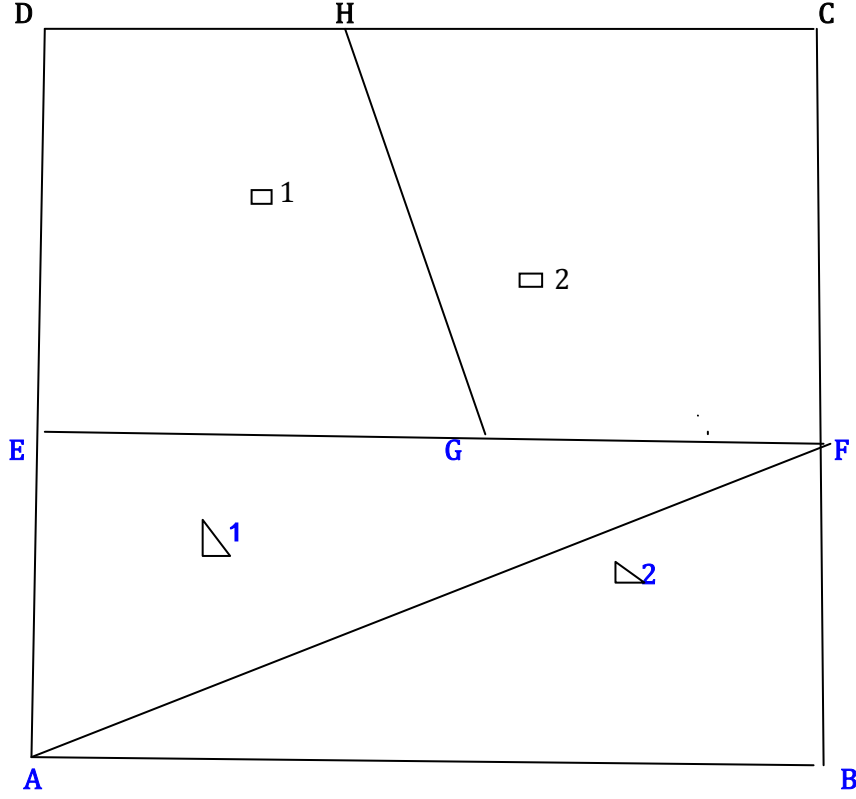
$[M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, \dots, M_n]$ के प्रति क्रमशः—

$[2 * r^0, 2 * r^1, 2 * r^2, \dots, 2 * r^{n-3}, 2 * r^{n-2}, 2 * r^{n-1}]$

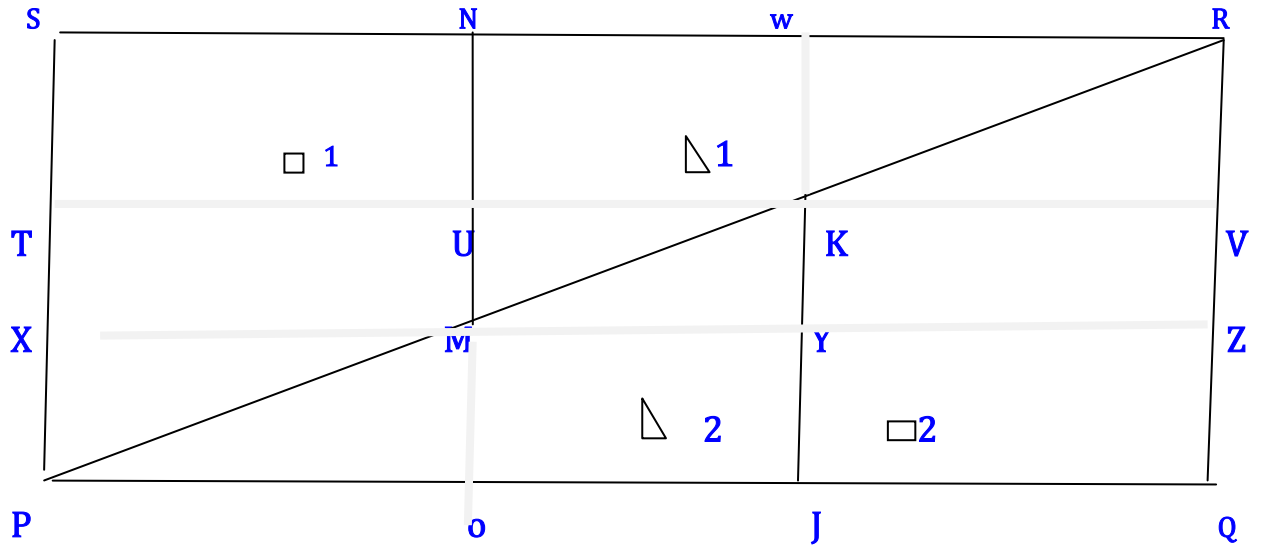
उपरोक्त विश्लेषण के तहत गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेणी का n वाँ पद

$$=M_n = 2 * r^{n-1} = 2 * \left\{ \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right\}^{n-1} = [(L_{n-1} + \sqrt{5} * F_{n-1})] \text{ स्पष्टतः सिद्ध होता है।}$$

ध्यानाकर्षण 1■ छत्तीस अध्याय 15 अनुच्छेद 15-6 समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन की अध्ययन व्यापकता में फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $F(1\ 1)$, लुकस संख्या श्रेढ़ी $L(1\ 3)$ एवं बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी $(a\ b)A$ के प्रति क्रमशः 1 इकाई वर्ग नाप , 5 इकाई वर्ग नाप एवं $|a^2 + a * b - b^2|$ इकाई वर्ग नाप पर समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन विषयक उदाहरण प्रस्तुत है। इस प्रकार का समांतर चतुर्भुज के दर्शन एवं विलोपन गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेढ़ी के $M[2(1 + \sqrt{5})]$ के प्रति दर्शित नहीं होगा। अवलोकित कीजिये।



आकृति 10-1



आकृति 10-2

यदि आकृति 10-1 □ ABCD की भुजा M_{r+4} इकाई नाप भुजा का वर्गाकार क्षेत्र है। जिसे-

- 1■ सम्मुख भुजा युग्म AD और BG को क्रमशः बिन्दु E और F पर $FD = FC = M_{r+3}$ इकाई नाप तथा $AE = BF = M_{r+2}$ इकाई नाप में विभाजित करता है।
- 2■ बिन्दु E और F को मिलाकर दो आयत EFCD और ABFE प्राप्त है।
- 3■ आयत EFCD के सम्मुख भुजा युग्म EF और CD को क्रमशः बिन्दु G और H पर $EG = CH = M_{r+3}$ इकाई नाप तथा $GF = DH = M_{r+2}$ इकाई नाप में विभाजित करता है।
- 4■ * बिन्दु G और H को मिलाकर दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज EGHG और GFCH प्राप्त है।
- 5■ आयत ABFE के सम्मुख शीर्ष A और F को मिलाकर दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज ABF और AEF सम्मुख प्राप्त है।

आकृति 10-2 □ PQRS $M_{r+5} * M_{r+3}$ इकाई नाप भुजा का आयताकार क्षेत्र है। जिसके -

लम्बाई नाप की सम्मुख भुजा $PQ = RS = M_{r+5}$ इकाई नाप भुजा है।

चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा $PS = QR = M_{r+3}$ इकाई नाप भुजा है।

उक्त आयत में -

- 1■ आकृति 10-1 में बिन्दु 4■ से प्राप्त दो सर्वांगसम समलम्ब चतुर्भुज EGHG और GFCH प्राप्त है। को यथावत सर्वांगसमता प्रतिरूपण में क्रमशः समलम्ब चतुर्भुज PMNS और JQRK प्राप्त है।
- 2■ आकृति 10-1 में बिन्दु 5■ से प्राप्त दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुज ABF और AEF प्राप्त है। को यथावत सर्वांगसमता प्रतिरूपण में क्रमशः समकोण त्रिभुज MNR और PJK प्राप्त है।
- 3■ रचना क्रम में -

a. भुजा MN को भुजा PQ के बिन्दु O तक बढ़ाया।

b. भुजा JK को भुजा SR के बिन्दु W तक बढ़ाया।

c. बिन्दु M से होती हुई लम्बाई की सम्मुख भुजा PQ अथवा RS के समांतर अन्तरित रेखा आयत की चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा PS और QR के बिन्दु भुजा X और Z से होकर रेखा JK को बिन्दु Y पर प्रतिच्छेद करता है।

d. बिन्दु K से होती हुई लम्बाई की सम्मुख भुजा PQ अथवा RS के समांतर अन्तरित रेखा आयत की चौड़ाई नाप की सम्मुख भुजा PS और QR के बिन्दु भुजा T और V से होकर रेखा MN को बिन्दु U पर प्रतिच्छेद करता है।

उक्त प्रकार के प्रतिरूपण एवं रचना के परिणाम स्वस्प-

1. $PQ = RS = M_{r+5}$ 2. $NR = PJ = OQ = SW = UV = MZ = TK = XY = M_{r+4}$
3. $PS = SN = JQ = QR = PO = XM = TU = WR = KV = YZ = M_{r+3}$
4. $NW = OJ = UK = MY = XS = MN = YW = ZR = PT = OU = JK = QV = M_{r+2}$
5. $PX = OM = JY = QZ = TS = UN = KW = VR = M_{r+1}$
6. $XT = MU = YK = ZV = M_r$

$$\begin{aligned}
 \text{आयत PQRS का विकर्ण } PR \text{ का नाप} &= \sqrt{RS^2 + AS^2} = \sqrt{M_{r+5}^2 + M_{r+3}^2} \\
 &= \sqrt{3} * M_{r+4} \text{ -----(1)} \\
 &= PM + MR = \sqrt{PX^2 + XM^2} + \sqrt{MZ^2 + ZR^2} \\
 &= \sqrt{M_{r+1}^2 + M_{r+3}^2} + \sqrt{M_{r+2}^2 + M_{r+4}^2} \\
 &\quad \sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+3} \\
 &= \sqrt{3} * M_{r+4} \text{ -----(2)} \\
 &= PM + MK + KR = 2PM + MK \\
 &= 2 * \sqrt{PX^2 + XM^2} + \sqrt{MU^2 + UK^2} \\
 &= 2 * \sqrt{M_{r+1}^2 + M_{r+3}^2} + \sqrt{M_r^2 + M_{r+2}^2} \\
 &= 2 * \sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3}(M_{r+2} + * M_{r+1}) \\ & \sqrt{3} * M_{r+2} + \sqrt{3} * M_{r+3} \\ & = \sqrt{3} * M_{r+4} \quad \text{-----}(3) \end{aligned}$$

उक्त विकर्ण विषयक हल क्रम (1),-(2), (3) स्पष्ट करता है कि- बिन्दु P,M, K,R विकर्ण PR पर संमरंख है।
निष्कर्ष की ओर-

1■ आयताकार क्षेत्र के संदर्भ में

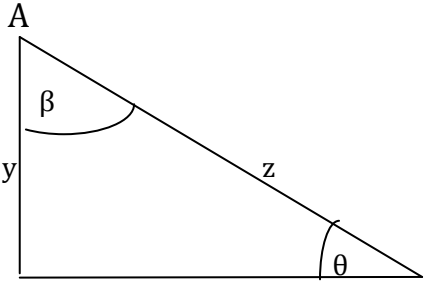
$M_{r+2} * M_r$ इकाई नाप का आयताकार क्षेत्र का विकर्ण $\sqrt{3} * M_{r+1}$ इकाई नाप में होगा।

2■ समकोण त्रिभुज क्षेत्र के संदर्भ में

समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः M_{r+2} और M_r अथवा M_r और M_{r+2} इकाई नाप में होने के प्रति समकोण त्रिभुज क्षेत्र का कर्ण $\sqrt{3} * M_{r+1}$ इकाई नाप में होगा।

3■ समकोण त्रिभुज क्षेत्र के आधार जिसमें समकोण शीर्ष अन्तरित होता है पर अन्तरित न्यून कोण माप $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक गणना के संदर्भ में -

1. समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः M_{r+2} और M_r होने के प्रति $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक गणना-

	आधार x	लम्ब y	कर्ण z
	M_{r+2}	M_r	$\sqrt{3} * M_{r+1}$
	$= \frac{M_{r+2}}{M_{r+1}}$	$\frac{M_r}{M_{r+1}}$	$\sqrt{3}$
	$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\sqrt{3}$
	$= (\sqrt{5} + 1)$	$(\sqrt{5} - 1)$	$2 * \sqrt{3}$
	$= M_2$	M_0	$\sqrt{3} * M_1$
	$\therefore m\angle\theta$ का बीजांक (p q) = $[(\sqrt{3} * M_1 + M_2) M_0]$		
	$\therefore m\angle\theta$ का त्रिभुजांक	$= (\sqrt{5} + 1)$	$(\sqrt{5} - 1) \quad 2 * \sqrt{3}$

से $m\angle\theta$ का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}}$ $\cos \theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}}$ $\tan \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \sec \theta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}-1)}{2} \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1}$$

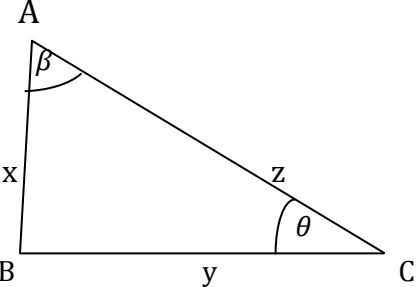
$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}} = \frac{1.2361}{3.4641} = 0.3568315$$

$$\therefore m\angle\theta = \operatorname{ASin} \theta = \operatorname{Sin}^{-1}(0.3568315) = 0.3648739 \text{ रेडियन} = 20.897323 \text{ अंशमान}$$

2. समकोण त्रिभुज क्षेत्र का आधार और लम्ब क्रमशः M_r और M_{r+2} होने के प्रति $m\angle\beta$ का त्रिभुजांक गणना-

$m\angle\beta = m\angle\theta$ का पूरक कोण होगा।

$\therefore m\angle\beta$ का त्रिभुजांक =

	आधार y	लम्ब x	कर्ण z
	M_r	M_{r+2}	$\sqrt{3} * M_{r+1}$
	$= \frac{M_r}{M_{r+1}}$	$\frac{M_{r+2}}{M_{r+1}}$	$\sqrt{3}$
	$= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\sqrt{3}$
	$= (\sqrt{5} - 1)$	$(\sqrt{5} + 1)$	$2 * \sqrt{3}$
	$= M_0$	M_2	$\sqrt{3} * M_1$
			

$$\therefore m\angle\beta \text{ का बीजांक (p q)= } [(\sqrt{3}*M_1 + M_0) M_2]$$

$$\therefore m\angle\beta \text{ का त्रिभुजांक } = (\sqrt{5}-1) (\sqrt{5}+1) 2*\sqrt{3}$$

$$\text{से } m\angle\beta \text{ का त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ } \sin \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}} \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2*\sqrt{3}} \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \sec \beta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}+1)}{2} \quad \operatorname{cosec} \beta = \frac{2*\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{3}*(\sqrt{5}-1)}{2}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2*\sqrt{3}} = \frac{3.2361}{3.4641} = 0.9341820$$

$$\therefore m\angle\beta = A \sin \beta = \sin^{-1}(0.9341820) = 1.2059595 \text{ रेडियन } = 69.0685895 \text{ अंशमान}$$

$$\text{जांच } m\angle\theta + m\angle\beta = 20.897323 + 69.0685895 = 89.96590889 = 90 \text{ अंशमान}$$

सिद्ध करता है $m\angle\theta$ और $m\angle\beta$ एक दूसरे के प्रति पूरक कोण युग्म है।

4 ■ अध्याय 15 में समांतर चतुर्भुज दर्शन एवं विलोपन अध्ययन क्रम में योग-योग संख्या श्रेढ़ी अर्थात बीजीय फिबोनिकी संख्या श्रेढ़ी

(a b) A के संदर्भ में पद क्रमांक r के बढ़ते मानों के प्रति दो क्रमागत पद A_r, A_{r+1} के

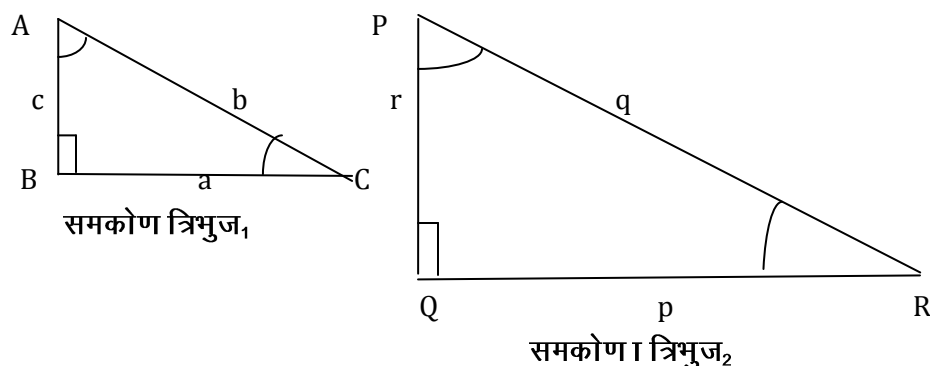
(दीर्घ पद मान A_{r+1}) : (लघु पद मान A_r) $= \frac{A_{r+1}}{A_r}$ का हलमान **स्वर्णानुपात** ($\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.6180339$) के निकटतर होने की ओर

अग्रसर होता है।" का स्पष्टीकरण यह है कि r के बढ़ते मानों के प्रति आयत के अन्तःनिष्ठ विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज के वे सम्मुख शीर्ष जो आयत के सम्मुख शीर्ष पर अन्तरित होता है का कोण माप $m\angle\theta$ 0 (शून्य) कोण इकाई माप की ओर होने होता है। अर्थात विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज एवं आयत के उभयनिष्ठिक विकर्ण के नाप का वर्गमान विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज के आसन्न भुजाओं के नापों का वर्गमानों का योगमान के निकटतर होने की ओर होते ऐसा प्रतीत कराता है कि विलोपित अथवा दर्शित समांतर चतुर्भुज की आसन्न भुजाये विलोपन की ओर होते हुये उक्त उभयनिष्ठिक विकर्ण पर ही है। गुणोत्तर सह योग-योग संख्या श्रेढ़ी के परिपालन की ओर आकृति 10.1 एवं 10.2 दृष्टिगत होता प्रतीत कराता है।

[3] समकोण त्रिभुज समरूपता प्रमेय-

($r < x$) के प्रति तीन क्रमागत अवयव के दो त्रिभुज (M_r, M_{r+1}, M_{r+2})

एवं (M_x, M_{x+1}, M_{x+2}) की इकाईनाप भुजा पर- चूँकि समरूप त्रिभुजों के संगत कोण माप बराबर होते हैं। तथा संगत भुजाओं का अनुपात या परिमेय निरूपण हल मान बराबर होते हैं।



यदि समकोण त्रिभुज ABC और त्रिभुज PQR समरूप है तो $m\angle A = m\angle P$, $m\angle B = m\angle Q = \text{समकोण}$

एवं $m\angle C = m\angle R$ होंगे तथा $a:p = b:q = c:r$ या $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$ होंगे।

रचित समकोण त्रिभुज, ABC में $m\angle C$ के प्रति भुजा माप [आधार.a लम्ब.b कर्ण.c = $M_r, M_{r+2}, \sqrt{3} * M_{r+1}$]

समकोण त्रिभुज, PQR में $m\angle R$ के प्रति भुजा माप [आधार.p लम्ब.q कर्ण.r = $M_x, M_{x+2}, \sqrt{3} * M_{x+1}$]

अथवा

रचित समकोण त्रिभुज, ABC में $m\angle A$ के प्रति भुजा माप [आधार.b लम्बा कर्ण.c = M_{r+2} , M_r , $\sqrt{3} * M_{r+1}$]

समकोण त्रिभुज₂ PQR में $m\angle P$ के प्रति भुजा माप [आधार.q लम्बा p कर्ण.r = M_{x+2} , M_x , $\sqrt{3} * M_{x+1}$]

समरूप त्रिभुज होगा।

$$\begin{aligned} \text{समरूप त्रिभुज के प्रतिबंधानुसार संगत भुजा अनुपात मान } k &= \frac{M_x}{M_r} = \frac{M_{x+2}}{M_{r+2}} = \left\{ \frac{\sqrt{3} * M_{x+1}}{\sqrt{3} * M_{r+1}} = \frac{M_{x+1}}{M_{r+1}} \right\} \\ &= \frac{M_{x-r+1}}{2} = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]^{x-r} = \frac{L_{x-r} + \sqrt{5} * F_{x-r}}{2} \text{ होगा।} \end{aligned}$$

-----10-----

अध्याय -11

प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण

11-1 प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण यदि $m\angle\theta^r$ के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियों $\sin\theta^r$, $\cos\theta^r$, $\tan\theta^r$, $\cot\theta^r$, $\sec\theta^r$, $\csc\theta^r$ का उभयनिष्ठ संकेतन $\delta\theta^r$ लिये जाने पर $\delta\theta^r = x \Rightarrow \delta^{-1}x = \theta^r$ में $\delta^{-1}x$, $\delta\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण कहलाता है। जो स्पष्ट करता है कि $\delta\theta^r = x$ है। अर्थात्

- 1• $\sin\theta^r = x \Leftrightarrow \sin^{-1}x = \theta^r$ में $\sin\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\sin^{-1}x$ है।
- 2• $\cos\theta^r = x \Leftrightarrow \cos^{-1}x = \theta^r$ में $\cos\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\cos^{-1}x$ है।
- 3• $\tan\theta^r = x \Leftrightarrow \tan^{-1}x = \theta^r$ में $\tan\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\tan^{-1}x$ है।
- 4• $\cot\theta^r = x \Leftrightarrow \cot^{-1}x = \theta^r$ में $\cot\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\cot^{-1}x$ है।
- 5• $\sec\theta^r = x \Leftrightarrow \sec^{-1}x = \theta^r$ में $\sec\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\sec^{-1}x$ है।
- 6• $\csc\theta^r = x \Leftrightarrow \csc^{-1}x = \theta^r$ में $\csc\theta^r$ का प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण $\csc^{-1}x$ है।

ध्यानाकर्षण यह स्पष्ट कर देना उचित होगा कि प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण का मावार्थ अंक गणित एवं बीजगणित में प्रयुक्त योज्य-प्रतिलोम नियम $[\{ \text{संख्या } x \} + \{ \text{संख्या } x \text{ का योज्य प्रतिलोम } \bar{x} \} = 0]$ एवं गुणनप्रतिलोम नियम $[\{ \text{संख्या } x \} * \{ \text{संख्या } x \text{ का गुणन प्रतिलोम } \frac{1}{x} \} = 1]$ के भावार्थ में कदापि नहीं है।

11-2 $0 \leq 1 \leq x \leq 1$ के प्रति –

समिका 1 $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

प्रमाण $\sin^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \sin\theta^r = x$ से $m\angle\theta^r$ का त्रिमुजांक $= [\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1]$ ----- (1)

$\cos^{-1}x = \beta^r \Rightarrow \cos\beta^r = x$ से $m\angle\beta^r$ का त्रिमुजांक $= [x \quad \sqrt{1-x^2} \quad 1]$ ----- (2)

(1) और (2) से $m\angle(\theta^r + \beta^r) = m\angle(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x)$ का त्रिमुजांक $[0 \quad 1 \quad 1]$ ----- (3)

ज्ञात है $m\angle(\frac{\pi}{2})^r = 90^\circ$ का त्रिमुजांक $[0 \quad 1 \quad 1]$ ----- (4)

(3) और (4) से $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ **प्रमाणित**

समिका 1 ■ से 1• $\sin(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ 2• $\cos(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

3• $\tan(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$ 4• $\cot(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

5• $\sec(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \sec\frac{\pi}{2} = \infty$ 6• $\csc(\sin^{-1}x + \cos^{-1}x) = \csc\frac{\pi}{2} = 0$

समिका 2 ■ $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

प्रमाण $\tan^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \tan\theta^r = x$ से $m\angle\theta^r$ का त्रिमुजांक $= [1 \quad x \quad \sqrt{1+x^2}]$ ----- (1)

$\cot^{-1}x = \beta^r \Rightarrow \cot\beta^r = x$ से $m\angle\beta^r$ का त्रिमुजांक $= [x \quad 1 \quad \sqrt{1+x^2}]$ ----- (2)

(1) और (2) से $m\angle(\theta^r + \beta^r) = m\angle(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x)$ का त्रिमुजांक $[0 \quad (1+x^2) \quad (1+x^2)]$
 $= [0 \quad 1 \quad 1]$ ----- (3)

ज्ञात है $m\angle(\frac{\pi}{2})^r = 90^\circ$ का त्रिमुजांक $[0 \quad 1 \quad 1]$ ----- (4)

(3) और (4) से $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ **प्रमाणित**

समिका 2 ■ से 1• $\sin(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ 2• $\cos(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

3• $\tan(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$ 4• $\cot(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$

$$5 \bullet \sec(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \sec \frac{\pi}{2} = \infty \quad 6 \bullet \operatorname{cosec}(\tan^{-1}x + \cot^{-1}x) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1$$

समिका 3 ■ $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

प्रमाण $\sec^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \sec \theta^r = x$ से $\mathbf{m}\angle \theta^r$ का त्रिभुजांक $= [1 \quad \sqrt{x^2 - 1} \quad x]$ -----(1)

$\operatorname{cosec}^{-1}x = \beta^r \Rightarrow \operatorname{cosec} \beta^r = x$ से $\mathbf{m}\angle \beta^r$ का त्रिभुजांक $= [\sqrt{x^2 - 1} \quad 1 \quad x]$ -----(2)

(1) और (2) से $\mathbf{m}\angle(\theta^r + \beta^r) = \mathbf{m}\angle(\sec^{-1}x + \cot^{-1}x)$ का त्रिभुजांक $[0 \quad x^2 \quad x^2]$
 $= [0 \quad 1 \quad 1]$ -----(3)

ज्ञात है $\mathbf{m}\angle(\frac{\pi}{2})^r = 90^\circ$ का त्रिभुजांक $[0 \quad 1 \quad 1]$ -----(4)

(3) और (4) से $\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ **प्रमाणित**

समिका 3 ■ से 1 • $\sin(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ 2 • $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

3 • $\tan(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \tan \frac{\pi}{2} = \infty$ 4 • $\cot(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cot \frac{\pi}{2} = 0$

5 • $\sec(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \sec \frac{\pi}{2} = \infty$ 6 • $\operatorname{cosec}(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1$

11-3 $x \leq 1$ के प्रति प्रतिलोमी त्रिकोणमिति में गुणनप्रतिलोम का नियम

1 ■ $\sin^{-1}x$ का गुणनप्रतिलोम $\operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$

प्रमाण $\sin^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \sin \theta^r = x$ से $\mathbf{m}\angle \theta^r$ का त्रिभुजांक $= [\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1]$

$\therefore \operatorname{cosec} \theta^r = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta^r = \sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$ सिद्ध।

2 ■ $\cos^{-1}x$ का गुणनप्रतिलोम $\sec^{-1} \frac{1}{x}$

प्रमाण $\cos^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \cos \theta^r = x$ से $\mathbf{m}\angle \theta^r$ का त्रिभुजांक $= [x \quad \sqrt{1-x^2} \quad 1]$

$\therefore \sec \theta^r = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta^r = \cos^{-1}x = \sec^{-1} \frac{1}{x}$ सिद्ध।

3 ■ $\tan^{-1}x$ का गुणनप्रतिलोम $\cot^{-1} \frac{1}{x}$

प्रमाण $\tan^{-1}x = \theta^r \Rightarrow \tan \theta^r = x$ से $\mathbf{m}\angle \theta^r$ का त्रिभुजांक $= [1 \quad x \quad \sqrt{1+x^2}]$

$\therefore \cot \theta^r = \frac{1}{x} \Rightarrow \theta^r = \tan^{-1}x = \cot^{-1} \frac{1}{x}$ सिद्ध।

उपरोक्तानुसार त्रिभुजांक अवलोकन से -

$$\sin^{-1}x = \cos^{-1} \sqrt{1-x^2} = \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \cot^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \sec^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{x}$$

$$\cos^{-1}x = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \cot^{-1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sec^{-1} \frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\tan^{-1}x = \sin^{-1} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \cot^{-1} \frac{1}{x} = \sec^{-1} \sqrt{1+x^2} = \operatorname{cosec}^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

11-4 दो प्रतिलोमी त्रिकोणमिति का योगान्तर प्रमेय

प्रतिबंध $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}$ और $\tan^{-1}x$ के प्रति x का मापांक ≤ 1 या $\sin^{-1}(\frac{P}{Q})$, $\cos^{-1}(\frac{P}{Q})$ और $\tan^{-1}(\frac{P}{Q})$ में Q के शून्येतर पूर्णांक के प्रति मापांक $|P| \leq Q$ तथा इसके विपरीत $\operatorname{cosec}^{-1}x$, $\sec^{-1}$ और $\cot^{-1}x$ के प्रति x का मापांक > 1 या $\operatorname{cosec}^{-1}(\frac{P}{Q})$, $\sec^{-1}(\frac{P}{Q})$ और $\cot^{-1}(\frac{P}{Q})$ में Q के शून्येतर पूर्णांक के प्रति मापांक $|P| > Q$ पर-

(1) दो प्रतिलोमी अवयव $\sin^{-1}(\frac{a}{b})$ और $\sin^{-1}(\frac{c}{d})$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

माना कि $\sin^{-1}(\frac{a}{b}) = \theta^r$

$$\therefore \sin \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [\sqrt{b^2 - a^2} \quad a \quad b] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \sin \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [\sqrt{d^2 - c^2} \quad c \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)\} \quad \{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})\} \quad \{b*d\}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)\} \quad \{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})\} \quad \{b*d\}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$\mathbf{1} \blacksquare \sin(\theta + \beta) = \frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}\right\}$$

$$\mathbf{2} \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}{b*d}\right\} = \operatorname{Sec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}\right\}$$

$$\mathbf{3} \blacksquare \tan(\theta + \beta) = \frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}\right\} = \operatorname{Cot}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}{a*\sqrt{d^2 - c^2} + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$\mathbf{1} \blacksquare \sin(\theta - \beta) = \frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}\right\}$$

$$\mathbf{2} \blacksquare \cos(\theta - \beta) = \frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}{b*d}\right\} = \operatorname{Sec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}\right\}$$

$$\mathbf{3} \blacksquare \tan(\theta - \beta) = \frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}\right\} = \operatorname{Cot}^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}{a*\sqrt{d^2 - c^2} - (c*\sqrt{b^2 - a^2})}\right\}$$

(2) दो प्रतिलोमी अवयव $\sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \sin \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [\sqrt{b^2 - a^2} \quad a \quad b] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \cos \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [c \quad \sqrt{d^2 - c^2} \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ (a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ b*d \}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ + (a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ b*d \}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta + \beta) = \frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Sec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\} = \operatorname{Cot}^{-1}\left\{\frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{(a*c) + (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Sec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\} = \operatorname{Cot}^{-1}\left\{\frac{(c*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{(a*c) - (\sqrt{b^2 - a^2} * \sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

(3) $\sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

माना कि $\sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$

$$\therefore \sin \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [\sqrt{b^2 - a^2} \quad a \quad b] \text{ ----- (1)}$$

तथा $\tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$

$$\therefore \tan \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [d \quad c \quad \sqrt{d^2 + c^2}] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (d*\sqrt{b^2 - a^2}) - (a*c) \} \quad \{ (a*d) + (c * \sqrt{b^2 - a^2}) \} \quad \{ b*\sqrt{d^2 + c^2} \}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (d*\sqrt{b^2 - a^2}) + (a*c) \} \quad \{ (a*d) - (c * \sqrt{b^2 - a^2}) \} \quad \{ b*\sqrt{d^2 + c^2} \}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{(a*d) + (c*\sqrt{b^2 - a^2})}{b*\sqrt{d^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta + \beta) = \frac{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta - \beta) = \frac{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta - \beta) = \frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta - \beta) = \frac{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2})+(a*c)}{(a*d)-(c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

(4) $\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \cos \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [a \quad \sqrt{b^2-a^2} \quad b] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \cos \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [c \quad \sqrt{d^2-c^2} \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2} * \sqrt{d^2-c^2})\} \quad \{(c*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*\sqrt{d^2-c^2})\} \quad \{b*d\}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2} * \sqrt{d^2-c^2})\} \quad \{(c*\sqrt{b^2-a^2}) - (a*\sqrt{d^2-c^2})\} \quad \{b*d\}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta + \beta) = \frac{(c*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(c*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(c*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*\sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2} * \sqrt{d^2-c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2} * \sqrt{d^2-c^2})}{b*d}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*d}{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2} * \sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) + (a\sqrt{d^2-c^2})}{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) + (a\sqrt{d^2-c^2})}{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*c) - (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}{(c\sqrt{b^2-a^2}) + (a\sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

इसी प्रकार $m\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}{b*d}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*d}{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*c) + (\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})}{(c\sqrt{b^2-a^2}) - (a\sqrt{d^2-c^2})}\right\}$$

(5) $\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

माना कि $\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$

$$\therefore \cos \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } m\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [a \quad \sqrt{b^2-a^2} \quad b] \text{ ----- (1)}$$

तथा $\sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$

$$\therefore \sin \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } m\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [\sqrt{d^2-c^2} \quad c \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $m\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a\sqrt{d^2-c^2}) - (c\sqrt{b^2-a^2})\} \quad \{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)\} \quad \{b*d\}]$$

तथा $m\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a\sqrt{d^2-c^2}) + (c\sqrt{b^2-a^2})\} \quad \{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) - (a*c)\} \quad \{b*d\}]$$

तब $m\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{\{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)\}}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta + \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*d}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*d}{a*\sqrt{d^2-c^2} - (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)}{(a*\sqrt{d^2-c^2}) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)}{(a*\sqrt{d^2-c^2}) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) + (a*c)}\right\}$$

इसी प्रकार $m\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{\{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2}) - (a*c)\}}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{\{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})-(a*c)\}}{b*d}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*d}{((\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})-(a*c))}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*d}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*d}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*d}{a*\sqrt{d^2-c^2} + (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})-(a*c)}{(a*\sqrt{d^2-c^2}) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})-(a*c)}{(a*\sqrt{d^2-c^2}) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2-c^2}) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}{(\sqrt{b^2-a^2}*\sqrt{d^2-c^2})-(a*c)}\right\}$$

(6) $\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

माना कि $\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$

$$\therefore \cos \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [a \quad \sqrt{b^2-a^2} \quad b] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \tan \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [d \quad c \quad \sqrt{d^2+c^2}] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})\} \quad \{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)\} \quad \{b*\sqrt{d^2+c^2}\}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(a*d) + (c*\sqrt{b^2-a^2})\} \quad \{(d*\sqrt{b^2-a^2}) - (a*c)\} \quad \{b*\sqrt{d^2+c^2}\}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta + \beta) = \frac{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*d) - (c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d*\sqrt{b^2-a^2}) + (a*c)}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) - (a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(d*\sqrt{b^2-a^2}) - (a*c)}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(d*\sqrt{b^2-a^2}) - (a*c)}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(a*d) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(a*d) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}{b*\sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2+c^2}}{(a*d) + (c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(d\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(d\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(a*d)+(c*\sqrt{b^2-a^2})}{(d\sqrt{b^2-a^2})-(a*c)}\right\}$$

(7) $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \tan \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [b \quad a \quad \sqrt{b^2+a^2}] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \tan \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [d \quad c \quad \sqrt{d^2+c^2}] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(b*d)-(a*c)\} \quad \{(d*a)+(b*c)\} \quad \{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}\}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(b*d)+(a*c)\} \quad \{(d*a)-(b*c)\} \quad \{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}\}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{(d*a)+(b*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(d*a)+(b*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}{(d*a)+(b*c)}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta + \beta) = \frac{(b*d)-(a*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*d)-(a*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}{(b*d)-(a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(d*a)+(b*c)}{(b*d)-(a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(d*a)+(b*c)}{(b*d)-(a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(b*d)-(a*c)}{(d*a)+(b*c)}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{(d*a)-(b*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{(d*a)-(b*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}{(d*a)-(b*c)}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(b*d)+(a*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*d)+(a*c)}{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{\sqrt{b^2+a^2} * \sqrt{d^2+c^2}}{(b*d)+(a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(d*a)-(b*c)}{(b*d)+(a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(d*a)-(b*c)}{(b*d)+(a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(b*d)+(a*c)}{(d*a)-(b*c)}\right\}$$

(8) $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \tan \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [b \quad a \quad \sqrt{b^2 + a^2}] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \sin \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [\sqrt{d^2 - c^2} \quad c \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)\} \quad \{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)\} \quad \{d*\sqrt{b^2 + a^2}\}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)\} \quad \{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)\} \quad \{d*\sqrt{b^2 + a^2}\}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta + \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}\right) = \operatorname{Cosec}^{-1}\left(\frac{d*\sqrt{b^2 + a^2}}{(b*c) + (a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}\right)$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{d*\sqrt{b^2 + a^2}}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta + \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) - (a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2 - c^2} - (a*c)}{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) + (b*c)}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta - \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}\right) = \operatorname{Cosec}^{-1}\left(\frac{\{d*\sqrt{b^2 + a^2}\}}{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}\right)$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta - \beta) = \frac{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}{d*\sqrt{b^2 + a^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{d*\sqrt{b^2 + a^2}}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta - \beta) = \frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}{(b*\sqrt{d^2 - c^2}) + (a*c)}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{b*\sqrt{d^2 - c^2} + (a*c)}{(a*\sqrt{d^2 - c^2}) - (b*c)}\right\}$$

(9) $\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$ और $\cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \tan \theta^r = \frac{a}{b} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [b \quad a \quad \sqrt{b^2 + a^2}] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \cos \beta^r = \frac{c}{d} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [d \quad \sqrt{d^2 - c^2} \quad d] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ (a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ d*\sqrt{b^{2*} + a^2} \}]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ (a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2}) \} \quad \{ d*\sqrt{b^{2*} + a^2} \}]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta + \beta) = \frac{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}\right) = \operatorname{Cosec}^{-1}\left(\frac{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}\right)$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta + \beta) = \frac{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta + \beta) = \frac{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(b*d) - (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{(a*d) + (b*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}\right) = \operatorname{Cosec}^{-1}\left(\frac{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}\right)$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{d*\sqrt{b^{2*} + a^2}}{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{c}{d}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{(b*d) + (a*\sqrt{d^2 - c^2})}{(a*d) - (b*\sqrt{d^2 - c^2})}\right\}$$

हलित उदाहरण (1)

दो प्रतिलोमी अवयव $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ और $\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \sin \theta^r = \frac{3}{5} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [\sqrt{5^2 - 3^2} \quad 3 \quad 5] = [4 \quad 3 \quad 5] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \sin \beta^r = \frac{12}{13} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [\sqrt{13^2 - 12^2} \quad 12 \quad 13] = [5 \quad 12 \quad 13] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (4*5) - (3*12) \} \quad \{ (3*5) + (4*12) \} \quad \{ 5*13 \}] = [\overline{16} \quad 63 \quad 65]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{ (4*5) + (3*12) \} \quad \{ (3*5) - (4*12) \} \quad \{ 5*13 \}] = [56 \quad \overline{33} \quad 65]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta + \beta) = \frac{63}{65}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{63}{65}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{65}{63}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{16}{65}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{16}{65}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{65}{16}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta + \beta) = \frac{63}{16}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{63}{16}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{16}{63}\right\}$$

इसी प्रकार $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta - \beta) = \frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{33}{65}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{65}{33}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta - \beta) = \frac{56}{65}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{56}{65}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{65}{56}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta - \beta) = \frac{33}{56}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{33}{56}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{56}{33}\right\}$$

हलित उदाहरण (2)

दो प्रतिलोमी अवयव $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ और $\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$ का प्रमाणित योगान्तर प्रमेय विस्तार

$$\text{माना कि } \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \theta^r$$

$$\therefore \tan \theta^r = \frac{3}{4} \text{ से } \mathbf{m}\angle \theta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\theta \ y_\theta \ z_\theta] = [4 \ 3 \ \sqrt{4^2 + 3^2}] = [4 \ 3 \ 5] \text{ ----- (1)}$$

$$\text{तथा } \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \beta^r$$

$$\therefore \tan \beta^r = \frac{5}{12} \text{ से } \mathbf{m}\angle \beta^r \text{ का त्रिभुजांक } [x_\beta \ y_\beta \ z_\beta] = [12 \ 5 \ \sqrt{12^2 + 5^2}] = [12 \ 5 \ 13] \text{ ----- (2)}$$

त्रिभुजांक (1) और (2) से- $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(4*12)-(3*5)\} \quad \{(3*12)+(4*5)\} \quad \{5*13\}] = [33 \ 56 \ 65]$$

तथा $\mathbf{m}\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] =$

$$[\{(4*12)+(3*5)\} \quad \{(3*12)-(4*5)\} \quad \{5*13\}] = [63 \ 16 \ 65]$$

तब $\mathbf{m}\angle(\theta + \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \sin(\theta + \beta) = \frac{56}{65}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{56}{65}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{65}{56}\right\}$$

$$2 \blacksquare \cos(\theta + \beta) = \frac{33}{65}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{33}{65}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{65}{33}\right\}$$

$$3 \blacksquare \tan(\theta + \beta) = \frac{56}{33}$$

$$\Rightarrow \theta + \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{33}{65}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{65}{33}\right\}$$

इसी प्रकार $m\angle(\theta - \beta)$ का त्रिभुजांक से-

$$1 \blacksquare \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{16}{65}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{16}{65}\right\} = \operatorname{Cosec}^{-1}\left\{\frac{65}{16}\right\}$$

$$2 \blacksquare \quad \cos(\theta - \beta) = \frac{63}{65}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \cos^{-1}\left\{\frac{63}{65}\right\} = \sec^{-1}\left\{\frac{65}{63}\right\}$$

$$3 \blacksquare \quad \tan(\theta - \beta) = \frac{16}{63}$$

$$\Rightarrow \theta - \beta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = \tan^{-1}\left\{\frac{16}{63}\right\} = \cot^{-1}\left\{\frac{63}{16}\right\}$$

11-5 सरलीकृत करना यदि $m\angle\theta^r$ के प्रति त्रिकोणमिति निष्पत्तियों $\sin\theta^r$, $\cos\theta^r$, $\tan\theta^r$, $\cot\theta^r$, $\sec\theta^r$, $\operatorname{Cosec}\theta^r$ का उभयनिष्ठ संकेतन $\delta\theta^r$ लिये जाने पर $\delta\theta^r = \frac{P}{Q} \Leftrightarrow \delta^{-1}\left(\frac{P}{Q}\right) = \theta^r$ के प्रति P और Q में कोई एक या दोनों दो पदी बीजीय व्यंजक में दर्शित हो उसे उसी या शेष पाँच में से किसी एक प्रतिलोमी त्रिकोणमिति प्रतिरूपण में एक पदी व्यंजक में दर्शित करना **सरलीकृत करना** कहलाता है। जिसे त्रिभुजों एवं बीजांक के अनुप्रयोग द्वारा असानी से प्रमाणित किया जा सकता है। हलित उदाहरण अवलोकित कीजिए।

उदाहरण 1 ■ सिद्ध कीजिए $\cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\}$ का सरलीकृत $\frac{1}{2} \sin^{-1}x$ होगा।

हल माना कि $\cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \theta$ ----- (1)

$$\therefore \cot \theta = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{से} \quad m\angle\theta \quad \text{का त्रिभुजांक} = \left[\{1 + \sqrt{1-x^2}\} \quad x \quad \{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}\} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{अतः } m\angle 2\theta \quad \text{का त्रिभुजांक} &= \left[\{(1 + \sqrt{1-x^2})^2 - x^2\} \quad \{2x(1 + \sqrt{1-x^2})\} \quad \{2(1 + \sqrt{1-x^2})\} \right] \\ &= \left[\{2\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})\} \quad \{2x(1 + \sqrt{1-x^2})\} \quad \{2(1 + \sqrt{1-x^2})\} \right] \\ &= [\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1] \end{aligned}$$

$$\text{तब } \sin 2\theta = \frac{x}{1} = x \Rightarrow \sin^{-1}x = 2\theta \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^{-1}x = \theta \text{ ----- (2)}$$

$$\therefore (1) \text{ और } (2) \text{ के अवलोकन से } \cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{1}{2} \sin^{-1}x \quad \text{सिद्ध।}$$

अथवा

$$\text{माना कि } \sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \sin \theta = x = \frac{x}{1} \text{ से } m\angle\theta \quad \text{का त्रिभुजांक} = [\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1]$$

$$\text{अतः } \frac{m\angle\theta}{2} \quad \text{का त्रिभुजांक} = [(1 + \sqrt{1-x^2}) \quad x \quad \sqrt{2 * \{1 + \sqrt{1-x^2}\}}] \text{ ---- (1)}$$

$$\text{तब } \sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^{-1}x = \frac{\theta}{2} \text{ ---- (2)}$$

$$\cot \frac{\theta^r}{2} = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x} \Rightarrow \cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{\theta}{2} \text{ ---- (3) त्रिभुजांक (1) से।}$$

$$\therefore (2) \text{ और } (3) \text{ के अवलोकन से } \cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{1}{2} \sin^{-1}x \quad \text{सिद्ध।}$$

उदाहरण 2 ■ सिद्ध कीजिए $\tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\}$ का सरलीकृत $\frac{1}{2} \sin^{-1}x$ होगा।

हल माना कि $\tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \theta$ ----- (1)

$\therefore \tan \theta = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ से $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} x & \{1-\sqrt{1-x^2}\} & \{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}\} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{अतः } m\angle 2\theta \text{ का त्रिभुजांक} &= [\{x^2 - (1-\sqrt{1-x^2})^2\} \quad \{2x(1-\sqrt{1-x^2})\} \quad \{2(1-\sqrt{1-x^2})\}] \\ &= [\{-2\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})\} \quad \{2x(1+\sqrt{1-x^2})\} \quad \{2(1+\sqrt{1-x^2})\}] \\ &= [-\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1] \end{aligned}$$

$$\text{तब } \sin 2\theta = \frac{x}{1} = x \Rightarrow \sin^{-1}x = 2\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^{-1}x = \theta \text{ -----(2)}$$

$\therefore$ (1) और (2) के अवलोकन से $\tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ सिद्ध।

अथवा

माना कि $\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \sin \theta = x = \frac{x}{1}$ से $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} \sqrt{1-x^2} & x & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{अतः } \frac{m\theta}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = [(1+\sqrt{1-x^2}) \quad x \quad \sqrt{2 * \{1+\sqrt{1-x^2}\}}]$$

$$\text{तब } \sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^{-1}x = \frac{\theta}{2} \text{ ----- (1)}$$

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} * \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} = \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{1-(1-x^2)} = \frac{x(1-\sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} \\ \Rightarrow \tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} &= \frac{\theta}{2} \text{ ----- (2)} \end{aligned}$$

$\therefore$ (1) और (2) के अवलोकन से $\cot^{-1}\left\{\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ सिद्ध।

उदाहरण 3■ सिद्ध करना कि $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right\}$ का सरलीकृत $\frac{1}{2}\sin^{-1}x$ होगा।

माना कि $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right\} = \theta$ -----(1)

$\therefore \tan \theta = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ से $m\angle\theta$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} \{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\} & (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}) & 2 \end{bmatrix}$

$m\angle 2\theta$ का त्रिभुजांक

$$\begin{aligned} &= [\{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2 - (\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2\} \quad 2\{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})\} \quad 4] \\ &= [4(\sqrt{(1+x)(1-x)}) \quad 4x \quad 4] = [\sqrt{1-x^2} \quad x \quad 1] \end{aligned}$$

$$\text{तब } \sin 2\theta = \frac{x}{1} = x \Rightarrow \sin^{-1}x = 2\theta \Rightarrow \frac{1}{2}\sin^{-1}x = \theta \text{ ----- (2)}$$

$\therefore$ (1) और (2) के अवलोकन से $\tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{1}{2}\sin^{-1}x$ सिद्ध।

उदाहरण 4■ सिद्ध करना कि $\tan^{-1}\left\{\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right\}$ का सरलीकृत $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x$ होगा।

हल कि $\cos^{-1}x = \theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$ -----(1)

तथा $\cos \theta = x = \frac{x}{1}$ से $m\angle\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ का त्रिभुजांक = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ ----- (2)

$$m\angle\theta \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} x & (\sqrt{1-x^2}) & 1 \end{bmatrix} \text{ ----- (3)}$$

$$m\angle\frac{\theta}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} \sqrt{1+x} & \sqrt{1-x} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ ----- (4)}$$

त्रिभुजांक (2) और (4) से $m\angle(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$ का त्रिभुजांक -

$$= [\{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\} \quad \{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}\} \quad 2] \quad \text{---(5)}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \cos^{-1}x \text{ ---(6)}$$

∴ (5) और (6) के अवलोकन से $\tan^{-1}\left\{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right\} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cos^{-1}x$ सिद्ध।

उदाहरण 5■ $\frac{1}{2} \cos^{-1}x$ के प्रति समस्त प्रतिलोमी त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ चिस्तारित कीजिए।

हल. माना कि $\cos^{-1}x = \theta$ ∴ $\frac{1}{2} \cos^{-1}x = \frac{\theta}{2}$ तथा $\cos\theta = x = \frac{x}{1}$ ---(1) से

$$m\angle\theta \text{ का त्रिभुजांक} = [x \quad (\sqrt{1-x^2} \quad 1)] \text{ --- (2)}$$

$$m\angle\frac{\theta}{2} \text{ का त्रिभुजांक} = [\sqrt{1+x} \quad \sqrt{1-x} \quad \sqrt{2}] \text{ से}$$

$$\frac{1}{2} \cos^{-1}x = \frac{\theta}{2} = \sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} = \cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$= \cot^{-1}\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = \sec^{-1}\sqrt{\frac{2}{1+x}} = \operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{\frac{2}{1-x}} \text{ होगा।}$$

-----11-----

अध्याय -12 त्रिकोणमिति भाग 2

12-1 प्रस्तावना

रचित समकोण त्रिभुज, ABC में $m\angle C$ के प्रति भुजा माप [आधार.a लम्ब.b कर्ण.c= $M_r, M_{r+2}, \sqrt{3} * M_{r+1}$]

समकोण त्रिभुज₂ PQR में $m\angle R$ के प्रति भुजा माप [आधार.p लम्ब.q कर्ण.r= $M_x, M_{x+2}, \sqrt{3} * M_{x+1}$]

अथवा

रचित समकोण त्रिभुज, ABC में $m\angle A$ के प्रति भुजा माप [आधार.b लम्ब.a कर्ण.c= $M_{r+2}, M_r, \sqrt{3} * M_{r+1}$]

समकोण त्रिभुज₂ PQR में $m\angle P$ के प्रति भुजा माप [आधार.q लम्ब.p कर्ण.r= $M_{x+2}, M_x, \sqrt{3} * M_{x+1}$]

समरूप त्रिभुज होगा।

$$\text{समरूप त्रिभुज के प्रतिबंधानुसार संगत भुजा अनुपात मान } k = \frac{M_x}{M_r} = \frac{M_{x+2}}{M_{r+2}} = \left\{ \frac{\sqrt{3} * M_{x+1}}{\sqrt{3} * M_{r+1}} = \frac{M_{x+1}}{M_{r+1}} \right\}$$

$$= \frac{M_{x-r+1}}{2} = \left[\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right]^{x-r} = \frac{L_{x-r} + \sqrt{5} * F_{x-r}}{2} \text{ होगा।}$$

पाद पूज्य गुरुदेव डॉ. नरेन्द्रपुरी के शब्दों में " वैदिक गणित अतुलनीय विशेषताओं से भरपूर है जो कि वर्तमान आधुनिक गणित अध्ययन के परिदृश्य में उपलब्ध नहीं है। उन समस्याओं का जिनके हल अन्य प्रकार से सीधे प्राप्त नहीं किये जा सकते उनके हल के लिए बाँये से दाँये की ओर गतिशील एक सीधा सरल और शक्तिशाली हल का समूह है। ऐसा उदाहरण केपलर समीकरण के माध्यम से $\sin A, \cos A$ एवं प्रतिलोमी $\tan A$ { $a \tan A$ या $\tan^{-1} A$ } का हल विस्तार में किया जाता है। जबकि वैदिक गणित आकलन विधि द्वारा इन कोण या प्रतिनिधि योग्य कोण का आकलन हल सरल एवं सुविधा जनक रूप से कर सकते हैं।" विदित हो कि संशोधित एवं परिवर्धित होने की ओर आकलन गणना में उनागर संख्यांकन का अनुप्रयोग नवीन श्रृंगार स्वरूप प्रयुक्त होता पायेंगे। कुछ चुने हुए उदाहरणों को प्रस्तुत करने के पूर्व इस अध्याय के अध्ययन के संदर्भ में प्रयुक्त अति महत्वपूर्ण समीकरण जिसे चरघातांकी समीकरण कहते हैं को परिभाषित करने के उपरांत ही $\sin A, \cos A$ एवं प्रतिलोमी $\tan A$ { $a \tan A$ या $\tan^{-1} A$ } का श्रेढी विस्तार विषयक केपलर समीकरण प्रमेय प्रस्तुत करना यथेष्ट होगा।

12-2 चरघातांकी समीकरण समीकरण

$$[1] e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots - \infty \text{ पद तक}$$

$$[2] e^{\bar{x}} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} - \dots - \infty \text{ पद तक}$$

को चरघातांकी समीकरण कहते हैं।

तब चरघातांकी समीकरण 1 में $x=1$ प्रतिस्थापित करने पर -

$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots - \infty$ पद तक का हल मान क्रमगुणित हरे 1!, 2!, 3!, 4!, 5! - - - (n-2)!, (n-1)!, n! का अलग- अलग मान प्राप्त किये बिना ही गणना विस्तार n! हर पद तक के प्रत्येक पद मान क्रमशः प्राप्त किये जा कते हैं। इसके लिए-

प्रथम पदमान $k_1=1$ लिखें।

द्वितीय पद मान $k_2=$ प्रथम पदमान 1 को द्वितीयपद के हर !1 के सर्वोच्च गूणनखण्ड 1 द्वारा भाग देकर 1 प्राप्त कीजिए।

तृतीय पद मान $k_3=$ प्राप्त द्वितीय पद हल मान 1 को तृतीयपद के हर !2 के सर्वोच्च गूणनखण्ड 2 द्वारा भाग देकर 0.5 प्राप्त कीजिए।

इसी प्रकार चौथा , पाचवाँ , छटवाँ - - - - - (n-2), (n-1), n के किसी -

r वाँ पद मान $k_r=$ प्राप्त (r-1) वें पद हल मान k_{r-1} को **r वाँ पद** के हर !(r-1) के सर्वोच्च गूणनखण्ड (r-1) द्वारा भाग देकर प्राप्त कीजिए।

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{14!} + \frac{1}{15!} + \frac{1}{16!} + \frac{1}{17!} + \dots \quad 18 \text{ पद तक का हल मान गणना तालिका}$$

पद क्रमांक n	क्रमगुणित में हर में पदमान $\frac{1}{n!}$	पद क्रमांक $n \geq 2$ के लिए चालक भाजक $(n-1)$	दशमलव भिन्न में पद मान गणना $[\frac{1}{n!} \div n]$
1	1		1.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2	$\frac{1}{1!}$	1	1.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
3	$\frac{1}{2!}$	2	0.5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
4	$\frac{1}{3!}$	3	0.1 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
5	$\frac{1}{4!}$	4	0.0 4 1 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6
6	$\frac{1}{5!}$	5	0.0 0 8 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3
7	$\frac{1}{6!}$	6	0.0 0 1 3 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8
8	$\frac{1}{7!}$	7	0.0 0 0 1 9 8 4 1 2 6 9 8 4 1 2 6 9 8 4 1 2
9	$\frac{1}{8!}$	8	0.0 0 0 0 2 4 8 0 1 5 8 7 3 0 1 5 8 7 3 0 1
10	$\frac{1}{9!}$	9	0.0 0 0 0 0 2 7 5 5 7 3 1 9 2 2 7 5 5 7 3 1 9 2 2
11	$\frac{1}{10!}$	10	0.0 0 0 0 0 0 2 7 5 5 7 3 1 9 2 7 5 5 7 3 1 9 2 7
12	$\frac{1}{11!}$	11	0.0 0 0 0 0 0 0 2 5 0 5 2 1 0 8 5 0 5 2 1 0 8 5 0
13	$\frac{1}{12!}$	12	0.0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 8 7 6 7 5 8 7 6 7 5 8 7 6 7
14	$\frac{1}{13!}$	13	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 6 0 4 6 7 6 0 4 6 7 6 0 4 6
15	$\frac{1}{14!}$	14	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 4 7 2 4 7 2 1 1 4 7 2 1
16	$\frac{1}{15!}$	15	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 7 6 5 7 6 5 0 7 6 5 0 7
17	$\frac{1}{15!}$	16	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 4 7 0 4 7 0 4 7 0 4 7
18	$\frac{1}{17!}$	17	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0 0 2
योग मान $e =$			2.7 1 7 7 8 1 8 2 8 8 5 8 9 1 6 दशमलव बाद 15 स्थान तक

e का गुणन प्रतिलोग $\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{14!} - \frac{1}{15!} + \frac{1}{16!} - \frac{1}{17!} \dots$ 18 पद तक
 $= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots + \frac{1}{14!} - \frac{1}{15!} + \frac{1}{16!} - \frac{1}{17!}$
 $= 0.4327 421041172572 = 0.3673 379040971568$ दशमलव बाद 15 स्थान तक
 उपरोक्त गणना से स्पष्ट है $3 > e > 2$ ही होगा। अर्थात् e का मान 2 और 3 के बीच की परिमेय संख्या होगी।

12-3 केपलर समीकरण

- समीकरण 1■** [a] यदि n धनात्मक या ऋणात्मक पूर्णांक हो तो – $[\cos\theta + i \sin\theta]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
 [b] यदि n धनात्मक या ऋणात्मक भिन्न हो तो – $[\cos\theta + i \sin\theta]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ होगा।

जहाँ $i = \sqrt{-1}$ एक काल्पनिक संख्या है। जिसका घातांकी विस्तार मान पूर्ण संख्या समुच्चय $Z = [0,1,2,3,4,5 \dots]$ के प्रति-

$$\{1\} \quad (i)^{\pm(4z+1)} = i = \sqrt{-1},$$

$$\{2\} \quad (i)^{\pm(4z+2)} = -1 = \bar{1}$$

$$\{3\} \quad (i)^{\pm(4z+3)} = -i = -\sqrt{-1} = \sqrt{1}$$

$$\{4\} \quad (i)^{\pm(4z)} = 1 \text{ होगा।}$$

उपपत्ति प्रमेय 1 [a]

1• n धनात्मक पूर्णांक होने के प्रति

वास्तविक गुणनफल नियम सै-

$$[\cos\theta_1 + i \sin\theta_1][\cos\theta_2 + i \sin\theta_2] =$$

$$\{ \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \} + i \{ \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 \}$$

$$= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

इसी प्रकार $[\cos\theta_1 + i \sin\theta_1][\cos\theta_2 + i \sin\theta_2][\cos\theta_3 + i \sin\theta_3] \dots [\cos\theta_{n-2} + i \sin\theta_{n-2}][\cos\theta_{n-1} + i \sin\theta_{n-1}][\cos\theta_n + i \sin\theta_n] =$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_{n-2} + \theta_{n-1} + \theta_n)$$

अल्पार्थक में माना कि $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_{n-2} = \theta_{n-1} = \theta_n = \theta$

तब n धनात्मक पूर्णांक के प्रति- $[\cos\theta + i \sin\theta]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ सिद्ध होगा।

2• n ऋणात्मक पूर्णांक होने के प्रति

अल्पार्थक में $n = \bar{m}$ जहाँ m धनात्मक पूर्णांक है।

$$\text{तब } [\cos\theta + i \sin\theta]^n = [\cos\theta + i \sin\theta]^{\bar{m}} = \frac{1}{[\cos\theta + i \sin\theta]^m} = \frac{1}{\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)}$$

$$= \frac{1}{\cos(m\theta) + i \sin(m\theta)} * \frac{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)}{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)} = \frac{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)}{\cos^2(m\theta) - (i)^2 \sin^2(m\theta)}$$

$$= \frac{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)}{\cos^2(m\theta) - (-1) \sin^2(m\theta)} = \frac{\cos(m\theta) - i \sin(m\theta)}{\cos^2(m\theta) + \sin^2(m\theta)}$$

$$= \cos(m\theta) - i \sin(m\theta) \quad \text{Cos}^2(m\theta) + \sin^2(m\theta) = 1 \text{ से}$$

$$= \cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta) \quad \bar{m} = n \text{ या } m = \bar{n} \text{ से}$$

$$= \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{Cos}(-n\theta) = \cos(n\theta), \sin(-n\theta) = -\sin(n\theta) \text{ से सिद्ध होगा।}$$

उपपत्ति प्रमेय 1 [b]

1• n धनात्मक भिन्न $\frac{p}{q}$ होने के प्रति

अल्पार्थक में $n = \frac{\theta}{q}$ जहाँ θ और q दोनों धनात्मक पूर्णांक है।

$$\text{तब } [\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}]^q = \cos(q * \frac{\theta}{q}) + i \sin(q * \frac{\theta}{q})$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

$$\Rightarrow [\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}] = [\cos\theta + i \sin\theta]^{\frac{1}{q}}$$

$$\Rightarrow [\cos\theta + i \sin\theta]^{\frac{1}{q}} = [\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}]$$

$$\Rightarrow [\cos\theta + i \sin\theta]^{\frac{p}{q}} = [\cos\frac{\theta}{q} + i \sin\frac{\theta}{q}]^p$$

$$= \cos(\theta * \frac{p}{q}) + i \sin(\theta * \frac{p}{q})$$

सिद्ध होगा।

2• n ऋणात्मक भिन्न $(-\frac{p}{q} = \frac{\bar{p}}{q})$ होने के प्रति

अल्पार्थक में $n = \frac{\theta}{q}$ जहाँ θ धनात्मक और q ऋणात्मक है।

उपपत्ति प्रमेय 1 [a] 1• n धनात्मक पूर्णांक होने के तहत

दोनों पक्षों का q वाँ मूल लेने पर

पाक्षान्तर करने पर

दोनों पक्षों का p वाँ घात मान लेने पर

$$\begin{aligned}\text{तब } [\cos \frac{\theta}{q} + i \sin \frac{\theta}{q}]^q &= \cos (\bar{q} * \frac{\theta}{q}) + i \sin (\bar{q} * \frac{\theta}{q}) \\ &= \cos \theta + i \sin \theta\end{aligned}$$

उपपत्ति प्रमेय 1 [a] $1 \cdot n$ धनात्मक पूर्णांक होने के तहत

$$\Rightarrow [\cos \frac{\theta}{q} + i \sin \frac{\theta}{q}]^{\frac{1}{q}} = [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{q}}$$

दोनों पक्षों का q वाँ मूल लेने पर

$$\Rightarrow [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{1}{q}} = [\cos \frac{\theta}{q} + i \sin \frac{\theta}{q}]^{\frac{1}{q}}$$

पाश्चांतर करने पर

$$\Rightarrow [\cos \theta + i \sin \theta]^{\frac{p}{q}} = [\cos \frac{\theta}{q} + i \sin \frac{\theta}{q}]^{\bar{p}}$$

दोनों पक्षों का p वाँ घात मान लेने पर

$$= \cos (\theta * \frac{\bar{p}}{q}) + i \sin (\theta * \frac{\bar{p}}{q}) \quad \text{सिद्ध होगा।}$$

इस प्रकार $n =$ धनात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांक तथा धनात्मक एवं ऋणात्मक भिन्न के प्रति -

$$[\cos \theta + i \sin \theta]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad \text{सिद्ध}$$

समीकरण 2 ■ कोण माप इकाई रेडियन में $m \angle x$ के लिए x के उच्च घात मानों में-

$$[a] \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \dots + \dots = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$[b] \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + \dots + \dots = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{होगा।}$$

उपपत्ति

$\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = \{\cos \theta + i \sin \theta\}^n$ का द्विपद प्रमेय विस्तार करने पर

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= [(C_0s\theta)^n + n(C_0s\theta)^{n-1} (i \sin \theta) + \frac{n(n-1)}{!2} (C_0s\theta)^{n-2} (i \sin \theta)^2 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{!3} (C_0s\theta)^{n-3} (i \sin \theta)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{!4} (C_0s\theta)^{n-4} (i \sin \theta)^4 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{!5} (C_0s\theta)^{n-5} (i \sin \theta)^5 + \dots + \dots + \dots + \dots] \quad \text{----- (1)}\end{aligned}$$

काल्पनिक संख्या $i = \sqrt{-1}$ का घातांकी विस्तार नियम $(i)^2 = -1, (i)^3 = -i, (i)^4 = 1, (i)^5 = i$

या $(i)^{4n} = 1, (i)^{4n+1} = i, (i)^{4n+2} = -1, (i)^{4n+3} = -i$, के अनुसार समीकरण (1) में प्रतिस्थापन करने पर -

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) &= [(C_0s\theta)^n + i\{n(C_0s\theta)^{n-1} (\sin \theta)\} - \frac{n(n-1)}{!2} (C_0s\theta)^{n-2} (\sin \theta)^2 \\ &\quad - i\{\frac{n(n-1)(n-2)}{!3} (C_0s\theta)^{n-3} (\sin \theta)^3\} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{!4} (C_0s\theta)^{n-4} (\sin \theta)^4 \\ &\quad + i\{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{!5} (C_0s\theta)^{n-5} (\sin \theta)^5\} + \dots + \dots + \dots + \dots] \quad \text{----- (2)}\end{aligned}$$

समीकरण (2) में से वास्तविक और काल्पनिक भाग अलग करने पर-

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= [(C_0s\theta)^n - \frac{n(n-1)}{!2} (C_0s\theta)^{n-2} (\sin \theta)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{!4} (C_0s\theta)^{n-4} (\sin \theta)^4 \\ &\quad - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{!6} (C_0s\theta)^{n-6} (\sin \theta)^6 - \dots + \dots + \dots] \quad \text{----- (3)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= [n(C_0s\theta)^{n-1} (\sin \theta) - \frac{n(n-1)(n-2)}{!3} (C_0s\theta)^{n-3} (\sin \theta)^3 \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{!5} (C_0s\theta)^{n-5} (\sin \theta)^5 + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots] \quad \text{----- (4)}\end{aligned}$$

समीकरण (3) और (4) में $n\theta = x$ प्रतिस्थापित करने पर तथा θ को स्थिरांक मानने पर $n \rightarrow \infty$ तब $\theta = \frac{x}{n}$ के लिए $n \rightarrow \infty$

हो तो $\theta \rightarrow 0$ होगा। पुनः समीकरण (4) में $n\theta = x \Rightarrow n = \frac{x}{\theta}$ प्रतिस्थापित करने पर -

$$\sin x = [\frac{x}{\theta} (C_0s\theta)^{n-1} (\sin \theta) - \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)}{!3 * \theta^3} (C_0s\theta)^{n-3} (\sin \theta)^3$$

$$+ \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)(x-4\theta)}{!5*\theta^5} (C0s\theta)^{n-5} (\sin\theta)^5 + \dots + \dots + \dots] \\ = [x(Cos\theta)^{n-1} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) - \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)}{!3} (Cos\theta)^{n-3} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3 \\ + \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)(x-4\theta)}{!5} (C0s\theta)^{n-5} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^5 + \dots + \dots + \dots] \text{ -----(5)}$$

चूँकि $\theta \rightarrow 0 \therefore \cos\theta = \cos 0 = 1$, $\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ और $(x - m\theta) = x$ होगा। इन सब मानों को समीकरण (5) में

प्रतिस्थापित करने पर - $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \dots + \dots = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ सिद्ध।

इसी प्रकार समीकरण (3) से

$$\cos x = [(C0s\theta)^n - \frac{x(x-\theta)}{!2*\theta^2} (Cos\theta)^{n-2} (\sin\theta)^2 + \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)}{!4*\theta^4} (Cos\theta)^{n-4} (\sin\theta)^4 + \dots + \dots + \dots] \\ = [(Cos\theta)^n - \frac{x(x-\theta)}{!2} (Cos\theta)^{n-2} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 + \frac{x(x-\theta)(x-2\theta)(x-3\theta)}{!4} (Cos\theta)^{n-4} \left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4 + \dots + \dots + \dots] \\ = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + \dots + \dots = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ सिद्ध।}$$

समीकरण 2 से यदि $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots + \dots + \dots + \dots$ तथा

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots + \dots + \dots + \dots \text{ हो तो}$$

$$[1] \cos(i) - i\sin(i) = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots + \dots + \dots + \dots \text{ पद तक}$$

$$[2] \cos(i) + i\sin(i) = e^{\bar{i}} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \dots + \dots + \dots + \dots \text{ पद तक होगा।}$$

उपपत्ति

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ और } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ में } x = (i) \text{ प्रतिस्थापित करने पर -}$$

$$\cos(i) = \frac{e^{i*i} + e^{-i*i}}{2i} = \frac{e^{\bar{i}} + e}{2i} \text{ और } i\sin(i) = i * \frac{e^{i*i} - e^{-i*i}}{2i} = \frac{e^{\bar{i}} - e}{2}$$

$$\therefore \cos(i) - i\sin(i) = \frac{e^{\bar{i}} + e}{2} - \frac{e^{\bar{i}} - e}{2} = \frac{2e}{2} = e \text{ तथा } \cos(i) + i\sin(i) = \frac{e^{\bar{i}} + e}{2} + \frac{e^{\bar{i}} - e}{2} = \frac{2e^{\bar{i}}}{2} = e^{\bar{i}} \text{ सिद्ध}$$

पुनः $\cos(i) - i\sin(i) =$

$$\left\{ \left[1 - \frac{(i)^2}{2!} + \frac{(i)^4}{4!} - \frac{(i)^6}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] - i \left\{ (i) - \frac{(i)^3}{3!} + \frac{(i)^5}{5!} - \frac{(i)^7}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = \left\{ \left[1 - \frac{(i)^2}{2!} + \frac{(i)^4}{4!} - \frac{(i)^6}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] - \left\{ (i)^2 - \frac{(i)^4}{3!} + \frac{(i)^6}{5!} - \frac{(i)^8}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = \left\{ \left[1 - \frac{-1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{-1}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] - \left\{ -1 - \frac{1}{3!} + \frac{-1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = \left\{ \left[1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] + \left\{ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \dots + \dots + \dots + \dots \text{ पद तक } = e \text{ सिद्ध।}$$

$\cos(i) + i\sin(i) =$

$$\left\{ \left[1 - \frac{(i)^2}{2!} + \frac{(i)^4}{4!} - \frac{(i)^6}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] + i \left\{ (i) - \frac{(i)^3}{3!} + \frac{(i)^5}{5!} - \frac{(i)^7}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = \left\{ \left[1 - \frac{(i)^2}{2!} + \frac{(i)^4}{4!} - \frac{(i)^6}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] + \left\{ (i)^2 - \frac{(i)^4}{3!} + \frac{(i)^6}{5!} - \frac{(i)^8}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\} \\ = \left\{ \left[1 - \frac{-1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{-1}{6!} + \dots + \dots + \dots \right] + \left\{ -1 - \frac{1}{3!} + \frac{-1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots + \dots + \dots \right\} \right\}$$

$$= \left[\left\{ 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \dots + \dots + \dots \right\} + \left\{ -\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots - \dots - \dots \right\} \right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \dots - \dots - \dots \text{ पद तक} \right] = e^i \text{ सिद्ध।}$$

चरघातांकी समीकरण प्रमेय द्वारा सरल त्रिकोणमिति समीकरणों का प्रमाण

[1] $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ का प्रमाण—

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2}{-4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ प्रमाणित।}$$

[2] $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ का प्रमाण

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + 2}{4} - \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} - 2}{-4}$$

$$= \frac{2(e^{2i\theta} + e^{-2\theta})}{4} = \frac{(e^{2i\theta} + e^{-2\theta})}{2} = \cos 2\theta \text{ प्रमाणित।}$$

समीकरण 3 ■ वास्तविक एवं काल्पनिक अंश योजना या युक्ति का समीकरण

$$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2-\beta^2}\right) + \frac{i}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\beta}{1+\alpha^2+\beta^2}\right)$$

उपपत्ति अल्पार्थक में

$$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy \quad \therefore \tan(x + iy) = \alpha + i\beta$$

$$i \text{ के लिए } -i \text{ लेने पर } \tan(x - iy) = \alpha - i\beta$$

$$\tan 2x = \tan \{(x + iy) + (x - iy)\} = \frac{\tan(x + iy) + \tan(x - iy)}{1 - \tan(x + iy) \tan(x - iy)}$$

$$= \frac{(\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta)}{1 - (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} = \frac{2\alpha}{1 - (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}$$

$$\therefore 2x = \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right) \text{ -----(1)}$$

$$\tan 2(iy) = \tan \{(x + iy) - (x - iy)\} = \frac{\tan(x + iy) - \tan(x - iy)}{1 + \tan(x + iy) \tan(x - iy)}$$

$$= \frac{(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)}{1 + (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} = \frac{2i\beta}{1 + (\alpha^2 + \beta^2)} = \frac{2(i\beta)}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$\therefore 2(iy) = \tan^{-1}\left(\frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}\right) \Rightarrow (iy) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}\right) \text{ -----(2)}$$

समिका (1) और (2) से क्रमशः प्राप्त x और (iy) के मान को समीकरण $\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = x + iy$ में प्रतिस्थापित करने पर—

$$\tan^{-1}(\alpha + i\beta) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2 - \beta^2}\right) + \frac{i}{2} \tan^{-1}\left(\frac{2\beta}{1 + \alpha^2 + \beta^2}\right) \text{ सिद्ध।}$$

12-4 सर्व मान्य ग्रेगोरी श्रेढ़ी का कथन

यदि $m\angle\theta = \frac{-\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{4}$ रेडियन के बीच का कोण माप हो तो —

$$[1] m\angle\theta^r = \tan \theta - \frac{1}{3} \tan^3 \theta + \frac{1}{5} \tan^5 \theta - \frac{1}{7} \tan^7 \theta + \frac{1}{9} \tan^9 \theta - \frac{1}{11} \tan^{11} \theta + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक}$$

$$[2] \tan^{-1} x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{7} x^7 + \frac{1}{9} x^9 - \frac{1}{11} x^{11} + \frac{1}{13} x^{13} - \frac{1}{15} x^{15} + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक}$$

$$\text{उपपत्ति } i \sin \theta = i * \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\therefore i \tan \theta = \frac{i \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \text{ ----- (1)}$$

$$\Rightarrow 1 + i \tan \theta = 1 + \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2e^{i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \text{ समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से जोड़ने पर(2)}$$

$$1 - i \tan \theta = 1 - \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{2e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} \text{ समिका (1) के दोनों पक्ष को 1 से घटाने पर(3)}$$

$$\therefore \frac{1+i\tan \theta}{1-i\tan \theta} = \frac{2e^{i\theta}}{2e^{-i\theta}} = e^{2(i\theta)} \dots\dots\dots(4)$$

$\Rightarrow \log_e(1+i\tan \theta) - \log_e(1-i\tan \theta) = 2(i\theta)$ समिका (4) के दोनों पक्षों का आधार e के सापेक्ष लघुगुणक लेले पर।
अब यदि $m\angle \theta = \frac{-\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{4}$ रेडियन के बीच का कोण माप हो तब -

$$\begin{aligned} 2(i\theta) &= \log_e(1+i\tan \theta) - \log_e(1-i\tan \theta) \\ &= \left\{ i\tan\theta - \frac{1}{2}(i)^2\tan^2\theta + \frac{1}{3}(i)^3\tan^3\theta - \frac{1}{4}(i)^4\tan^4\theta + \frac{1}{5}(i)^5\tan^5\theta - \frac{1}{6}(i)^6\tan^6\theta + \frac{1}{7}(i)^7\tan^7\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8}(i)^8\tan^8\theta + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक} \right\} \\ &- \left\{ -i\tan\theta - \frac{1}{2}(i)^2\tan^2\theta - \frac{1}{3}i\tan^3\theta - \frac{1}{4}(i)^4\tan^4\theta - \frac{1}{5}(i)^5\tan^5\theta - \frac{1}{6}(i)^6\tan^6\theta - \frac{1}{7}(i)^7\tan^7\theta - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8}(i)^8\tan^8\theta + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक} \right\} \\ &= \left\{ i\tan\theta + \frac{1}{2}\tan^2\theta - \frac{1}{3}i\tan^3\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta + \frac{1}{5}i\tan^5\theta + \frac{1}{6}i\tan^6\theta - \frac{1}{7}i\tan^7\theta - \frac{1}{8}\tan^8\theta + \dots - \dots + \right. \\ &\quad \left. \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक} \right\} - \left\{ -i\tan\theta + \frac{1}{2}\tan^2\theta + \frac{1}{3}i\tan^3\theta - \frac{1}{4}\tan^4\theta - \frac{1}{5}i\tan^5\theta + \frac{1}{6}\tan^6\theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{7}i\tan^7\theta - \frac{1}{8}\tan^8\theta + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक} \right\} \\ &= 2i\left[\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \frac{1}{7}\tan^7\theta + \frac{1}{9}\tan^9\theta - \frac{1}{11}\tan^{11}\theta + \dots - \dots \infty \text{ पद तक}\right] \\ \therefore \theta &= \left[\tan\theta - \frac{1}{3}\tan^3\theta + \frac{1}{5}\tan^5\theta - \frac{1}{7}\tan^7\theta + \frac{1}{9}\tan^9\theta - \frac{1}{11}\tan^{11}\theta + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक}\right] \text{ सिद्ध।} \end{aligned}$$

उक्त सिद्ध समीकरण के बाँये पक्ष में $\theta = \tan^{-1}x$ और दाँये पक्ष में $\tan \theta = x$ प्रतिस्थापित होगा।

$$\text{अतः } \theta = \tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{15}x^{15} + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक, सिद्ध।}$$

12- 5 Sinx , Cosx , $\tan^{-1}x$ के आकलन गणना विस्तार में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या निर्धारण का प्रतिबंध

[1] यदि $\frac{x^{m+n}}{c}$ पद पंक्ति हल के लिए $\frac{x^m}{a}$ पद पंक्ति और $\frac{x^n}{b}$ पद पंक्ति में खड़ा-तिरछा गुणा (C.P.) गणना प्रारंभ करे इसके पूर्व दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या निर्धारण का प्रतिबंध को निम्नानुसार दृष्टिगत करना होगा।

$\frac{x^{m+n}}{c}$ पंक्ति का चालक भाजक $k_r = 2 d_r$ से $d_r = \frac{k_r}{2}$ हो तब-

A• प्रथम (C.P.) का मापांक $|C.P| < d_r$ होने पर -

$\frac{x^{m+n}}{c}$ पद पंक्ति दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = $\left[\left\{\frac{x^m}{a}\right.\right.$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\left.\left.\right\} + \left\{\frac{x^n}{a}\right.\right.$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\left.\left.\right\} + 2\right]$ होगा। जिसके क्रमागत अंतिम शून्य (0) भगफल के प्रति शेषफल प्रथम (C.P.) का हल मान ही होगा।

B• प्रथम (C.P.) का मापांक $|C.P| \geq d_r$ होने पर -

$\frac{x^{m+n}}{c}$ पद पंक्ति दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = $\left[\left\{\frac{x^m}{a}\right.\right.$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\left.\left.\right\} + \left\{\frac{x^n}{a}\right.\right.$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\left.\left.\right\} + 1\right]$ होगा।

[2] यदि $\frac{x^{2m}}{c}$ पद पंक्ति हल के लिए $\frac{x^m}{a}$ पद पंक्ति का द्वंदयोगा गुणा (D.P.) गणना प्रारंभ करे इसके पूर्व दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या निर्धारण का प्रतिबंध को निम्नानुसार दृष्टिगत करना होगा।

$\frac{x^{2m}}{c}$ पंक्ति का चालक भाजक $k_r = 2d_r$ से $d_r = \frac{k_r}{2}$ हो तब-

A• प्रथम (D.P.) का मापांक $|D.P| < d_r$ होने पर -

$\frac{x^{2m}}{c}$ पद पंक्ति दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = $[2\{\frac{x^m}{a}$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\}+2]$ होगा। जिसके क्रमागत अंतिम शून्य (0) भागफल के प्रति शेषफल प्रथम (D.P.) का हल मान ही होगा।
B• प्रथम (D.P.) का मापांक $|D.P| \geq d_r$ होने पर –

$\frac{x^{2m}}{c}$ पद पंक्ति दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = $[2\{\frac{x^m}{a}$ पद पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $\}+1]$ होगा।

ध्यानकर्षण 1• Sinx का आकलन गणना विस्तार में $\frac{x^m}{c} = x^2 = \frac{x^2}{1} = \frac{x^2}{1!}$ होगा।

2• Cosx का आकलन गणना विस्तार में पूर्णांक $1 = 1.0$ दर्ज करे और $\frac{x^2}{2!}$ के लिए चालक भाजक = 2 चुने।

3• Sinx और Cosx का आकलन गणना विस्तार में a, b, c, क्रमगुणित की संख्या है।

4• Tan⁻¹x का आकलन गणना विस्तार में a, b, c, प्राकृत संख्या है।

12-6 Sinx का आकलन विस्तार का सरलीकरण

ज्ञात है अनुच्छेद 11-3 केपलर समीकरण 2 कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle x$ के लिए x उच्च घात मानों में–

$$\text{Sinx} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \text{ को}$$

$\text{Sinx} = P - Q + R - S + T - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots$ के प्रतिरूपण में व्यक्त किये जो पर

$$\{P = x\}, \{Q = \frac{Px^2}{2 \cdot 3} = \frac{Px^2}{6}\}, \{R = \frac{Qx^2}{4 \cdot 5} = \frac{Qx^2}{20}\}, \{S = \frac{Rx^2}{6 \cdot 7} = \frac{Rx^2}{42}\}, \{T = \frac{Sx^2}{8 \cdot 9} = \frac{Sx^2}{72}\} \dots \dots \dots \text{ इत्यादि। जिसका}$$

व्यापक व्यापक गणन संक्रिया विश्लेषण यह है कि–

1• उत्तर प्राप्ति के गणन संक्रिया के प्रथम गणना पंक्ति में x का मान दर्ज कीजिए।

2• $(-x^2)$ की गणना को उक्त प्रथम पंक्ति के ऊपर अतिरिक्त पंक्ति (0) में दर्ज कीजिए।

3A• आगे किसी $r \geq 2$ वे (2 रे, 3 रे, 4 थे) पंक्ति का उत्तरांक बाँये से दाँये प्राप्त करने के क्रम में (0) पंक्ति और $(r - 1)$ वे पंक्ति में प्राप्त उत्तरांक के मध्य किये गये प्रत्येक प्रक्रम के खड़ा-तिरछा गुणा (C.P.) से प्राप्त संख्या और इसके पूर्व प्रक्रम के उत्तरांक सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त शेषफल का 10 गुणा का योगफल प्राप्त कीजिए।

3B• उक्त योगफल को चालक भाजक k के हल मान द्वारा विभाजित कीजिए।

3C• प्राप्त भागफल को उत्तरांक मानकर यथा पंक्ति यथा प्रक्रम प्रविष्ट कीजिए और प्राप्त शेषफल को इस उत्तरांक के बाँयी ओर नीचे यथा उत्तरांक_{शेषफल} दर्शित कीजिए।

3A, B, C के अनुसार गणन संक्रिया को अपनी आवश्यकतानुसार पंक्ति क्रम तक उत्तरांक_{शेषफल} दर्शित कीजिए।

4• उत्तर गणना पंक्ति 1 से अंतिम उत्तर गणना पंक्ति तक के उत्तरांक अवयवों का अंशानुसार (दाँयी से बाँयी हजारांश, शतांश, दशांश बाद पूर्णांश तक) योगफल प्राप्त कीजिए।

निष्कर्ष उक्त योगफल ही Sinx का अभीष्ट आकलन होगा।

इस व्यापक गणन संक्रिया विश्लेषण को उदाहरण के माध्यम से विश्लेषित कर गणन के प्रति आवश्यक सावधानियों को आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण ■ यदि $m\angle x = 0.23^\circ$ के प्रति–

$$\text{Sinx} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ के द्वारा}$$

Sin(0.23°) का आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k _r	नियमानुसार गणना
0	$-x^2 = (0.23)^2 =$	0.0 $\bar{5}$ $\bar{3}$ 1
उ. पं. 1	x=	0.2 3
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{!3}$ के लिए k ₂ = 2*3 = 6	0.0 0 $\bar{2}_2$ 0 $\bar{1}$ $\bar{3}_1$ 2 ₁ 2 ₁ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$ $\bar{3}_2$
उ. पं 3	$\frac{x^5}{!5}$ के लिए k ₃ = 4*5 = 20	0.0 0 0 0 0 0 ₁₀ 5 ₆ 3 ₁₃ 6 ₉ 3 ₁₁ 6 ₁ 2 ₄ $\bar{1}_1$ 1 ₁₁ 6 ₁₁
उ. पं 4	$-\frac{x^7}{!7}$ के लिए k ₄ = 6*7 = 42	0.0 0 0 0 0 0 0 0 $\bar{1}_{17}$ 3 ₁₄ 3 ₁₀ $\bar{3}_4$ $\bar{2}_{11}$ 2 ₁ 1 ₃₇
उ. पं 5	$\frac{x^9}{!9}$ के लिए k ₅ = 8*9 = 72	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ₅ 1 ₃₄ $\bar{5}_5$ $\bar{1}_{31}$ 5 ₂₈
उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योग मान		0.2 3 $\bar{2}$ 0 $\bar{3}$ 7 5 2 3 6 $\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{1}$ 9 =0.22797752356899 दशमलव बाद चौदह स्थान तक का आकलन है जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक 0.2 2 7 9 7 7 5 2 4 है।

पंक्तिवार सम्पूर्ण हल विश्लेषण

संकेत C.P. = खड़ा-तिरछा गुणा का योगमान,

उत्तर पंक्ति क्रम (1) x= 0.2 3 दर्ज कीजिए।

पंक्ति क्रम (0) $-x^2 = (0.23)^2 = -0.0529$ के लिए उनागर या विनकुलम् संख्या 0.0 $\bar{5}$ $\bar{3}$ 1

उत्तर पंक्ति क्रम (2) $-\frac{x^3}{!3}$ का हल मान $-\frac{x^3}{!3} = \{(-x^2)*(x)\} \div 6$ के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 1 से -

प्रक्रम 1 C.P { $\bar{5}$ } = $(\bar{5} * 2) = \bar{10}$ का मापांक $|\bar{10}| > \{d_2 = \frac{k_2}{2} = \frac{6}{2} = 3\}$ ∴ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [1 + 0 + 1] = 2 के लिए 0 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P { $\bar{5}$ } = $\bar{10}$, $\bar{10} \div 6$ (k₂) से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 2 जिन्हे संयुक्त कर $\bar{2}_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P { $\bar{5}$ $\bar{3}$ } = $\{(5 * 3) + (2 * \bar{3})\} = \bar{21}$, $\bar{21} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 2}) = \bar{21} + 20 = \bar{1}$, $\bar{1} \div 6$ (k₂) से भागफल 0 और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे संयुक्त कर 0 $\bar{1}$ दर्ज कीजिए।

✖ उनागर शब्द छत्तीसगढ़ी भाषा के दो शब्द उना और आगर के संधि या मेल से बना है। उना का अर्थ कम और आगर का अर्थ अधिक है। हिन्दी भाषा में उना के लिए पूर्ववर्ती और आगर के लिए परवर्ती शब्द है। वैदिक गणित में उना के लिए एकन्यून और आगर के लिए एकाधिकेन शब्द है जिनके लिए विनकुलम् शब्द लिया गया है जो ऑग्ल (इंगलिश) भाषा शब्दकोष से लिया गया है जिसका शाब्दिक अर्थ शिरोरेखा वाली संख्या से है। जिसके विश्लेषण उपरांत केवल 0, 1, 2, 3, 4 और 5 का ही अनुप्रयोग कर बड़ी सी बड़ी संख्याएँ दर्शित किया जा सकता है। जैसे $8 = 1\bar{2}$ जो स्पष्ट करता है संख्या 8 10 से 2 कम है। $91 = 1\bar{1}1$ जो स्पष्ट करता है संख्या 91 101 से 10 कम है। गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धति का अनुप्रयोग नयी दिशा और नयी क्रान्ति के रूप में स्वीकारा जाना यथेष्ट ही सिद्ध होगा। व्यापक एवं विस्तारित अध्ययन के लिए प्रकाशन से प्रकाशित मेरी कृति ग्रंथ **गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धति छत्तीसगढ़ की देन - अंकगणित सोपान अश्याय 1 अथवा छत्तीसगढ़ गणित दर्शन अध्याय 21** का अध्ययन कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{3} & 1 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{3} * 3) + (2 * 1)\} = \bar{7}$, $\bar{7} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = \bar{7} + \bar{10} = \bar{17}$
, $\bar{17} \div 6$ (k_2) से भागफल $\bar{3}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर 3_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right\} = (1 * 3) = 3$, $3 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 1) = 3 + 10 = 13$
, $13 \div 6$ (k_2) से भागफल 2 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर 2_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 1) = 10$
 $10 \div 6$ (k_2) से भागफल 2 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = \bar{20}$
 $\bar{20} \div 6$ (k_2) से भागफल $\bar{3}$ और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

टीप अग्र समस्त प्रक्रमों (8,9,10,11-----) प्रक्रम 7 के ही गणना हल होंगे।

इस प्रकार पंक्ति 2 के हल $0.00\bar{2}0\bar{3}22\bar{3}\bar{3}\bar{3} - - - - = 0.00\bar{2}0\bar{3}22\bar{3}$ होगा।

जहाँ $\bar{3}$ को आवर्त $\bar{3}$ पढ़ते हैं। जिसका तात्पर्य दायी ओर आगे के अंक $\bar{3} - - - -$ होंगे।

उत्तर पंक्ति क्रम (3) $\frac{x^5}{15}$ का हल मान $\frac{x^5}{15} = \{(-x^2) * (-\frac{x^3}{13})\} \div 20$ कें लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 2 से -

प्रक्रम 1 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} \\ 2 \end{smallmatrix}\right\} = (\bar{5} * \bar{2}) = 10$ का मापांक $10 = \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{20}{2} = 10\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [1 + 2 + 1] = 4 के लिए 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} \\ 2 \end{smallmatrix}\right\} = (\bar{5} * \bar{2}) = 10$ $10 \div 20$ (k_3) से भागफल 0 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 0_{10} दर्ज कीजिए।

3 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * 0) + (\bar{2} * \bar{3})\} = 6$, $6 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 10) = 6 + 100 = 106$, $106 \div 20$ (k_3) से भागफल 5 और शेषफल 6 जिन्हे सयुक्त कर 5_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (\bar{2} * 1) + (\bar{3} * 0)\} = 13$, $13 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 6) = 13 + 60 = 73$, $73 \div 20$ (k_3) से भागफल 3 और शेषफल 13 जिन्हे सयुक्त कर 3_{13} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 0 & \bar{3} & 2 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * 2) + (0 * 1) + (\bar{3} * \bar{3})\} = \bar{1}$, $\bar{1} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 13) = \bar{1} + 130 = 129$, $129 \div 20$ (k_3) से भागफल 6 और शेषफल 9 जिन्हे सयुक्त कर 6_9 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * 2) + (\bar{3} * 1) + (\bar{3} * 2)\} = \bar{19}$, $\bar{19} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 9) = \bar{19} + 90 = 71$, $71 \div 20$ (k_3) से भागफल 3 और शेषफल 11 जिन्हे सयुक्त कर 3_{11} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (2 * 1) + (\bar{3} * 2)\} = 11$, $11 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } 11) = 11 + 110 = 121$, $121 \div 20$ (k_3) से भागफल 6 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर 6_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (2 * 1) + (\bar{3} * \bar{3})\} = 26$, $26 + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } 1) = 26 + 10 = 36$, $36 \div 20$ (k_3) से भागफल 2 और शेषफल $\bar{4}$ जिन्हे सयुक्त कर $2_{\bar{4}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 $C.P\left\{\begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (\bar{3} * 1) + (\bar{3} * \bar{3})\} = 21$, $21 + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = 21 + \bar{40} = \bar{19}$, $\bar{19} \div 20$ (k_3) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 $C.P \left\{ \frac{5}{3} \frac{3}{3} \frac{1}{3} \right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (\bar{3} * 1)\} + (\bar{3} * \bar{3}) = 21, 21 + 10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल 1}) = 21 + 10 = 31, 31 \div 20 (k_3) \text{ से भागफल 1 और शेषफल 11 जिन्हे सयुक्त कर } 1_{11} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 11 $C.P \left\{ \frac{5}{3} \frac{3}{3} \frac{1}{3} \right\} = \{(\bar{5} * \bar{3}) + (\bar{3} * 1)\} + (\bar{3} * \bar{3}) = 21, 21 + 10 * (\text{प्रक्रम 10 में प्राप्त शेषफल 11}) = 21 + 110 = 131, 131 \div 20 (k_3) \text{ से भागफल 6 और शेषफल 11 जिन्हे सयुक्त कर } 6_{11} \text{ दर्ज कीजिए।}$

टीप अग्र समस्त प्रक्रमों (12,13,14,15-----) प्रक्रम 11 के ही गणना इल होंगे।

इस प्रकार पंक्ति 3 का हल 0.0 0 0 0 0 5 3 6 3 6 2 $\bar{1}$ 1 6 होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (4) $-\frac{x^7}{17}$ का हल मान $-\frac{x^7}{17} = \{(-x^2) * (\frac{x^5}{15})\} \div 42$ के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 3 से -

प्रक्रम 1 $C.P \left\{ \frac{5}{5} \right\} = (\bar{5} * 5) = \bar{25}$ का मापांक $25 > \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{42}{2} = 21\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (3) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [1 + 5 + 1] = 7 के लिए 0 0 0 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{5}{5} \right\} = (\bar{5} * 5) = \bar{25}, \bar{25} \div 42 (k_4) \text{ से भागफल } \bar{1} \text{ और शेषफल 17 जिन्हे सयुक्त कर } \bar{1}_{17} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \frac{5}{5} \frac{3}{3} \right\} = \{(\bar{5} * 3) + (5 * \bar{3})\} = \bar{30}, \bar{30} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 17}) = \bar{30} + 170 = 140, 140 \div 42 (k_4) \text{ से भागफल 3 और शेषफल 14 जिन्हे सयुक्त कर } 3_{14} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \frac{5}{5} \frac{3}{3} \frac{1}{6} \right\} = \{(\bar{5} * 6) + (5 * 1) + (\bar{3} * 3)\} = \bar{34}, \bar{34} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल 14}) = \bar{34} + 140 = 106, 106 \div 42 (k_4) \text{ से भागफल 3 और शेषफल } \bar{10} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } 3_{\bar{10}} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \frac{5}{3} \frac{3}{6} \frac{1}{3} \right\} = \{(\bar{5} * 3) + (3 * 1) + (\bar{3} * 6)\} = \bar{30}, \bar{30} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } \bar{10}) = \bar{30} + \bar{100} = \bar{130}, \bar{130} \div 42 (k_4) \text{ से भागफल } \bar{3} \text{ और शेषफल } \bar{4} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{3}_4 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 6 $C.P \left\{ \frac{5}{6} \frac{3}{3} \frac{1}{6} \right\} = \{(\bar{5} * 6) + (6 * 1) + (\bar{3} * 3)\} = \bar{33}, \bar{33} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = \bar{33} + \bar{40} = \bar{73}, \bar{73} \div 42 (k_4) \text{ से भागफल } \bar{2} \text{ और शेषफल 11 जिन्हे सयुक्त कर } \bar{2}_{11} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 7 $C.P \left\{ \frac{5}{3} \frac{3}{6} \frac{1}{2} \right\} = \{(\bar{5} * 2) + (3 * 1) + (\bar{3} * 6)\} = \bar{25}, \bar{25} + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल 11}) = \bar{25} + 110 = 85, 85 \div 42 (k_4) \text{ से भागफल 2 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर } 2_1 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \frac{5}{6} \frac{3}{2} \frac{1}{1} \right\} = \{(\bar{5} * 1) + (6 * 1) + (\bar{3} * 2)\} = \bar{5}, \bar{5} + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल 1}) = \bar{5} + 10 = 5, 5 \div 42 (k_4) \text{ से भागफल 1 और शेषफल } \bar{37} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } 1_{\bar{37}} \text{ दर्ज कीजिए।}$

इस प्रकार पंक्ति 4 का हल 0.0 0 0 0 0 0 0 $\bar{1}_{17}$ 3_{14} $3_{\bar{10}}$ $\bar{3}_4$ $\bar{2}_{11}$ 2_1 $1_{\bar{37}}$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (5) $\frac{x^9}{19}$ का हल मान $\frac{x^9}{19} = \{(-x^2) * (-\frac{x^7}{17})\} \div 72$ के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 4 से -

प्रक्रम 1 $C.P \left\{ \frac{5}{1} \right\} = (\bar{5} * \bar{1}) = 5$ का मापांक $5 < \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{72}{2} = 36\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (4) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [1 + 7 + 2] = 10 के लिए 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{5}{1} \frac{3}{3} \right\} = \{(\bar{5} * 3) + (\bar{1} * \bar{3})\} = \bar{12}, \bar{12} + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल 5}) = \bar{12} + 50 = 38, 38 \div 72 (k_5) \text{ से भागफल 1 और शेषफल } \bar{34} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } 1_{\bar{34}} \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = \{(5 * 3) + (1 * 1) + (3 * 3)\} = 25$, $25 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{34}) = 25 + 340 = 365$, $365 \div 72$ (k_5) से भागफल $\bar{5}$ और शेषफल $\bar{5}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{5}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = \{(5 * 3) + (3 * 1) + (3 * 3)\} = 9$, $9 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{5}) = 9 + 50 = 41$, $41 \div 72$ (k_5) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 31 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_{31}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{5} & \bar{3} & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(5 * 2) + (3 * 1) + (3 * 3)\} = 22$, $22 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 31) = 22 + 310 = 332$, $332 \div 72$ (k_5) से भागफल 5 और शेषफल $\bar{28}$ जिन्हे सयुक्त कर 5_{28} दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 5 का हल $0.0000000000_5 1_{34} \bar{5}_5 \bar{1}_{31} 5_{28}$

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक) $0.2 \quad 3 \quad \bar{2} \quad 0 \quad \bar{3} \quad 7 \quad 5 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad \bar{3} \quad \bar{1} \quad \bar{1} \quad 9$
 $= 0.22797752356899$ दशमलव बाद चौदह स्थान तक का आकलन है
जो कम्प्यूकृत हल मान में नौ स्थान तक $= 0.227977524$ है।

12-7 Cosx का आकलन विस्तार का सरलीकरण

ज्ञात है— अनुच्छेद 11.3 केपलर समीकरण 2 कोण माप इकाई रेडियन में $m \angle x$ के लिए x उच्च घात मानों में—

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots$$

$\cos x = 1 - P + Q - R + S - T + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots$ के प्रतिरूपण में व्यक्त किये जो पर

$$\left\{ P = \frac{x^2}{2!} = \frac{x^2}{2} \right\} \text{ है तब } \left\{ -P = -\frac{x^2}{2} \right\} \left\{ Q = \frac{x^4}{4!} = \frac{(-P)^2}{6} \right\}, \left\{ -R = -\frac{x^6}{6!} = \frac{(-P)*Q}{15} \right\}, \left\{ S = \frac{x^8}{8!} = \frac{(-P)*(-R)}{28} \right\}$$

$$-T = -\frac{x^{10}}{10!} = \frac{(-P)*(S)}{45} \dots \dots \dots \text{ इत्यादि। जिसका व्यापक व्यापक गणन संक्रिया विश्लेषण यह है कि—}$$

1• गणना पंक्ति 0_1 में x का मान दर्ज कीजिए।

2• गणना पंक्ति 0_2 में $(-x^2)$ दर्ज कीजिए।

3• उ.प. 1 में पूर्णांक $1 = 1.0000000000000000$ ----- दर्ज कीजिए।

4• उ.प. 2 में $\left\{ -P = -\frac{x^2}{2} \right\}$ दर्ज कीजिए।

5• उ.प. 3 में $\left\{ Q = \frac{x^4}{4!} = \frac{(-P)^2}{6} \right\}$ उ.प. 1 में द्वंद योगा (D.P.) गणना दर्ज कीजिए।

6A• आगे उ.प. $r \geq 4$ वे (, 4 थे , 5 वें... 6 वे, ...) पंक्ति का उत्तरांक बाँये से दाँये करने के क्रम में उ.प. 1 और $(r - 1)$ वे पंक्ति में प्राप्त उत्तरांक के मध्य किये गये प्रत्येक प्रक्रम के खड़ा-तिरछा गुणा (C.P.) से प्राप्त संख्या और इसके पूर्व प्रक्रम के उत्तरांक सुनिश्चित करने उपरांत प्राप्त शेषफल का 10 गुणा का योगफल प्राप्त कीजिए।

6B• उक्त योगफल को चालक भाजक k के हल मान द्वारा विभाजित कीजिए।

6C• प्राप्त भागफल को उत्तरांक मानकर यथा पंक्ति यथा प्रक्रम प्रविष्ट कीजिए और प्राप्त शेषफल को इस उत्तरांक के बाँयी ओर नीचे यथा उत्तरांक_{शेषफल} दर्शित कीजिए।

6 A, B, C के अनुसार गणन संक्रिया को अपनी आवश्यकतानुसार पंक्ति क्रम तक उत्तरांक_{शेषफल} दर्शित कीजिए।

7• उत्तर गणना उत्तर पंक्ति 1 से अंतिम उत्तर गणना पंक्ति तक के उत्तरांक अवयवों का अंशानुसार (दाँयी से बाँयी हजारान्श, शतांश, दशांश बाद पूर्णांश तक) योगफल प्राप्त कीजिए।

निष्कर्ष उक्त योगफल ही $\cos x$ का अभीष्ट आकलन होगा।

इस व्यापक गणन संक्रिया विश्लेषण को उदाहरण के माध्यम से विश्लेषित कर गणन के प्रति आवश्यक सावधानियों को आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण ■ यदि $m \angle x = 0.23^r$ के प्रति—

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \text{ द्वारा}$$

Cos(0.23°) का आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k _r	नियमानुसार गणना
0 ₁	X	0.2 3
0 ₂	$-x^2 = -(0.23)^2 =$	0.0 5 2 9 0
उ. पं. 1	पूर्णक	1.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
उ. पं 2	$-\frac{x^2}{!2}$ के लिए k ₂ = 1*2 = 2	0.0 3 ₁ 4 ₀ 4 ₁ 5 ₀ 0 0 0 0 0 0 0 0 0
उ. पं 3	$\frac{x^4}{!4}$ के लिए k ₃ = 2*3 = 6	0.0 0 0 1 ₃ 1 ₀ 7 ₂ 4 ₂ 0 ₄ 1 ₆ 6 ₁ 1 ₄ 6 ₄ 6 ₄ 6 ₄
उ. पं 4	$-\frac{x^6}{!6}$ के लिए k ₄ = 3*5 = 15	0.0 0 0 0 0 0 0 ₃ 2 ₁ 1 ₄ 5 ₄ 6 ₁ 2 ₂ 0 ₂ 1 ₇ 3 ₆
उ. पं 5	$\frac{x^8}{!8}$ के लिए k ₅ = 4*7 = 28	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ₆ 2 ₁ 1 ₇ 4 ₁₀ 2 ₁ 0 ₃
उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योग मान		1.0 3 4 3 4 7 6 1 6 10 2 10 9 9 = 0.9 7 3 6 6 6 3 9 5 0 3 0 9 9 दशमलव बाद चौदह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक 0.9 7 3 6 6 6 3 9 4 है।

पंक्तिवार सम्पूर्ण हल विश्लेषण

पंक्ति 0₁ x = 0.2 3 दर्ज कीजिए । पंक्ति 0₂ $-x^2 = -(0.23)^2 = 0.0 5 2 9$ दर्ज कीजिए।

उ. पं. 1 पूर्णांक 1 = 1.0 0 0 0 ----- वांछित दशमलव स्थान तक दर्ज कीजिए।

उ. पं. 2 $-\frac{x^2}{!2} = \{0.0 5 2 9 0\} \div 2 (k_2)$
= 0.0 3₁ 4₀ 4₁ 5₀ 0 0 0 0 ----- वांछित दशमलव स्थान तक दर्ज कीजिए।

उ. पं. 3 $\frac{x^4}{!4}$ का हल मान $\frac{x^4}{!4} = \{(-\frac{x^2}{!2}) * (-\frac{x^2}{!2})\} \div 6$ के लिए उ. पं. (2) से

प्रक्रम 1 DP { 3 } = (3)² = 9 का मापांक 9 > {d₃ = $\frac{k_3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ } ∴ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [2 {उ. पं. (2) में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 1] = 2*1 + 1 = 3 के लिए 0 0 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 DP { 3 } = 9, 9 ÷ 6 से भागफल 1 और शेषफल 3 जिन्हे सयुक्त कर 1₃ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 DP { 3 4 } = 2 * (3 * 4) = 24, 24 + 10 * (प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 3) = 24 + 30 = 6
6 ÷ 6 (k₃) से भागफल 1 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 1₀ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 DP { 3 4 4 } = { 2 * (3 * 4) + 4² } = 40, 40 + 10 * (प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल 0) = 40 + 0 = 40
40 ÷ 6 (k₃) से भागफल 7 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 7₂ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 DP { 3 4 4 5 } = { 2 * (3 * 5) + 2 * (4 * 4) } = 2, 2 + 10 * (प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल 2) = 2 + 20 = 22
22 ÷ 6 से भागफल 4 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 4₂ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 DP { 4 4 5 } = { 2 * (4 * 5) + (4)² } = 24, 24 + 10 * (प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल 2) = 24 + 20 = 4
4 ÷ 6 (k₃) से भागफल 0 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 0₄ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 DP { 4 4 5 } = { 2 * (4 * 5) } = 40, 40 + 10 * (प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल 4) = 40 + 40 = 0
0 ÷ 6 (k₃) से भागफल 1 और शेषफल 6 जिन्हे सयुक्त कर 1₆ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 $DP\{\bar{5}\} = (\bar{5})^2 = 25$, $25 + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } \bar{6}) = 25 + \bar{60} = \bar{35}$

$\bar{35} \div 6 (k_3)$ से भागफल $\bar{6}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{6}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 $10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 1) = 10$, $10 \div 6 (k_3)$ से भागफल 1 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 1_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 $10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल } 4) = 40$, $40 \div 6 (k_3)$ से भागफल 6 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 6_4 दर्ज कीजिए।

टीप अग्र समस्त प्रक्रमों (1,11,12,13 -----) प्रक्रम 10 के ही गणना हल होंगे।

इस प्रकार पंक्ति 3 के हल $0.0001_3 1_0 7_2 \bar{4}_2 0_4 1_{\bar{6}} \bar{6}_1 1_4 6_4 6_4 \dots$

$= 0.000117\bar{4}01\bar{6}1\bar{6}$ होगा।

जहाँ $\bar{6}$ को आवर्त 6 पढ़ते हैं। जिसका तात्पर्य दायी ओर आगे के अंक $6 \dots$ होंगे।

उत्तर पंक्ति क्रम (4) $-\frac{x^6}{16}$ का हल मान $-\frac{x^6}{16} = \{(-\frac{x^2}{12}) * (\frac{x^4}{14})\} \div 15 (k_4)$ के लिए उ. पं. (2) और उ. प (3) से

प्रक्रम 1 $C.P\{\bar{3}_1\} = [(\bar{3} * 1) = \bar{3}]$ का मापांक $3 < \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (3) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [1+3+2]=6 के लिए 000000_3 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P\{\bar{3}_1 \bar{4}_1\} = \{(\bar{3} * 1) + (1 * \bar{4})\} = 1$, $1 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{3}) = 1 + \bar{30} = \bar{29}$, $\bar{29} \div 15 (k_4)$ से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P\{\bar{3}_1 \bar{4}_1 \bar{4}_7\} = \{(\bar{3} * 7) + (1 * \bar{4}) + (4 * 1)\} = \bar{21}$, $21 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 1) = \bar{21} + 10 = \bar{11}$, $\bar{11} \div 15 (k_4)$ से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_4$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P\{\bar{3}_1 \bar{4}_1 \bar{4}_7 \bar{5}_4\} = \{(\bar{3} * \bar{4}) + (1 * \bar{5}) + (4 * 7) + (1 * \bar{4})\} = 31$, $31 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 4) = 31 + 40 = 71$, $71 \div 15 (k_4)$ से भागफल 5 और शेषफल $\bar{4}$ जिन्हे सयुक्त कर 5_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P\{\bar{3}_1 \bar{4}_7 \bar{4}_4 \bar{5}_0\} = \{(\bar{3} * 0) + (1 * \bar{5}) + (4 * \bar{4}) + (7 * \bar{4})\} = \bar{49}$, $\bar{49} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = \bar{49} + \bar{40} = \bar{89}$, $\bar{89} \div 15 (k_4)$ से भागफल $\bar{6}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{6}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $C.P\{\bar{3}_7 \bar{4}_4 \bar{4}_0 \bar{5}_1\} = \{(\bar{3} * 1) + (7 * \bar{5}) + (4 * 0) + (\bar{4} * \bar{4})\} = 22$, $22 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 1) = 22 + 10 = 32$, $32 \div 15 (k_4)$ से भागफल 2 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $C.P\{\bar{3}_7 \bar{4}_4 \bar{4}_0 \bar{5}_1\} = \{(\bar{3} * 1) + (7 * \bar{5}) + (4 * 0) + (\bar{4} * \bar{4})\} = \bar{22}$, $\bar{22} + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } 2) = \bar{22} + 22 = \bar{2}$, $\bar{2} \div 15 (k_4)$ से भागफल 0 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 0_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 $C.P\{\bar{3}_4 \bar{4}_0 \bar{4}_1 \bar{5}_6\} = \{(\bar{3} * \bar{6}) + (\bar{4} * \bar{5}) + (4 * 1) + (0 * \bar{4})\} = 42$, $42 + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 42 + \bar{20} = 22$, $22 \div 15 (k_4)$ से भागफल 1 और शेषफल 7 जिन्हे सयुक्त कर 1_7 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 $C.P\{\bar{3}_0 \bar{4}_1 \bar{4}_6 \bar{5}_1\} = \{(\bar{3} * 1) + (0 * \bar{5}) + (4 * \bar{6}) + (1 * \bar{4})\} = \bar{31}$, $\bar{31} + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 7) = \bar{31} + 70 = 39$, $39 \div 15 (k_4)$ से भागफल 3 और शेषफल $\bar{6}$ जिन्हे सयुक्त कर $3_{\bar{6}}$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 4 के हल $0.000000_3 \bar{2}_1 \bar{1}_4 5_4 \bar{6}_1 2_2 0_2 1_7 3_{\bar{6}}$

$= 0.000000\bar{2}\bar{1}5\bar{6}2013$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (5) $\frac{x^8}{18}$ का हल मान $\frac{x^8}{18} = \{(-\frac{x^2}{12}) * (-\frac{x^6}{16})\} \div 28 (k_5)$ के लिए उ. पं. (2) और उ. प (4) से -

प्रक्रम 1 $C.P\{\bar{3}_2\} = [(\bar{3} * 2) = 6]$ का मापांक $6 < \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{38}{2} = 19\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (4) के गणना में

दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+2] = [1+6+2]=9 के लिए 0 0 0 0 0 0 0 0 0₆ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P $\{\frac{3}{2} \frac{4}{1}\} = \{(\bar{3} * \bar{1}) + (\bar{2} * 4)\} = \bar{5}$, $\bar{5} + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल 6}) = \bar{5} + 60 = 55$

, $55 \div 28$ (k_5) से भागफल 2 और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे सयुक्त कर $2\bar{1}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\{\frac{3}{2} \frac{4}{1} \frac{4}{5}\} = \{(\bar{3} * 5) + (\bar{2} * \bar{4}) + (4 * \bar{1})\} = \bar{11}$, $\bar{11} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = \bar{11} + \bar{10} = \bar{21}$ $\bar{21} \div 28$ (k_5) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 7 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}7$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 C.P $\{\{\frac{3}{2} \frac{4}{1} \frac{4}{5} \frac{5}{6}\} = \{(\bar{3} * \bar{6}) + (\bar{2} * 5) + (4 * 5) + (\bar{1} * \bar{4})\} = 52$, $52 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल 7}) = 52 + 70 = 122$, $122 \div 28$ (k_4) से भागफल 4 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 4_{10} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 C.P $\{\frac{3}{1} \frac{4}{5} \frac{4}{6} \frac{5}{2}\} = \{(\bar{3} * 2) + (\bar{1} * 5) + (4 * \bar{6}) + (5 * \bar{4})\} = \bar{45}$, $\bar{45} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल 10}) = \bar{45} + 100 = 55$, $55 \div 28$ (k_5) से भागफल 2 और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे सयुक्त कर $2\bar{1}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 C.P $\{\frac{3}{5} \frac{4}{6} \frac{4}{2} \frac{5}{0}\} = \{(\bar{3} * 0) + (5 * \bar{5}) + (4 * 2) + (\bar{6} * \bar{4})\} = 7$, $7 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = 7 + \bar{10} = \bar{3}$, $\bar{3} \div 28$ (k_5) से भागफल 0 और शेषफल $\bar{3}$ जिन्हे सयुक्त कर $0\bar{3}$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 5 का हल 0. 0 0 0 0 0 0 0 0 0₆ $2\bar{1}$ $\bar{1}7$ 4_{10} $2\bar{1}$ $0\bar{3}$ = 0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 $\bar{1}$ 4 2 0 होगा।

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक) 1.0 $\bar{3}$ 4 $\bar{3}$ $\bar{4}$ 7 $\bar{6}$ $\bar{1}$ 6 $\bar{10}$ 2 10 9 9

= 0. 9 7 3 6 6 6 3 9 5 0 3 0 9 9 दशमलव बाद चौदह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूकृत हल मान में नौ स्थान तक = 0.9 7 3 6 6 6 3 9 4 है।

12-8 Tan⁻¹x का आकलन उदाहरण यदि $\tan \theta = x = 0.342$ के प्रति -

अनुच्छेद 11-4 सर्व मान्य ग्रेगोरी श्रेढी का कथन- यदि $m\angle \theta = \frac{-\pi}{4}$ और $\frac{\pi}{4}$ रेडियन के बीच का कोण माप हो तो -

$$m\angle \theta = \tan^{-1}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{13}x^{13} - \frac{1}{15}x^{15} + \dots - \dots + \dots \infty$$

के तहत दशमलव बाद तीन स्थान कीजिए।

हल उत्तर पंक्ति क्रम (1) $x = 0.342$ दर्ज कीजिए

पंक्ति क्रम (0₁) $-x^2 = -(0.342)^2 = -0.116964 = 0.\bar{1}\bar{2}304\bar{4} = 0.\bar{1}\bar{2}3$ दर्ज कीजिए।

पंक्ति क्रम (0₂) $x^4 = [-x^2]^2 = [0.\bar{1}\bar{2}3]^2 = 0.014\bar{3}\bar{2}9 = 0.014\bar{2}$ दर्ज कीजिए।

उत्तर पंक्ति क्रम (2) $-\frac{x^3}{3}$ का हल मान $-\frac{x^3}{3} = \{(-x^2)*(x)\} \div 3$ (k_2) के लिए पंक्ति 0₁ और पंक्ति 1 से -

प्रक्रम 1 C.P $\{\frac{3}{1}\} = [(3 * \bar{1}) = \bar{3}$ का मापांक $3 > \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+ (पंक्ति (0₁) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+1] = [0+0+1]=1 के लिए 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P $\{\frac{3}{1}\} = [(3 * \bar{1}) = \bar{3}$, $\bar{3} \div 3$ (k_2) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\{\frac{3}{1} \frac{4}{2}\} = \{(3 * \bar{2}) + (\bar{1} * 4)\} = \bar{10}$, $10 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 0}) = \bar{10} + 0 = 10$, $10 \div 3$ (k_2) से भागफल $\bar{3}$ और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{3}\bar{1}$ दर्ज कीजिए।

आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद तीन स्थान के लिए गणना
0_1	$-x^2 = -(0.342)^2$	0. $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3
0_2	$x^4 = [-x^2]^2 =$	0. 0 1 4 $\bar{2}$
उ. पं. 1	X	0. 3 4 2
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 $\bar{1}_0$ $\bar{3}_1$ $\bar{4}_1$
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 $1\bar{2}$ $\bar{1}_1$ 4_2
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 3 3 0 $\bar{5}$ 4 = 0.3 2 9 5 4 = 0.329 दशमलव बाद तीन स्थान के लिए हल होगा।

प्रक्रम 4 $C.P\left\{\frac{3}{1} \frac{4}{2} \frac{2}{3}\right\} = \{(3 * 3) + (\bar{1} * 2) + (4 * \bar{2})\} = \bar{1}$, $\bar{1} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = \bar{1} + \bar{10} = \bar{11}$, $\bar{11} \div 3 (k_2)$ से भागफल $\bar{4}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{4}_1$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 2 का हल $0.0 \bar{1}_0 \bar{3}_1 \bar{4}_1 = 0.0 \bar{1} \bar{3} \bar{4}$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (3) $\frac{x^5}{5}$ का हल मान $\frac{x^5}{5} = \{(x^4) * (x)\} \div 5 (k_3)$ के लिए पंक्ति 0_2 और पंक्ति 1 से –

प्रक्रम 1 $C.P\left\{\frac{3}{1}\right\} = [(3 * 1) = 3]$ का मापांक $3 > \{d_5 = \frac{k_3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (0_2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 1 + 1] = 2 के लिए 00 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P\left\{\frac{3}{1}\right\} = [(3 * 1) = 3]$, $3 \div 5 (k_3)$ से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $1\bar{2}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P\left\{\frac{3}{1} \frac{4}{4}\right\} = \{(3 * 4) + (1 * 4)\} = 16$, $16 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 16 + \bar{20} = \bar{4}$, $\bar{4} \div 5 (k_3)$ से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P\left\{\frac{3}{1} \frac{4}{4} \frac{2}{2}\right\} = \{(3 * \bar{2}) + (1 * 2) + (4 * 4)\} = 12$, $12 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 1) = 12 + 10 = 22$, $22 \div 5 (k_3)$ से भागफल 4 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 4_2 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 3 का हल $0.0 0 1\bar{2} \bar{1}_1 4_2 = 0.0 0 1 \bar{1} 4$ होगा।

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक) = 0. 3 3 0 $\bar{5}$ 4
= 0.3 2 9 5 4 = 0.329 रेडियन दशमलव बाद तीन स्थान के लिए मानक हल होगा।

अथवा

हल— उत्तर पंक्ति क्रम (1) $x = 0.342$ दर्ज कीजिए

पंक्ति क्रम (0_1) $-x^2 = -(0.342)^2 = -0.116964 = 0. \bar{1} \bar{2} 3 0 4 \bar{4} = 0. \bar{1} \bar{2} 3$ दर्ज कीजिए।

उत्तर पंक्ति क्रम (2) $-\frac{x^3}{3}$ का हल मान $-\frac{x^3}{3} = \{(-x^2) * (x)\} \div 3 (k_2)$ के लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 1 से –

प्रक्रम 1 $C.P\left\{\frac{3}{1}\right\} = [(3 * \bar{1}) = \bar{3}]$ का मापांक $3 > \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 0 + 1] = 1 के लिए 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P\left\{\frac{3}{1}\right\} = [(3 * \bar{1}) = \bar{3}]$, $\bar{3} \div 3 (k_2)$ से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \frac{3}{1} \frac{4}{2} \right\} = \{(3 * \bar{2}) + (\bar{1} * 4)\} = \bar{10}$, $10 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 0) = \bar{10} + 0 = 10$
, $10 \div 3 (k_2)$ से भागफल $\bar{3}$ और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{3}_1$ दर्ज कीजिए।

आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद तीन स्थान के लिए गणना
0_1	$-x^2 = -(0.342)^2$	0. $\bar{1}$ $\bar{2}$ 3
उ. पं. 1	X	0. 3 4 2
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	1. 0 $\bar{1}_0$ $\bar{3}_1$ $\bar{4}_1$
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	1. 0 0 1_2 $\bar{1}_0$ 4_1
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 3 3 0 $\bar{5}$ 4 = 0.3 2 9 5 4 = 0.329 दशमलव बाद तीन स्थान के लिए हल होगा।

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \frac{3}{1} \frac{4}{2} \frac{2}{3} \right\} = \{(3 * 3) + (\bar{1} * 2) + (4 * \bar{2})\} = \bar{1}$, $\bar{1} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = \bar{1} + \bar{10} =$
 $\bar{11}$, $\bar{11} \div 3 (k_2)$ से भागफल $\bar{4}$ और शेषफल 1 जिन्हे सँयुक्त कर $\bar{4}_1$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 2 का हल $0.0 \bar{1}_0 \bar{3}_1 \bar{4}_1 = 0.0 \bar{1} \bar{3} \bar{4}$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (3) $\frac{x^5}{5}$ का हल मान $\frac{x^5}{5} = 3 * \left\{ \left(-\frac{x^3}{3} \right) * (-x^2) \right\} \div 5 (k_3)$ से

प्रक्रम 1 $3 * C.P \left\{ \frac{\bar{1}}{1} \right\} = [3 * (\bar{1} * \bar{1}) = 3]$ का मापांक $3 > \{d_5 = \frac{k_3}{2} = \frac{5}{2} = 2.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य
(0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (0₂) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 1 + 1] = 2 के लिए 0 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $3 * C.P \left\{ \frac{\bar{1}}{1} \right\} = [3 * (\bar{1} * \bar{1}) = 3]$, $3 \div 5 (k_3)$ से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $3 * C.P \left\{ \frac{\bar{1}}{1} \frac{\bar{3}}{2} \right\} = 3 * \{(\bar{1} * \bar{2}) + (\bar{1} * \bar{3})\} = 15$, $15 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 15 + \bar{20}$
 $= \bar{5}$, $\bar{5} \div 5 (k_3)$ से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $3 * C.P \left\{ \frac{\bar{1}}{1} \frac{\bar{3}}{2} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = 3 * \{(\bar{1} * 3) + (\bar{1} * \bar{4}) + (\bar{3} * \bar{2})\} = 21$, $21 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 0) =$
 $21 + 0 = 21$, $21 \div 5 (k_3)$ से भागफल 4 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर 4_1 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 3 का हल $0.0 0 1_2 \bar{1}_0 4_1 = 0.0 0 1 \bar{1} 4$ होगा।

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक) = 0. 3 3 0 $\bar{5}$ 4

= 0.3 2 9 5 4 = 0.329 रेडियन दशमलव बाद तीन स्थान के लिए मानक हल होगा।

आदर्श बीजांक गणना द्वारा जाँच

$$\tan \theta = x = 0.342 = \frac{342}{1000} = \frac{171}{500} \text{ के प्रति } m \angle \theta \text{ का त्रिभुजांक } (x \ y \ Z) = (500 \ 171 \ \sqrt{500^2 + 171^2})$$

$$= (500 \ 171 \ \sqrt{279241}) \text{ से}$$

$$m \angle \theta \text{ का बीजांक } (p \ q) = \{(\sqrt{279241} + 500) \ 171\} = \{1028 \ 171\}$$

$$\therefore m \angle \theta \text{ का आदर्श बीजांक } P = \frac{1028}{171} = 6.01 = \text{-----}(1)$$

$$\text{अध्याय 7 प्रमेय 2 के अनुसार आदर्श बीजांक } P = \frac{2}{\tan \theta} = \frac{2}{0.342} = 5.8479 = 5.9 \text{ -----}(2)$$

(1)और (2) से मध्यमान आदर्श बीजांक $P = \frac{1}{2}(6.01 + 5.9) = \frac{11.91}{2} = 5.955 = 6.0$ ।

अतः आदर्श बीजांक समिका $m\angle\theta = \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}\right)$ से

$$m\angle\theta = \left(\frac{1}{6} + \frac{6}{6^2+1}\right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{6}{37}\right) = 0.166666666 + 0.162162162 = 0.328828828 = 0.329 \text{ रेडियन} ।$$

कम्प्यूटर से प्राप्तमान $0.32953012 = 0.329$ रेडियन दशमलव बाद तीन स्थान के लिए मानक हल होगा। $x=0$.

विवेचना उपरोक्त सरललीकृत गणना का सम्पूर्ण विश्लेषण आत्मसाती है। गणक एवं कम्प्यूटर का प्रयोग वर्जित होने की स्थिति में स्वयं आत्म विभोर होने की ओर होंगे। सीधे गणना तरलिका रचना कर दशमलव बाद वांछित स्थान तक उत्तर प्राप्त करते रोमांचित होंगे। जबकि आधुनिक गणना में अंश और के बढ़ते मानों में प्रत्येक पदों के अलग-अलग गणना और इन प्राप्त गणना में जोड़ने एवं घटाने संयुक्त प्रयोग भयावह करता जाता है। अभ्यास उदाहरण अवलाकित कीजिए।

उदाहरण 1■ Sin(0.02°) का आकलन गणन तालिका

प.क्र.	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0	$-x^2 = (0.02)^2 =$	0 . 0 0 0 4
1	$x =$	0 . 0 2
2	$-\frac{x^3}{!3}$ के लिए $k_2 = 2*3 = 6$	0 . 0 0 0 0 0 1 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂
3	$\frac{x^5}{!5}$ के लिए $k_3 = 4*5 = 20$	0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2 ₀ 6 ₀ 6 ₀ 6 ₀ 6 ₀ 6 ₀ 6 ₀ 6 ₀
4	$-\frac{x^7}{!7}$ के लिए $k_4 = 6*7 = 42$	0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8 ₈ 2 ₂₀ 5 ₁₄ 4 ₄
उ. पं. 1 से उ. पं. 4 तक योगमान		0 . 0 2 0 0 0 1 3 3 3 3 3 3 3 3 1 2 1 =0.01999866693333079 दशमलव बाद सत्रह स्थान तक का आकलन है जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक =0.019998667 है

उदाहरण 2■ Sin(0.56°) का आकलन तालिका

प.क्र.	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0	$-x^2 = (0.56)^2 =$	0 . 3 1 4 4
1	$x =$	0 . 5 6
2	$-\frac{x^3}{!3}$ के लिए $k_2 = 2*3 = 6$	0 . 0 3 ₃ 1 ₁ 3 ₂ 3 ₂ 1 ₂ 3 ₂ 3 ₂ 3 ₂
3	$\frac{x^5}{!5}$ के लिए $k_3 = 4*5 = 20$	0 . 0 0 0 ₉ 4 ₁₀ 6 ₀ 1 ₂ 1 ₁₀ 4 ₄ 3 ₀
4	$-\frac{x^7}{!7}$ के लिए $k_4 = 6*7 = 42$	0 . 0 0 0 0 0 0 ₁₂ 3 ₁₆ 4 ₁₁ 3 ₁₂ 3 ₁₁
5	$\frac{x^9}{!9}$ के लिए $k_4 = 8*7 = 72$	0 . 0 0 0 0 0 0 0 0 ₉ 2 ₃₉ 5 ₅
उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योगमान		0 . 5 3 1 1 9 3 8 0 2 =0.531186198 दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन है जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक 0.531186198 ही है।

उदाहरण 3■

Cos(0.87") का आकलन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0 ₁	X	0. 8 7
0 ₂	$-x^2 = -(0.87)^2 =$	0. $\bar{7}$ $\bar{5}$ $\bar{8}$ $\bar{9}$
1	पूर्णक	1. 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
2	$-\frac{x^2}{!2}$ के लिए $k_2 = 1*2 = 2$	0. $\bar{4}_1$ 2_1 2_0 $\bar{4}_1$ 5_0 0 0 0 0 0 0
3	$\frac{x^4}{!4}$ के लिए $k_3 = 2*3 = 6$	0. 0 2_4 4_0 $\bar{2}_0$ 7_2 1_2 $\bar{3}_2$ 3_2 3_2 7_3 5_0 .
4	$-\frac{x^6}{!6}$ के लिए $k_4 = 3*5 = 15$	0. 0 0 $\bar{1}_7$ 4_2 0_0 $\bar{2}_2$ $\bar{3}_5$ 4_6 6_4 1_6 $\bar{5}_6$
5	$\frac{x^8}{!8}$ के लिए $k_5 = 4*7 = 28$	0. 0 0 0 0 0_4 1_6 $\bar{4}_6$ 5_5 3_2 $\bar{2}_7$ 4_4 0_2
6	$-\frac{x^6}{!10}$ के लिए $k_6 = 5*9 = 45$	0. 0 0 0 0 0 0 0 0_4 0_{22} $\bar{5}_{21}$ $\bar{5}_1$ 1_0
. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योगमान		1. $\bar{4}$ 4 5 $\bar{2}$ 3 $\bar{5}$ $\bar{1}$ 10 2 7 1 = 0. 6 4 4 8 2 5 0 0 2 7 1 दशमलव बाद ग्यारह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक 0. 6 4 4 8 2 6 5 4 7 हैं

उदाहरण 4■

Cos(0.03") का आकलन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0 ₁	X	0. 0 3
0 ₂	$-x^2 = -(0.03)^2 =$	0. 0 0 0 0 $\bar{9}$
1	पूर्णक	1. 0
2	$-\frac{x^2}{!2}$ के लिए $k_2 = 1*2 = 2$	0. 0 0 0 $\bar{4}_1$ $\bar{5}_0$
3	$\frac{x^4}{!4}$ के लिए $k_3 = 2*3 = 6$	0. 0 0 0 0 0 0 0 3_2 3_2 7_3 5_0
4	$-\frac{x^6}{!6}$ के लिए $k_4 = 3*5 = 15$	0. 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 $\bar{1}_3$ 0_3 $\bar{2}_5$ $\bar{5}_0$
. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योगमान		1. 0 0 0 $\bar{4}$ $\bar{5}$ 0 0 3 3 7 4 0 $\bar{2}$ $\bar{5}$ = 0. 9 9 9 5 5 0 0 3 3 7 3 9 7 5 दशमलव बाद चौदह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान नौ स्थान तक 0. 9 9 9 5 5 0 0 3 4 है।

उदाहरण 5■

$m\angle\theta^r = \tan^{-1}(0.45)$ का आकलन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0_1	$-x^2 = -(0.45)^2$	0. 2̄ 0 2̄ 5̄ 0 0
0_2	$x^4 = [-x^2]^2 =$	0.0 4 1 0 0 6 2 5
0_3	$-x^6 = x^4 * (-x^2)$	0.0 0 8̄ 3̄ 0 2̄ 5̄
0_4	$x^8 = [x^4]^2 =$	0.0 0 1 6 8 1 5
0_5	$x^{10} = x^8 * (-x^2)$	0.0 0 0 3̄ 4̄ 0 4̄
उ. पं. 1	X	0. 4 5
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 3̄ ₁ 0 ₀ 3̄ ₁ 7̄ ₁ 5̄ ₀
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 3 ₁ 5̄ ₁ 0 ₀ 5̄ ₁ 6̄ ₂ 2 ₀ 5 ₀
उ. पं 4	$-\frac{x^7}{5}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 5̄ ₃ 3̄ ₁ 3̄ ₃ 0 ₀ 4̄ ₂ 3̄ ₁
उ. पं 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0. 0 0 0 1̄ ₅ 3̄ ₃ 4̄ ₄ 0 ₄ 7̄ ₂ 5 ₀
उ. पं 6	$\frac{x^{11}}{11}$ के लिए $k_6 = 11$	0. 0 0 0 0 1̄ ₁ 4̄ ₃ 0 ₁₀ 0 ₆ 9̄ ₁
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 4 2 3 3̄ 1̄ 4̄ 3̄ 6 5 4 = 4 2 2 6 5 7 6 5 4 दशमलव बाद नौ स्थान के लिए आकलन होगा। जो कम्प्यूटर से हल मान में नौ स्थान तक 0 ⁰ 0.4 2 2 8 5 3 9 2 6 है ।

अथवा

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0	$-x^2 = -(0.45)^2$	0. 2̄ 0 2̄ 5̄ 0 0
उ. पं. 1	X	0. 4 5
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 3̄ ₁ 0 ₀ 3̄ ₁ 7̄ ₁ 5̄ ₀
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 4̄ ₂ 4̄ ₀ 7̄ ₁ 19̄ ₂ 14̄ ₂ 13̄ ₂ 31 ₀
उ. पं 4	$-\frac{x^7}{5}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 6̄ ₂ 9̄ ₃ 20̄ ₀ 36̄ ₂ 41̄ ₃ 75 ₀
उ. पं 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0. 0 0 0 0 5̄ ₃ 17̄ ₃ 18̄ ₄ 176̄ ₄ 63̄ ₂
उ. पं 6	$\frac{x^{11}}{11}$ के लिए $k_6 = 11$	0. 0 0 0 0 0 8̄ ₂ 26̄ ₀ 21 ₃ 33̄ ₂
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 4 2 4 1̄ ₃ 14 3̄ ₁ 6 18̄ ₃ 76 = 4 2 2 8 0 7 8 4 6 दशमलव बाद नौ स्थान के लिए आकलन होगा। जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0 ⁰ 0.4 2 2 8 5 3 9 2 6 है ।

आदर्श बीजांक गणना द्वारा जाँच

$$\tan \theta = x = 0.45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} \text{ के प्रति } m\angle \theta \text{ का त्रिभुजांक } (x \ y \ Z) = (20 \ 9 \ \sqrt{20^2 + 9^2})$$

$$= (20 \ 9 \ \sqrt{481}) \text{ से}$$

$$m\angle \theta \text{ का बीजांक } (p \ q) = \{(\sqrt{481} + 20) \ 9\} = \{41.93 \ 9\} = \{42 \ 9\}$$

$$\therefore m\angle \theta \text{ का आदर्श बीजांक } P = \frac{42}{9} = 4.66666666 = 4.66 - - - - - (1)$$

$$\text{अध्याय 7 प्रमेय 2 के अनुसार आदर्श बीजांक } P = \frac{2}{\tan \theta} = \frac{2}{0.45} = 4.44 - - - - - (2)$$

$$(1) \text{ और } (2) \text{ से मध्यमान आदर्श बीजांक } P = \frac{1}{2} (4.66 + 4.44) = \frac{9.1}{2} = 4.55 \text{ अतः आदर्श बीजांक समिका } m\angle \theta = \left(\frac{1}{P} + \frac{P}{P^2 + 1} \right)$$

$$\text{से } m\angle \theta = \left(\frac{1}{4.55} + \frac{4.55}{4.55^2 + 1} \right) = \left(\frac{1}{4.55} + \frac{4.55}{21.7} \right) = 0.219780 + 0.209677 = 0.429457 \text{ रेडियन ।}$$

दशमलव बाद दो स्थान के लिए मानक हल 0.43 रेडियन होगा ।

$m\angle \theta^r = \tan^{-1}(0.2)$ का नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए वास्तविक गणना तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0_1	$-x^3 = -(0.2)^2$	0.0 0 $\bar{8}$
0_2	$x^5 = (0.2)^2$	0.0 0 0 3 2
0_3	$-x^7 = -(0.2)^7$	0.0 0 0 0 $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{8}$
0_4	$x^9 = (0.2)^9$	0.0 0 0 0 0 0 5 1 2
0_5	$-x^{11} = -(0.2)^{11}$	0.0 0 0 0 0 0 0 $\bar{2}$ 0 $\bar{4}$ $\bar{8}$
उ. पं. 1	X	0. 2
उ. पं. 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0.0 0 $\bar{2}$ $\bar{6}$ $\bar{6}$ $\bar{6}$ $\bar{6}$ $\bar{6}$
उ. पं. 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0.0 0 0 0 0 6 4 0 0 0
उ. पं. 4	$-\frac{x^7}{5}$ के लिए $k_4 = 7$	0.0 0 0 0 0 0 $\bar{1}$ $\bar{8}$ $\bar{2}$ $\bar{8}$
उ. पं. 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0.0 0 0 0 0 0 0 0 5 7
उ. पं. 6	$\frac{x^{11}}{11}$ के लिए $k_6 = 11$	0.0 0 0 0 0 0 0 0 0 2
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 2 0 $\bar{2}$ $\bar{6}$ 0 $\bar{4}$ $\bar{4}$ $\bar{3}$ $\bar{9}$ = 0.1 9 7 3 9 5 5 6 1 जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0.1 9 7 3 55 61 ^r ही है ।

अथवा

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0_1	$-x^2 = -(0.2)^2$	0.0 $\bar{4}$
0_2	$x^4 = [-x^2]^2 =$	0.0 0 1 6
0_3	$-x^6 = x^4 * (-x^2)$	0.0 0 0 $\bar{2}$ $\bar{5}$ $\bar{6}$
0_4	$x^8 = [x^4]^2 =$	0.0 0 0 0 1 0 2 4
0_5	$x^{10} = x^8 * (-x^2)$	0.0 0 0 0 0 0 $\bar{4}$ $\bar{1}$ 0 4
उ. पं. 1	X	0. 2
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 0 $\bar{3}_1$ 3_1 3_1 3_1 3_1 3_1 3_1 3_1
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 0 $1\bar{3}$ $\bar{4}_2$ 4_0 0 0 0 0 0
उ. पं 4	$-\frac{x^7}{5}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 0 $\bar{1}_2$ 3_2 2_4 5_5 7_1 1_3 4_2
उ. पं 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0. 0 0 0 0 0 0_2 2_2 $3\bar{3}$ $\bar{2}_4$ $\bar{4}_4$ 4_4
उ. पं 6	$\frac{x^{11}}{11}$ के लिए $k_6 = 11$	0. 0 0 0 0 0 0 0 $\bar{1}_3$ 2_6 5_5 5_3
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		0. 2 0 $\bar{3}$ 4 $\bar{1}$ 10 8 11 10 6 16 $= 0.19739081066^r$ दशमलव बाद बारह स्थान के लिए आकलन होगा।

अथवा

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0	$-x^2 = -(0.2)^2$	0. 0 $\bar{4}$
उ. पं. 1	X	0. 2
उ. पं 2	$-\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 0 $\bar{3}_1$ 3_1 3_1 3_1 3_1 3_1 3_1
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 0 0 7_1 $\bar{5}_1$ $\bar{9}_1$ $\bar{9}_1$ $\bar{9}_1$
उ. पं 4	$-\frac{x^7}{5}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 0 0 0 $\bar{20}_0$ 11_3 30_0
उ. पं 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0. 0 0 0 0 0 0 0 0 $62\bar{2}$ 0. 2 0 $\bar{3}$ 3 10 $\bar{2}$ 26 4 86
उ. पं. 1 से उ. पं. 3 तक योग मान		$= 0.20\bar{3}400726$ $= 0.197400726^r$ दशमलव बाद 9 स्थान के लिए आकलन होगा।

आदर्श बीजांक गणना द्वारा जांच

$\tan \theta = x = 0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ के प्रति $m\angle \theta$ का त्रिभुजांक $(x \ y \ Z) = (5 \ 1 \ \sqrt{5^2 + 1^2}) = (5 \ 1 \ \sqrt{26})$ से

$m\angle \theta$ का बीजांक $(p \ q) = \{(\sqrt{26} + 5) \ 1\} = \{10.1 \ 1\}$

$\therefore m\angle \theta$ का आदर्श बीजांक $P = 10.1 = 10$

अथवा अध्याय 7 प्रमेय 2 के अनुसार आदर्श बीजांक $P = \frac{2}{\tan \theta} = \frac{2}{0.2} = 10$

अतः आदर्श बीजांक समिका $m\angle \theta = \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}\right)$ से

$m\angle \theta = \left(\frac{1}{10} + \frac{10}{10^2+1}\right) = \left(\frac{1}{10} + \frac{10}{101}\right) = 0.100000000 + 0.0990099009 = 0.1990099009 = 0.2$ रेडियन ।

कम्प्यूटर से प्राप्तमान $0.1974111333 = 0.2$ रेडियन मानक हल होगा।

ध्यानाकर्षण $m\angle \theta^r = \tan^{-1}(x)$ के x के प्रति वास्तविक गणना जैसा कि $m\angle \theta^r = \tan^{-1}(0.2)$ के प्रति दर्शित किया गया दशमलव बाद क्रमित शून्य बाद एक अंकीय पूर्णांक मानों के प्रति सरल प्रतीत होगा। इसके अतिरिक्त मानों के प्रति आकलन विधि उपयुक्त है। इस आकलन विधि में **अथवा** में विश्लेषित विधि का विस्तार ही उचित होगा। ऐसा विस्तार उपरोक्त अभ्यास

$m\angle \theta^r = \tan^{-1}(0.2)$ के आकलन विधि का अथवा हल एवं अध्याय 12 अतिपरवलय का त्रिकोणमिति अयुक्त समीकरण में

उदाहरण 6 यदि $m\angle \theta = \tanh^{-1}x$ में $x=0.34$ हो तो कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle \theta = \tanh^{-1}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - - - - - \infty$ पद तक के द्वारा $m\angle \theta = \tanh^{-1}(0.342)$ का आकलन तालिका के प्रति दिये विश्लेषण का अध्ययन कीजिए।

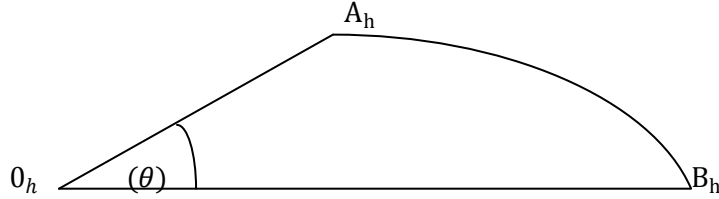
-----12-----

अध्याय -13

अतिपरवलय का त्रिकोणमिति अयुक्ति समीकरण

ज्यामिति आकृतियाँ रेखा वृत्त दीर्घवृत्त ,परवलय एवं अतिपरवलय का समीकरण का अध्ययन ज्यामिति की विशिष्ट शाखा निर्देशांक ज्यामिति के अन्तर्गत किया जाता है। इसी तारतम्य में ज्यामिति आकृति में अन्तरित कोण के माप विषयक की गयी अध्ययन शाखा त्रिकोणमिति है। प्रस्तुत अध्याय में अतिपरवलय का त्रिकोणमिति अयुक्ति समीकरण मात्र के हल विषयक गणना का अध्ययन लिया गया है। यह अध्ययन विस्तार उनागर संख्यांकन से श्रृंगारित है।

13-1 अतिपरवलय का चाप कोण अतिपरवलय दोस तल पर के दो बिन्दु A_h और B_h के द्वारा उसके केन्द्रक O_h पर अन्तरित कोण $m\angle A_h O_h B_h = m\angle (\theta)$ अतिपरवलय का चाप कोण कहलाता है।



$m\angle \theta$ के प्रति अतिपरवलय त्रिकोणमिति त्रिभुजांक x_h, y_h, z_h दर्शित किये जाने पर प्रति अतिपरवलय त्रिकोणमिति निष्पत्तियाँ क्रमशः $\sinh \theta = \frac{y_h}{z_h}$, $\cosh \theta = \frac{x_h}{z_h}$, $\tanh \theta = \frac{y_h}{x_h}$, $\coth \theta = \frac{x_h}{y_h}$, $\operatorname{sech} \theta = \frac{z_h}{x_h}$ तथा $\operatorname{cosech} \theta = \frac{z_h}{y_h}$ होंगे।

13-2 $m\angle \theta$ का माप कोण माप इकाई रेडियन $m\angle \theta^r$ में लिए जाने पर $\sinh \theta$, $\cosh \theta$, $\tanh \theta$ एवं $\tanh^{-1} \theta$ के गणना के लिए चरघातांकी समीकरण

$m\angle \theta$ का माप कोण माप इकाई रेडियन में लिए जाने पर $\sinh \theta$, $\cosh \theta$, $\tanh \theta$ एवं $\tanh^{-1} \theta$ के गणना के लिए चरघातांकी समीकरण निम्नानुसार होंगे।

$$\{1\} \sinh \theta^r = \frac{1}{2}(e^\theta - e^{-\theta}) = \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots - \infty \text{ पद तक}$$

$$\{2\} \cosh \theta^r = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta}) = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots - \infty \text{ पद तक}$$

$$\{3\} \tanh \theta^r = \frac{\sinh \theta^r}{\cosh \theta^r} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}} * \frac{e^\theta}{e^\theta} = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1}$$

$$\{4\} \tanh^{-1} \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} + \frac{\theta^9}{9} + \frac{\theta^{11}}{11} - \dots - \infty \text{ पद तक}$$

{5} $\cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta = \cosh 2\theta$ का प्रमाण

$$\begin{aligned} \cosh^2 \theta + \sinh^2 \theta &= \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{4} + \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} - 2}{4} = \frac{2(e^{2\theta} + e^{-2\theta})}{4} \\ &= \frac{(e^{2\theta} + e^{-2\theta})}{2} = \cosh 2\theta \text{ प्रमाणित।} \end{aligned}$$

[6] $\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = 1$ का प्रमाण

$$\cosh^2 \theta - \sinh^2 \theta = \left(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} + 2}{4} - \frac{e^{2\theta} + e^{-2\theta} - 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ प्रमाणित।}$$

$$\{7\} \cosh \theta * \sinh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta}) * \frac{1}{2}(e^\theta - e^{-\theta}) = \frac{(e^{2\theta} - e^{-2\theta})}{2*2} = \frac{\sinh 2\theta}{2}$$

$$\{8\} \cosh \theta + \sinh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta}) + \frac{1}{2}(e^\theta - e^{-\theta}) = e^\theta$$

$$\{9\} \cosh \theta - \sinh \theta = \frac{1}{2}(e^\theta + e^{-\theta}) - \frac{1}{2}(e^\theta - e^{-\theta}) = e^{-\theta}$$

$\theta = 1^r$ से $e = \cosh 1^r + \sinh 1^r = 1.543080635 + 1.175201194 = 2.718281829$ अध्याय 11
 अनुच्छेद 1 में प्रस्तुत e के गणना विश्लेषण तालिका में क्रमांक 1 से 18 तक के योगमान
 2.71 77 81 82 88 58 91 6 के निकटतर है।

$e^{-1} = \cosh 1^r - \sinh 1^r = 1.543080635 - 1.175201194 = 0.367779441$ जो कि e का गुणनफल प्रतिलोम
 $\frac{1}{e} = \frac{1}{2.718281829} = 0.367879285$ के निकटतर है।

13-3 Sin h θ , Cosh θ एवं Tanh⁻¹ θ का आकलन गणना Sin h θ , Cosh θ एवं Tanh⁻¹ θ का
 आकलन गणना नियम Sin θ , Cos θ एवं Tan⁻¹ θ के आकलन गणना के ही भाँति है। अन्तर केवल इतना है कि Sin θ , Cos θ
 एवं Tan⁻¹ θ के आकलन गणना में पदमान मनात्मक, ऋणात्मक के क्रम में लिया गया है जबकि Sin h θ , Cosh θ एवं
 Tanh⁻¹ θ का आकलन गणना में सभी पदमान धनात्मक होंगे। सम्पूर्ण विश्लेषण के उदाहरण अवलोकित कीजिए।

उदाहरण 1■ यदि $m\angle\theta = 0.42^r$ के प्रति

$$\sinh \theta = \frac{\theta}{1!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \frac{\theta^9}{9!} - \dots - \infty \text{ पद तक के द्वारा}$$

Sin h(0.42^r) का आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k _r	नियमानुसार गणना
0	$\theta^2 = (0.23)^2 =$	0. 2 2̄ 4
उ. पं. 1	$\theta =$	0. 4 2
उ. पं. 2	$\frac{\theta^3}{3!}$ के लिए k ₂ = 2*3 = 6	0. 0 1 ₂ 2 ₄ 3 ₂ 5 ₂ 2̄ ₀
उ. पं. 3	$\frac{\theta^5}{5!}$ के लिए k ₃ = 4*5 = 20	0. 0 0 0 ₂ 1 ₂ 1 ₂ 1̄ ₀ 1̄ ₂ 1 ₄ 1̄ ₈ 4 ₈ 4̄ ₀
उ. पं. 4	$\frac{\theta^7}{7!}$ के लिए k ₄ = 6*7 = 42	0. 0 0 0 0 0 ₂ 0 ₂₀ 5 ₁₈ 4̄ ₁₂ 3̄ ₁₈ 4 ₈ 2 ₂ 1̄ ₁₄ 3 ₂ 1 ₁₀ 2 ₀
उ. पं. 5	$\frac{\theta^9}{9!}$ के लिए k ₅ = 8*9 = 72	0. 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ₁₀ 1 ₁₀ 1 ₁₀ 2 ₆ 1 ₂₀ 3̄ ₁₈ 2̄ ₂₀ 3̄ ₂₄
Sinh (0.42^r) = उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योग मान		0. 4 3 2 4 6 3̄ 4 3̄ 3̄ 9 0 0 0 1̄ 1̄ = 0. 432457367899989 दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक का आकलन है जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0. 432457368 है।

पंक्तिवार सम्पूर्ण हल विश्लेषण

संकेत C.P. = खड़ा-तिरछा गुणा का योगमान,

उत्तर पंक्ति क्रम (1) x = 0.4 2 दर्ज कीजिए।

पंक्ति क्रम (0) x² = (0.42)² = 0.1764 के लिए उनागर या विनकुलम् संख्या 0. 2 2̄ 4 4 दर्ज कीजिए।

उत्तर पंक्ति क्रम (2) $\frac{x^3}{3!}$ का हल मान $\frac{x^3}{3!} = \{(-x^2)*(x)\} \div 6$ (k₂) के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 1 से -

पंक्ति (0) के 0. 2 2̄ 4 4 और पंक्ति (1) के 0.42 का गुणनफल को 6 द्वारा विभाजित करने से प्राप्त भागफल एवं शेषफल हल प्रक्रम में निम्नानुसार अवलोकित कीजिए-

प्रक्रम 1 C.P { $\frac{2}{4}$ } = (2 * 4) = 8 का मापांक 8 > {d₂ = $\frac{k_2}{2} = \frac{6}{2} = 3$ } ∴ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की
 स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (1) के गणना में
 दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 0 + 1] = 1 के लिए 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{2}{4} \right\} = 8$, $8 \div 6$ (k_2) से भागफल 1 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \frac{2}{4} \frac{\bar{2}}{2} \right\} = \{(2 * 2) + (4 * \bar{2})\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 2}) = \bar{4} + 20 = 16$, $16 \div 6$ (k_2) से भागफल 2 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 2_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \frac{\bar{2}}{4} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = \{(\bar{2} * 2) + (4 * \bar{4})\} = \bar{20}$, $\bar{20} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल 4}) = \bar{20} + 40 = 20$, $20 \div 6$ (k_2) से भागफल 3 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 3_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \frac{\bar{4}}{4} \frac{4}{2} \right\} = \{(\bar{4} * 2) + (4 * 4)\} = 8$, $8 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल 2}) = 8 + 20 = 28$, $28 \div 6$ (k_2) से भागफल 5 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $5_{\bar{2}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $C.P \left\{ \frac{4}{2} \right\} = 4 * 2 = 8$, $8 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 8 + \bar{20} = \bar{12}$, $\bar{12} \div 6$ (k_2) से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_0$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 2 का हल $0. 0 \ 1_2 \ 2_4 \ 3_2 \ 5_{\bar{2}} \ \bar{2}_0 = 0.0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 5 \ \bar{2}$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (3) $\frac{x^5}{15}$ का हल मान $\frac{x^5}{15} = \{(-x^2) * (\frac{x^3}{13})\} \div 20$ (k_3) के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 2 से

प्रक्रम 1 $C.P \left\{ \frac{2}{1} \right\} = (2 * 1) = 2$ का मापांक $2 < \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{20}{2} = 10\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 1 + 2] = के लिए $0 \ 0 \ 0_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{2}{1} \frac{\bar{2}}{2} \right\} = \{(2 * 2) + (1 * \bar{2})\} = 2$, $+10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल 2}) = 2 + 20 = 22$, $22 \div 20$ (k_3) से भागफल 1 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \frac{2}{1} \frac{\bar{2}}{2} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = \{(2 * 3) + (1 * \bar{4}) + (\bar{2} * 2)\} = \bar{2}$, $\bar{2} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 4}) = \bar{2} + 20 = 18$, $18 \div 20$ (k_3) से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $1_{\bar{2}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \frac{2}{1} \frac{\bar{2}}{2} \frac{\bar{4}}{3} \frac{4}{5} \right\} = \{(2 * 5) + (1 * 4) + (\bar{2} * 3) + (2 * \bar{4})\} = 9$, $0 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 0 + \bar{20} = \bar{20}$, $\bar{20} \div 20$ (k_3) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \frac{2}{2} \frac{\bar{2}}{3} \frac{\bar{4}}{5} \frac{4}{2} \right\} = \{(2 * \bar{2}) + (2 * 4) + (\bar{2} * 5) + (3 * \bar{4})\} = \bar{18}$, $\bar{18} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल 0}) = \bar{18} + 0 = \bar{18}$, $\bar{18} \div 20$ (k_3) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $C.P \left\{ \frac{\bar{2}}{3} \frac{\bar{4}}{5} \frac{4}{2} \right\} = \{(\bar{2} * \bar{2}) + (3 * 4) + (\bar{4} * 5)\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल 2}) = \bar{4} + 20 = 16$, $16 \div 20$ (k_3) से भागफल 1 और शेषफल $\bar{4}$ जिन्हे सयुक्त कर $1_{\bar{4}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $C.P \left\{ \frac{\bar{4}}{5} \frac{4}{2} \right\} = \{(\bar{4} * \bar{2}) + (5 * 4)\} = 28$, $28 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = 28 + \bar{40} = \bar{12}$, $\bar{12} \div 20$ (k_3) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल 8 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_8$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 $C.P \left\{ \frac{4}{2} \right\} = \{4 * \bar{2}\} = \bar{8}$, $\bar{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल 8}) = \bar{8} + 80 = 72$, $72 \div 20$ (k_3) से भागफल 4 और शेषफल $\bar{8}$ जिन्हे सयुक्त कर $4_{\bar{8}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 $10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } \bar{8}) = \bar{80}$

= $\overline{80} \div 20$ (k_3) से भागफल $\overline{4}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\overline{4}_0$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 3 का हल 0. 0 0 0₂ 1₂ 1₂ $\overline{1}_0$ $\overline{1}_2$ 1₄ $\overline{1}_8$ 4₈ $\overline{4}_0$ = 0.0 0 0 1 $\overline{1}_1$ $\overline{1}_1$ 1 $\overline{1}_1$ 4 $\overline{4}$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (4) $\frac{x^7}{!7}$ का हल मान $\frac{x^7}{!7} = \{(x^2) * (x)\} \div 42$ (k_4) के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 3 से -

प्रक्रम 1 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = (2 * 1) = 2$ का मापांक $2 < \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{42}{2} = 21\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (3) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 3 + 2] = के लिए 0 0 0 0 0₂ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} \\ 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * 1) + (1 * \overline{2})\} = 0, 0 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 2) = 0 + 20 = 20,$

$20 \div 42$ (k_4) से भागफल 0 और शेषफल 20 जिन्हे सयुक्त कर 0₂₀ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * \overline{1}) + (1 * \overline{4}) + (\overline{2} * 1)\} = \overline{8}, \overline{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 20) = \overline{8} + 200 = 192, 192 \div 42$ (k_4) से भागफल 5 और शेषफल $\overline{18}$ जिन्हे सयुक्त कर 5₁₈ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * \overline{1}) + (1 * 4) + (\overline{2} * \overline{1}) + (1 * \overline{4})\} = 0, 0 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \overline{18}) = 0 + \overline{180} = \overline{180}, \overline{180} \div 42$ (k_4) से भागफल $\overline{4}$ और शेषफल $\overline{12}$ जिन्हे सयुक्त कर $\overline{4}_{12}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * 1) + (1 * 4) + (\overline{2} * \overline{1}) + (\overline{1} * \overline{4})\} = 12, 12 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } \overline{12}) = 12 + \overline{120} = \overline{108}, \overline{108} \div 42$ (k_4) से भागफल $\overline{3}$ और शेषफल 18 जिन्हे सयुक्त कर $\overline{3}_{18}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * \overline{1}) + (\overline{1} * 4) + (\overline{2} * 1) + (\overline{1} * \overline{4})\} = \overline{4}, \overline{4} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 18) = \overline{4} + 180 = 176, 176 \div 42$ (k_4) से भागफल 4 और शेषफल 8 जिन्हे सयुक्त कर 4₈ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * 4) + (\overline{1} * 4) + (\overline{2} * \overline{1}) + (1 * \overline{4})\} = 2, 2 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } 8) = 2 + 80 = 82, 82 \div 42$ (k_4) से भागफल 2 और शेषफल $\overline{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 2₂ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * \overline{4}) + (1 * 4) + (\overline{2} * 4) + (\overline{1} * \overline{4})\} = \overline{8}, \overline{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } \overline{2}) = \overline{8} + \overline{20} = \overline{28}, \overline{28} \div 42$ (k_4) से भागफल $\overline{1}$ और शेषफल 14 जिन्हे सयुक्त कर $\overline{1}_{14}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} \overline{2} & \overline{4} & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\overline{2} * \overline{4}) + (\overline{1} * 4) + (\overline{4} * 4)\} = \overline{12}, \overline{12} + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 14) = \overline{12} + 140 = 128, 128 \div 42$ (k_4) से भागफल 3 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 3₂ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} \overline{4} & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\overline{4} * \overline{4}) + (4 * 4)\} = 32, 32 + 10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल } 2) = 32 + 20 = 52, 52 \div 42$ (k_4) से भागफल 1 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 1₁₀ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 11 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{4 * \overline{4}\} = \overline{16}, \overline{16} + 10 * (\text{प्रक्रम 10 में प्राप्त शेषफल } 10) = \overline{16} + 100 = 84, 84 \div 42$ (k_4) से भागफल 2 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 2₀ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 4 का दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक हल मान 0. 0 0 0 0 0₂ 0₂₀ 5₁₈ $\overline{4}_{12}$ $\overline{3}_{18}$ 4₈ 2₂ $\overline{1}_{14}$ 3₂ 1₁₀ 2₀ = 0.0 0 0 0 0 5 $\overline{4}$ $\overline{3}$ 4 2 $\overline{1}$ 3 1 2 होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (5) $\frac{x^9}{!9}$ का हल मान $\frac{x^9}{!9} = \{(x^2) * (\frac{x^7}{!7})\} \div 72$ (k_5) के लिए पंक्ति 0 और पंक्ति 4 से

प्रक्रम 1 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix} \right\} = (2 * 5) = 10$ का मापांक $10 < \{d_5 = \frac{k_5}{2} = \frac{72}{2} = 36\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 6 + 2] = के लिए 0 0 0 0 0 0₁₀ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P $\left\{ \frac{2}{5} \frac{\bar{2}}{4} \right\} = \{(2 * \bar{4}) + (5 * \bar{2})\} = \overline{18}$, $\overline{18} + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 10) = \overline{18} + 100 = 82$,

$82 \div 72$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 1_{10} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\left\{ \frac{2}{5} \frac{\bar{2}}{4} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = \{(2 * \bar{3}) + (5 * \bar{4}) + (\bar{2} * \bar{4})\} = \overline{18}$, $\overline{18} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 10) = \overline{18} + 100 = 82$, $82 \div 72$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 1_{10} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 C.P $\left\{ \frac{2}{5} \frac{\bar{2}}{4} \frac{\bar{4}}{3} \frac{\bar{4}}{4} \right\} = \{(2 * 4) + (5 * 4) + (\bar{2} * \bar{3}) + (\bar{4} * \bar{4})\} = 50$, $50 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 10) = 50 + 100 = 150$, $150 \div 72$ (k_5) से भागफल 2 और शेषफल 6 जिन्हे सयुक्त कर 2_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 C.P $\left\{ \frac{2}{4} \frac{\bar{2}}{3} \frac{\bar{4}}{4} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = \{(2 * 2) + (\bar{4} * 4) + (\bar{2} * 4) + (\bar{3} * \bar{4})\} = \bar{8}$, $\bar{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 6) = \bar{8} + 60 = 52$, $52 \div 72$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल $\overline{20}$ जिन्हे सयुक्त कर $1_{\overline{20}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 C.P $\left\{ \frac{2}{3} \frac{\bar{2}}{4} \frac{\bar{4}}{2} \frac{\bar{4}}{1} \right\} = \{(2 * \bar{1}) + (\bar{3} * 4) + (\bar{2} * 2) + (4 * \bar{4})\} = \overline{34}$, $\overline{34} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \overline{20}) = \overline{34} + \overline{200} = \overline{234}$, $\overline{234} \div 72$ (k_5) से भागफल 3 और शेषफल $\overline{18}$ जिन्हे सयुक्त कर $3_{\overline{18}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 C.P $\left\{ \frac{2}{4} \frac{\bar{2}}{2} \frac{\bar{4}}{1} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = \{(2 * 3) + (4 * 4) + (\bar{2} * \bar{1}) + (2 * \bar{4})\} = 16$, $16 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } \overline{18}) = 16 + \overline{180} = \overline{164}$, $\overline{164} \div 72$ (k_5) से भागफल 2 और शेषफल $\overline{20}$ जिन्हे सयुक्त कर $2_{\overline{20}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 C.P $\left\{ \frac{2}{2} \frac{\bar{2}}{1} \frac{\bar{4}}{3} \frac{\bar{4}}{1} \right\} = \{(2 * 1) + (2 * 4) + (\bar{2} * 3) + (\bar{1} * \bar{4})\} = 8$, $8 + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } \overline{20}) = 8 + \overline{200} = \overline{192}$, $\overline{192} \div 72$ (k_5) से भागफल 3 और शेषफल 24 जिन्हे सयुक्त कर 3_{24} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 C.P $\left\{ \frac{2}{1} \frac{\bar{2}}{3} \frac{\bar{4}}{1} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = \{(2 * 2) + (\bar{1} * 4) + (\bar{2} * 1) + (3 * \bar{4})\} = \overline{14}$, $\overline{14} + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 24) = \overline{14} + 240 = 226$, $226 \div 72$ (k_5) से भागफल 3 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 3_{10} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 C.P $\left\{ \frac{\bar{2}}{3} \frac{\bar{4}}{1} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = \{(\bar{2} * 2) + (3 * 4) + (\bar{4} * 1)\} = 4$, $4 + 10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल } 10) = 4 + 100 = 104$, $104 \div 72$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल 32 जिन्हे सयुक्त कर 1_{32} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 11 C.P $\left\{ \frac{\bar{4}}{1} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = \{(\bar{4} * 2) + (1 * 4)\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10 * (\text{प्रक्रम 10 में प्राप्त शेषफल } 32) = \bar{4} + 320 = 316$, $316 \div 72$ (k_5) से भागफल 4 और शेषफल 28 जिन्हे सयुक्त कर 4_{28} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 12 C.P $\left\{ \frac{4}{2} \right\} = \{(4 * 2)\} = 8$, $8 + 10 * (\text{प्रक्रम 11 में प्राप्त शेषफल } 28) = 8 + 280 = 288$, $288 \div 72$ (k_5) से भागफल 4 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 4_0 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार उत्तर पंक्ति 5 का सम्पूर्ण हल दशमलव बाद उन्नीस स्थान तक हल मान –

0. 0 0 0 0 0 0 0 0 0_{10} 1_{10} 1_{10} 2_6 $1_{\overline{20}}$ $3_{\overline{18}}$ $2_{\overline{20}}$ 3_{24} 3_{10} 1_{32} 4_{28} 4_0 होगा।

जिसे दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक लिये जान पर हल मान 0. 0 0 0 0 0 0 0 0_{10} 1_{10} 1_{10} 2_6 $1_{\overline{20}}$ $3_{\overline{18}}$ $2_{\overline{20}}$ 3_{24} दर्ज होगा।

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक) = 0. 4 3 2 4 6 $\bar{3}$ 4 $\bar{3}$ $\bar{3}$ 9 0 0 0 $\bar{1}$ $\bar{1}$

= 0. 4 3 2 4 5 7 3 6 7 8 9 9 9 8 9 दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक का आकलन है।

जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0. 4 3 2 4 5 7 3 6 8 है।

उदाहरण 2 ■ यदि $m \angle \theta = 0.42^\circ$ के प्रति

Cosh θ = $1 + \frac{\theta^2}{!2} + \frac{\theta^4}{!4} + \frac{\theta^8}{!8} + \frac{\theta^{10}}{!10} - - - - - \infty$ पद तक के द्वारा

Cos h(0.42^r) का आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k _r	नियमानुसार गणना
0 ₁	θ	0 . 4 2
0 ₂	$\theta^2 = (0.42)^2 =$	0. 2 $\bar{2}$ $\bar{4}$ 4
उ. पं. 1	पूर्णक	1. 0 0 0 0
उ. पं 2	$\frac{\theta^2}{!2}$ के लिए k ₂ = 1*2 = 2	0. 1 $\bar{1}$ $\bar{2}$ 2
उ. पं 3	$\frac{\theta^4}{!4}$ के लिए k ₃ = 2*3 = 6	0. 0 0 ₁ 1 ₂ 3 $\bar{1}$ 0 $\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{5}$ $\bar{2}$ 4 ₀
उ. पं 4	$\frac{\theta^6}{!6}$ के लिए k ₄ = 3*5 = 15	0. 0 0 0 0 ₁ 1 $\bar{3}$ $\bar{2}$ $\bar{5}$ $\bar{4}$ $\bar{3}$ 2 ₄ 4 $\bar{5}$ $\bar{3}$ $\bar{5}$ $\bar{5}$ $\bar{7}$ 5 ₃ 2 ₀
उ. पं 5	$\frac{\theta^8}{!8}$ के लिए k ₅ = 4*7 = 28	0. 0 0 0 0 0 0 ₁ 0 $\bar{7}$ 2 $\bar{10}$ 4 ₀ 0 $\bar{6}$ 1 $\bar{13}$ 4 $\bar{12}$ 5 $\bar{4}$ 1 $\bar{13}$ 4 $\bar{4}$
उ. पं 5	$\frac{\theta^{10}}{!10}$ के लिए k ₅ = 5*9 = 45	0. 0 0 0 0 0 0 0 0 ₂ 0 $\bar{22}$ 5 $\bar{13}$ $\bar{3}$ $\bar{3}$ 1 $\bar{11}$ $\bar{2}$ $\bar{18}$ $\bar{4}$ $\bar{4}$
Cosh (0.42^r) = उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक योग मान		1. 1 $\bar{1}$ $\bar{1}$ 5 1 $\bar{5}$ $\bar{9}$ 8 8 $\bar{3}$ 1 6 8 $\bar{1}$ 0 = 1 0 8 9 5 0 4 1 8 7 7 1 6 7 9 0 दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 1.0 8 9 5 0 4 1 8 8 है।

पंक्तिवार सम्पूर्ण हल विश्लेषण

पंक्ति 0₁ x = 0.42 दर्ज कीजिए । **पंक्ति 0₂** x² = (0.42)² = 0.1764 = 0.2 $\bar{2}$ $\bar{4}$ 4 दर्ज कीजिए ।

उत्तर पंक्ति.1 पूर्णांक 1 = 1.0 0 0 0 ----- वांछित दशमलव स्थान तक दर्ज कीजिए ।

उत्तर पंक्ति 2 $\frac{x^2}{!2} = \{0.2\bar{2} \bar{4} 4\} \div 2 (k_2) = 0.1 \bar{1} \bar{2} 2 0 0 - \dots$ वांछित दशमलव स्थान तक दर्ज कीजिए ।

उत्तर पंक्ति 3 $\frac{x^4}{!4}$ का हल मान $\frac{x^4}{!4} = \{(-\frac{x^2}{!2}) * (-\frac{x^2}{!2})\} \div 6 (k_3)$ के लिए उ. पं. (2) से

प्रक्रम 1 DP { 1 } = (1)² = 1 का मापांक 1 < {d₃ = $\frac{k_3}{2} = \frac{6}{2} = 3$ } ∴ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [2 {उ. पं. (2) में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 2] = 2*0 + 2 = 2 के लिए 0 0₁ दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 2 DP { 1 $\bar{1}$ } = 2*(1 * $\bar{1}$) = $\bar{2}$, $\bar{2} + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल 1}) = \bar{2} + 10 = 8$
8 ÷ 6 (k₃) से भागफल 1 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 1₂ दर्ज कीजिए

प्रक्रम 3 DP { 1 $\bar{1}$ $\bar{2}$ } = { 2*(1 * $\bar{2}$) + ($\bar{1}$)² } = $\bar{3}$, $\bar{3} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल 2}) = \bar{3} + 20 = 17$
17 ÷ 6 (k₂) से भागफल 3 और शेषफल $\bar{1}$ जिन्हे सयुक्त कर 3 $\bar{1}$ दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 4 DP { 1 $\bar{1}$ $\bar{2}$ 2 } = { 2*(1 * 2) + 2*($\bar{1}$ * $\bar{2}$) } = 8 , 8 + 10 * (प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल $\bar{1}$) = 8 + $\bar{10}$ = $\bar{2}$, $\bar{2} \div 6 (k_2)$ से भागफल 0 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 0 $\bar{2}$ दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 5 DP { $\bar{1}$ $\bar{2}$ 2 } = { 2*($\bar{1}$ * 2) + ($\bar{2}$)² } = 0 , 0 + 10 * (प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल $\bar{2}$) = 0 + $\bar{20}$ = $\bar{20}$
 $\bar{20} \div 6 (k_3)$ से भागफल $\bar{3}$ और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{3}$ $\bar{2}$ दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 6 DP { $\bar{2}$ 2 } = { 2*($\bar{2}$ * 2) } = $\bar{8}$, $\bar{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = \bar{8} + \bar{20} = \bar{28}$
 $\bar{28} \div 6 (k_3)$ से भागफल $\bar{5}$ और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{5}$ $\bar{2}$ दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 7 DP { 2 } = (2)² = 4 , 4 + 10 * (प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल 2) = 4 + 20 = 24
24 ÷ 6 (k₃) से भागफल 4 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 4₀ दर्ज कीजिए ।

इस प्रकार पंक्ति 3 का सम्पूर्ण हल मान $0.0\ 0_1\ 1_2\ 3_1\ 0_2\ \bar{3}_2\ \bar{5}_2\ 4_0 = 0.0\ 0\ 1\ 3\ 0\ \bar{3}\ \bar{5}\ 4$ दशमलव बाद 8 स्थान तक होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (4) $\frac{x^6}{!6}$ का हल मान $\frac{x^6}{!6} = \{(\frac{x^2}{!2}) * (\frac{x^4}{!4})\} \div 15$ (k_4) के लिए उ. पं. (2) और उ. पं. (3) से

प्रक्रम 1 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = [(1 * 1) = 1$ का मापांक $1 < \{d_5 = \frac{k_2}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (3) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 2 + 2] = 4 के लिए $0\ 0\ 0\ 0_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{\bar{1}}{3} \right\} = \{(1 * 3) + (1 * \bar{1})\} = 2$, $2 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 1) = 2 + 10 = 12$, $12 \div 15$ (k_4) से भागफल 1 और शेषफल 3 जिन्हे सयुक्त कर 1_3 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{\bar{1}}{3} \frac{\bar{2}}{0} \right\} = \{(1 * 0) + (1 * \bar{2}) + (\bar{1} * 3)\} = \bar{5}$, $\bar{5} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 3) = \bar{5} + \bar{30} = \bar{35}$, $\bar{35} \div 15$ (k_4) से भागफल 2 और शेषफल 5 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{\bar{1}}{3} \frac{\bar{2}}{0} \frac{2}{3} \right\} = \{(1 * \bar{3}) + (1 * 2) + (\bar{1} * 0) + (3 * \bar{2})\} = \bar{7}$, $\bar{7} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 5) = \bar{7} + \bar{50} = \bar{57}$, $\bar{57} \div 15$ (k_4) से भागफल 4 और शेषफल 3 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{4}_3$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $C.P \left\{ \frac{1}{3} \frac{\bar{1}}{0} \frac{\bar{2}}{3} \frac{2}{5} \right\} = \{(1 * \bar{5}) + (3 * 2) + (\bar{1} * \bar{3}) + (0 * \bar{2})\} = 4$, $4 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 3) = 4 + 30 = 34$, $34 \div 15$ (k_4) से भागफल 2 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 2_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $C.P \left\{ \frac{1}{0} \frac{\bar{1}}{3} \frac{\bar{2}}{5} \frac{2}{4} \right\} = \{(1 * 4) + (0 * 2) + (\bar{1} * \bar{5}) + (\bar{3} * \bar{2})\} = 15$, $15 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 4) = 15 + 40 = 55$, $55 \div 15$ (k_4) से भागफल 4 और शेषफल 5 जिन्हे सयुक्त कर 4_5 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $C.P \left\{ \frac{\bar{1}}{3} \frac{\bar{2}}{5} \frac{2}{4} \right\} = \{(\bar{1} * 4) + (\bar{3} * 2) + (\bar{2} * \bar{5})\} = 0$, $0 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } 5) = 0 + \bar{50} = \bar{50}$, $\bar{50} \div 15$ (k_4) से भागफल 3 और शेषफल 5 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{3}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 $C.P \left\{ \frac{\bar{2}}{5} \frac{2}{4} \right\} = \{(\bar{2} * 4) + (\bar{5} * 2)\} = \bar{18}$, $\bar{18} + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } 5) = \bar{18} + \bar{50} = \bar{68}$, $\bar{68} \div 15$ (k_4) से भागफल 5 और शेषफल 7 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{5}_7$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 $C.P \left\{ \frac{2}{4} \right\} = \{(2 * 4)\} = 8$, $8 + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 7) = 8 + 70 = 78$, $78 \div 15$ (k_4) से भागफल 5 और शेषफल 3 जिन्हे सयुक्त कर 5_3 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 $10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल } 3) = 30$, $30 \div 15$ (k_4) से भागफल 2 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 2_0 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 4 का सम्पूर्ण हल मान $0.0\ 0\ 0\ 0\ 0_1\ 1_3\ \bar{2}_5\ \bar{4}_3\ 2_4\ 4_5\ \bar{3}_5\ \bar{5}_7\ 5_3\ 2_0$

$= 0.0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \bar{2}\ \bar{4}\ 2\ 4\ \bar{3}\ \bar{5}\ 5\ 2$ दशमलव बाद 13 स्थान तक होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (5) $\frac{x^8}{!8}$ का हल मान $\frac{x^8}{!8} = \{(\frac{x^2}{!2}) * (\frac{x^6}{!6})\} \div 28$ (k_5) के लिए उ. पं. (2) और उ. पं. (4) से

प्रक्रम 1 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = [(1 * 1) = 1$ का मापांक $1 < \{d_5 = \frac{k_5}{2} = \frac{28}{2} = 14\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (4) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 4 + 2] = 6 के लिए $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{\bar{1}}{2} \right\} = \{(1 * \bar{2}) + (1 * \bar{1})\} = \bar{3}$, $\bar{3} + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 1) = \bar{3} + 10 = 7$, $7 \div 28$ (k_5) से भागफल 0 और शेषफल 7 जिन्हे सयुक्त कर 0_7 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} \\ 1 & 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * \bar{4}) + (1 * \bar{2}) + (\bar{1} * \bar{2})\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 7) = \bar{4} + 70 = 66$, $66 \div 28$ (k_5) से भागफल 2 और शेषफल 10 जिन्हे सयुक्त कर 2_{10} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 2) + (1 * 2) + (\bar{1} * \bar{4}) + (\bar{2} * \bar{2})\} = 12$, $12 + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 10) = 12 + 100 = 112$, $112 \div 28$ (k_5) से भागफल 4 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर 4_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 4) + (\bar{2} * 2) + (\bar{1} * 2) + (\bar{4} * \bar{2})\} = 6$, $6 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 0) = 6 + 0 = 6$, $6 \div 28$ (k_5) से भागफल 0 और शेषफल 6 जिन्हे सयुक्त कर 0_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * \bar{3}) + (\bar{4} * 2) + (\bar{1} * 4) + (2 * \bar{2})\} = \bar{19}$, $\bar{19} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } 6) = \bar{19} + 60 = 41$, $41 \div 28$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल 13 जिन्हे सयुक्त कर 1_{13} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * \bar{5}) + (2 * 2) + (\bar{1} * \bar{3}) + (4 * \bar{2})\} = \bar{6}$, $\bar{6} + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } 13) = \bar{6} + 130 = 124$, $124 \div 28$ (k_5) से भागफल 4 और शेषफल 12 जिन्हे सयुक्त कर 4_{12} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 8 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 5) + (4 * 2) + (\bar{1} * \bar{5}) + (\bar{3} * \bar{2})\} = 24$, $24 + 10 * (\text{प्रक्रम 7 में प्राप्त शेषफल } 12) = 24 + 120 = 144$, $144 \div 28$ (k_5) से भागफल 5 और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर 5_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 9 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 3 & 5 & 5 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 2) + (\bar{3} * 2) + (\bar{1} * 5) + (\bar{5} * \bar{2})\} = 1$, $1 + 10 * (\text{प्रक्रम 8 में प्राप्त शेषफल } 4) = 1 + 40 = 41$, $41 \div 28$ (k_5) से भागफल 1 और शेषफल 13 जिन्हे सयुक्त कर 1_{13} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 10 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{2} & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\bar{1} * 2) + (\bar{5} * 2) + (\bar{2} * 5)\} = \bar{22}$, $\bar{22} + 10 * (\text{प्रक्रम 9 में प्राप्त शेषफल } 13) = \bar{22} + 130 = 108$, $108 \div 28$ (k_5) से भागफल 4 और शेषफल $\bar{4}$ जिन्हे सयुक्त कर $4_{\bar{4}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 11 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{2} & 2 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\bar{2} * 2) + (5 * 2)\} = 6$, $6 + 10 * (\text{प्रक्रम 10 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = 6 + 40 = 34$, $34 \div 28$ (k_5) से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल $\bar{6}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_{\bar{6}}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 12 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(2 * 2) = 4$, $4 + 10 * (\text{प्रक्रम 11 में प्राप्त शेषफल } \bar{6}) = 4 + 60 = 56$, $56 \div 28$ (k_5) से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_0$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 5 का सम्पूर्ण हल मान $0.00000001072_{10}4_00_61_{13}4_{12}5_41_{13}4_{\bar{4}}\bar{1}_{\bar{6}}\bar{2}_0$
 $= 0.000000002402\bar{2}404\bar{1}\bar{2}$ दशमलव बाद 17 स्थान तक होगा। दशमलव बाद 15 स्थान तक के लिए तालिका में $0.00000001072_{10}4_00_62_9\bar{2}_{10}4_00_{13}4_{\bar{4}}$ दर्ज कीजिए।

उत्तर पंक्ति क्रम (6) $\frac{x^{10}}{!10}$ का हल मान $\frac{x^{10}}{!10} = \{(\frac{x^2}{!2}) * (\frac{x^8}{!8})\} \div 45$ (k_6) के लिए उ. पं. (2) और उ. पं. (4) से

प्रक्रम 1 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = [(1 * 2) = 2$ का मापांक $2 < \{d_5 = \frac{k_6}{2} = \frac{45}{2} = 22.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति (4) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0 + 7 + 2] = 9 के लिए 00000000_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} \\ 2 & 4 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 4) + (2 * \bar{1})\} = 2$, $2 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 2) = 2 + 20 = 22$, $22 \div 45$ (k_6) से भागफल 0 और शेषफल 22 जिन्हे सयुक्त कर 0_{22} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 C.P $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & \bar{1} & \bar{2} \\ 2 & 4 & 0 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 * 0) + (2 * \bar{2}) + (\bar{1} * 4)\} = \bar{8}$, $\bar{8} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 22) = \bar{8} + 220$

= 212 , 212 ÷ 45 (k_6) से भागफल 5 और शेषफल $\overline{13}$ जिन्हे सयुक्त कर 5_{13} दर्ज कीजिए ।

प्रक्रम 4 C.P $\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad \overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 2 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \end{array} \right\} = \{(1 * 2) + (2 * 2) + (\overline{1} * 0) + (4 * \overline{2})\} = \overline{2}$, $\overline{2} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \overline{13}) = \overline{2} + \overline{130} = \overline{132}$, $\overline{132} \div 45$ (k_6) से भागफल $\overline{3}$ और शेषफल 3 जिन्हे सयुक्त कर $\overline{3}_3$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 C.P $\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad \overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 4 \quad 0 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right\} = \{(1 * \overline{2}) + (4 * 2) + (\overline{1} * 2) + (0 * \overline{2})\} = 4$, $4 + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 3) = 4 + 30 = 34$, $34 \div 45$ (k_6) से भागफल 1 और शेषफल $\overline{11}$ जिन्हे सयुक्त कर 1_{11} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 C.P $\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad \overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 0 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \end{array} \right\} = \{(1 * 4) + (0 * 2) + (\overline{1} * \overline{2}) + (2 * \overline{2})\} = 2$, $2 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \overline{11}) = 2 + \overline{110} = \overline{108}$, $\overline{108} \div 45$ (k_6) से भागफल $\overline{2}$ और शेषफल $\overline{18}$ जिन्हे सयुक्त कर $\overline{2}_{18}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 C.P $\left\{ \begin{array}{c} 1 \quad \overline{1} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \end{array} \right\} = \{(1 * 0) + (2 * 2) + (\overline{1} * 4) + (2 * \overline{2})\} = 4$, $4 + 10 * (\text{प्रक्रम 6 में प्राप्त शेषफल } \overline{18}) = 4 + \overline{180} = \overline{176}$, $\overline{176} \div 45$ (k_6) से भागफल $\overline{4}$ और शेषफल 4 जिन्हे सयुक्त कर $\overline{4}_4$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार तालिका के पंक्ति 6 में दशमलव बाद 15 स्थान तक के लिए –

0. 00 000 000 00 0₂ 0₂₂ 5₁₃ $\overline{3}_3$ 1₁₁ $\overline{2}_{18}$ $\overline{4}_4$ दर्ज कीजिए।

$m\angle\theta = \text{Tanh}^{\overline{1}}(0.34)$ का आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 9 स्थान के लिए गणना
0 ₁	$x^2 = (0.34)^2$	0. 1 1 5 6 = 0. 1 2 $\overline{4} \overline{4}$
उ. पं. 1	X	0. 3 4
उ. पं 2	$\frac{x^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 1 ₀ 3 ₁ 2 ₀ $\overline{9}_1$ $\overline{9}_1$ 3 ₁ 3 ₁ 3 ₁
उ. पं 3	$\frac{x^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 1 ₂ $\overline{1}_0$ 2 ₂ $\overline{9}_2$ $\overline{24}_1$ 6 ₁ 47 ₂
उ. पं 4	$\frac{x^7}{7}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 1 ₂ $\overline{2}_1$ $\overline{4}_2$ $\overline{6}_3$ 37 ₁ 11 ₃
उ. पं 5	$\frac{x^9}{9}$ के लिए $k_5 = 9$	0. 0 0 0 0 1 ₂ $\overline{2}_2$ $\overline{12}_4$ $\overline{3}_3$ $\overline{23}_2$
उ. पं 6	$\frac{x^{11}}{11}$ के लिए $k_6 = 11$	0. 0 0 0 0 0 1 ₂ $\overline{2}_2$ $\overline{15}_5$ $\overline{14}_3$
उ. पं 7	$\frac{x^{13}}{13}$ के लिए $k_7 = 13$	0. 0 0 0 0 0 0 1 ₂ $\overline{2}_6$ $\overline{15}_2$
उ. पं 8	$\frac{x^{15}}{15}$ के लिए $k_8 = 15$	0. 0 0 0 0 0 0 0 1 ₂ $\overline{1}_5$
उ. पं 9	$\frac{x^{17}}{17}$ के लिए $k_9 = 17$	0. 0 0 0 0 0 0 0 0 1 ₂
$m\angle\theta = \text{Tanh}^{\overline{1}}x =$ उ. पं. 1 से उ. पं. 9 तक योग मान		0. 3 5 4 2 $\overline{8}$ $\overline{23}$ $\overline{40}$ $\overline{47}$ $\overline{13}$ A ₁ A ₂ A ₃ A ₄ A ₅ A ₆ A ₇ A ₈ A ₉ = 0. 3 5 4 1 0 $\overline{7}$ $\overline{4}$ $\overline{8}$ $\overline{3}$ = 0. 3 5 4 0 9 2 5 1 7 दशमलव बाद नौ स्थान के लिए आकलन होगा। जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0. 3 5 4 0 9 2 5 2 9 है ।

योगमान (उ. पं. 1 से उ. पं. 5 तक) = 1 0 8 9 5 0 4 1 8 7 7 1 6 7 9 0 दशमलव बाद पंद्रह स्थान तक का आकलन है ,जो कम्प्यूकृत हल मान में नौ स्थान तक 1.0 8 9 5 0 4 1 8 8 है।

उदाहरण 3■ यदि $m\angle\theta = \text{Tanh}^{\bar{1}}x$ में $x=0.34$ के प्रति कोण माप इकाई रेडियन में

$$m\angle\theta = \text{Tanh}^{\bar{1}}x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} - - - - - \infty \text{ पद तक के द्वारा}$$

उत्तर पंक्ति क्रम (3) $\frac{x^3}{5}$ का हल मान $\frac{x^3}{5} = \{3^*(x^2)^*(\frac{x^3}{3})\} \div 5$ (k_3) के लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 2 से

प्रक्रम 1 1• $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 3^*(1*1) = 3^*1 = 3$ का मापांक $3 > \{d_3 = \frac{k_2}{2} = \frac{5}{2} = 2.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+ (पंक्ति 2 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+1] = [0+1+1]=2 के लिए 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 3^*(1*1) = 3$, $3 \div 5$ (k_3) से भागफल 1 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $1\frac{2}{5}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{3} \right\} = 3^*\{(1*3)+(1*2)\} = 3^*5 = 15$, $15 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 15 + \bar{20} = \bar{5}$, $\bar{5} \div 5$ (k_3) से भागफल 1 और शेषफल 0 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{3} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = 3^*\{(1*2)+(1*\bar{4})+(2*3)\} = 3^*4 = 12$, $12 + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 0) = 12 + 0 = 12$, $12 \div 5$ (k_3) से भागफल 2 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{3} \frac{\bar{4}}{2} \frac{\bar{4}}{9} \right\} = 3^*\{(1*\bar{9})+(1*\bar{4})+(2*2)+(3*\bar{4})\} = 3^* \bar{21} = \bar{63}$
 $\bar{63} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 2) = \bar{63} + 20 = \bar{43}$, $\bar{43} \div 5$ (k_3) से भागफल 9 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{9}_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{3} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{9} \frac{\bar{4}}{9} \right\} = 3^*\{(1*\bar{9})+(3*\bar{4})+(2*\bar{9})+(2*\bar{4})\} = \bar{141}$,
 $\bar{141} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } 2) = \bar{141} + 20 = \bar{121}$, $\bar{121} \div 5$ (k_3) से भागफल 24 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{24}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2}{9} \frac{\bar{4}}{9} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = 3^*\{(1*3)+(2*\bar{4})+(2*\bar{9})+(\bar{9}*\bar{4})\} = 3^* 13 = 39$
 $39 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = 39 + \bar{10} = 29$
 $29 \div 5$ (k_3) से भागफल 6 और शेषफल 1 जिन्हे सयुक्त कर 6_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $3^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{9} \frac{2}{9} \frac{\bar{4}}{3} \frac{\bar{4}}{3} \right\} = 3^*\{(1*3)+(\bar{9}*\bar{4})+(2*3)+(\bar{9}*\bar{4})\} = 3^* 81 = 243$
 $243 + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = 243 + \bar{10} = 233$
 $233 \div 5$ (k_3) से भागफल 47 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर 47_2 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 3 का हल $0. 0 0 1\frac{2}{5} \bar{1}_0 2_2 \bar{9}_2 \bar{24}_1 6_1 47_2$ होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (4) $\frac{x^3}{7}$ का हल मान $\frac{x^3}{7} = \{5^*(x^2)^*(\frac{x^3}{5})\} \div 7$ (k_4) के लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 3 से

प्रक्रम 1 1• $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 5^*(1*1) = 5^*1 = 5$ का मापांक $5 > \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5\}$ $\therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+ (पंक्ति 3 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या)+1] = [0+2+1]=3 के लिए 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 5^*(1*1) = 5$, $5 \div 7$ (k_4) से भागफल 1 और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $1\frac{2}{7}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{1} \right\} = 5^* \{ (1 * \bar{1}) + (1 * 2) \} = 5 * 1 = 5$, $5 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) =$
 $5 + \bar{20} = \bar{15}$, $\bar{15} \div 7 \text{ (} k_4 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{2} \text{ और शेषफल } \bar{1} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{2}_1 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 3 $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{1} \frac{\bar{4}}{2} \right\} = 5^* \{ (1 * 2) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{1}) \} = 5 * \bar{4} = \bar{20}$, $\bar{20} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) =$
 $\bar{20} + \bar{10} = \bar{30}$, $\bar{30} \div 7 \text{ (} k_4 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{4} \text{ और शेषफल } \bar{2} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{4}_2 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 4 $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{1} \frac{\bar{4}}{2} \frac{\bar{4}}{9} \right\} = 5^* \{ (1 * \bar{9}) + (1 * \bar{4}) + (2 * 2) + (\bar{1} * \bar{4}) \} = 5 * \bar{5} = \bar{25}$,
 $\bar{25} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = \bar{25} + \bar{20} = \bar{45}$
 $\bar{45} \div 7 \text{ (} k_4 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{6} \text{ और शेषफल } \bar{3} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{6}_3 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 5 $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{9} \frac{\bar{4}}{24} \right\} = 5^* \{ (1 * \bar{24}) + (\bar{1} * \bar{4}) + (2 * \bar{9}) + (2 * \bar{4}) \} = 5 * \bar{46} = \bar{230}$,
 $\bar{230} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } \bar{3}) = \bar{230} + \bar{30} = \bar{260}$
 $\bar{260} \div 7 \text{ (} k_4 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{37} \text{ और शेषफल } \bar{1} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{37}_1 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 6 $5^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2}{9} \frac{\bar{4}}{24} \frac{\bar{4}}{6} \right\} = 5^* \{ (1 * 6) + (2 * \bar{4}) + (2 * \bar{24}) + (\bar{9} * \bar{4}) \} = 5 * \bar{14} = \bar{70}$,
 $\bar{70} + 10 * (\text{प्रक्रम 5 में प्राप्त शेषफल } \bar{1}) = \bar{70} + \bar{10} = \bar{80}$
 $\bar{80} \div 7 \text{ (} k_4 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{11} \text{ और शेषफल } \bar{3} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{11}_3 \text{ दर्ज कीजिए।}$

इस प्रकार पंक्ति 4 के हल $0.0 \ 0 \ 0 \ 1_2 \ \bar{2}_1 \ \bar{4}_2 \ \bar{6}_3 \ \bar{37}_1 \ \bar{11}_3$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (5) $\frac{x^3}{9}$ का हल मान $\frac{x^7}{9} = \{ 7^* (x^2) * (\frac{x^7}{7}) \} \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ के लिए पंक्ति } 0_1 \text{ और पंक्ति 4 से}$

प्रक्रम 1 1• $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 7^* (1 * 1) = 7 * 1 = 7$ का मापांक $7 > \{ d_5 = \frac{k_5}{2} = \frac{7}{2} = 4.5 \} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति 0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति 4 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 3 + 1] = 4 के लिए 0000 दर्ज कीजिए।

2• $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 7^* (1 * 1) = 7 * 1 = 7$, $7 \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ से भागफल } 1 \text{ और शेषफल } \bar{2} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } 1_2 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 2 $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \right\} = 7^* \{ (1 * \bar{2}) + (1 * 2) \} = 7 * 0 = 0$, $0 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) =$
 $0 + \bar{20} = \bar{20}$, $\bar{20} \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{2} \text{ और शेषफल } \bar{2} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{2}_2 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 3 $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{4} \right\} = 7^* \{ (1 * \bar{4}) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{2}) \} = 7 * \bar{12} = \bar{84}$, $\bar{84} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) =$
 $\bar{84} + \bar{20} = \bar{104}$, $\bar{104} \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{8} \text{ और शेषफल } \bar{12} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{12}_4 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 4 $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{4} \frac{\bar{4}}{6} \right\} = 7^* \{ (1 * \bar{6}) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{4}) + (\bar{2} * \bar{4}) \} = 7 * \bar{10} = \bar{70}$,
 $\bar{70} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } \bar{4}) = \bar{70} + \bar{40} = \bar{30}$,
 $\bar{30} \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{3} \text{ और शेषफल } \bar{3} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{3}_3 \text{ दर्ज कीजिए।}$

प्रक्रम 5 $7^* \text{C.P} \left\{ \frac{1}{2} \frac{2}{4} \frac{\bar{4}}{6} \frac{\bar{4}}{37} \right\} = 7^* \{ (1 * \bar{37}) + (\bar{2} * \bar{4}) + (2 * \bar{6}) + (\bar{4} * \bar{4}) \} = 7 * \bar{25} = \bar{175}$,
 $\bar{175} + 10 * (\text{प्रक्रम 4 में प्राप्त शेषफल } \bar{3}) = \bar{175} + \bar{30} = \bar{205}$,
 $\bar{205} \div 9 \text{ (} k_5 \text{)} \text{ से भागफल } \bar{23} \text{ और शेषफल } \bar{4} \text{ जिन्हे सयुक्त कर } \bar{23}_2 \text{ दर्ज कीजिए।}$

इस प्रकार पंक्ति 5 का हल $0.0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1_2 \ \bar{2}_2 \ \bar{12}_4 \ \bar{3}_3 \ \bar{23}_2$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (6) $\frac{x^{11}}{11}$ का हल मान $\frac{x^{11}}{11} = \{ 9^* (x^2) * (\frac{x^9}{9}) \} \div 11 \text{ (} k_6 \text{)} \text{ के लिए पंक्ति } 0_1 \text{ और पंक्ति 5 से}$

प्रक्रम 1 1• $9 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 9 * (1 * 1) = 9 * 1 = 9$ का मापांक $9 > \{d_6 = \frac{k_6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति 5 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 4 + 1] = 5 के लिए 0 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $9 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 9 * (1 * 1) = 9 * 1 = 9$, $9 \div 11$ (k_6) से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $1\bar{2}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $9 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \right\} = 9 * \{(1 * \bar{2}) + (1 * 2)\} = 9 * 0 = 0$, $0 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 0 + 20 = \bar{20}$, $\bar{20} \div 11$ (k_6) से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $9 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{\bar{12}} \right\} = 9 * \{(1 * \bar{12}) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{2})\} = 9 * \bar{20} = \bar{180}$,

$\bar{180} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 2) = \bar{180} + 20 = \bar{160}$,

$\bar{160} \div 11$ (k_6) से भागफल $\bar{15}$ और शेषफल 5 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{15}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $9 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{\bar{12}} \frac{\bar{4}}{\bar{3}} \right\} = 9 * \{(1 * \bar{3}) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{12}) + (2 * \bar{4})\} = 9 * \bar{23} = \bar{207}$,

$\bar{207} + 10 * (\text{प्रक्रम 3 में प्राप्त शेषफल } 5) = \bar{207} + 50 = \bar{157}$,

$\bar{157} \div 11$ (k_6) से भागफल $\bar{14}$ और शेषफल $\bar{3}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{14}_3$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 6 का हल 0.0 0 0 0 0 $1\bar{2}$ $\bar{2}_2$ $\bar{15}_5$ $\bar{14}_3$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (7) $\frac{x^{13}}{13}$ का हल मान $\frac{x^{13}}{13} = \{11 * (x^2) * (\frac{x^{11}}{11})\} \div 13$ (k_7) के लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 6 से

प्रक्रम 1 1• $11 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 11 * (1 * 1) = 11 * 1 = 11$ का मापांक $11 > \{d_7 = \frac{k_7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति 6 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 5 + 1] = 6 के लिए 0 0 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $11 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 11 * (1 * 1) = 11 * 1 = 11$, $11 \div 13$ (k_7) से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $1\bar{2}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $11 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \right\} = 11 * \{(1 * \bar{2}) + (1 * 2)\} = 11 * 0 = 0$, $0 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 0 + 20 = \bar{20}$,

$\bar{20} \div 13$ (k_7) से भागफल $\bar{2}$ और शेषफल 6 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_6$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $11 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \frac{\bar{4}}{\bar{15}} \right\} = 11 * \{(1 * \bar{15}) + (1 * \bar{4}) + (2 * \bar{2})\} = 11 * \bar{23} = \bar{253}$,

$\bar{253} + 10 * (\text{प्रक्रम 2 में प्राप्त शेषफल } 6) = \bar{253} + 60 = \bar{193}$,

$\bar{193} \div 13$ (k_7) से भागफल $\bar{15}$ और शेषफल 2 जिन्हे सयुक्त कर $\bar{15}_2$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 7 का हल 0.0 0 0 0 0 0 $1\bar{2}$ $\bar{2}_6$ $\bar{15}_2$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (8) $\frac{x^{15}}{15}$ का हल मान $\frac{x^{15}}{15} = \{13 * (x^2) * (\frac{x^{13}}{13})\} \div 15$ (k_8) के लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 7 से

प्रक्रम 1 1• $13 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 13 * (1 * 1) = 13 * 1 = 13$ का मापांक $13 > \{d_8 = \frac{k_8}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति 7 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 6 + 1] = 7 के लिए 0 0 0 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $13 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 13 * (1 * 1) = 13 * 1 = 13$, $13 \div 15$ (k_8) से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर $1\bar{2}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $13 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \frac{2}{2} \right\} = 13 * \{(1 * 2) + (1 * 2)\} = 13 * 0 = 0, 0 + 10 * (\text{प्रक्रम 1 में प्राप्त शेषफल } 2) =$
 $0 + 20 = 20, 20 \div 15 (k_7)$ से भागफल $\bar{1}$ और शेषफल $\bar{5}$ जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_5$ दर्ज कीजिए।

इस प्रकार पंक्ति 8 का हल $0.00000001_2 \bar{1}_5$ दर्ज होगा।

उत्तर पंक्ति क्रम (9) $\frac{x^{17}}{17}$ का हल मान $\frac{x^{17}}{17} = \{15 * (x^2) * (\frac{x^{15}}{15})\} \div 17 (k_9)$ कें लिए पंक्ति 0_1 और पंक्ति 8 से

प्रक्रम 1 1• $15 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 15 * (1 * 1) = 15 * 1 = 15$ का मापांक $15 > \{d_9 = \frac{k_9}{2} = \frac{17}{2} = 8.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति 0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (पंक्ति 8 के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0 + 7 + 1] = 7 के लिए 00000000 दर्ज कीजिए।

2• $15 * C.P \left\{ \frac{1}{1} \right\} = 15 * (1 * 1) = 15 * 1 = 15, 15 \div 17 (k_9)$ से भागफल 1 और शेषफल $\bar{2}$ जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए। इस प्रकार पंक्ति 9 का हल 0.000000001_2 दर्ज होगा।

$$\begin{aligned} m\angle\theta = \text{Tanh}^I x &= \text{उ. पं. 1 से उ. पं. 9 तक योग मान} = 0.3542\bar{8}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{0}\bar{4}\bar{7}\bar{1}\bar{3} \\ &= 0.35410\bar{7}\bar{4}\bar{8}\bar{3} \\ &= 0.354092517 \end{aligned}$$

दशमलव बाद नौ स्थान के लिए आकलन होगा। जो कम्प्यूकृत हल मान में नौ स्थान तक 0.354092529 है।

13-4 $\text{Sin}^I x, \text{Cos}^I x$ एवं $\text{Tan} x$ का आकलन

[1] $\text{Sin}^I x$ का आकलन गणना समिका माना कि $\text{Sin}^I x = \theta$ है। तब $x = \text{Sin}\theta$ होगा। अतः

$\text{Sin}^I x$ का प्रथम हल का आकलन गणना समिका—

$$\begin{aligned} \text{Sin}\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{!3} + \frac{\theta^5}{!5} - \frac{\theta^7}{!7} + \frac{\theta^9}{!9} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक। से} \\ \text{Sin}^I x = \theta &= \text{Sin}\theta + \frac{\theta^3}{!3} - \frac{\theta^5}{!5} + \frac{\theta^7}{!7} - \frac{\theta^9}{!9} + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक।} \end{aligned}$$

तथा द्वितीय हल का आकलन— $\text{Sin}^I x = (\pi - \theta)$ होगा।

आकलन गणना विश्लेषण चूँकि $\text{Sin}^I x = \theta$ के लिए आकलन गणना का आधार $\text{Sin}\theta = x$ है। अतः आकलन गणना विश्लेषण अनुच्छेद 13-5 में $\text{Sin}\theta$ का आकलन गणना विधि से अलग $m\angle\theta^r$ का आकलन करने में दशमलव बाद के प्रत्येक स्थान (दशांश, शतांश, हजारंश ..) का सुनिश्चित करना होगा। जिसे अधो उदाहरण के माध्यम से विश्लेषित किया गया है। अवलोकित कीजिए।

उदाहरण■, $\text{Sin}^I(0.4) = \theta$ हो तो सम्पूर्ण संक्रिया विश्लेषण दर्शाते हुए θ का मान दशमलव बाद नौ स्थान तक प्राप्त कीजिए।

हल— $\text{Sin}^I(0.4) = \theta$ से $\text{Sin}\theta = 0.4$

$\therefore \theta = \text{Sin}\theta + \frac{\theta^3}{!3} - \frac{\theta^5}{!5} + \frac{\theta^7}{!7} - \frac{\theta^9}{!9} + \dots - \dots + \dots - \dots \infty$ पद तक की गणना नौ स्थान तक प्राप्त करने की ओर $\frac{\theta^7}{!7}$ तक की गणन तालिका का हल विश्लेषण अवलोकित कीजिए।

विश्लेषित व्याख्या पंक्तिवार क्रमागत शून्य की स्थान संख्या एवं इसके बाद की के स्थानों के अंकों का निर्धारण —

उत्तरांक पंक्ति में r वें क्रम का उत्तरांक A_r दर्शित करने के तारतम्य में क्रमशः—

(1) A_1 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणना पंक्ति 1 में $\text{Sin}\theta = 0.4 = 0.4000000000$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 0.4000000000 के दशांश अंक 4 को उत्तर पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम अंक (दशांश) A_1 सुनिश्चित कीजिए।

आकलन गणन तालिका

गणन पंक्ति r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
----------------	-----------------------------	-----------------

0_1	θ^2 के तारतम्य में	0. 2_4 $\bar{3}_2$ $\bar{1}_1$ 3_2 4_1 5_0 10_3 11_0
0_2	$-\theta^2$	0. $\bar{2}$ 3 1 $\bar{3}$ $\bar{4}$ 5 $\bar{10}$ $\bar{11}$
1	$\sin\theta =$	0. 4 0 0 0 0 0 0 0 0
2	$\frac{\theta^3}{13}$ के लिए $k_2 = 2*3 = 6$	0. 0 1_2 1_4 6_1 1_2 4_1 7_1 9_3 5_3
3	$-\frac{\theta^5}{15}$ के लिए $k_3 = 4*5 = 20$	0. 0 0 0_2 $\bar{1}_1$ 0_2 2_6 $\bar{3}_6$ $\bar{4}_8$ $\bar{6}_5$
4	$\frac{\theta^7}{17}$ के लिए $k_4 = 6*7 = 42$	0. 0 0 0 0 0_2 0_{17} 4_3 0_{15} $\bar{3}_{19}$
θ का हल मान		0. 4 1 1 5 1 6 8 5 $\bar{4}$ $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9$ $= 0. 4 1 1 5 1 6 8 4 6$ दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन है जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 0. 4 1 1 5 1 6 8 4 6 ही है।

(2) A_2 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का प्रथम (दशांश) अंक – D.P. $\{A_1\} = \text{D.P.}\{4\} = (4*4) = 16 = 24$ को 2_4 दर्शित करने पर 2 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का प्रथम (दशांश) अंक – $\bar{2}$ दर्ज कीजिए। 2_4 से A_3 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $\bar{4}$ होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{13}$ की गणना – $\frac{\theta^3}{13} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए –

1• C.P. $\{\frac{2}{4}\} = (2*4) = 8$ का मापांक $8 > \{d_2 = \frac{k_2}{2} = \frac{6}{2} = 3\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (θ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = $[0+0+1] = 1$ के लिए 0 दर्ज कीजिए।

2• C.P. $\{\frac{2}{4}\} = (2*4) = 8$, $8 \div 6$ (k_2) से भागफल 1 और A_3 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 $A_2 =$ पंक्ति 1 और 2 के द्वितीय (शतांश) अंको का योग $= 0+1 = 1$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए। इस प्रकार $\theta = 0. 4 1$ दशमलव बाद दो स्थान तक का आकलन होगा।

(3) A_3 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का दूसरा (शतांश) अंक – D.P. $\{A_1 A_2\} = \text{D.P.}(4 1) = 2*(4*1) = 8$, $8+10*\{$ पंक्ति 0_1 में A_3 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{4}\} = 8+40 = 32$ को $\bar{3}_2$ दर्शित करने पर $\bar{3}$ होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का दूसरा (शतांश) अंक – 3 दर्ज कीजिए। $\bar{3}_2$ से A_4 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल 2 होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{13}$ की गणना – $\frac{\theta^3}{13} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C.P. $\{\frac{2}{4} \bar{3}_1\} = \{(2*1) + (4*\bar{3}) = \bar{10}, \bar{10} + \{$ पंक्ति 2 में A_3 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 $\} = \bar{10} + 20 = 10$, $10 \div 6$ (k_2) से भागफल 1 और A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 4 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{15})$ की गणना – $(-\frac{\theta^5}{15}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{13}\} \div 20$ (k_3) के लिए

C. P. $\{\bar{2}_1\} = (\bar{2} * 1) = \bar{2}$ का मापांक $2 < \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{20}{2} = 10\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (θ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 2] = [0+1+2] = 3 के लिए 0 00₂ दर्ज कीजिए। 10 00₂ से 2 A_4 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 4 $A_3 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के तीसरे (हजारांश) अंको का योग = 0+1+0=1 θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.411$ दशमलव बाद तीन स्थान तक का आकलन होगा।

(4) A_4 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का तीसरा (हजारांश) अंक – D.P. $\{A_1 A_2 A_3\}$

= D.P. (4 1 1) = $\{2*(4*1)+1^2\} = 9$, $9+10*\{\text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_4 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{2}\} = 9+20 = 29$ को $\bar{1}_1$ दर्शित करने पर $\bar{1}$ होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का तीसरा (हजारांश) अंक – 1 दर्ज कीजिए। $\bar{1}_1$ से A_5 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $\bar{1}$ होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना – $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. $\{\bar{2}_4 \bar{3}_1 \bar{1}_1\} = \{(2*1)+(4*\bar{1})+(\bar{3}*1)\} = \bar{5}$, $\bar{5} + 10*\{\text{पंक्ति 2 में } A_4 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 4\} = \bar{5} + 40 = 35$, $35 \div 6 (k_2)$ से भागफल 6 और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 6_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना – $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20$ के लिए

C. P. $\{\bar{2}_1 \bar{3}_1\} = \{(\bar{2}*1)+(1*3)\} = 1$, $1+10*\{\text{पंक्ति 3 में } A_4 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{2}\} = 1+20 = 21$

$21 \div 20 (k_3)$ से भागफल $\bar{1}$ और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $A_4 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के चौथे (दस हजारांश) अंको का योग = 0+6+ $\bar{1}$ = 5 θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए। इस प्रकार $\theta = 0.4115$ दशमलव बाद चार स्थान तक का आकलन होगा।

(5) A_5 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का चौथा (दसहजारांश) अंक – D.P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4\}$

= D.P. (4 1 1 5) = $\{2*(4*5)+2*(1*1)\} = 42$, $42+10*\{\text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{1}\} = 42+10 = 52$ को 3_2 दर्शित करने पर 3 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का चौथा (दस हजारांश) अंक – $\bar{3}$ दर्ज कीजिए। 3_2 से A_6 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल 2 होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना – $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. $\{\bar{2}_4 \bar{3}_1 \bar{1}_1 \bar{3}_5\} = \{(2*5)+(4*3)+(\bar{3}*1)+(1*\bar{1})\} = 18$, $18+10*\{\text{पंक्ति 2 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{1}\} = 18+10 = 28$, $28 \div 6 (k_2)$ से भागफल 1 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना – $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20 (k_3)$ के लिए

C. P. $\{\bar{2} \ 3 \ 1\}_1 \ 1 \ 6\} = \{(2*6)+(1*1)+(3*1)\} = \bar{8}$, $\bar{8}+10* \{ \text{पंक्ति 3 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1} \} = \bar{8}+10=2$, $2 \div 20 (k_3)$ से भागफल 0 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_3 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\frac{\theta^7}{!7}$ की गणना- $\frac{\theta^7}{!7} = \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{!5})\} \div 42 (k_4)$ के लिए

C. P. $\{\bar{2}\}_1 = (\bar{2} * 1) = 2$ का मापांक $2 < \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{42}{2} = 21\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= [(\text{पंक्ति } (0_2) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + (-\frac{\theta^5}{!5} \text{ का हल मान गणना पंक्ति 3 में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + 2] = [0+3+2] = 5$ के लिए 00000_2 दर्ज कीजिए। 00000_2 से $2 A_6$ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 5 $A_5 =$ पंक्ति 1,2,3 और 4 के पाँचवें (लाखांश) अंको का योग $= 0+1+0+0=1$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.41151$ दशमलव बाद पाँच स्थान तक का आकलन होगा।

(6) A_6 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का पाँचवाँ (लाखांश) अंक - D.P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5\} = \text{D.P.}(4 \ 1 \ 1 \ 5 \ 1) = \{2*(4*1)+2*(1*5)+1^2\} = 19$, $19+10* \{ \text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 2} \} = 19+20 = 39 = 4\bar{1}$ को 4_1 दर्शित करने पर 4 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का पाँचवाँ (लाखांश) अंक- $\bar{4}$ दर्ज कीजिए। 4_1 से $\bar{1} A_7$ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना- $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. $\{\bar{2} \ 3 \ 1 \ 3 \ 4\}_4 \ 1 \ 1 \ 5 \ 1\} = \{(2*1)+(4*4)+(\bar{3} * 5)+(1*3)+(\bar{1} * 1)\} = 5$, $5+ \{ \text{पंक्ति 2 में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2} \} = 5+20 = 25$, $25 \div 6 (k_2)$ से भागफल 4 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 4_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना- $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20 (k_3)$ के लिए

C. P. $\{\bar{2} \ 3 \ 1 \ 3\}_1 \ 1 \ 6 \ 1\} = \{(2*1)+(1*3)+(3*6)+(1*1)\} = 14$, $14+ \{ \text{पंक्ति 3 में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2} \} = 14+20=34$, $34 \div 20 (k_3)$ से भागफल 2 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{6}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 2_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\frac{\theta^7}{!7}$ की गणना- $\frac{\theta^7}{!7} = \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{!5})\} \div 42 (k_4)$ के लिए

C. P. $\{\bar{2} \ 3\}_1 \ 0\} = ((\bar{2} * 0) + (\bar{1} * 3)) = \bar{3}$, $\bar{3}+10* \{ \text{पंक्ति 4 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2} \} = \bar{3}+20 = 17$
 $17 \div 42 (k_4)$ से भागफल 0 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 17 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_{17} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_6 =$ पंक्ति 1,2,3 और 4 के छठवें (दसलाखांश) अंको का योग $= 0+4+2+0=6$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए। इस प्रकार $\theta = 0.411516$ दशमलव बाद छह स्थान तक का आकलन होगा।

(7) A_7 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का छठवाँ (दसलाखांश) अंक - D.P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6\}$

= D.P.(4 1 1 5 1 6) = {2*(4*6)+2*(1*1)+2*(1*5)} = 60, 60+10* { पंक्ति 0₁ में A₇ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 1 } = 60+10 = 50 को 5₀ दर्शित करने पर 5 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0₂ में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का पाँचवाँ (लाखांश) अंक- 5 दर्ज कीजिए। 5₀ से 0 A₈ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना- $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. { $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 1 & 6 \end{smallmatrix}$ } = {(2*6)+(4*5)+(3*1)+(1*4)+(1*5)+(1*3)} = 31, 31+10* { पंक्ति 2 में A₇ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 } = 31+10 = 41, 41÷6 (k₂) से भागफल 7 और A₈ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 } होगा। जिन्हे सयुक्त कर 7₁ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना- $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20(k_3)$ के लिए

C. P. { $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 4 \end{smallmatrix}$ } = {(2*4)+(1*4)+(3*1)+(1*3)+(1+6)} = 6, 6+10* { पंक्ति 3 में A₇ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 6 } = 6+60 = 66, 66÷20 (k₃) से भागफल 3 और A₈ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 6 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 3₆ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\frac{\theta^7}{!7}$ की गणना- $\frac{\theta^7}{!7} = \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{!5})\} \div 42(k_4)$ के लिए

C. P. { $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}$ } = {(2*2)+(1*1)+(3*0)} = 5, 5+10* { पंक्ति 4 में A₆ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 17 } = 5+170 = 165, 165÷42 से भागफल 4 और A₇ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 3 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 4₃ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 A₇ = पंक्ति 1, 2, 3 और 4 के सातवें (करोड़ांश) अंको का योग = 0+7+3+4=8 θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार θ = 0. 4 1 1 5 1 6 8 दशमलव बाद सात स्थान तक का आकलन होगा।

(8) A₈ दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0₁ में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का सातवाँ (करोड़ांश) अंक - D. P. {A₁ A₂ A₃ A₄ A₅ A₆ A₇}

= D.P.(4 1 1 5 1 6 8) = {2*(4*8)+2*(1*6)+2*(1*1)+(5²) } = 103, 103+10* { पंक्ति 0₁ में A₈ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0 } = 103+00 = 103 को 10₃ दर्शित करने पर 10 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0₂ में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का पाँचवाँ (लाखांश) अंक- 10 दर्ज कीजिए। 10₃ से 3 A₉ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना- $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. { $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 & 10 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 1 & 6 & 8 \end{smallmatrix}$ } = {(2*8)+(4*10)+(3*6)+(1*5)+(1*1)+(1*4)+(3*5)} = 61, 61+10* { पंक्ति 2 में A₈ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 } = 61+10 = 51, 51÷6 (k₂) से भागफल 9 और A₉ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 3 } होगा। जिन्हे सयुक्त कर 9₃ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना- $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20(k_3)$ के लिए

C. P. { $\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 4 & 7 \end{smallmatrix}$ } = {(2*7)+(1*5)+(3*4)+(1*4)+(1+1)+(6*3)} = 28, 28+10* { पंक्ति 3 में A₈ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 6 } = 28+60 = 88, 88÷20 (k₃) से भागफल 4 और A₉ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 8 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 4₈ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\frac{\theta^7}{!7}$ की गणना- $\frac{\theta^7}{!7} = \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{!5})\} \div 42 (k_4)$ के लिए

C. P. $\{\frac{2}{1} \frac{3}{0} \frac{1}{2} \frac{3}{3}\} = ((\bar{2} * \bar{3}) + (\bar{1} * \bar{3}) + (3 * 2) + (0 * 1)) = 15$, $15 + 10 * \{ \text{पंक्ति 4 में } A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{3} \} = 15 + 30 = \bar{15}$, $\bar{15} \div 42 (k_4)$ से भागफल 0 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{15}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_{15} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_8 =$ पंक्ति 1, 2, 3 और 4 के आठवें (दसकरोड़ाश) अंको का योग $= 0 + 9 + \bar{4} + 0 = 5$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.41151685$ दशमलव बाद आठ स्थान तक का आकलन होगा।

(9) A_9 और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्मान का आठवाँ (दस करोड़ांश) अंक -

D. P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8\} = \text{D.P.}(4 \ 1 \ 1 \ 5 \ 1 \ 6 \ 8 \ 5) = \{2 * (4 * 5) + 2 * (1 * 8) + 2 * (1 * 6) + 2 * (5 * 1)\} = 80$, $80 + 10 * \{ \text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{3} \} = 80 + 30 = 110$ को 11_0 दर्शित करने पर 11 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्मान का योज्य प्रतिलोम का पाँचवाँ (लाखांश) अंक- $\bar{11}$ दर्ज कीजिए। 11_0 से 0 A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{!3}$ की गणना- $\frac{\theta^3}{!3} = \frac{\theta^2 * \theta}{6}$ के लिए

C. P. $\{\frac{2}{4} \frac{3}{1} \frac{1}{1} \frac{3}{5} \frac{4}{6} \frac{5}{8} \frac{10}{5} \frac{11}{5}\} = \{(2 * 5) + (1 * 11) + (\bar{3} * 8) + (1 * 10) + (\bar{1} * 6) + (1 * 5) + (3 * 1) + (5 * 4)\} = 62$, $62 + 10 * \{ \text{पंक्ति 2 में } A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{3} \} = 62 + 30 = 32$, $32 \div 6 (k_2)$ से भागफल 5 और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{2}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 5_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{!5})$ की गणना- $(-\frac{\theta^5}{!5}) = \{(-\theta^2) * \frac{\theta^3}{!3}\} \div 20 (k_3)$ के लिए

C. P. $\{\frac{2}{1} \frac{3}{1} \frac{1}{6} \frac{3}{1} \frac{4}{4} \frac{5}{7} \frac{10}{9}\} = \{(\bar{2} * 9) + (1 * \bar{10}) + (3 * 7) + (1 * \bar{4}) + (1 + 1) + (6 * \bar{3})\} = \bar{35}$, $\bar{35} + 10 * \{ \text{पंक्ति 3 में } A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{8} \} = \bar{35} + 80 = \bar{115}$, $\bar{115} \div 20 (k_3)$ से भागफल $\bar{6}$ और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{5}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{6}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\frac{\theta^7}{!7}$ की गणना- $\frac{\theta^7}{!7} = \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{!5})\} \div 42 (k_4)$ के लिए

C. P. $\{\frac{2}{1} \frac{3}{0} \frac{1}{2} \frac{3}{3} \frac{4}{4}\} = ((\bar{2} * \bar{4}) + (\bar{1} * \bar{4}) + (3 * \bar{3}) + (0 * \bar{3}) + (1 * 2)) = 5$, $5 + 10 * \{ \text{पंक्ति 4 में } A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{15} \} = 5 + 150 = \bar{145}$, $\bar{145} \div 42 (k_4)$ से भागफल $\bar{3}$ और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{19}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{3}_{19}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_9 =$ पंक्ति 1, 2, 3 और 4 के आठवें (दसकरोड़ाश) अंको का योग $= 0 + 5 + \bar{6} + \bar{3} = \bar{4}$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार **प्रथम हल मे** $m\angle\theta^r = 0.41151685\bar{4} = 0.411516846$ रेडियन दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन होगा। जो कम्प्यूकृत हल मान में नौ स्थान तक 0.411516846 रेडियन ही है।

और **द्वितीय हल में** $m\angle\theta^r = (\pi - 0.411516846) = \text{रेडियन होगा।}$

तुलनार्थ बीजांक समिका से गणना

$$\sin^{-1}(0.4) = \theta \Rightarrow \sin \theta = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$\therefore m\angle\theta^r$ का त्रिभुजांक $[x \ y \ z] = [--- \ 2 \ 5] = [(\sqrt{5^2 - 2^2}) \ 2 \ 5] = [\sqrt{21} \ 2 \ 5]$ से

$m\angle\theta^r$ का बीजोक्त $\{p \ q\} = \{(z+x) \ y\} = [(5+\sqrt{21}) \ 2] = \{(5+4.58257) \ 2\} = [9.58257 \ 2] = \{9.6 \ 2\}$
 $= \{4.8 \ 1\} = \{48 \ 10\} = \{24 \ 5\}$ होगा।

चूँकि बीजोक्त $\{p \ q\}$ के प्रति $m\angle\theta^r = \left(\frac{q}{p} + \frac{p \cdot q}{p^2 + 1}\right) \therefore$ बीजोक्त $\{24 \ 5\}$ के प्रति $m\angle\theta^r = \left(\frac{5}{24} + \frac{24 \cdot 5}{24^2 + 1}\right)$

$= 0.2083333333 + 0.207972270 = 0.416305603$ रेडियन होगा।

[2] $\text{Cos}^{-1}x$ का आकलन गणना समिका माना कि $\text{Cos}^{-1}x = m\angle\theta^r$ है। तब $x = \text{Cos}\theta$ होगा। अतः

$\text{Cos}\theta$ का प्रथम हल का आकलन गणना समिका—

$$\text{Cos}\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक। से}$$

$$\frac{\theta^2}{2} = (1 - \text{Cos}\theta) + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक} = M \text{ से } \theta = \sqrt{2M} \text{ होगा।}$$

तथा द्वितीय हल का आकलन— $\text{Cos}^{-1}x = (\pi - \theta)$ होगा।

आकलन गणना विश्लेषण चूँकि $\text{Cos}^{-1}x = \theta$ के लिए आकलन गणना का आधार $\text{Cos}\theta = x$ है। अतः आकलन गणना विश्लेषण अनुच्छेद 11-8 में $\text{Cos}\theta$ का आकलन गणना विधि से अलग θ का आकलन करने में दशमलव बाद के प्रत्येक स्थान (दशांश ,शतांश ,हजारांश . . .)का सुनिश्चित करना होगा । जिसे अधो उदाहरण के माध्यम से विश्लेषित किया गया है। अवलोकित कीजिए।

उदाहरण ■ , $\text{Cos}^{-1}(0.4) = \theta$ हो तो सम्पूर्ण संक्रिया विश्लेषण दर्शाते हुए θ का मान दशमलव बाद नौ स्थान तक प्राप्त कीजिए।

हल $\text{Cos}^{-1}(0.4) = \theta$ से $\text{Cos}\theta = 0.4$

$$\therefore \frac{\theta^2}{2} = (1 - \text{Cos}\theta) + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta^2}{2} = (1 - 0.4) + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक}$$

$$\frac{\theta^2}{2} = 0.6 + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty = M \text{ से}$$

$\theta = \sqrt{2M}$ की गणना के लिए $\frac{\theta^2}{2}$ तालिका का हल विश्लेषण अवलोकित कीजिए।

विश्लेषित व्याख्या पंक्तिवार क्रमागत शून्य की स्थान संख्या एवं इसके बाद की के स्थानों के अंकों का निर्धारण —

उत्तरांक पंक्ति $\frac{\theta^2}{2}$ में r वें क्रम का उत्तरांक A_r दर्शित करने के तारतम्य में क्रमशः—

(1) A_1 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणना पंक्ति 1 में $(1 - \text{Cos}\theta) = (1 - 0.4) = 0.6 = 0.6000000000$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $A_1 =$ प्रक्रम 1 के हल मान का दशमलव बाद प्रथम अंक 6 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0.6$ दशमलव बाद एक स्थान तक का आकलन होगा।

(2) A_2 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद पहला अंक (दशांश) A_1 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_1} = \overline{6}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{4!}$ की गणना— $(\frac{\theta^4}{4!}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6$ (k_2) के लिए

$D.P.\{A_1\} = D.P.\{6\} = 6 \cdot 6 = 36$, 36 का मापांक $36 > \{d_2 = \frac{k_2}{2} = \frac{6}{2} = 3\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य

(0) की स्थान संख्या $= [2 \cdot \{\text{उत्तर पंक्ति } (\frac{\theta^2}{2}) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}\} + 1] = [2 \cdot 0 + 1] =$ के लिए 0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 D. P. $\{A_1\} = D. P. \{6\} = 6*6 = 36$, $36 \div 6$ (k_2) से भागफल 6 और A_3 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0} होगा। जिन्हे सयुक्त कर 6_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $A_2 =$ पंक्ति 1 और 2 के दूसरे (शतांश) अंको का योग $= 0+6 = 6$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।
इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0.66$ दशमलव बाद दो स्थान तक का आकलन होगा।

(3) A_3 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद दूसरा अंक (शतांश) A_2 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_2} = \overline{6}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के तीसरे अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6$ (k_2) के लिए

D. P. $\{A_1 A_2\} = D. P. \{66\} = 2*6*6 = 72$, $72+10*(A_3$ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0) $72+0 = 72$
 $72 \div 6$ (k_2) से भागफल 12 और A_4 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0} होगा। जिन्हे सयुक्त कर 12_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15$ (k_3) के लिए

C. P. $\{\overline{6}\}_6 = \overline{6} * 6 = \overline{36}$, का मापांक $36 > \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{15}{2} = 7.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= \{ \text{गणना पंक्ति } 0_1 \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} \} + \{ \text{उत्तर पंक्ति } (\frac{\theta^4}{14}) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 1 \} = 0+1+1 = 2$ के लिए 00 दर्ज कीजिए।

आकलन गणन तालिका

गणन पंक्ति r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0_1	$-\frac{\theta^2}{2}$	0. $\overline{6}$ $\overline{6}$ $\overline{10}$ $\overline{15}$ $\overline{36}$ $\overline{80}$ $\overline{187}$ $\overline{468}$
1	$1 - \cos \theta$	0. 6 0 0 0 0 0 0 0 0
2	$\frac{\theta^4}{14}$ के लिए $k_2 = 2*3 = 6$	0. 0 6_0 12_0 26_0 50_0 119_2 279_2 690_1 1758_2
3	$-\frac{\theta^6}{16}$ के लिए $k_3 = 3*5 = 15$	0. 0 0 $\overline{2}_6$ $\overline{11}_3$ $\overline{21}_3$ $\overline{46}_6$ $\overline{115}_5$ $\overline{269}_5$ $\overline{721}_7$
4	$\frac{\theta^8}{18}$ के लिए $k_4 = 4*7 = 28$	0. 0 0 0 0_{12} 7_2 8_8 22_6 53_{11} 126_3
5	$\frac{\theta^{10}}{110}$ के लिए $k_5 = 5*9 = 45$	0. 0 0 0 0 0 $\overline{1}_9$ 0_0 $\overline{5}_5$ $\overline{15}_5$
6	$\frac{\theta^{12}}{112}$ के लिए $k_6 = 6*11 = 66$	0. 0 0 0 0 0 0_6 1_6 $\overline{1}_{12}$ 2_{28}
$\frac{\theta^3}{2}$ का हल मान		0. 6 6 10 15 36 80 187 468 1150 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 $= 0.66101943812135301352$ $= 0.672440952$ दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन है
θ		$\sqrt{2 * (0.672440952)} = \sqrt{1.344881904}$ $= 1.159279543$ जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नौ स्थान तक 1.159279481 के निकटतर है।

प्रक्रम 4 $C.P.\{\bar{6}\} = 6*6 = \overline{36}$, $\overline{36} + 10 * (A_3 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 0) = \overline{36} + 0 = \overline{36}$

$\overline{36} \div 15$ से भागफल $\bar{2}$ और A_4 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{6}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{2}_6$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_3 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के तीसरे (हजारांश) अंको का योग $= 0+12+\bar{2} = 10$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0. \bar{6} \bar{6} 10$ दशमलव बाद तीन स्थान तक का आकलन होगा।

(4) A_4 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद तीसरा अंक (हजारांश) A_3 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_3} = \overline{10}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के चौथे अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ के लिए

$$D.P.\{A_1 A_2 A_3\} = D.P.\{6 \bar{6} 10\} = 2*6*10+6^2 = 156,$$

$156+10 * (A_4 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 0) = 156+0=156$, $156 \div 6 (k_2)$ से भागफल 26 और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 26_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ के पाचवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15 (k_3)$ के लिए

$$C.P.\{\bar{6} \bar{6} \bar{12}\} = \{(\bar{6}*12)+(6*\bar{6})\} = \overline{108},$$

$\overline{108} + 10 * (A_4 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{6}) = \overline{108} + \overline{60} = \overline{168}$, $\overline{168} \div 15 (k_3)$ से भागफल $\overline{11}$ और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{3}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{11}_3$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{18})$ की गणना- $(\frac{\theta^8}{18}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{16})\} \div 28 (k_4)$ का लिए

$$C.P.\{\bar{6}\bar{2}\} = \bar{6}*2 = 12, \text{ का मापांक } 12 < \{d_4 = \frac{K_4}{2} = \frac{28}{2} = 14\} \therefore \text{दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}$$

$= \{ \text{गणना पंक्ति } 0_1 \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} \} + \{ \text{उत्तर पंक्ति } (\frac{\theta^6}{16}) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 2 \} = 0+2+2 = 4$ के लिए $0 \ 0 \ 0 \ 0_{12}$ दर्ज कीजिए। 0_{12} से A_5 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 12 होगा।

प्रक्रम 5 $A_4 =$ पंक्ति 1, 2, 3 और 4 के चौथे (दस हजारांश) अंको का योग $= 0+26+\overline{11}+0 = 15$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0. \bar{6} \bar{6} 10 15$ दशमलव बाद चार स्थान तक का आकलन होगा।

(5) A_5 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद चौथा अंक (लाखांश) A_4 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_4} = \overline{15}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के पाचवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ के लिए

$$D.P.\{A_1 A_2 A_3 A_4\} = D.P.\{6 \bar{6} 10 15\} = \{(2*6*15)+(2*6*10)\} = 300,$$

$300+10 * (A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 0) = 300+0 = 300$, $300 \div 6 (k_2)$ से भागफल 50 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 50_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ के पाँचवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15 (k_3)$ के लिए

$$C.P.\{\bar{6} \quad \bar{6} \quad \bar{10}\}_{12 \quad 26} = \{(\bar{6} * 26) + (6 * \bar{10}) + (\bar{6} * 12) = \bar{288},$$

$\bar{288} + 10 * (A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 3) = \bar{288} + \bar{30} = \bar{318}, \bar{318} \div 15(k_3)$ से भागफल $\bar{21}$ और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{3}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{21}_3$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{18})$ के पाँचवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^8}{18}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{16}) \div 28 (k_4)$ के लिए-

$C.P.\{\bar{6} \quad \bar{6}\}_{2 \quad 11} = \{(\bar{6} * \bar{11}) + (\bar{2} * \bar{6})\} = 78, 78 + 10 * (A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 12) = 78 + 120 = 198$, $198 \div 28$ से भागफल 7 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{2}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 7_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^{10}}{110})$ की गणना- $(-\frac{\theta^{10}}{110}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(\frac{\theta^8}{18}) \div 45 (k_5)$ का लिए

$C.P.\{\bar{6}\}_6 = \bar{6} * 6 = \bar{36}$, का मापांक $36 > \{d_5 = \frac{k_5}{2} = \frac{45}{2} = 22.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= \{ \{ \text{गणना पंक्ति } 0_1 \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} \} + \{ \text{उत्तर पंक्ति } (\frac{\theta^8}{18}) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 1 \} = 0 + 4 + 1 = 5$ के लिए $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $A_5 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4 और 5 के पाँचवें (लाखंश) अंको का योग $= 0 + 50 + \bar{21} + 7 + 0 = 36$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0.6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36$ दशमलव बाद पाँच स्थान तक का आकलन होगा।

(6) A_6 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद पाँचवाँ (दस लाखंश) अंक A_5 का योज्य प्रतिलोम $\bar{A}_5 = \bar{36}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के छटवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ के लिए

$D.P.\{A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4 \ A_5\} = D.P.\{6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36\} = \{(2 * 6 * 36) + (2 * 6 * 15) + 10^2\} = 712, 712 + 10 * (A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 0) = 712 + 0 = 712, 712 \div 6$ से भागफल 119 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{2}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 119_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ के छटवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15 (k_3)$ के लिए

$$C.P.\{\bar{6} \quad \bar{6} \quad \bar{10} \quad \bar{15}\}_{12 \quad 26 \quad 50} = \{(\bar{6} * 50) + (6 * \bar{15}) + (\bar{6} * 26) + (12 * \bar{10})\} = \bar{666},$$

$\bar{666} + 10 * (A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 3) = \bar{666} + \bar{30} = \bar{696}, \bar{696} \div 15 (k_3)$ से भागफल $\bar{46}$ और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{6}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{46}_6$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{18})$ के छटवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^8}{18}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{16}) \div 28 (k_4)$ के लिए-

$$C.P.\{\bar{6} \quad \bar{6} \quad \bar{10}\}_{2 \quad 11 \quad 21} = \{(\bar{6} * \bar{21}) + (\bar{2} * \bar{10}) + (\bar{6} * \bar{11})\} = 212,$$

$212 + 10 * (A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 2) = 212 + 20 = 232, 232 \div 28 (k_4)$

से भागफल 8 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{8}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 8_8 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^{10}}{110})$ के छटवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^{10}}{110}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(\frac{\theta^8}{18}) \div 45 (k_5)$ के लिए

C. P. $\{\frac{\bar{6}}{6}\} = \bar{6} * 6 = \bar{36}$. $\bar{36} \div 45 (k_5)$ से भागफल $\bar{1}$ और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 9} होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_9$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 गणन पंक्ति 6 में $(\frac{\theta^{12}}{!12})$ की गणना- $(\frac{\theta^{12}}{!12}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^{12}}{!8}) \div 66 (k_6)$ के लिए

C. P. $\{\frac{\bar{6}}{1}\} = \bar{6} * \bar{1} = 6$ का मापांक $6 < \{d_6 = \frac{k_6}{2} = \frac{66}{2} = 33\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = $\{ \{ \text{गणना पंक्ति } 0_1 \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} \} + \{ \text{उत्तर पंक्ति } (\frac{\theta^{10}}{!10}) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या} + 2 \} = 0 + 5 + 2 = 7$ के लिए 0 0 0 0 0 0 0_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $A_6 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के छटवें (दसलाखांश) अंको का योग $= 0 + 119 + \bar{46} + 8 + \bar{1} + 0 = 80$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0. 6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36 \ 80$ दशमलव बाद छह स्थान तक का आकलन होगा।

(7) A_7 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद छटवाँ (दसलाखांश) अंक A_6 का योज्य प्रतिलोम $\bar{A}_6 = \bar{80}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{!4}$ के सातवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{!4}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ के लिए

D. P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6\} = \text{D. P. } \{6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36 \ 80\} = \{(2*6*80) + (2*6*36) + (2*10*15)\} = 1692$, $1692 + 10 * (\bar{A}_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{2}) = 1692 + \bar{20} = 1672$, $1672 \div 6$ से भागफल 279 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{2}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 279_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{!6})$ के सातवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{!6}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{!4})\} \div 15 (k_3)$ के लिए

C. P. $\{\frac{\bar{6}}{6} \ \frac{\bar{6}}{12} \ \frac{\bar{10}}{26} \ \frac{\bar{15}}{50} \ \frac{\bar{36}}{119}\} = \{(\bar{6}*119) + (6*\bar{36}) + (\bar{6}*50) + (12*\bar{15}) + (\bar{10}*26)\} = \bar{1670}$

$\bar{1670} + 10 * (\bar{A}_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \bar{6}) = \bar{1670} + \bar{60} = \bar{1730}$, $\bar{1730} \div 15 (k_3)$ से भागफल $\bar{115}$ और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\bar{5}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{115}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{!8})$ के सातवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^8}{!8}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{!6}) \div 28 (k_5)$ का लिए-

C. P. $\{\frac{\bar{6}}{2} \ \frac{\bar{6}}{11} \ \frac{\bar{10}}{21} \ \frac{\bar{15}}{46}\} = \{(\bar{6}*46) + (\bar{2}*15) + (\bar{6}*21) + (\bar{11}*10)\} = 542$,

$540 + 10 * (\bar{A}_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 8) = 542 + 80 = 622$, $622 \div 28 (k_5)$ भागफल 22 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 6 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 22_6 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^{10}}{!10})$ के सातवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^{10}}{!10}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(\frac{\theta^8}{!8}) \div 45 (k_6)$ का लिए

C. P. $\{\frac{\bar{6}}{7} \ \frac{\bar{6}}{8}\} = \{(\bar{6}*8) + (7*\bar{6})\} = \bar{90}$,

$\bar{90} + 10 * (\bar{A}_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 9) = \bar{90} + 90 = 0$, $0 \div 45 (k_6)$ से भागफल 0 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 0 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_0 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 गणन पंक्ति 6 में $(\frac{\theta^{12}}{!12})$ की गणना- $(\frac{\theta^{12}}{!12}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^{12}}{!8}) \div 66 (k_7)$ के लिए

$10 * (A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 6) = 60$, $60 \div 66 (k_7)$ से भागफल 1 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{6}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{16}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $A_7 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के छटवें (दसलाखंश) अंको का योग $= 0+279+\overline{115}+22+0+1=187$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2} = 0.6 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 36 \quad 80 \quad 187$ दशमलव बाद सात स्थान तक का आकलन होगा।

(8) A_8 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0₁ में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद सातवाँ (करोड़ांश) अंक A_7 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_7} = \overline{213}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ कै लिए

$$D.P.\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7\} = D.P.\{6 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 36 \quad 80 \quad 187\} \\ = \{(2*6*187)+(2*6*80)+(2*10*36)+15^2\} = 4159,$$

$4159+10 * (A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \overline{2}) = 4159+\overline{20} = 4139$, $4139 \div 6(k_2)$ से भागफल 690 और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $690\overline{1}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15 (k_3)$ का लिए

$C.P.\{\overline{6} \quad \overline{6} \quad \overline{10} \quad \overline{15} \quad \overline{36} \quad \overline{80}\}_{6 \quad 12 \quad 26 \quad 50 \quad 119 \quad 279} = \{(\overline{6}*279)+(\overline{6}*80)+(\overline{6}*119)+(12*\overline{36})+(\overline{10}*50)+(26*\overline{15})\} = \overline{3990}$, $\overline{3990} + 10 * (A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \overline{5}) = \overline{3990} + \overline{50} = \overline{4040}$, $\overline{4040} \div 15 (k_3)$ से भागफल $\overline{269}$ और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{5}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{2695}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{18})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^8}{18}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{16})\} \div 28 (k_4)$ का लिए-

$$C.P.\{\overline{6} \quad \overline{6} \quad \overline{10} \quad \overline{15} \quad \overline{36}\}_{\overline{2} \quad \overline{11} \quad \overline{21} \quad \overline{46} \quad \overline{115}} = \{(\overline{6}*115)+(2*\overline{36})+(\overline{6}*46)+(\overline{11}*15)+(\overline{10}*21)\} = 1413,$$

$1413+10*(A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \overline{6}) = 1413+60 = 1473$, $1473 \div 28 (k_4)$ से भागफल 53 और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{11}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $53\overline{11}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^{10}}{110})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^{10}}{110}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(\frac{\theta^8}{18})\} \div 45 (k_5)$ का लिए

$$C.P.\{\overline{6} \quad \overline{6} \quad \overline{10}\}_{\overline{7} \quad \overline{8} \quad \overline{22}} = \{(\overline{6}*22)+(7*\overline{10})+(\overline{6}*8)\} = \overline{220},$$

$\overline{216} + 10 * (A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 0) = \overline{220} + 0 = \overline{220}$, $\overline{220} \div 45 (k_5)$ से भागफल $\overline{5}$ और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{5}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{55}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 गणन पंक्ति 6 में $(\frac{\theta^{12}}{112})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^{12}}{112}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^{10}}{110})\} \div 66 (k_6)$ का लिए

$$C.P.\{\overline{6} \quad \overline{6}\}_{\overline{1} \quad \overline{0}} = \{(\overline{6}*0)+(\overline{1}*6)\} = 6, \quad 6+10*\{\text{दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } \overline{6}\} = 6+\overline{60} = \overline{54},$$

$\overline{54} \div 66 (k_6)$ से भागफल $\overline{1}$ और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $\overline{12}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{1}_{12}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $A_8 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के छठवें (दसलाखंश) अंको का योग $= 0+690+\overline{269}+53+\overline{5}+\overline{1}=468$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\frac{\theta^2}{2}=0.6610153680187468$ दशमलव बाद आठ स्थान तक का आकलन होगा।

(9) A_9 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0₁ में $(-\frac{\theta^2}{2})$ के लिए दशमलव बाद सातवाँ (करोड़ांश) अंक A_8 का योज्य प्रतिलोम $\overline{A_8} = \overline{530}$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^4}{14}$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^4}{14}) = \{\frac{\theta^2}{2}\}^2 \div 6 (k_2)$ के लिए

$$D. P.\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8\} = D. P.\{6610153680187468\} \\ = \{(2*6*468)+(2*6*187)+(2*10*80)+(2*15*36)\} = 10540,$$

$10540+10*(A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 1) = 10540+\overline{10} = 10550, 10550 \div 6 (k_2)$ से भागफल 1758 और A_9 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1758_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^6}{16})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^6}{16}) = \{(-\frac{\theta^2}{2}) * (\frac{\theta^4}{14})\} \div 15 (k_3)$ का लिए

$$C.P.\{\overline{6} \overline{6} \overline{10} \overline{15} \overline{36} \overline{80} \overline{187}\}_{6122650119279690} = \{(\overline{6}*690)+(\overline{6}*187)+(\overline{6}*279)+(12*\overline{80})+(\overline{10}*119)+ \\ (26*\overline{36})+(\overline{15}*50)\} = \overline{10772},$$

$\overline{10772}+10*(A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 5) = \overline{10772}+\overline{50}=\overline{12356}, \overline{10822} \div 15 (k_3)$ से भागफल $\overline{721}$ और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 7 होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{721}_7$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^8}{18})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^8}{18}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^6}{16})\} \div 28 (k_4)$ का लिए-

$$C. P.\{\overline{6} \overline{6} \overline{10} \overline{15} \overline{36} \overline{80}\}_{2112146115269} = \{(\overline{6}*269)+(2*\overline{80})+(\overline{6}*115)+(\overline{11}*36)+(\overline{10}*46)+(\overline{15}*50)\},$$

$3635+10*(A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 11) = 3635+\overline{110} = 3525, 3525 \div 28 (k_4)$ से भागफल 126 और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 3 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 126_3 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^{10}}{110})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(-\frac{\theta^{10}}{110}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(\frac{\theta^8}{18})\} \div 45 (k_5)$ का लिए

$$C. P.\{\overline{6} \overline{6} \overline{10} \overline{15}\}_{782253} = \{(\overline{6}*53)+(6*\overline{15})+(\overline{6}*22)+(8*\overline{10})\} = \overline{620},$$

$\overline{620}+10*(A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 5) = \overline{620}+\overline{50} = \overline{670}, \overline{670} \div 45 (k_5)$ से भागफल $\overline{15}$ और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 5 होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\overline{15}_5$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 गणन पंक्ति 6 में $(\frac{\theta^{12}}{112})$ के आठवाँ अंक की गणना- $(\frac{\theta^{12}}{112}) = \{(-\frac{\theta^2}{2})(-\frac{\theta^{10}}{110})\} \div 66 (k_6)$ का लिए

$$C. P.\{\overline{6} \overline{6} \overline{10}\}_{105} = \{(\overline{6}*5)+(\overline{1}*10)+(\overline{6}*0)\} = 40,$$

$40+10*\{दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 12\} = 40+120=160, 160 \div 66 (k_6)$ से भागफल 2 और A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 28 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 2_{28} दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $A_9 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के छठवें (दसलाखंश) अंको का योग $= 0+1758+\overline{721}+126+\overline{15}+2=1150$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

$$\text{इस प्रकार } \frac{\theta^2}{2} = 0.6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36 \ 80 \ 187 \ 468 \ 1150$$

$$= 0.6 \ 6 \ 10 \ 15 \ 36 \ 80 \ 187 \ 468 \ 1150$$

= 0.671964530 दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन है ।

$$\theta = \sqrt{2 * (0.671964530)} = \sqrt{1.343929060}$$

= 1.159279543 कम्प्यूकृत हल मान 1.159279481 में नौ स्थान तक के निकटतर है।

$$\cos^{-1}(0.4) = \theta \Rightarrow \cos \theta = 0.4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore m\angle \theta \text{ का त्रिभुजांक } [x \ y \ z] = [2 \ \dots \ 5] = [2 \ \sqrt{5^2 - 2^2} \ 5] = [2 \ \sqrt{21} \ 5] \text{ से}$$

$$m\angle \theta \text{ का बीजांक } [p \ q] = [(z+x) \ y] = [(5+2) \ \sqrt{21}] = [7 \ \sqrt{21}] = [\sqrt{7} \ \sqrt{3}]$$

$$\therefore m\angle \theta = q * \left[\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + q^2} \right] = \sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{3})^2} \right] = \sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{7+3} \right] = \sqrt{3} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\sqrt{7}}{10} \right] =$$

$$= 1.732051 [0.377964 + 0.264575] = 1.732051 * 0.642539 = 1.112910 \text{ रेडियन के निकटतर होगा।}$$

[3] यदि कोण माप इकाई रेडियन में $m\angle x = x^r$ दर्शित हो तो $\tan x^r = \theta \Rightarrow x = \tan^{-1} \theta$ के प्रति $\tan x^r$ का हल आकलन समिका

$$\tan^{-1} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \frac{\theta^9}{9} - \frac{\theta^{11}}{11} + \dots - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक से}$$

$$\tan x^r = \theta = \tan^{-1} \theta + \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} - \frac{\theta^9}{9} + \frac{\theta^{11}}{11} - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक होगा।}$$

उदाहरण ■ $\tan(0.336)^r$ का आकलन कीजिए।

हल— माना कि $\tan(0.336)^r = \theta \therefore \tan^{-1} \theta = 0.336 = 0.344$ के लिए आकलन समिका—

$$\tan x^r = \theta = \tan^{-1} \theta + \frac{\theta^3}{3} - \frac{\theta^5}{5} + \frac{\theta^7}{7} - \frac{\theta^9}{9} + \frac{\theta^{11}}{11} - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक होगा।}$$

$$= 0.344 + \frac{(0.344)^3}{3} - \frac{(0.344)^5}{5} + \frac{(0.344)^7}{7} - \dots + \dots - \dots + \dots - \dots \infty \text{ पद तक होगा। जिसके प्रति}$$

विश्लेषित आकलन तालिका निम्नानुसार प्राप्त कीजिए।

विश्लेषित व्याख्या— पक्तिवार क्रमागत शून्य की स्थान संख्या एवं इसके बाद की के स्थानों के अंकों का निर्धारण —

उत्तरांक पंक्ति θ में r वें क्रम का उत्तरांक A_r दर्शित करने के तारतम्य में क्रमशः—

(1) A_1 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 उ. प. 1 में $\tan^{-1} \theta = 0.336 = 0.344$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 $A_1 =$ प्रक्रम 1 के हल मान का दशमलव बाद प्रथम अंक 3 दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.3$ दशमलव बाद एक स्थान तक का आकलन होगा।

(2) A_2 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के वर्तमान का प्रथम (दशांश) अंक — D.P. $\{A_1\} = \text{D.P. } \{3\} = (3*3) = 9 = 1\bar{1}$

को $1\bar{1}$ दर्ज करने पर 1 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के वर्तमान का योज्य प्रतिलोम का प्रथम (दशांश) अंक $\bar{1}$ दर्ज कीजिए। $1\bar{1}$ से $\bar{1}$ A_2 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{3}$ की गणना— $\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2 * \theta}{3}$ के लिए—

1• C.P. $\left\{ \frac{1}{3} \right\} = (1*3) = 3$ का मापांक $3 > \left\{ d_2 = \frac{k_2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \right\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_1) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + (θ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0+0+1] = के लिए 0 दर्ज कीजिए।

2• C. P. $\left\{\frac{1}{3}\right\} = (1*3) = 3$, $3 \div 3 (k_2)$ से भागफल 1 और सयुक्त कर 1_0 दर्ज कीजिए।

A_3 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 0 होगा। जिन्हे

प्रक्रम 3 $A_2 =$ पंक्ति 1 और 2 के द्वितीय (शतांश) अंको का योग $= 4+1=5$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए। इस प्रकार $\theta = 0.35$ दशमलव बाद दो स्थान तक का आकलन होगा।

आकलन गणन तालिका

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार दशमलव बाद 6 स्थान के लिए गणना
0_1	θ^2	0. 1_1 2_0 2_1 0_2 1_3
0_2	$-\theta^2$	0. 1 2 2 0 1
उ. पं. 1	$\tan^{-1}\theta$	0. 3 4 4 0 0 0
उ. पं 2	$\frac{\theta^3}{3}$ के लिए $k_2 = 3$	0. 0 1_0 4_1 2_1 1_2 7_1
उ. पं 3	$-\frac{\theta^5}{5}$ के लिए $k_3 = 5$	0. 0 0 1_2 0_2 1_1 6_1
उ. पं 4	$\frac{\theta^7}{7}$ के लिए $k_4 = 7$	0. 0 0 0 1_2 2_4 8_1
उ. पं 5	$-\frac{\theta^5}{9}$ के लिए $k_3 = 9$	0. 0 0 0 0 1_1 2_2
उ. पं 6	$\frac{\theta^7}{11}$ के लिए $k_4 = 11$	0. 0 0 0 0 0 1_2
$\tan x^r = \theta$		0. 3 5 1 3 3 2 A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 $= 0.349268$ दशमलव बाद छह स्थान के लिए आकलन होगा। जो कम्प्यूटर से प्राप्त हल मान में नव स्थान तक 0.3 4 9 2 9 4 2 6 9 4 है।

(3) A_3 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का दूसरा (शतांश) अंक $- D.P.\{A_1 A_2\} = D.P.(3 5) = 2*(3*5) = 30$, $30+10*$ { पंक्ति 0_1 में A_3 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल 1 } $= 30+10 = 40$ को 2_0 दर्शित करने पर 2 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का दूसरा (शतांश) अंक $- 2$ दर्ज कीजिए। 2_0 से 0 A_4 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{3}$ की गणना $-\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2 * \theta}{3}$ के लिए

C. P. $\left\{\frac{1}{3} \frac{2}{5}\right\} = \{(1*5) + (3*2)\} = 11$, $11+10*$ { पंक्ति 2 में A_3 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 0 } $= 11+0 = 11$, $11 \div 3 (k_2)$ से भागफल 4 और A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 4_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{5})$ की गणना $-(\frac{\theta^5}{5}) = \{(-3\theta^2) * \frac{\theta^3}{3}\} \div 5$ के लिए-

1• 0_2 और उ. पं 2 से $3^* C. P. \{\bar{1}_1\} = 3^*(\bar{1} * 1) = \bar{3}$, का मापांक $3 > \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{7}{2} = 2.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_3) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + $(\frac{\theta^3}{3})$ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या + 1] = [0 + 1 + 1] = 2 के लिए 0 0 दर्ज कीजिए ।

2• $3^* C. P. \{\bar{1}_1\} = 3^*(\bar{1} * 1) = \bar{3}$ $\bar{3} \div 5 (k_3)$ से भागफल $\bar{1}$ और A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_2$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $A_3 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के तीसरे (हजारांश) अंको का योग = $\bar{4} + 4 + \bar{1} = \bar{1}$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.35\bar{1}$ दशमलव बाद तीन स्थान तक का आकलन होगा।

(4) A_4 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का तीसरा (हजारांश) अंक – D. P. $\{A_1 A_2 A_3\} = D. P. (35\bar{1}) = \{2^*(3^*\bar{1}) + 5^2\} = 19$, $19 + 10^* \{$ पंक्ति 0_1 में A_4 दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल $0\} = 19 + 0 = 19$ को 2_1 दर्शित करने पर 2 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का दूसरा (शतांश) अंक 2 दर्ज कीजिए। 2_1 से $\bar{1}$ A_5 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{3}$ की गणना – $\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2 * \theta}{3}$ के लिए

C. P. $\{\frac{1}{3} \frac{2}{5} \frac{2}{1}\} = \{(1^* \bar{1}) + (3^* 2) + (2^* 5)\} = 15$, $15 + 10^* \{$ पंक्ति 2 में A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}\} = 15 + \bar{10} = 5$, $5 \div 3 (k_2)$ से भागफल 2 और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 2_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{5})$ की गणना – $(-\frac{\theta^5}{5}) = \{(-3\theta^2) * \frac{\theta^3}{5}\} \div 5 (k_3)$ के लिए –

पंक्ति 0_2 और उ. पं 2 से $3^* C. P. \{\bar{1}_1 \bar{2}_4\} = 3^*\{(\bar{1} * 4) + (1 * 2)\} = \bar{18}$, $\bar{18} + 10^* \{$ पंक्ति 3 में A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $2\} = \bar{18} + 20 = 2$, $2 \div 5$ से भागफल 0 और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^7}{7})$ की गणना – $(\frac{\theta^7}{7}) = 5 * \{(-\theta^2) * \frac{\theta^5}{5}\} \div 7 (k_4)$ के लिए –

1• पंक्ति 0_2 और उ. पं 3 से $5^* C. P. \{\bar{1}_1\} = 5^*(\bar{1} * \bar{1}) = 5$ का मापांक $5 > \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{7}{2} = 3.5\} \therefore$ दशमलव बाद

प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_4) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + $(\frac{\theta^5}{5})$ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या + 1] = [0 + 2 + 1] = 3 के लिए 0 0 0 दर्ज कीजिए ।

2• $5^* C. P. \{\bar{1}_1\} = 5^*(\bar{1} * \bar{1}) = 5$, $5 \div 7 (k_4)$ से भागफल 1 और A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_4 =$ पंक्ति 1, 2, 3 और 4 के चौथे (दस हजारांश) अंको का योग = $0 + 2 + 0 + 1 = 3$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.35\bar{1}3$ दशमलव बाद तीन स्थान तक का आकलन होगा।

(5) A_5 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का चौथा (दसहजारांश) अंक –

D. P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4\} = D. P. (3 \ 5 \ 1 \ 3) = \{2*(3*3) + 2*(5*1)\} = 8$, $8+10*\{ \text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 1 \} = 8+10 = 18 = 02$ को 0_2 दर्शित करने पर 0 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का दूसरा (शतांश) अंक– 0 दर्ज कीजिए। 0_2 से 2 A_6 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{3}$ की गणना– $\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2*\theta}{3}$ के लिए

$$C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1*3) + (3*0) + (2*1) + (5*2)\} = 11,$$

$11+10*\{ \text{पंक्ति 2 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 1 \} = 11+10 = 21$, $21 \div 3 (k_2)$ से भागफल 1 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{5})$ की गणना– $(-\frac{\theta^5}{5}) = \{(-3\theta^2)*\frac{\theta^3}{3}\} \div 5 (k_3)$ के लिए–

पंक्ति 0_2 और उ. पं 2 से $3*C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3*\{(\bar{1}*2) + (1*\bar{2}) + (\bar{2}*4)\} = 24, 18+10*\{ \text{पंक्ति 3 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 2 \} = 24+20 = 44$, $44 \div 5 (k_3)$ से भागफल 1 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^7}{7})$ की गणना– $(\frac{\theta^7}{7}) = 5*\{(-\theta^2)*\frac{\theta^5}{5}\} \div 7 (k_4)$ के लिए–

$5*C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\} = 5*\{(\bar{1}*0) + (\bar{1}*2)\} = 10$, $10+10*\{ \text{पंक्ति 2 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 2 \} = 10+20 = 30$, $30 \div 7$ से भागफल 2 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 4 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 2_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(\frac{\theta^9}{9})$ की गणना– $(\frac{\theta^9}{9}) = 7*\{(-\theta^2)*\frac{\theta^7}{7}\} \div 9 (k_5)$ के लिए–

1• पंक्ति 0_2 और उ. पं 4 से $7*C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 7*(\bar{1}*1) = \bar{7}$ का मापांक $7 > \{d_5 = \frac{k_5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5\} \therefore$ दशमलव बाद

प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + $(\frac{\theta^7}{7})$ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + 1] = [0+3+1] = 4 के लिए 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2• $7*C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 7*(\bar{1}*1) = \bar{7}$, $\bar{7} \div 9 (k_5)$ से भागफल 1 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा।

जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 $A_5 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4 और 5 के पाँचवे (लाखांश) अंको का योग = $0+1+\bar{1}+\bar{2}+\bar{1} = \bar{3}$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.3 \ 5 \ 1 \ 3 \ 3$ दशमलव बाद तीन स्थान तक का आकलन होगा।

(6) A_6 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का पाँचवाँ (लाखांश) अंक –

D. P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5\} = D. P. (3 \ 5 \ 1 \ 3 \ 3) = \{2*(3*3) + 2*(5*3) + (\bar{1})^2\} = 13$, $13+10*\{ \text{पंक्ति } 0_1 \text{ में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में प्राप्त शेषफल } 2 \} = 13+20 = 33$ को 1_3 करने पर 1 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक θ के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम का दूसरा (शतांश) अंक– 1 दर्ज कीजिए। 1_3 से 3 A_6 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $\frac{\theta^3}{3}$ की गणना- $\frac{\theta^3}{3} = \frac{\theta^2 \cdot \theta}{3}$ के लिए

C. P. $\left\{ \begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{smallmatrix} \right\} = \{(1 \cdot 3) + (3 \cdot 1) + (2 \cdot 3) + (5 \cdot 0) + (2 \cdot 1)\} = \bar{2}$, $\bar{2} + 10 \cdot \{ \text{पंक्ति 2 में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{2} \} = \bar{2} + \bar{20} = \bar{22}$, $\bar{22} \div 3 (k_2)$ से भागफल $\bar{7}$ और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{7}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $(-\frac{\theta^5}{5})$ की गणना- $(-\frac{\theta^5}{5}) = \{(-3\theta^2) * \frac{\theta^3}{3}\} \div 5$ के लिए-

पंक्ति 0_2 और उ. पं 2 से $3 * C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = 3 * \{(\bar{1} * 1) + (1 * 0) + (\bar{2} * 2) + (4 * \bar{2})\} = \bar{39}$,

$\bar{39} + 10 * \{ \text{पंक्ति 3 में } A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 1 \} = \bar{39} + 10 = \bar{29}$, $\bar{29} \div 5 (k_3)$ से भागफल $\bar{6}$ और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 होगा। जिन्हे सयुक्त कर $\bar{6}_1$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $(\frac{\theta^7}{7})$ की गणना- $(\frac{\theta^7}{7}) = 5 * \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^5}{5})\} \div 7 (k_4)$ के लिए-

$5 * C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = 5 * \{(\bar{1} * \bar{1}) + (\bar{1} * \bar{2}) + (\bar{2} * 0)\} = 15$, $15 + 10 * \{ \text{पंक्ति 4 में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 4 \} = 15 + 40 = 55$, $55 \div 7$ से भागफल 8 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 8_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $(-\frac{\theta^9}{9})$ की गणना- $(-\frac{\theta^9}{9}) = 7 * \{(-\theta^2) * \frac{\theta^7}{7}\} \div 9 (k_5)$ के लिए-

$7 * C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = 7 * \{(\bar{1} * \bar{2}) + (1 * 2)\} = 0$, $0 + 10 * \{ \text{पंक्ति 5 में } A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 2 \} = 0 + 20 = 20$, $20 \div 9 (k_5)$ से भागफल 2 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 6 गणन पंक्ति 6 में $(\frac{\theta^{11}}{11})$ की गणना- $(\frac{\theta^{11}}{11}) = 9 * \{(-\theta^2) * (-\frac{\theta^9}{9})\} \div 11 (k_6)$ के लिए-

1. पंक्ति 0_2 और उ. पं 5 से $9 * C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 9 * (\bar{1} * \bar{1}) = 9$ का मापांक $9 > \{d_6 = \frac{k_6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या = [(पंक्ति (0_2) के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या) + $(\frac{\theta^9}{9})$ का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या + 1] = [0 + 4 + 1] = 5 के लिए 0 0 0 0 0 दर्ज कीजिए।

2. $9 * C. P. \left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 9 * (\bar{1} * \bar{1}) = 9$, $9 \div 11 (k_6)$ से भागफल 1 और A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{2}$ होगा। जिन्हे सयुक्त कर 1_2 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 7 $A_6 =$ पंक्ति 1, 2, 3, 4, 5 और 6 के छठवे (दस लाखांश) अंको का योग $= 0 + \bar{7} + \bar{6} + 8 + 2 + 1 = \bar{2}$ θ का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.3\ 5\ \bar{1}\ 3\ \bar{3}\ \bar{2} = 0.3\ 4\ 9\ 2\ 6\ 8$ दशमलव बाद छह स्थान तक का आकलन होगा।

जो कम्प्यूकृत हल मान में नव स्थान तक $0.3\ 4\ 9\ 2\ 9\ 4\ 2\ 6\ 9\ 4$ है।

विवेचना

समतल या सरल और अतिपरवलय त्रिकोणमिति के लिए प्रयुक्त समीकरण श्रेढी विस्तार के ही रूप में है, जिसके हल हेतु आकलन की क्रिया-संक्रिया का उपरोक्त विश्लेषण विधि प्रस्तुति आधुनिक गणित अध्ययन में नहीं है। उक्त आकलन विधि में प्रमुखता से उनागर संख्यांकन पद्धति गुणन की द्वन्दयोगा (युध्दक) D.P. एवं ऊर्ध्वतिर्यक (खड़ी एव तिरछी) C.P. और संकलन-व्यवकन (जोड़ना-घटाना) का

अनुप्रयोग है। वस्तुतः आध्यात्मिक अध्ययन संस्थान अमोद कुंज रुड़की में संचालित वैदिक गणित अध्ययन के अन्तर्गत जुटाया गया है। जिसके अनुसार प्रथम अंक को महत्वपूर्ण अभिव्यक्ति का माध्यम मानते हुए दूसरा अभिव्यंजक अंक प्राप्त करते हैं। फिर आगे के परवर्ती या बाद आने वाले अभिव्यंजक अंक पूर्ववर्ती या जो पहले से ही प्राप्त है का उपयोग कर प्राप्त करते हैं। यह अभिगम $\sin^{-1}x$ श्रेणी विसर में $\sin x$ के समान ही उपयोग किया जाता है। ऐसी ही प्रक्रिया $\cos^{-1}x, \tan x, \sinh^{-1}x, \cosh^{-1}x, \tanh x$ के विस्तार में अनुप्रयोग दर्शित कर सकते हैं। अभ्यास उपरांत दशमलव बाद मानक स्थान पर अभीष्ट हल सरिणी दर्शित कराने दक्ष होता पायेंगे।

.....13.....

अध्याय 14 सर्वोच्च समीकरण TRANSCENDENTAL EQUATION

अध्याय 11 एवं 12 में $\text{Sin}x, \text{Cos}x, \text{Tan}^{\bar{1}}x, \text{Sin}hx, \text{Cosh}x, \text{Tanh}^{\bar{1}}x, \text{Sin}^{\bar{1}}x \text{Cos}^{\bar{1}}x, \text{Tan}x, \text{Sin}h^{\bar{1}}x, \text{Cos}h^{\bar{1}}x$ $\text{Tan}hx$ के प्रति प्राप्त केपलर एवं ग्रेगोरी समीकरण का हलमान विश्लेषण विधि प्रस्तुत किया गया है। जिन्हे आत्मसात कर गणित विज्ञान की सर्वोच्च शाखा खगोल(अंतरिक्ष) एवं भौतिक ज्योतिष विज्ञान अध्ययन में प्रयुक्त केपलर समीकरण निम्नानुसार है। जिसका हलमान प्राप्त किया जा सकता है। अवलोकित कीजिए।

खगोल(अंतरिक्ष) एवं भौतिक ज्योतिष विज्ञान अध्ययन में प्रयुक्त केपलर समीकरण

- यदि 1• ग्रहपथ में किसी नक्षत्र का मध्यवर्ती उत्केन्द्रक का माप $= M^r$ रेडियन
2• पृथ्वी की उत्केन्द्रकता माप $= E^r$ रेडियन
3• उक्त नक्षत्र की पृथ्वी कक्ष में उत्केन्द्रकता माप $= e^r$ रेडियन हो तो—

प्रयुक्त केपलर समीकरण $M^r = E^r - e^r \text{Sin}E^r \Rightarrow E^r = M^r + e^r \text{Sin}E^r$ को सर्वोच्च समीकरण कहते हैं। जिसे हल करने का तात्पर्य M^r, E^r और e^r में से किन्हीं दो के ज्ञात मानों के प्रति तीसरे का मान प्राप्त करना है। अध्याय अध्ययन उद्देश्य मात्र उक्त समीकरण के हल में प्रयुक्त गुणन सेक्रिया में ऊर्ध्व तिर्यक (C.P.) एवं द्वन्द योगा (D.P.) विधि के अनुप्रयोग को सरलता प्रदान करने उनागार संख्ययंकन का अनुप्रयोग लाभ दर्शित कराना है। पूर्ण विश्लेषित हलित उदाहरण अवलोकित करें।

उदाहरण ■ यदि ग्रहपथ में किसी नक्षत्र का मध्यवर्ती उत्केन्द्रकता माप 0.30303 रेडियन तथा उक्त नक्षत्र की पृथ्वी कक्ष में उत्केन्द्रकता माप 0.016722 रेडियन हो तो पृथ्वी का उत्केन्द्रकता माप ज्ञात कीजिए।

हल— प्रश्नानुसार ज्ञात है— ग्रहपथ में किसी नक्षत्र का मध्यवर्ती उत्केन्द्रकता माप $M^r = 0.30303$ रेडियन

उक्त नक्षत्र की पृथ्वी कक्ष में उत्केन्द्रकता माप $e^r = 0.016722 = 0.02\bar{3}\bar{3}22$ रेडियन

ज्ञात करना है— पृथ्वी उत्केन्द्रकता माप $E^r = ?$ रेडियन

समीकरण $M^r = E^r - e^r \text{Sin}E^r$ में ज्ञात मान प्रतिस्थाति करने पर

$$0.30303 = E^r - (0.02\bar{3}\bar{3}22) * \text{Sin}E^r$$

$\therefore E^r = 0.30303 + (0.02\bar{3}\bar{3}22) * \{E^r - \frac{(E^r)^3}{!3} + \frac{(E^r)^5}{!5} - \frac{(E^r)^7}{!7} + \frac{(E^r)^9}{!9} - \dots + \dots - \dots + \dots \infty \text{ पद तक} \}$ के हल विश्लेषित हल तालिका निम्नानुसार अवलोकित कीजिए।

(1) A_1 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणना पंक्ति 1 में $M^r = 0.30303 = 0.303030000$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 0.303030000 के दशांश अंक 3 को उत्तर पंक्ति E^r के प्रति दशमलव बाद प्रथम अंक (दशांश) A_1 सुनिश्चित कीजिए। इस प्रकार $E^r = 0.3$ दशमलव बाद 1 स्थान तक का आकलन होगा।

(2) A_2 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_1 में $e^r = 0.016722 = 0.02\bar{3}\bar{3}2200$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का प्रथम (दशांश) अंक D.P. $\{A_1\} = D.P. \{3\} = (3*3) = 9 = 1\bar{1}$ को 1_1 दर्शित करने पर 1 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का प्रथम (दशांश) अंक -1 दर्ज कीजिए। 1_1 से $\bar{1}$ A_3 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना— C.P. $\{\frac{2}{3}\} = (2*3) = 6 = 1\bar{4}$ को 1_4 दर्ज कीजिए। 1_4 से $\bar{4}$ A_3 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। दशमलव संख्या गुणा नियम से दशमलव बाद क्रमागत 0 की स्थान संख्या 1 होगा। अतः दशमलव बाद दो स्थान तक 01_4 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $A_2 =$ पंक्ति 1 और 2 के द्वितीय (शतांश) अंको का योग $= 0+1 = 1$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $\theta = 0.31$ दशमलव बाद दो स्थान तक का आकलन होगा।

(3) A_3 दर्शित करने के तारतम्य में

विश्लेषित हल तालिका

गणन पंक्ति r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	नियमानुसार गणना
0_1	$e^r =$	0. 0 2 $\bar{3}$ $\bar{3}$ 2 2 0 0 0
0_2	$(E^r)^2$	0. 1_1 0_4 $\bar{5}_1$ $\bar{1}_4$ 2_4 7_2 8_4 $\bar{6}_2$
0_3	$-(E^r)^2$	0. $\bar{1}$ 0 5 1 $\bar{2}$ $\bar{7}$ $\bar{8}$ 6
1	M^r	0. 3 0 3 0 3 0 0 0 0
2	$e^r * E^r$	0. 0 1_4 $\bar{5}_3$ 1_4 5_1 2_4 1_2 $\bar{4}_0$ 5_4
3	$\left\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\right\}$ के लिए $k_2 = 2*3=6$	0. 0 0 0_1 $\bar{1}_1$ 2_2 $\bar{1}_3$ $\bar{6}_2$ 5_2 4_0
4	$\left\{\frac{e^r * (E^r)^5}{!5}\right\}$ के लिए $k_3 = 4*5=20$	0. 0 0 0 0 0_1 1_{10} $\bar{5}_1$ 0_8 4_4
5	$\left\{-\frac{e^r * (E^r)^7}{!7}\right\}$ के लिए $k_4 = 6*7=42$	0. 0 0 0 0 0 0 0_1 0_{10} 2_{16}
E^r का हल मान		0. 3 1 $\bar{2}$ 0 10 2 $\bar{10}$ 1 $\bar{15}$ A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7 A_8 A_9 $= 0.308101025$ दशमलव बाद नौ स्थान तक का आकलन है।

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का दूसरा (शतांश) अंक –

D.P. $\{A_1 A_2\} = D.P. \{3 1\} = 2*(3*1)=6, 6+10*\{A_3 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } \bar{1}\} = 6+10 = \bar{4} = 0\bar{4}$ को 0_4 दर्शित करने पर 0 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का दूसरा (शतांश) अंक 0 दर्ज कीजिए। 0_4 से $\bar{4}$ A_4 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना–

C.P. $\left\{\frac{2}{3} \frac{\bar{3}}{1}\right\} = \{(2*1) + (3*\bar{3})\} = \bar{7}, \bar{7} + 10*\{A_3 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } \bar{4}\} = \bar{7} + \bar{40} = \bar{47} = 5\bar{3}$ को 5_3 दर्ज कीजिए। 5_3 से 3 A_4 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद तीन स्थान तक $0.1_4 5_3$ दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\left\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\right\}$ की गणना– $\left\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\right\} = [(e^r * E^r)\{-(E^r)^2\}] \div 6(k_2)$ के लिए–
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से–

1• C.P. $\left\{\frac{\bar{1}}{1}\right\} = (\bar{1}*1) = 1$ का मापांक $1 < \{d_2 = \frac{k_2}{2} = \frac{6}{2} = 3\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= [(\text{पंक्ति } (0_3) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + (\text{पंक्ति 2 का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + 2] = [0+1+2] = 3$ के लिए 000_1 दर्ज कीजिए।

2• 0_1 से $\bar{1}$ A_4 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद तीन स्थान तक 000_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 4 $A_3 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के तीसरे (हजारांश) अंको का योग $= 3 + \bar{5} + 0 = \bar{2}$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.31\bar{2}$ दशमलव बाद 3 स्थान तक का आकलन होगा।

(4) A_4 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का तीसरा (हजारांश) अंक – D.P. $\{A_1 A_2 A_3\} =$ D.P. $\{31\bar{2}\} = \{2*(3*\bar{2}) + 1^2\} = \bar{11}$, $\bar{11} + 10*\{A_4$ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $\bar{4}\} = \bar{11} + \bar{40} = \bar{51} =$ को $\bar{51}$ दर्शित करने पर $\bar{5}$ होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का तीसरा (हजारांश) अंक 5 दर्ज कीजिए। $\bar{51}$ से $\bar{1}$ A_5 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना–

C. P. $\{\bar{2} \ \bar{3} \ \bar{3}\}_1 = \{(2*\bar{2}) + (3*\bar{3}) + (\bar{3} * 1)\} = \bar{16}, \bar{7} + 10*\{A_4$ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $3\} = \bar{16} + 30 = 14$ को 1_4 दर्ज कीजिए। 1_4 से 4 A_5 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद चार स्थान तक $0.1_4\bar{5}_31_4$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\}$ की गणना– $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\} = [(e^r * E^r)\{-(E^r)^2\}] \div 6(k_2)$ के लिए–
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से–

C. P. $\{\bar{1} \ 0\}_1 = \{(\bar{1}*\bar{5}) + (1*0)\} = 5, +10*\{A_4$ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{1}\} = 5 + \bar{10} = \bar{5}$, $\bar{5} \div 6(k_2)$ से भागफल $\bar{1}$ तथा A_5 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा 1 होगा जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_1$ दर्ज कीजिए।
अतः दशमलव बाद चार स्थान तक $0.00\bar{0}_1\bar{1}_1$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\}$ की गणना– $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\} = [\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\}\{-(E^r)^2\}] \div 20$ के लिए–
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से–

1• C. P. $\{\bar{1}\}_1 = (\bar{1}*\bar{1}) = 1$ का मापांक $1 < \{d_3 = \frac{k_3}{2} = \frac{20}{2} = 10\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= [(\text{पंक्ति } 0_3) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}] + (\text{पंक्ति 3 का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + 2 = [0 + 3 + 2] = 5$ के लिए 0.0000_1 दर्ज कीजिए।

2• 0_1 से 1 A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद पाँच स्थान तक 0.0000_1 दर्ज कीजिए।

प्रक्रम 5 $A_4 =$ पंक्ति 1, 2 और 3 के चौथे (दस हजारांश) अंको का योग $= 0 + \bar{1} + 1 + 0 = 0$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.31\bar{2}0$ दशमलव बाद 4 स्थान तक का आकलन होगा।

(5) A_5 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का चौथा (दसहजारांश) अंक – D.P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4\} =$ D.P. $\{31\bar{2}0\} = \{2*(3*0) + 2*(1*\bar{2})\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10*\{A_5$ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $\bar{1}\} = \bar{4} + \bar{10} = \bar{14}$ को $\bar{1}_4$ दर्शित करने पर $\bar{1}$ होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का चौथा (दसहजारांश) अंक – 1 दर्ज कीजिए। $\bar{1}_4$ से $\bar{4}$ A_6 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना–

C. P. $\{ \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{smallmatrix} \} = \{(2*0) + (3*2) + (3*2) + (1*3)\} = 9, 9 + 10* \{ A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल 4} \}$
 $= 9 + 40 = 49 = 5\bar{1}$ को 5_1 दर्ज कीजिए। 5_1 से $\bar{1}$ A_6 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद पाँच स्थान तक $0\bar{1}_4 \bar{5}_3 \bar{1}_4 \bar{5}_1$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \}$ की गणना- $\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \} = [(e^r * E^r) \{ -(E^r)^2 \}] \div 6 (k_2)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से-

C. P. $\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 & 5 \\ 1 & \bar{5} & 1 \end{smallmatrix} \} = \{ (\bar{1}*1) + (1*5) + (0*5) \} = 4, 4 + 10 * \{ A_5 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1} \} = 4 + 10 = 14, 14 \div 6 (k_2)$ से भागफल 2 तथा A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा 2 होगा जिन्हे सयुक्त कर 2_2 दर्ज कीजिए।

अतः दशमलव बाद पाँच स्थान तक $000\bar{1}_1 \bar{1}_1 2_2$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{ \frac{e^r * (E^r)^5}{!5} \}$ की गणना- $\{ \frac{e^r * (E^r)^5}{!5} \} = [\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \} \{ -(E^r)^2 \}] \div 20 (k_3)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से-

A_4 दर्शित करने के तारतम्य में दर्ज 00000_1 से पाँचवाँ अंक 0 और A_6 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 प्राप्त है।
अतः दशमलव बाद पाँच स्थान तक 00000_1 दर्ज होगा।

प्रक्रम 5 $A_5 =$ पंक्ति 1, 2 3 और 4 के पाँचवें (लाखांश) अंको का योग $= 3+5+2+0+0=10$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.31\bar{2}010$ दशमलव बाद 5 स्थान तक का आकलन होगा।

(6) A_6 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का पाँचवाँ (लाखांश) अंक - D. P. $\{ A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 \} =$
D. P. $\{ 3 \bar{1} \bar{2} 0 10 \} = \{ 2*(3*10) + 2*(1*0) + \bar{2}^2 \} = 64, 64 + 10* \{ A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल 4} \}$
 $= 64 + 40 = 24$ को 2_4 दर्शित करने पर 2 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{ -(E^r)^2 \}$ का पाँचवाँ (लाखांश) अंक $- \bar{2}$ दर्ज कीजिए। 2_4 से 4 A_7 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना-

C. P. $\{ \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 10 \end{smallmatrix} \} = \{ (2*10) + (3*2) + (3*0) + (1*2) + (3*2) \} = 34, +10* \{ A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल 1} \} = 34 + 10 = 24$ को 2_4 दर्ज कीजिए। 2_4 से 4 A_7 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद छह स्थान तक $0\bar{1}_4 \bar{5}_3 \bar{1}_4 \bar{5}_1 2_4$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \}$ की गणना- $\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \} = [(e^r * E^r) \{ -(E^r)^2 \}] \div 6 (k_2)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से-

C. P. $\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 & 5 & 1 \\ 1 & \bar{5} & 1 & 5 \end{smallmatrix} \} = \{ (\bar{1}*5) + (1*1) + (0*1) + (5*5) \} = 29, 29 + 10 * \{ A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 2} \} = 29 + 20 = 9, 9 \div 6 (k_2)$ से भागफल $\bar{1}$ तथा A_7 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{3}$ होगा जिन्हे सयुक्त कर $\bar{1}_3$ दर्ज कीजिए।

अतः दशमलव बाद छह स्थान तक $000\bar{1}_1 \bar{1}_1 2_2 \bar{1}_3$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{ \frac{e^r * (E^r)^5}{!5} \}$ की गणना- $\{ \frac{e^r * (E^r)^5}{!5} \} = [\{ -\frac{e^r * (E^r)^3}{!3} \} \{ -(E^r)^2 \}] \div 20 (k_3)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से-

$10 * \{A_6 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 1\} = 10, 10 \div 20 \text{ से भागफल } 1 \text{ तथा } A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 10 \text{ होगा जिन्हे सयुक्त कर } 1_{10} \text{ दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद छह स्थान तक } 000001_{10} \text{ दर्ज होगा।}$

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $\{\frac{e^r * (E^r)^7}{!7}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r * (E^r)^7}{!7}\} = [\{-\frac{e^r * (E^r)^5}{!3}\}\{- (E^r)^2\}] \div 20(k_3)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 4 से-

1• C. P. $\{\frac{1}{1}\} = (\bar{1} * 1) = \bar{1}$ का मापांक $1 < \{d_4 = \frac{k_4}{2} = \frac{42}{2} = 21\} \therefore$ दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या $= [(\text{पंक्ति } (0_3) \text{ के गणना में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + (\text{पंक्ति 4 का हल मान गणना पंक्ति में दशमलव बाद प्रथम क्रमागत शून्य (0) की स्थान संख्या}) + 2] = [0 + 5 + 2] = 7$ के लिए 0000001_{10} दर्ज कीजिए।

2• 0_1 से $\bar{1}$ A_8 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा अतः दशमलव बाद सात स्थान तक 00000001_{10} दर्ज होगा।

प्रक्रम 6 $A_6 =$ पंक्ति 1, 2 3 4 और 5 के छटवें (दस लाखांश) अंको का योग $= 0 + 2 + \bar{1} + 1 + 0 = 2$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.31\bar{2}0102$ दशमलव बाद 6 स्थान तक का आकलन होगा।

(7) A_7 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का छटवाँ (दस लाखांश) अंक -
D. P. $\{A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6\} = \text{D. P. } \{31\bar{2}0102\} = \{2^*(3*2) + 2^*(1*10) + 2(\bar{2}*0)\} = 32\ 32 + 10 * \{A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } 4\} = 32 + 40 = 72$ को 7_2 दर्शित करने पर 7 होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का छटवाँ (दस लाखांश) अंक -7 दर्ज कीजिए। 7_2 से 2 A_8 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना-

C. P. $\{\frac{2\ 3\ 3\ 2\ 2\ 0}{3\ 1\ 2\ 0\ 10\ 2}\} = \{(2*2) + (3*0) + (\bar{3}*10) + (1*2) + (\bar{3}*0) + (\bar{2}*2)\} = \bar{28}, +10 * \{A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } 4\} = \bar{28} + 40 = 12$ को 1_2 दर्ज कीजिए। 1_2 से 2 A_8 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद सात स्थान तक $01_4\bar{5}_31_45_12_41_2$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\}$ की गणना- $\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\} = [(e^r * E^r)\{- (E^r)^2\}] \div 6(k_2)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से-

C. P. $\{\frac{1\ 0\ 5\ 1\ \bar{2}}{1\ 5\ 1\ 5\ 2}\} = \{(\bar{1}*2) + (1*\bar{2}) + (0*5) + (\bar{5}*1) + (5*1)\} = \bar{4}, \bar{4} + 10 * \{A_7 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 3\} = \bar{4} + 30 = 34, 34 \div 6(k_2) \text{ से भागफल } \bar{6} \text{ तथा } A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 2 \text{ होगा जिन्हे सयुक्त कर } \bar{6}_2 \text{ दर्ज कीजिए।}$

अतः दशमलव बाद सात स्थान तक $0001_1\bar{1}_12_2\bar{1}_3\bar{6}_2$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{\frac{e^r * (E^r)^5}{!5}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r * (E^r)^5}{!5}\} = [\{-\frac{e^r * (E^r)^3}{!3}\}\{- (E^r)^2\}] \div 20(k_3)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से-

C. P. $\{\frac{1}{1}\} = \{\bar{1} * \bar{1}\} = 1, 1 + 10 \{ \text{दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 10 \text{ होगा} \} = 1 + 100 = 99, \div 20(k_3)$

से भागफल 5 तथा A_8 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 होगा जिन्हे सयुक्त कर 5_1 दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद सात स्थान तक $000001_{10}\bar{5}_1$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $\{\frac{e^r * (E^r)^7}{!7}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r * (E^r)^7}{!7}\} = [\{-\frac{e^r * (E^r)^5}{!3}\}\{- (E^r)^2\}] \div 20(k_3)$ के लिए-

गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 4 से-

A_6 दर्शित करने के तारतम्य में दर्ज 0000000_1 से सातवाँ अंक 0 और A_8 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 1 प्राप्त है।

अतः दशमलव बाद सात स्थान तक 0000000_1 होगा।

प्रक्रम 6 $A_7 =$ पंक्ति 1, 2 3 4 और 5 के छटवें (दस लाखों) अंको का योग $= 0+1+\bar{6}+\bar{5}+0 = \bar{10}$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए। इस प्रकार $E^r = 0.31\bar{2}0\bar{10}2\bar{10}$ दशमलव बाद 7 स्थान तक का आकलन होगा।

(8) A_8 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का सातवाँ (करोड़ों) अंक -

D.P. $\{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7\} = \text{D.P.}\{31\bar{2}0102\bar{10}\} = \{2*(3*\bar{10}) + 2*(1*2) + 2(\bar{2}*10) + 0^2\} = \bar{96}$,

$\bar{96} + 10*\{A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } 2\} = \bar{96} + 20 = \bar{76} = 8\bar{4}$ को 8_4 दर्शित करने पर 8 होगा। जिसे

गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योग्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का सातवाँ (करोड़ों) अंक $-\bar{8}$ दर्ज कीजिए।

8_4 से 4 A_9 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना-

C.P. $\left\{ \begin{smallmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 10 & 2 & \bar{10} \end{smallmatrix} \right\} = \{(2*\bar{10}) + (3*0) + (\bar{3}*2) + (1*0) + (\bar{3}*10) + (\bar{2}*2)*(2*0)\} = \bar{60}$, $+10*\{A_8$

दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल $2\} = \bar{60} + 20 = \bar{40}$ को 4_0 दर्ज कीजिए। 4_0 से 0 A_8 दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद आठ स्थान तक $01\bar{4}5_31\bar{4}5_12\bar{4}1_2\bar{4}_0$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\}$ की गणना- $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\} = [(e^r * E^r)\{-(E^r)^2\}] \div 6 (k_2)$ के लिए-

गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से-

C.P. $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 & 5 & 1 & \bar{2} & \bar{7} \\ 1 & 5 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\bar{1}*1) + (1*\bar{7}) + (0*2) + (\bar{5}*2) + (5*5) + (1*1)\} = 8$,

$8 + 10 * \{A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 2\} = 8 + 20 = 28$, $28 \div 6 (k_2)$ से भागफल 5 तथा A_9 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{2}$ होगा जिन्हे सयुक्त कर 5_2 दर्ज कीजिए।

अतः दशमलव बाद आठ स्थान तक $000_1\bar{1}_12_2\bar{1}_3\bar{6}_25_2$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\} = [\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\} \{-(E^r)^2\}] \div 20 (k_3)$ के लिए-

गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से-

C.P. $\left\{ \begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix} \right\} = \{(\bar{1}*2) * (\bar{1}*0)\} = \bar{2}$, $\bar{2} + 10 * \{A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 1 \text{ होगा}\} = \bar{2} + 10 = 8$,

$8 \div 20 (k_3)$ से भागफल 0 तथा A_9 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 8 होगा। जिन्हे सयुक्त कर 0_8 दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद आठ स्थान तक $00000_11_{10}\bar{5}_10_8$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $\{\frac{e^r*(E^r)^9}{!9}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r*(E^r)^9}{!9}\} = [\{-\frac{e^r*(E^r)^7}{!7}\} \{-(E^r)^2\}] \div 42 (k_4)$ के लिए-

गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 4 से-

$10 * \{A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 1\} = \bar{10}$, $\bar{10} \div 42 (k_4)$ से भागफल 0 तथा A_9 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{10}$ होगा जिन्हे सयुक्त कर 0_{10} दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद आठ स्थान तक 0000000_10_{10} दर्ज होगा।

प्रक्रम 6 $A_8 =$ पंक्ति 1, 2 3 4 और 5 के छटवें (दस लाखों) अंको का योग $= 0+\bar{4}+5+0+0 = 1$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.3\ 1\ \bar{2}\ 0\ 10\ 2\ \bar{10}\ 1$ दशमलव बाद 8 स्थान तक का आकलन होगा।

(9) A_9 दर्शित करने के तारतम्य में

प्रक्रम 1 गणन पंक्ति 0_2 में स्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान $(E^r)^2$ का आठवाँ (दसकरोड़ांश) अंक - $D.P.\{A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8\} = D.P.\{3\ 1\ \bar{2}\ 0\ 10\ 2\ \bar{10}\ 1\} = \{2*(3*1) + 2*(1*\bar{10}) + 2(\bar{2}*2) + (0*10)\} = \bar{22}$, $\bar{22} + 10*\{A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } \bar{4}\} = \bar{22} + \bar{40} = \bar{62}$ को $\bar{6}_2$ दर्शित करने पर $\bar{6}$ होगा। जिसे गणन पंक्ति 0_3 में विस्तारित उत्तरांक E^r के बर्गमान का योज्य प्रतिलोम $\{-(E^r)^2\}$ का आठवाँ (दसकरोड़ांश) अंक - 6 दर्ज कीजिए। $\bar{6}_2$ से $\bar{2}$ A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा।

प्रक्रम 2 गणन पंक्ति 2 में $e^r * E^r$ की गणना-

C. $P.\left\{\begin{smallmatrix} 2 & \bar{3} & \bar{3} & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & \bar{2} & 0 & 10 & 2 & \bar{10} & 1 \end{smallmatrix}\right\} = \{(2*1) + (3*0) + (\bar{3}*10) + (1*0) + (\bar{3}*2) + (\bar{2}*0)*(2*10) + (0*2)\} = 46$, $+10*\{A_8 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल } 0\} = 46 + 0 = 46 = 5\ \bar{4}$ को 5_4 दर्ज कीजिए। 5_4 से $\bar{4}$ A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में बतौर शेषफल होगा। अतः दशमलव बाद नव स्थान तक $0\ 1_4\ \bar{5}_3\ 1_4\ 5_1\ 2_4\ 1_2\ \bar{4}_0\ 5_4$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 3 गणन पंक्ति 3 में $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\}$ की गणना- $\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\} = [(e^r * E^r)\{-(E^r)^2\}] \div 6 (k_2)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 2 से-

C. $P.\left\{\begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 & 5 & 1 & \bar{2} & \bar{7} & \bar{8} \\ 1 & \bar{5} & 1 & 5 & 2 & 1 & \bar{4} \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{1}*\bar{4}) + (1*\bar{8}) + (0*1) + (\bar{5}*\bar{7}) + (5*2) + (1*\bar{2})*(1*5)\} = 44$, $44 + 10*\{A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{2}\} = 44 + \bar{20} = 24$, $24 \div 6 (k_2)$ से भागफल 4 तथा A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल होगा 0 होगा जिन्हे सयुक्त कर 4_0 दर्ज कीजिए।

अतः दशमलव बाद नव स्थान तक $0\ 0\ 0_1\ \bar{1}_1\ 2_2\ \bar{1}_3\ \bar{6}_2\ 5_2\ 4_0$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 4 गणन पंक्ति 4 में $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r*(E^r)^5}{!5}\} = [\{-\frac{e^r*(E^r)^3}{!3}\}\{-(E^r)^2\}] \div 20 (k_3)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 3 से-

C. $P.\left\{\begin{smallmatrix} \bar{1} & 0 & 5 \\ 1 & 2 & \bar{1} \end{smallmatrix}\right\} = \{(\bar{1}*\bar{1}) * (\bar{1}*5) + (0*2)\} = \bar{4}$, $\bar{4} + 10*\{A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } 8 \text{ होगा}\} = \bar{4} + 80 = 76$, $76 \div 20 (k_3)$ से भागफल 4 तथा A_9 दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल $\bar{4}$ होगा जिन्हे सयुक्त कर 4_4 दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद नव स्थान तक $0\ 0\ 0\ 0\ 0_1\ 1_{10}\ \bar{5}_1\ 0_8\ 4_4$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 5 गणन पंक्ति 5 में $\{\frac{e^r*(E^r)^9}{!9}\}$ की गणना- $\{\frac{e^r*(E^r)^9}{!9}\} = [\{-\frac{e^r*(E^r)^7}{!7}\}\{-(E^r)^2\}] \div 42 (k_4)$ के लिए-
गणन पंक्ति 0_3 और गणन पंक्ति 4 से-

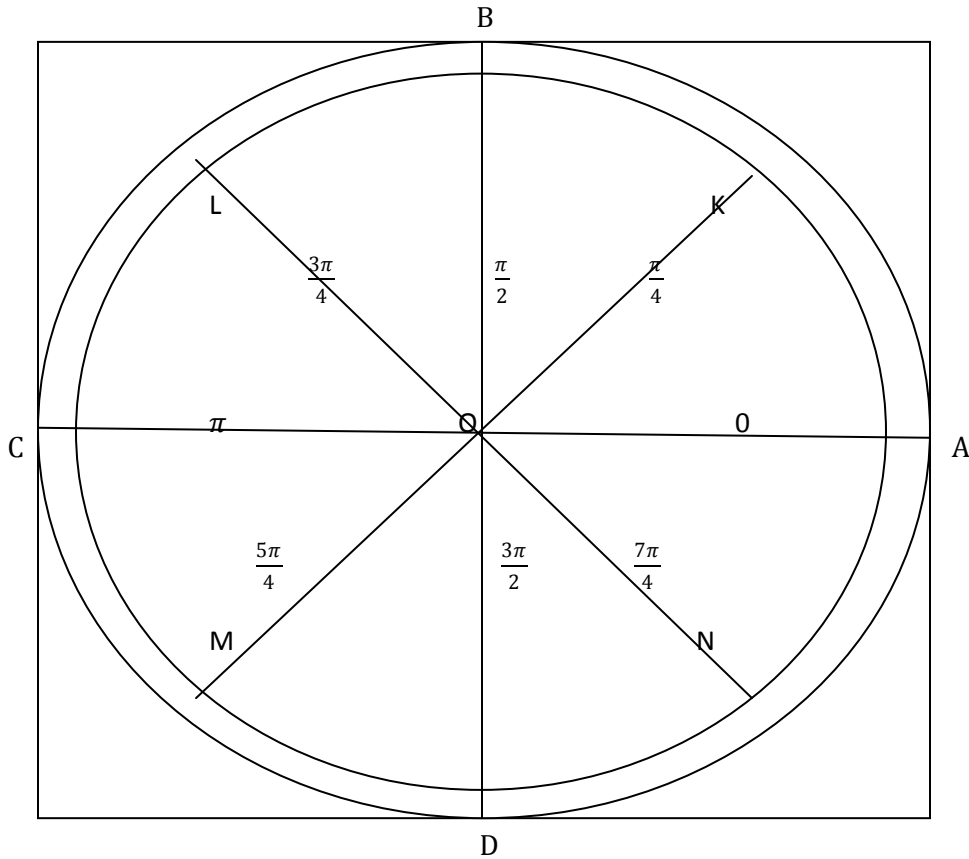
$10*\{A_9 \text{ दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल } \bar{10}\} = \bar{100} \div 42 (k_4)$ से भागफल 2 तथा A_{10} दर्शित करने के तारतम्य में शेषफल 16 होगा जिन्हे सयुक्त कर 2_{16} दर्ज कीजिए। अतः दशमलव बाद नव स्थान तक $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0_1\ 0_{10}\ 2_{16}$ दर्ज होगा।

प्रक्रम 6 $A_9 =$ पंक्ति 1, 2 3 4 और 5 के छटवें (दस लाखोंश) अंको का योग $= 0+5+4+4+2 = 15$ E^r का हल मान के तारतम्य में दर्ज कीजिए।

इस प्रकार $E^r = 0.3\ 1\ \bar{2}\ 0\ 10\ 2\ \bar{10}\ 1\ 15 = 0.3\ 0\ 8\ 1\ 0\ 1\ 0\ 2\ 5$ रेडियन दशमलव बाद 9 स्थान तक का आकलन होगा।

ध्यानाकर्षण यद्यपि सर्वोच्च समीकरण $M^r = E^r - e^r \sin E^r$ में $\sin E^r$ के गणना के प्रति E^r का मान चतुर्थांश एवं उनके मध्य मानों के घुचांक (विचलन) मानों के प्रति लिया जाना चाहिए। जिसके अनुसार $M^r = E^r - e^r \sin E^r$ का रूपान्तर न्मिानुसार प्राप्त होंगे।

क्रमांक	E^r का मान	$M^r = E^r - e^r \sin E^r$ मूल स्वरूप	$M^r = E^r - e^r \sin E^r$ का रूपान्तरण
1	0^r और $\frac{\pi^r}{4}$ के बीच $(0 + A)^r$	$M^r = E^r - e^r \sin E^r$	$M^r = E^r - e^r \sin E^r$
2	$\frac{\pi^r}{4}$ और $\frac{\pi^r}{2}$ के बीच $(\frac{\pi}{2} - A)^r$	$M^r = (\frac{\pi}{2} - A)^r - e^r \sin(\frac{\pi}{2} - A)^r$	$M^r = (\frac{\pi}{2} - A)^r - e^r \cos A$
3	$\frac{\pi^r}{2}$ और $\frac{3\pi^r}{4}$ के बीच $(\frac{\pi}{2} + A)^r$	$M^r = (\frac{\pi}{2} + A)^r - e^r \sin(\frac{\pi}{2} + A)^r$	$M^r = (\frac{\pi}{2} + A)^r - e^r \cos A$
4	$\frac{3\pi^r}{4}$ और π^r के बीच $(\pi - A)^r$	$M^r = (\pi - A)^r - e^r \sin(\pi - A)^r$	$M^r = (\pi - A)^r - e^r \sin A$
5	π^r और $\frac{5\pi^r}{4}$ के बीच $(\pi + A)^r$	$M^r = (\pi + A)^r - e^r \sin(\pi + A)^r$	$M^r = (\pi + A)^r + e^r \sin A$
6	$\frac{5\pi^r}{4}$ और $\frac{3\pi^r}{2}$ के बीच $(\frac{3\pi}{2} - A)^r$	$M^r = (\frac{3\pi}{2} - A)^r - e^r \sin(\frac{3\pi}{2} - A)^r$	$M^r = (\frac{3\pi}{2} - A)^r + e^r \cos A$
7	$\frac{3\pi^r}{2}$ और $\frac{7\pi^r}{4}$ के बीच $(\frac{3\pi}{2} + A)^r$	$M^r = (\frac{3\pi}{2} + A)^r - e^r \sin(\frac{3\pi}{2} + A)^r$	$M^r = (\frac{3\pi}{2} + A)^r + e^r \cos A$
8	$\frac{7\pi^r}{4}$ और $2\pi^r$ के बीच $(2\pi - A)^r$	$M^r = (2\pi - A)^r - e^r \sin(2\pi - A)^r$	$M^r = (2\pi - A)^r + e^r \sin A$



उदाहरण ■ यदि पृथ्वी की उत्केद्रता $\frac{3\pi^r}{5}$ और किसी नक्षत्र की पृथ्वी कक्ष में उत्केद्रता 0.5^r हो तो ग्रह पथ में नक्षत्र का मध्यवर्ती उत्केन्द्रक माप अंश माप में ज्ञात कीजिए।

हल- गणना समिका $M^r = E^r - e^r \sin E^r$ के प्रति प्रश्नानुसार $E^r = \frac{3\pi^r}{5} = \frac{\pi^r}{2}$ और $\frac{3\pi^r}{4}$ के बीच है।

∴ चतुर्थांश नियम से 3 के अनुसार- $E^r = (\frac{\pi^r}{2} + A)$ से -

$$A = E^r - \frac{\pi^r}{2} = \frac{3\pi^r}{5} - \frac{\pi^r}{2} = \frac{\pi^r}{10} = 0.3142857^r = 0.3143\bar{143}^r = 0.3143^r$$

$$e^r = 0.5^r \quad M^r = ?$$

$\cos(0.3143^r)$ का आकलन

पंक्ति क्रम r	पंक्ति 2 से चालक भाजक k_r	दशमलव बाद 5 अंकीय गणना
0_1	θ	0 . 3 1 4 3
0_2	$\theta^2 = (0.3143)^2$	0 . 1_1 0_4 1_5 2_4
0_2	$-\theta^2 = -(0.3143)^2$	0 . 1_1 0 1 2
उ. पं. 1	पूर्णांक	1 . 0 0 0 0 0
उ. पं. 2	$-\frac{\theta^2}{12}$ के लिए $k_2 = 1*2 = 2$	0 . 1_1 5_0 1_1 4_0 1_1
उ. पं. 3	$\frac{\theta^4}{14}$ के लिए $k_3 = 2*3 = 6$	0 . 0 0_1 0_0 4_1 1_2
उ. पं. 4	$-\frac{\theta^6}{16}$ के लिए $k_4 = 3*5 = 15$	0 . 0 0 0 0 0_4
$\cos(0.3143^r) =$ उ. पं. 1 से उ. पं. 4 तक योग मान		1 . 1_1 5 1 0 2 = 0 . 9 5 1 0 2

अतः गणना समिका 3 के अनुसार-

$$M^r = (\frac{\pi}{2} + A)^r - e^r \sin(\frac{\pi}{2} + A)^r \Rightarrow M^r = (\frac{\pi}{2} + A)^r - e^r \cos A \Rightarrow M^r = (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10})^r - e^r \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\Rightarrow M^r = \frac{3\pi^r}{5} - e^r \cos \frac{\pi}{10} \Rightarrow M^r = 1.885714^r - (0.5) \cos(0.3143^r) \text{ में } \cos(0.3143^r) \text{ का आकलन मान } 0.95102 \text{ प्रति स्थापित करने पर}$$

$$M^r = 1.885714284^r - (0.5^r) * (0.95102)$$

$$= 1.885714^r - 0.475510^r$$

$$= 1.410204^r \text{ होगा।}$$

-----14-----

अध्याय 15

त्रिभुज के साधन

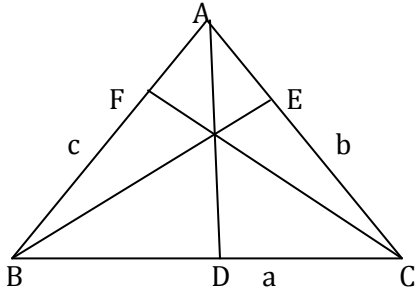
15-1 त्रिभुज के साधन समतलीय त्रिभुजों के विषयक प्रश्नों के बहुत ही सुविधाजनक हल प्राप्त करने प्रयुक्त कथन, सूत्र एवं प्रमेय का ज्यामिति अध्ययन विस्तार में त्रिभुज के साधन कहलाता है। जिसके अध्ययन को त्रिभुजांक एवं बीजांक के अवधारणाओं का अनुप्रयोग सहजता प्रदान करता है। अवलोकित कीजिए।

माना कि समतलीय त्रिभुज ABC के – शीर्ष A के सम्मुख भुजा BC का माप $mBC = a$ इकाई
 शीर्ष B के सम्मुख भुजा CA का माप $mCA = b$ इकाई
 शीर्ष C के सम्मुख भुजा AB का माप $mAB = c$ इकाई है।

इन्हीं मापों के आधार पर त्रिभुज के साधन विषयक तीन उपयोगी सूत्र – (1) कोण न्यूनता सूत्र (2) आनुरूप्येण (अनुपात रूपक) सूत्र (3) बीजांक सूत्र प्रतिपादित किया जाकर इनका उपयोग विस्तार प्रश्नोत्तर शृंखला उदाहरणार्थ प्रस्तुत है।

[1] कोण न्यूनता सूत्र

प्रमेय त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B और C के सम्मुख भुजा माप क्रमशः a , b और c इकाई है। प्रत्येक शीर्ष से उनके सम्मुख भुजा पर डाला गया लम्ब क्रमशः AD, BE और CF हो तो –



आकृति 15-1

- 1• $a^2 + b^2 - c^2 = 2a * mDC$
- 2• $b^2 + c^2 - a^2 = 2b * mEA$
- 3• $c^2 + a^2 - b^2 = 2c * mFB$ होगा।

जहाँ mDC का अर्थ भुजा DC के माप से है। इसी प्रकार और भी अन्य उपपत्ति (1) समकोण त्रिभुज ADC से

$$(mAC)^2 = (mDC)^2 + (mDA)^2 \text{ -----(1)}$$

समकोण त्रिभुज ADB से

$$(mAB)^2 = (mBD)^2 + (mDA)^2 \text{ -----(2)}$$

$$(1) - (2) \text{ से } - (mAC)^2 - (mAB)^2 = (mDC)^2 - (mBD)^2 \text{ ----- (3)}$$

$$(3) + (mBC)^2 \text{ से } -$$

$$\{(mBC)^2 + (mAC)^2\} - (mAB)^2 = (mBC)^2 + \{mDC + mBD\} \{mDC - mBD\}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + a \{mDC - mBD\} = a \{a + mDC - mBD\}$$

$$= a \{mBD + mDC + mDC - mBD\} = 2a * mDC$$

अतः समिका 1• $a^2 + b^2 - c^2 = 2a * mDC$ सिद्ध।

इसी प्रकार 2• $b^2 + c^2 - a^2 = 2b * mEA$ एवं 3• $c^2 + a^2 - b^2 = 2c * mFB$ सिद्ध कीजिए।

उपरोक्त तीनों समिकाओं को कोण न्यूनता सूत्र के नाम से जाना जाता है। क्योंकि – उपरोक्त आकृति 15-1 से

$$\cos(m\angle C) = \frac{mDC}{mAC} = \frac{mDC}{b} \therefore mDC = b \cos(m\angle C) \text{ होगा। समिका (1) में प्रतिस्थापित करने पर}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2a * b \cos(m\angle C) \Rightarrow \cos(m\angle C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a * b}$$

$$\text{इसी प्रकार } \cos(m\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b * c} \text{ तथा } \cos(m\angle B) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c * a}$$

$m\angle A$, $m\angle B$ एवं $m\angle C$ के Cos मानों के आधार पर प्राप्त संगत त्रिभुजांक

$$\cos(m\angle A) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b * c} \text{ से } m\angle A \text{ का त्रिभुजांक}$$

आधार	लम्ब	कर्ण
$b^2 + c^2 - a^2$	-----	$2b*c$
$b^2 + c^2 - a^2$	$\sqrt{(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}$	$2b*c$
इसी प्रकार $\cos(m\angle B) = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c*a}$ से $m\angle B$ का त्रिभुजांक		
$c^2 + a^2 - b^2$	$\sqrt{(2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}$	$2c*a$
तथा $\cos(m\angle C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a*b}$ से $m\angle C$ का त्रिभुजांक		
$a^2 + b^2 - c^2$	$\sqrt{(2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$	$2a*b$

उपरोक्तानुसार प्राप्त त्रिभुजांक से –

$$\begin{aligned}
 \sin(m\angle A) &= \frac{\sqrt{(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2b*c} = \frac{\sqrt{\{2b*c + (b^2 + c^2 - a^2)\} \{2b*c - (b^2 + c^2 - a^2)\}}}{2b*c} \\
 &= \frac{\sqrt{\{(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2\} \{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)\}}}{2bc} = \frac{\sqrt{\{(b+c)^2 - a^2\} \{a^2 - (b-c)^2\}}}{2bc} \\
 &= \frac{\sqrt{(b+c+a)*(b+c-a)*(a+b-c)*(a-b+c)}}{2bc} \\
 &= \frac{\sqrt{(a+b+c)*(b+c-a)*(a+c-b)*(a+b-c)}}{2bc} \quad \text{चक्रीय क्रम में} \\
 &= \frac{\sqrt{2S*2(S-a)*2(S-b)*2(S-c)}}{2bc}
 \end{aligned}$$

$$a+b+c = 2S \Rightarrow S = \frac{a+b+c}{2} \text{ से } b+c-a = \{(a+b+c) - 2a\} = 2S - 2a = 2(S-a)$$

$$c+a-b = \{(a+b+c) - 2b\} = 2S - 2b = 2(S-b)$$

$$a+b-c = \{(a+b+c) - 2c\} = 2S - 2c = 2(S-c) \quad \text{के प्रतिस्थापन से}$$

$$\sin(m\angle A) = \frac{\sqrt{2S*2(S-a)*2(S-b)*2(S-c)}}{2bc} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{bc} \quad \text{सिद्ध होगा।}$$

$$\text{इसी प्रकार } \sin(m\angle B) = \frac{\sqrt{2S*2(S-a)*2(S-b)*2(S-c)}}{2ca} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{ca}$$

$$\text{एवं } \sin(m\angle C) = \frac{\sqrt{2S*2(S-a)*2(S-b)*2(S-c)}}{2ab} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{ab} \quad \text{सिद्ध होगा।}$$

$$\text{अतः } a+b+c = 2S \Rightarrow S = \frac{a+b+c}{2} \text{ से}$$

$m\angle A$, $m\angle B$ एवं $m\angle C$ के $\sin$ मानों के आधार पर प्राप्त संगत त्रिभुजांक

$$(m\angle A) \text{ का त्रिभुजांक} = \sqrt{(b*c)^2 - 4S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad 2*\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad b*c$$

$$(m\angle B) \text{ का त्रिभुजांक} = \sqrt{(c*a)^2 - 4S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad 2*\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad c*a$$

$$(m\angle C) \text{ का त्रिभुजांक} = \sqrt{(a*b)^2 - 4S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad 2*\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \quad a*b$$

15-2 समतलीय त्रिभुज विषयक महत्वपूर्ण समिका उपरोक्त न्यूवता प्रमेय के अध्ययन क्रम में त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष के अन्तः कोण माप $m\angle A$, $m\angle B$ एवं $m\angle C$ के $\cos$ एवं $\sin$ मानों के आधार पर प्राप्त संगत त्रिभुजांक के सयुक्त अध्ययन से समतलीय त्रिभुज विषयक महत्वपूर्ण समिकाएँ निम्नानुसार प्राप्त होंगे।

$$\sin(m\angle A) = \frac{\sqrt{(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2b*c} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{bc}$$

$$\sin(m\angle B) = \frac{\sqrt{(2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b)^2}}{2c*a} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{c*a} \text{ एवं}$$

$$\sin(m\angle C) = \frac{\sqrt{(2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c)^2}}{2a*b} = \frac{2\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)}}{a*b} \text{ से}$$

$$\sqrt{(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} = \sqrt{(2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b)^2} = \sqrt{(2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c)^2}$$

$$= 4 * \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)}$$

$$\Rightarrow (2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b)^2 = (2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c)^2$$

$$= 16 * S * (S - a) * (S - b) * (S - c) \text{ होगा।}$$

उदाहरण 1■ यदि एक समतलीय ABC के शीर्षाभिमुख भुजा के माप क्रमशः a=7, b=10 तथा c=13 इकाई माप की और तीनों का योगमान a+b+c=2S दर्शित हो तो सरल गणना द्वारा सिद्ध कीजिए -

$$(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b)^2 = (2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c)^2$$

$$= 16 * S * (S - a) * (S - b) * (S - c)$$

हल $a^2=7^2=49$, $b^2=10^2=100$, $c^2=13^2=169$, $S=\frac{a+b+c}{2}=\frac{7+10+13}{2}=15$

$$1 \bullet (2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2*10*13)^2 - (100 + 169 - 49)^2$$

$$= 260^2 - 220^2 = (260+220)*(260-220) = 480*40 = 19200$$

$$2 \bullet (2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2 = (2*13*7)^2 - (169 + 49 - 100)^2$$

$$= 182^2 - 118^2 = (182+118)*(182-118) = 300*64 = 19200$$

$$3 \bullet (2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = (2*7*10)^2 - (49 + 100 - 169)^2$$

$$= 140^2 - (-20)^2 = (140-20)*(140+20) = 120*160 = 19200$$

$$4 \bullet 16 * S * (S - a) * (S - b) * (S - c) = 16 * 15 * (15 - 7) * (15 - 10) * (15 - 13)$$

$$= 240*8*5*2 = 19200$$

1, 2, 3 तथा 4 के हल मान से

$$(2b*c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2c*a)^2 - (c^2 + a^2 - b)^2 = (2a*b)^2 - (a^2 + b^2 - c)^2$$

$$= 16 * S * (S - a) * (S - b) * (S - c) \text{ सिद्ध।}$$

उदाहरण 2■ यदि एक समतलीय ABC के शीर्षाभिमुख भुजा के माप अनुपात a : b : c = 8 : 9 : 15 है। शीर्ष A, B, C पर अन्तरित अन्तः कोण माप का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल $a=8$, $b=9$, $c=15$, $S=\frac{a+b+c}{2}=\frac{8+9+15}{2}=16$.

$$(S - a) = (16 - 8) = 8, (S - b) = (16 - 9) = 7, (S - c) = (16 - 15) = 1$$

∴ 1 • m∠A का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ \sqrt{(b*c)^2 - 4*S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \} \quad \{ 2*\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \} \quad \{ b*c \}]$$

$$= [\{ \sqrt{(9*15)^2 - 4*16*8*7*1} \} \quad \{ 2*\sqrt{16*8*7*1} \} \quad [9*15]]$$

$$= [\{ \sqrt{18225 - 3584} \} \quad \{ 2*4*2*\sqrt{14} \} \quad [135]]$$

$$= [\sqrt{14641} \quad 16*\sqrt{14} \quad 135] = [121 \quad 16\sqrt{14} \quad 135]$$

2 • m∠B का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ \sqrt{(c*a)^2 - 4*S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \} \quad \{ 2*\sqrt{S*(S-a)*(S-b)*(S-c)} \} \quad \{ c*a \}]$$

$$= [\{ \sqrt{(15*8)^2 - 4*16*8*7*1} \} \quad \{ 2*\sqrt{16*8*7*1} \} \quad [15*8]]$$

$$= [\{ \sqrt{14400 - 3584} \} \quad \{ 2 * 4 * 2 * \sqrt{14} \} \quad [120]]$$

$$= [\sqrt{10816} \quad 16*\sqrt{14} \quad 120] = [104 \quad 16\sqrt{14} \quad 120] = [13 \quad 2\sqrt{14} \quad 15]$$

3 • m ∠c का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ \sqrt{(a * b)^2 - 4 * S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \} \quad \{ 2 * \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \} \quad \{ a * b \}]$$

$$= [\{ \sqrt{(8 * 9)^2 - 4 * 16 * 8 * 7 * 1} \} \quad \{ 2 * \sqrt{16 * 8 * 7 * 1} \} \quad [8*9]]$$

$$= [\{ \sqrt{5184 - 3584} \} \quad \{ 2 * 4 * 2 * \sqrt{14} \} \quad [72]]$$

$$= [\sqrt{1600} \quad 16*\sqrt{14} \quad 72] = [40 \quad 16\sqrt{14} \quad 72] = [5 \quad 2\sqrt{14} \quad 9]$$

अथवा

हल a=8 , b=9 , c=15 a² = 64 , b² = 81 , c² = 225 ,

2a * b = 144 , 2b * c = 270 , 2c * a = 150 से-

1 • m ∠A का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ b^2 + c^2 - a^2 \} \quad \{ \sqrt{(2b * c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \} \quad 2b * c]$$

$$= [\{ 81 + 225 - 64 \} \quad \{ \sqrt{(2 * 9 * 15)^2 - (81 + 225 - 64)^2} \} \quad \{ 2 * 9 * 15 \}]$$

$$= [\quad 242 \quad \sqrt{270^2 - 242^2} \quad 270]$$

$$= [\quad 242 \quad \sqrt{(270 + 242)(270 - 242)} \quad 270]$$

$$= [\quad 242 \quad \sqrt{(512)(28)} \quad 270]$$

$$= [\quad 242 \quad 16 * 2 \sqrt{2 * 7} \quad 270]$$

$$= [\quad 121 \quad 16\sqrt{14} \quad 135]$$

2 • m ∠B का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ c^2 + a^2 - b^2 \} \quad \{ \sqrt{(2c * a)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2} \} \quad 2c * a]$$

$$= [\{ 225 + 64 - 81 \} \quad \{ \sqrt{(2 * 15 * 8)^2 - (225 + 64 - 81)^2} \} \quad \{ 2 * 15 * 8 \}]$$

$$= [\quad 208 \quad \sqrt{240^2 - 208^2} \quad 240]$$

$$= [\quad 208 \quad \sqrt{(240 + 208)(240 - 208)} \quad 240]$$

$$= [\quad 208 \quad \sqrt{(448)(32)} \quad 240]$$

$$= [\quad 208 \quad 32 \sqrt{14} \quad 240]$$

$$= [\quad 13 \quad 2\sqrt{14} \quad 15]$$

3 • m ∠C का त्रिभुजांक [x y z]

$$= [\{ a^2 + b^2 - c^2 \} \quad \{ \sqrt{(2a * b)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} \} \quad \{ 2a * b \}]$$

$$= [\{ 64 + 81 - 225 \} \quad \{ \sqrt{(2 * 8 * 9)^2 - (64 + 81 - 225)^2} \} \quad \{ 2 * 8 * 9 \}]$$

$$= [\quad 80 \quad \sqrt{144^2 - 80^2} \quad 144]$$

$$= [\quad 80 \quad \sqrt{(144 + 80)(144 - 80)} \quad 144]$$

$$= [\quad 80 \quad \sqrt{(64)(224)} \quad 144]$$

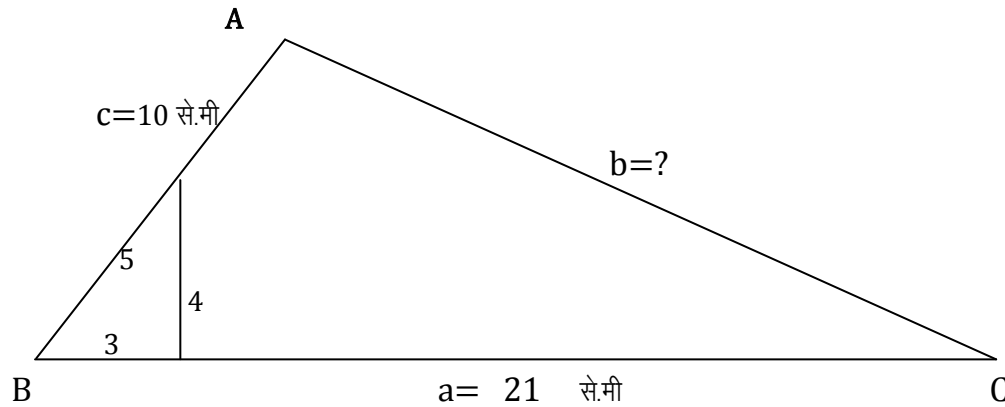
$$= [\quad 80 \quad 8 * 4 \sqrt{14} \quad 144]$$

$$= [\quad 5 \quad 2\sqrt{14} \quad 9]$$

७

उदाहरण 3■ त्रिभुज ABC की भुजा AB = 10 सेन्टी मीटर और CA = 21 सेन्टी मीटर है। $m\angle B$ का त्रिभुजांक $[x\ y\ z] = [3\ 4\ 5]$ है। BC का माप ज्ञात कीजिए।

हल



प्रश्नानुसार त्रिभुज रचना आकृति से - $a = m\overline{BC} = 21$ से.मी $c = m\overline{AB} = 10$ से. मी
 $m\angle B$ का त्रिभुजांक $[x\ y\ z] = [3\ 4\ 5]$ से $\cos B = \frac{x}{z} = \frac{3}{5}$ माना कि $m\overline{CA} = b$ से.मी

कोण न्यूनता सूत्र $2 * c * a \cos B = c^2 + a^2 - b^2$ में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर-

$$2 * 10 * 21 * \frac{3}{5} = 10^2 + 21^2 - b^2 \Rightarrow 252 = 100 + 441 - b^2 \Rightarrow 252 = 541 - b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 541 - 252 \Rightarrow b^2 = 289 \Rightarrow b = 17 \text{ उत्तर।}$$

उदाहरण 4■ त्रिभुज ABC की भुजा AB = 4 सेन्टी मीटर BC = 6 सेन्टी मीटर और CA = 5 सेन्टी मीटर है। $m\angle B$ का त्रिभुजांक ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार $a = BC = 6$ सेन्टी मीटर $b = CA = 5$ सेन्टी मीटर तथा $c = AB = 4$ सेन्टी मीटर

कोण न्यूनता सूत्र $2 * c * a \cos B = c^2 + a^2 - b^2$ में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर-

$$2 * 4 * 6 \cos B = 4^2 + 6^2 - 5^2 \Rightarrow 48 \cos B = 36 + 25 - 16 \Rightarrow 48 \cos B = 27$$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} \text{ से}$$

$$m\angle B \text{ का त्रिभुजांक } [x\ y\ z] = [9\ \sqrt{16^2 - 9^2}\ 16] = [9\ \sqrt{(16+9)(16-9)}\ 16]$$

$$= [9\ \sqrt{25 * 7}\ 16] = [9\ 5\sqrt{7}\ 16] \text{ उत्तर।}$$

15-3 त्रिभुज के दो अन्तः कोण माप का त्रिकोणमिति मान ज्ञात होन पर तीसरे अन्तः कोण माप का त्रिकोणमिति मान ज्ञात करना

त्रिभुज के तीनों अन्तः कोण के मापों का योग $(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 180^\circ$

अतः (त्रिभुज के दो अन्तः कोण मापों का योग मान) $\leftarrow$ सम्पूरक $\rightarrow$ (तीसरा अन्तः कोण माप)

अन्तः कोण माप₁ = θ_1 का त्रिभुजांक

$$p_1 \quad q_1 \quad r_1$$

अन्तः कोण माप₂ = θ_2 का त्रिभुजांक

$$p_2 \quad q_2 \quad r_2$$

(अन्तः कोण माप₁ + अन्तः कोण माप₂) = $(\theta_1 + \theta_2)$ का त्रिभुजांक =

$$[\{ p_1 * p_2 - q_1 * q_1 \} \quad \{ p_1 * q_2 + p_2 * q_1 \} \quad \{ r_1 * r_2 \}]$$

$\therefore$ सम्पूरक कोण का त्रिभुजांक नियम से- **तीसरा अन्तः कोण माप₃ = θ_3 का त्रिभुजांक** =

$$[-\{ p_1 * p_2 - q_1 * q_2 \} \quad \{ p_1 * q_2 + p_2 * q_1 \} \quad \{ r_1 * r_2 \}]$$

$$= [\{ q_1 * q_2 - p_1 * p_2 \} \quad \{ p_1 * q_2 + p_2 * q_1 \} \quad \{ r_1 * r_2 \}]$$

$$\sin \theta_3 = \frac{p_1 * q_2 + p_2 * q_1}{r_1 * r_2} = \frac{p_1}{r_1} * \frac{q_2}{r_2} + \frac{p_2}{r_2} * \frac{q_1}{r_1} = \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_2 \sin \theta_1$$

$$\cos \theta_3 = \frac{q_1 * q_2 - p_1 * p_2}{r_1 * r_2} = \frac{q_1}{r_1} * \frac{q_2}{r_2} - \frac{p_1}{r_1} * \frac{p_2}{r_2} = \sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

$$\text{इसी प्रकार } \sin \theta_1 = \cos \theta_2 \sin \theta_3 + \cos \theta_3 \sin \theta_2 \quad \cos \theta_1 = \sin \theta_2 \sin \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \theta_3$$

$$\sin \theta_2 = \cos \theta_3 \sin \theta_1 + \cos \theta_1 \sin \theta_3 \quad \cos \theta_2 = \sin \theta_3 \sin \theta_1 - \cos \theta_3 \cos \theta_1$$

उदाहरण ■ त्रिभुज ABC में $\tan A = \frac{4}{3}$ तथा $\tan B = \frac{12}{5}$ हो तो $\tan C$ ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल } \tan A = \frac{4}{3} \text{ से } m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } [3 \quad 4 \quad \sqrt{3^2 + 4^2}] = [3 \quad 4 \quad 5]$$

$$\tan B = \frac{12}{5} \text{ से } m \angle B \text{ का त्रिभुजांक } [5 \quad 12 \quad \sqrt{5^2 + 12^2}] = [5 \quad 12 \quad 13]$$

$$\therefore \text{ सम्पूर्ण कोण का त्रिभुजांक नियम से- } m \angle C \text{ का त्रिभुजांक } [(4*12 - 3*5) \quad (3*12 + 5*4) \quad (5*13)] \\ = [33 \quad 56 \quad 65] \text{ से } \tan C = \frac{56}{33} \text{ उत्तर होगा।}$$

उत्तर जाँच 1

$$m \angle B \text{ का त्रिभुजांक } = [5 \quad 12 \quad 13]$$

$$\therefore \text{ सम्पूर्ण कोण का त्रिभुजांक नियम से- } m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } [(56*12 - 33*5) \quad (33*12 + 5*56) \quad (65*13)] \\ = [(672 - 165) \quad (396 + 280) \quad 845] \\ = [507 \quad 676 \quad 845] \\ = [3*169 \quad 4*169 \quad 5*169] \\ = [3 \quad 4 \quad 5] \text{ से } \tan A = \frac{4}{3} \text{ प्रश्नांकित है।}$$

$$\text{उत्तर जाँच 2 } m \angle C \text{ का त्रिभुजांक } [33 \quad 56 \quad 65]$$

$$m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } [3 \quad 4 \quad 5]$$

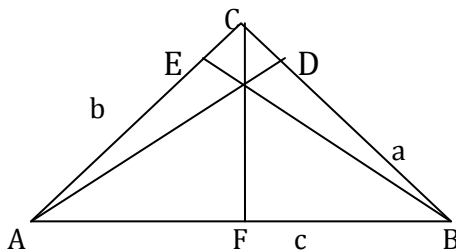
$$\therefore \text{ सम्पूर्ण कोण का त्रिभुजांक नियम से- } m \angle B \text{ का त्रिभुजांक } [(56*4 - 33*3) \quad (33*4 + 3*56) \quad (65*5)] \\ = [(224 - 99) \quad (132 + 168) \quad 325] \\ = [125 \quad 300 \quad 325] \\ = [5*25 \quad 12*25 \quad 13*25] \\ = [5 \quad 12 \quad 13] \text{ से } \tan B = \frac{12}{5} \text{ प्रश्नांकित है।}$$

निष्कर्ष उत्तर $\tan C = \frac{56}{33}$ सही है।

[2] आनुरूप्येण (अनुपात) सूत्र

15-4 समतलीय त्रिभुज के शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोणों की त्रिकोणमिति निष्पत्ति और उनके सम्मुख भुजाओं का अनुपात प्रमेय

प्रमेय 1 त्रिभुज के किसी भुजा के दोनों शीर्ष पर अन्तरित अन्तः कोणों की त्रिकोणमिति अध्ययन में ज्या {Sin} निष्पत्ति का अनुपात मान उनके संगत सम्मुख भुजा माप के अनुपात मान, के बराबर होता है। अर्थात् त्रिभुज ABC में



$$1. \text{ भुजा } AB \text{ से- } \sin A : \sin B = a : b$$

$$2. \text{ भुजा } BC \text{ से- } \sin B : \sin C = b : c$$

$$3. \text{ भुजा } CA \text{ से- } \sin C : \sin A = c : a \text{ होगा।}$$

प्रमाण

रचना शीर्ष A, B, C से उनके सम्मुख भुजा BC, CA, AB पर

क्रमशः लम्ब AD, BE, CF अन्तरित कीजिए।

उपपत्ति 1. शीर्ष C से भुजा AB पर अन्तरित लम्ब CF के दोनों ओर समकोण ΔAFC और BFC से-

$$\sin A = \frac{CF}{CA} = \frac{CF}{b} \text{ तथा } \sin B = \frac{CF}{BC} = \frac{CF}{a} \therefore \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sin A : \sin B = a : b \text{ सिद्ध।}$$

2. शीर्ष A से भुजा BC पर अन्तरित लम्ब AD के दोनों ओर समकोण ΔADB और ΔADC से-

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{c} \text{ तथा } \sin C = \frac{AD}{CA} = \frac{AD}{b} \therefore \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \Rightarrow \sin B : \sin C = b : c \text{ सिद्ध।}$$

3. शीर्ष B से भुजा CA पर अन्तरित लम्ब BE के दोनों ओर समकोण ΔBEC और ΔBEA से-

$$\sin C = \frac{BE}{CB} = \frac{BE}{a} \text{ तथा } \sin A = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{c} \therefore \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{a}{c} \Rightarrow \sin C : \sin A = a : c \text{ सिद्ध।}$$

व्यापकता त्रिभुज के शीर्ष पर अन्तरित अन्तः कोणों की त्रिकोणमिति अध्ययन में ज्या {Sin} निष्पत्ति का अनुपात मान उनकें संगत सम्मुख भुजाओं माप के अनुपात मान, के बराबर होता है। अर्थात् त्रिभुज ABC में - $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ होगा।

प्रमाण 1 $\sin A = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{bc}$, $\sin B = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{c \cdot a}$ एवं $\sin C = \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{a \cdot b}$

से $\frac{1}{bc} : \frac{1}{c \cdot a} : \frac{1}{a \cdot b} = \frac{abc}{bc} : \frac{abc}{c \cdot a} : \frac{abc}{a \cdot b} = a : b : c$ सिद्ध।

प्रमाण 2 प्रमेय 1 के तहत सिद्ध कर चुके हैं- $\sin A : \sin B = a : b$ तथा $\sin B : \sin C = b : c$

$\therefore$ अनुपात संश्लेषण नियम से- $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ सिद्ध।

प्रमेय 2 यदि त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप हो तो-

1. $a : b : c = \{(\cos C \cdot \cos A) + \cos B\} : \{(\cos B \cdot \cos C) + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\}$

2. $a : b : c = \{(\cos A \cdot \cos B) + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{(\cos B \cdot \cos C) + \cos A\}$

3. $a : b : c = \{1 - \cos^2 A\} : \{(\cos A \cdot \cos B) + \cos C\} : \{(\cos C \cdot \cos A) + \cos B\}$

प्रमाण 1 माना कि $\cos A = u$, $\cos B = v$ तथा $\cos C = w$

प्रमेय 1 की व्यापकता $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$ (उपरोक्त अनुपात प्रमेय 1 की व्यापकता) अतः

प्रक्रम 1 कोण न्यूनता सूत्र प्रमेय के तहत

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = u \Rightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 2bcu \text{ -----(1)}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = v \Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 = 2cav \text{ -----(2)}$$

$$\text{तथा } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = w \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = 2abw \text{ -----(3)}$$

$$(1) + (2) + (3) \text{ से } a^2 + b^2 + c^2 = 2bcu + 2cav + 2abw \text{ ----- (4)}$$

प्रक्रम 2 (4) - (1) से $2a^2 = 2cav + 2abw \Rightarrow a = cv + bw \Rightarrow a - bw - cv = 0 \text{ --- (5)}$

(4) - (2) से $2b^2 = 2bcu + 2abw \Rightarrow b = cu + aw \Rightarrow aw - b + cu = 0 \text{ ----(6)}$

(4) - (3) से $2c^2 = 2bcu + 2cav \Rightarrow c = bu + av \Rightarrow av + bu - c = 0 \text{ ---- (7)}$

} शून्यसाम्य समिका

प्रक्रम 3 चूँकि शून्यसाम्य समिका हल की व्यापक नियम के अनुपालन में- 3 चर राशि x, y तथा z का हल मान ज्ञात करने

त्रिपदी शून्यसाम्य समिका - $a_1x + b_1y + c_1z = 0 \text{ --- (1)}$

$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \text{ --- (2)}$ के प्रति

$x : y : z = \{b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1\} : \{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1\} : \{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1\}$ प्रमाणित है।

अतः **1. का सत्यापन के लिए** शून्यसाम्य समिका $a - bw - cv = 0 \text{ ----- (5)}$ एवं

$aw - b + cu = 0 \text{ ----- (6)}$ से

$$a : b : c = [\bar{w} \cdot u - \bar{1} \cdot \bar{v}] : [\bar{v} \cdot w - u \cdot 1] : [1 \cdot \bar{1} - \bar{w} \cdot w]$$

$$= [wu + v] : [vw + u] : [1 - w^2] \quad \bar{1} \text{ का गुणा करने अथवा } \bar{1} \text{ द्वारा भाग देने पर}$$

$$= \{(\cos C \cdot \cos A) + \cos B\} : \{(\cos B \cdot \cos C) + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\} \text{ सिद्ध।}$$

2. का सत्यापन के लिए शून्यसाम्य समिका $a - bw - cv = 0 \text{ ----- (5)}$ एवं

$$av + bu - c = 0 \text{ ----- (7) से}$$

$$\begin{aligned} a : b : c &= [\bar{w} * \bar{1} - u * \bar{v}] : [\bar{v} * v - \bar{1} * 1] : [1 * u - v * \bar{w}] \\ &= [w + uv] : [-v^2 + 1] : [u + v * w] \\ &= [uv + w] : [1 - v^2] : [v * w + u] \\ &= \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\} \text{ सिद्ध।} \end{aligned}$$

3. का सत्यापन के लिए शून्यसाम्य समिका $aw - b + cu = 0 \text{ ----- (6) एवं}$

$$av + bu - c = 0 \text{ ---- (7) से}$$

$$\begin{aligned} a : b : c &= [\bar{1} * \bar{1} - u * u] : [u * v - \bar{1} * w] : [w * u - v * \bar{1}] \\ &= [1 - u^2] : [uv + w] : [wu + v] \\ &= \{1 - \cos^2 A\} : \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} \text{ सिद्ध।} \end{aligned}$$

प्रमाण 2

ज्ञात है— त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष में अन्तरित अन्तः कोण के प्रति अलग- अलग –

1. अनुच्छेद 2-3 सरल प्राथमिक त्रिकोणमिति समीकरण के अनुसार –

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1 \Rightarrow \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \text{ ----- (1)}$$

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1 \Rightarrow \sin^2 B = 1 - \cos^2 B \text{ ----- (2)}$$

$$\cos^2 C + \sin^2 C = 1 \Rightarrow \sin^2 C = 1 - \cos^2 C \text{ ----- (3)}$$

2. अनुच्छेद 15-3 त्रिभुज के दो अन्तः कोण माप के कोई एक त्रिकोणमिति मान ज्ञात होने पर तीसरे अन्तः कोण माप का त्रिकोणमिति मान ज्ञात करने की ओर –

$$\cos A = \sin B \sin C - \cos B \cos C \Rightarrow \sin B \sin C = \cos B \cos C + \cos A \text{ ----- (4)}$$

$$\cos B = \sin C \sin A - \cos C \cos A \Rightarrow \sin C \sin A = \cos C \cos A + \cos B \text{ ----- (5)}$$

$$\cos C = \sin A \sin B - \cos A \cos B \Rightarrow \sin A \sin B = \cos A \cos B + \cos C \text{ ----- (6)}$$

3. त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B और C के सम्मुख भुजा माप क्रमशः a, b और c इकाई है, के प्रति –

अनुच्छेद 15-5 समतलीय त्रिभुज के शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोणों की त्रिकोणमिति निष्पत्ति और उनके सम्मुख भुजाओं

का अनुपात प्रमेय 1 के अनुसार $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \text{ ----- (7)}$

उपपत्ति 1. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$= \{\sin C \sin A\} : \{\sin B \sin C\} : \{\sin^2 C\}$$

$$= \{\cos C \cos A + \cos B\} : \{\cos B \cos C + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\} \text{ सिद्ध।}$$

2. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$= \{\sin A \sin B\} : \{\sin^2 B\} : \{\sin B \sin C\}$$

$$= \{\cos A \cos B + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{\cos B \cos C + \cos A\} \text{ सिद्ध।}$$

3. $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

$$= \{\sin^2 A\} : \{\sin A \sin B\} : \{\sin C \sin A\}$$

$$= \{1 - \cos^2 A\} : \{\cos C \cos A + \cos B\} : \{\cos C \cos A + \cos B\} \text{ सिद्ध।}$$

प्रमेय 2 का विलोम यदि त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप हो तो—

$$1. \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\} = a : b : c$$

$$2. \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\} = a : b : c$$

$$3. \{1 - \cos^2 A\} : \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} = a : b : c$$

उपपत्ति 1. बाँया पक्ष $= \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\}$

$$= \{\sin C \sin A\} : \{\sin B \sin C\} : \{\sin^2 C\} = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।}$$

2. बाँया पक्ष $= \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\}$

$$= \{\sin A \sin B\} : \{\sin^2 B\} : \{\sin B \sin C\} = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।}$$

$$\begin{aligned} 3 \bullet \text{ बाँया पक्ष} &= \{1 - \cos^2 A\} : \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} \\ &= \{\sin^2 A\} : \{\sin A \sin B\} : \{\sin C \sin A\} = \sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = \text{बाँया पक्ष सिद्ध।} \end{aligned}$$

15-5 समतलीय त्रिभुज के दो शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप की कोई त्रिकोणमिति निष्पत्ति के ज्ञात मानों के आधार पर तीना शीर्षों के सम्मुख भुजाओं के मापों का मानक अनुपात ज्ञात करना

हल प्रक्रम 1 दो शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप θ_1 और θ_2 के त्रिकोणमिति निष्पत्ति के ज्ञात मानों के आधार पर उनके त्रिभुजांक सुनिश्चित कीजिए।

प्रक्रम 2 त्रिभुज कोण माप $(\theta_1 + \theta_2)$ का त्रिभुजांक सुनिश्चित कीजिए।

प्रक्रम 3 चूँकि त्रिभुज के तीसरे शीर्ष पर अन्तरित कोण माप θ_3 दो शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप θ_1 और θ_2 के योगमान $(\theta_1 + \theta_2)$ का सम्पूरक $\{\theta_3 + (\theta_1 + \theta_2) = 180^\circ\}$ होता है। अतः अनुच्छेद 15-3 के अनुसार तीसरे शीर्ष पर अन्तरित कोण माप θ_3 का त्रिभुजांक प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 4 θ_1, θ_2 और θ_3 के त्रिभुजांक अवलोकित कर इच्छा या सुविधा अनुसार $[\sin \theta_1, \sin \theta_2, \sin \theta_3]$ अथवा $[\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3]$ समूह में हल मान प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 5 तीनों शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप θ_1, θ_2 और θ_3 के सम्मुख भुजा माप a, b और c का निम्नानुसार मानक अनुपात गणन समिका में किन्ही एक का अनुप्रयोग कर $a : b : c$ का मानक हल प्राप्त कीजिए।

- 1• $a : b : c = \sin \theta_1 : \sin \theta_2 : \sin \theta_3$ का मानक हल
- 2• $a : b : c = \{(\cos \theta_3 * \cos \theta_1) + \cos \theta_2\} : \{(\cos \theta_2 * \cos \theta_3) + \cos \theta_1\} : \{1 - \cos^2 \theta_3\}$
- 3• $a : b : c = \{(\cos \theta_1 * \cos \theta_2) + \cos \theta_3\} : \{1 - \cos^2 \theta_2\} : \{(\cos \theta_2 * \cos \theta_3) + \cos \theta_1\}$
- 4• $a : b : c = \{1 - \cos^2 \theta_1\} : \{(\cos \theta_1 * \cos \theta_2) + \cos \theta_3\} : \{(\cos \theta_3 * \cos \theta_1) + \cos \theta_2\}$

उदाहरण 1■ त्रिभुज ABC के शीर्ष A, B और C के सम्मुख भुजा माप क्रमशः a, b और c इकाई है,।

यदि $\tan A = \frac{12}{5}$ और $\tan B = \frac{4}{3}$ हो तो $a : b : c$ का मानक मान ज्ञात कीजिए।

हल $\tan A = \frac{12}{5}$ से $m \angle A$ का त्रिभुजांक = $[5 \quad 12 \quad 13]$

$\tan B = \frac{4}{3}$ से $m \angle B$ का त्रिभुजांक = $[3 \quad 4 \quad 5]$

$$\begin{aligned} m \angle (A + B) \text{ का त्रिभुजांक} &= [(5*3 - 12*4) \quad (5*4 + 3*12) \quad (13*5)] \\ &= [-33 \quad 56 \quad 65] \end{aligned}$$

$$\therefore m \angle C = m \angle (A + B) \text{ का सम्पूरक का त्रिभुजांक} = [33 \quad 56 \quad 65]$$

$m \angle A, m \angle B$ तथा $m \angle C$ के त्रिभुजांक अवलोकन से $\sin A = \frac{12}{13}, \sin B = \frac{4}{5}, \sin C = \frac{56}{65}$

$$\cos A = \frac{5}{13}, \cos B = \frac{3}{5}, \cos C = \frac{33}{65}$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 \bullet a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C &= \frac{12}{13} : \frac{4}{5} : \frac{56}{65} = \frac{3}{13} : \frac{1}{5} : \frac{14}{65} = (3*5) : (1*13) : (14*1) \\ &= 15 : 13 : 14 \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \bullet a : b : c &= \{(\cos C * \cos A) + \cos B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\} : \{1 - \cos^2 C\} \\ &= \left\{ \left(\frac{33}{65} * \frac{5}{13} \right) + \frac{3}{5} \right\} : \left\{ \left(\frac{3}{5} * \frac{33}{65} \right) + \frac{5}{13} \right\} : \left\{ 1 - \left(\frac{33}{65} \right)^2 \right\} \\ &= \left\{ \frac{33}{169} + \frac{3}{5} \right\} : \left\{ \frac{99}{325} + \frac{5}{13} \right\} : \left\{ 1 - \frac{1089}{4225} \right\} = \left\{ \frac{165+507}{845} \right\} : \left\{ \frac{99+125}{325} \right\} : \frac{4225-1089}{4225} \end{aligned}$$

$$= \frac{672}{845} : \frac{224}{325} : \frac{3136}{4225} = \frac{224*3}{65*13} : \frac{224*1}{65*5} : \frac{224*14}{65*65} = \frac{3}{13} : \frac{1}{5} : \frac{14}{65} = 15 : 13 : 14 \quad \text{उत्तर}$$

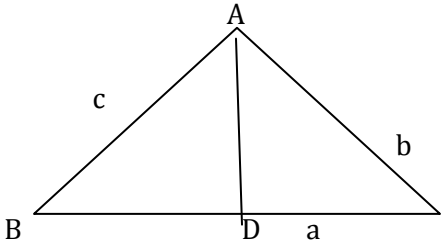
$$3 \bullet a : b : c = \{(\cos A * \cos B) + \cos C\} : \{1 - \cos^2 B\} : \{(\cos B * \cos C) + \cos A\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left(\frac{5}{13} * \frac{3}{5} \right) + \frac{33}{65} \right\} : \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \right\} : \left\{ \left(\frac{3}{5} * \frac{33}{65} \right) + \frac{5}{13} \right\} \\
&= \left\{ \frac{3}{13} + \frac{33}{65} \right\} : \left\{ 1 - \frac{9}{25} \right\} : \left\{ \frac{99}{325} + \frac{5}{13} \right\} = \left\{ \frac{15+33}{65} \right\} : \left\{ \frac{25-9}{25} \right\} : \left\{ \frac{99+125}{325} \right\} \\
&= \frac{48}{65} : \frac{16}{25} : \frac{224}{325} = \frac{16*3}{5*13} : \frac{16*1}{5*5} : \frac{16*14}{5*65} = \frac{3}{13} : \frac{1}{5} : \frac{14}{65} = 15 : 13 : 14 \quad \text{उत्तर}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. a : b : c &= \{ 1 - \cos^2 A \} : \{ (\cos A * \cos B) + \cos C \} : \{ (\cos C * \cos A) + \cos B \} \\
&= \left\{ 1 - \left(\frac{5}{13} \right)^2 \right\} : \left\{ \left(\frac{5}{13} * \frac{3}{5} \right) + \frac{33}{65} \right\} : \left\{ \left(\frac{33}{65} * \frac{5}{13} \right) + \frac{3}{5} \right\} \\
&= \left\{ 1 - \frac{25}{169} \right\} : \left\{ \frac{3}{13} + \frac{33}{65} \right\} : \left\{ \frac{33}{169} + \frac{3}{5} \right\} = \left\{ \frac{169-25}{169} \right\} : \left\{ \frac{15+33}{65} \right\} : \left\{ \frac{165+507}{845} \right\} \\
&= \frac{144}{169} : \frac{48}{65} : \frac{672}{845} = \frac{48*3}{13*13} : \frac{48*1}{13*5} : \frac{48*14}{13*65} = \frac{3}{13} : \frac{1}{5} : \frac{14}{65} = 15 : 13 : 14 \quad \text{उत्तर}
\end{aligned}$$

15-6 त्रिभुज का क्षेत्रफल गणना समिका प्रमेय

1. त्रिभुज के तीनों भुजाओं के ज्ञात माप के आधार पर



यदि त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप और तीनों भुजाओं के मापों का योग मान $2S = a + b + c$ के प्रति-

त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)}$ होगा।

प्रमाण

रचना शीर्ष A से आधार BC पर लम्ब AD अन्तरित कर त्रिभुज ABC की ऊँचाई माप mAD प्राप्त कीजिए।

उपपत्ति 1 त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $\Delta_A = \frac{1}{2} \{ mBC * mAD \}$ -----(1)

$$mBC = a \text{ इकाई माप, } mAD = \sqrt{(mAC)^2 - (mDC)^2} = \sqrt{b^2 - (mDC)^2}$$

$$\text{कोण न्यूवता सूत्र 1 के अनुसार } 2a * mDC = a^2 + b^2 - c^2 \Rightarrow mDC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

$$\begin{aligned}
\therefore mAD &= \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \right)^2} = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \sqrt{\frac{\{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\} * \{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\}}{4a^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\{(a^2 + b^2 + 2ab) - c^2\} * \{c^2 - (a^2 + b^2 - 2ab)\}}{4a^2}} = \sqrt{\frac{\{(a+b)^2 - c^2\} * \{c^2 - (a-b)^2\}}{4a^2}} = \sqrt{\frac{(a+b+c) * (a+b-c) * (c+a-b) * (c-a+b)}{4a^2}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c) * (a+b-c) * (c+a-b) * (b+c-a)}{4a^2}} = \sqrt{\frac{(2S) * (2S-2c) * (2S-2b) * (2S-2a)}{4a^2}} = \sqrt{\frac{16 * S * (S-c) * (S-b) * (S-a)}{4a^2}}
\end{aligned}$$

उक्त प्राप्तमान समिका 1 में प्रति स्थापित करने पर -

$$\begin{aligned}
\text{त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल } \Delta_A &= \frac{1}{2} \left\{ a * \frac{2}{a} \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \right\} \\
&= \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \quad \text{सिद्ध।}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{उपपत्ति 2 त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल } \Delta_A &= \frac{1}{2} \{ mBC * mAD \} = \frac{1}{2} \{ a * b * \sin C \} = \frac{1}{2} \left\{ a * b * \frac{2 \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{a * b} \right\} \\
&= \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \quad \text{सिद्ध}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{इसी प्रकार त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल } \Delta_A &= \frac{1}{2} \{ mCA * mBE \} = \frac{1}{2} \{ c * a * \sin B \} = \frac{1}{2} \left\{ c * a * \frac{2 \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{c * a} \right\} \\
&= \sqrt{S * (S - a) * (S - b) * (S - c)} \quad \text{सिद्ध}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{त्रिभुज } A B C \text{ का क्षेत्रफल } \blacksquare_A &= \frac{1}{2} \{ mCA * mCF \} = \frac{1}{2} \{ b * c * \sin B \} = \frac{1}{2} \left\{ b * c * \frac{2\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{b * c} \right\} \\ &= \sqrt{S * (S-a) * (S-b) * (S-c)} \quad \text{सिद्ध}\end{aligned}$$

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने विषयक उदाहरण

1• त्रिभुज के तीनों भुजाओं के ज्ञात माप के आधार पर

उदाहरण■ उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाएँ 45, 32 एवं 25 इकाई माप की है।

हल प्रश्नानुसार त्रिभुज की भुजा माप $a=45, b=32$ एवं $c=25$ इकाई माप की है।

$$\therefore S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{45+32+25}{2} = \frac{102}{2} = 51 \text{ इकाई माप}$$

$$\begin{aligned}\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A &= \sqrt{S * (S-a) * (S-b) * (S-c)} = \sqrt{51(51-45)(51-32)(51-25)} \\ &= \sqrt{51 * 6 * 19 * 26} \\ &= \sqrt{3 * 17 * 2 * 3 * 19 * 2 * 13} \\ &= 3 * 2\sqrt{17 * 19 * 13} \\ &= 6\sqrt{4199} = 6 * 64.8 = 408.8 \text{ इकाई माप वर्ग उत्तर}\end{aligned}$$

2• त्रिभुज के किसी एक शीर्ष के सम्मुख भुजा माप एवं शेष दोनों शीर्ष पर अन्तरित अन्तः कोण माप के प्रति कोई त्रिकोणमिति निष्पत्ति अथवा त्रिभुजांक ज्ञात हो

उदाहरण■ त्रिभुजाकार क्षेत्र $A B C$ के शेष भुजाओं माप ज्ञात कर क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

यदि भुजा $CA = 39$ मीटर $\tan A = \frac{12}{5}$ और $\tan B = \frac{3}{4}$ हो तो $a : b : c$ का मानक मान ज्ञात कीजिए।

$$\tan A = \frac{12}{5} \text{ से } m \angle A \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\tan B = \frac{3}{4} \text{ से } m \angle B \text{ का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\therefore m \angle(A+B) \text{ का त्रिभुजांक} &= \begin{bmatrix} (5*4 - 12*3) & (5*3 + 4*12) & (13*5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -16 & 63 & 65 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\therefore m \angle C = m \angle(A+B) \text{ का सम्पूरक का त्रिभुजांक} = \begin{bmatrix} 16 & 63 & 65 \end{bmatrix}$$

$m \angle A, m \angle B$ तथा $m \angle C$ के त्रिभुजांक अवलोकन से $\sin A = \frac{12}{13}, \sin B = \frac{4}{5}, \sin C = \frac{63}{65}$

$$\begin{aligned}\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C &= \frac{12}{13} : \frac{3}{5} : \frac{63}{65} = \frac{4}{13} : \frac{1}{5} : \frac{21}{65} \\ &= (4*5) : (1*13) : (21*1) = 20 : 13 : 21\end{aligned}$$

$\therefore$ भुजा $CA = b = 39 = 3*13$ मीटर के सापेक्ष $BC = a = 3*20 = 60$ मीटर तथा $AB = c = 3*21 = 63$ मीटर

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{60+39+63}{2} = \frac{162}{2} = 81 \text{ मीटर से-}$$

$$1 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ a * b * \sin C \} = \frac{1}{2} \{ 60 * 39 * \frac{63}{65} \} = 6 * 3 * 63 = 1134 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$2 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ b * c * \sin A \} = \frac{1}{2} \{ 39 * 63 * \frac{12}{13} \} = 3 * 63 * 6 = 1134 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$3 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ c * a * \sin B \} = \frac{1}{2} \{ 63 * 60 * \frac{3}{5} \} = 63 * 6 * 3 = 1134 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$\begin{aligned}4 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A &= \sqrt{S * (S-a) * (S-b) * (S-c)} \\ &= \sqrt{81(81-60)(81-39)(81-63)} \\ &= \sqrt{81 * 21 * 42 * 18} \\ &= \sqrt{9 * 9 * 21 * 2 * 21 * 2 * 3 * 3}\end{aligned}$$

$$= 9 \times 21 \times 2 \times 3 = 1134 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

3• त्रिभुज के किन्ही दो शीर्ष के सम्मुख भुजा माप एवं तीसरे शीर्ष पर अन्तरित अन्तः कोण माप के प्रति कोई त्रिकोणमिति निष्पत्ति अथवा त्रिभुजांक ज्ञात हो

उदाहरण ■ त्रिभुजाकार क्षेत्र ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि भुजा CA और AB क्रमशः 52 और 84 मीटर एवं $\tan B = \frac{3}{4}$ है।

हल $\tan B = \frac{3}{4}$ से $m \angle B$ का त्रिभुजांक = [4 3 5], से $\sin B = \frac{3}{5}$

$$b : c = \sin B : \sin C \Rightarrow \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin B}{52} = \frac{\sin C}{84} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{13} = \frac{\sin C}{21} \Rightarrow \frac{3}{65} = \frac{\sin C}{21} \text{ से}$$

$$\sin C = \frac{3 \times 21}{65} = \frac{63}{65} \quad m \angle C \text{ का त्रिभुजांक} = [16 \quad 63 \quad 65]$$

$$m \angle (B + C) \text{ का त्रिभुजांक} = [(4 \times 16 - 3 \times 63) \quad (4 \times 63 + 16 \times 3) \quad (5 \times 65)] \\ = [-125 \quad 300 \quad 325] = [-5 \quad 12 \quad 13]$$

$$\therefore m \angle A = m \angle (B + C) \text{ का सम्पूरक का त्रिभुजांक} = [5 \quad 12 \quad 13]$$

$$m \angle A, m \angle B \text{ तथा } m \angle C \text{ के त्रिभुजांक अवलोकन से} - \sin A = \frac{12}{13}, \sin B = \frac{3}{5}, \sin C = \frac{63}{65}$$

$$\therefore a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = \frac{12}{13} : \frac{3}{5} : \frac{63}{65} = \frac{4}{13} : \frac{1}{5} : \frac{21}{65} \\ = (12 \times 5) : (3 \times 13) : (63) = 20 : 13 : 21$$

$\therefore$ भुजा CA = b = 52 = 4×13 मीटर अथवा AB = c = 84 = 4×21 के सापेक्ष BC = a = $4 \times 20 = 80$ मीटर

$$S = \frac{a+b+c}{2} = \frac{80+52+84}{2} = \frac{216}{2} = 108 \text{ मीटर से-}$$

$$1 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ a \cdot b \cdot \sin C \} = \frac{1}{2} \{ 80 \cdot 52 \cdot \frac{63}{65} \} = 8 \cdot 4 \cdot 63 = 2016 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$2 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ b \cdot c \cdot \sin A \} = \frac{1}{2} \{ 39 \cdot 63 \cdot \frac{12}{13} \} = 4 \cdot 63 \cdot 8 = 2016 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$3 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \frac{1}{2} \{ c \cdot a \cdot \sin B \} = \frac{1}{2} \{ 63 \cdot 60 \cdot \frac{3}{5} \} = 63 \cdot 8 \cdot 4 = 2016 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

$$4 \text{ गणना समिका- त्रिभुज का क्षेत्रफल } \blacksquare_A = \sqrt{S \cdot (S - a) \cdot (S - b) \cdot (S - c)} \\ = \sqrt{108(108 - 80)(108 - 52)(108 - 84)} \\ = \sqrt{108 \cdot 28 \cdot 56 \cdot 24} \\ = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 28 \cdot 2 \cdot 12} \\ = 3 \cdot 12 \cdot 28 \cdot 2 = 2016 \text{ मीटर वर्ग उत्तर}$$

[3] बीजांक सूत्र

त्रिभुज के साधन अन्तर्गत बीजांक सूत्र का अनुप्रयोग के पूर्व पुनः स्पष्ट कर देना यथेष्ट होगा कि – सरल त्रिकोणमिति अध्याय 6 के सारभूत अध्ययन के अनुसार $m \angle \theta$ का बीजांक [p q] के दोनों अवयव p और q $m \angle \frac{\theta}{2}$ के त्रिभुजांक (x y z) के प्रथम दो अवयव आधार x और लम्ब y होंगे। अतः त्रिभुजांकों की कार्यविधि का अनुप्रयोग कर दो कोणों के योग एवं अन्तर मान का के लिए बीजांक प्राप्त कर सकते हैं। इसी प्रकार दो कोणों के बीजांक के योग एवं अन्तरमान का बीजांक क्रमशः उनके सापेक्ष प्राप्त त्रिभुजांकों के योग एवं अन्तरमान का बीजांक होता है। उक्त सारभूत कथन का अनुप्रयोग त्रिभुज के साधन का नवीन उप शीर्षक **बीजांक सूत्र** जोड़ा जा रहा है।

सरल त्रिकोणमिति अध्याय 6 के सारभूत अध्ययन के अनुसार

$$1 \bullet m \angle \theta \text{ के त्रिभुजांक } [x y z] \text{ के सापेक्ष उसी कोण माप } m \angle \theta \text{ का बीजांक } [p q] = [(z+x) y]$$

$$2 \bullet m \angle \theta \text{ के त्रिभुजांक } [x y z] \text{ के सापेक्ष उसी कोण माप } m \angle \theta \text{ का बीजांक } [p q] = [\sqrt{z+x} \quad \sqrt{z-x}]$$

3• $m \angle \theta$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष कोण माप $m \angle 2\theta$ का बीजांक $[p \ q] = (x \ y)$

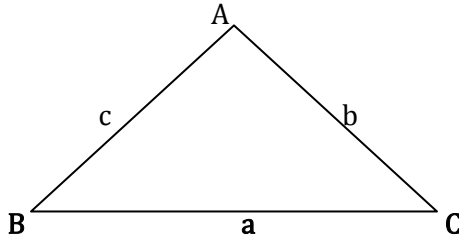
4• $m \angle \theta$ का बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle \frac{\theta}{2}$ का बीजांक $= [\{\sqrt{p^2 + q^2} + p\} \ q]$

5• $m \angle \theta$ का बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle \frac{\theta}{2}$ का त्रिभुजांक $= [p \ q \ \sqrt{p^2 + q^2}]$

6• $m \angle \theta$ का बीजांक $[p \ q]$ के सापेक्ष $m \angle \theta$ का त्रिभुजांक $= [\{p^2 - q^2\} \ \{2pq\} \ \{p^2 + q^2\}]$

टीप $m \angle \theta$ के त्रिभुजांक $[x \ y \ z]$ के सापेक्ष उसी कोण माप $m \angle \theta$ का बीजांक $[p \ q] = [\sqrt{z+x} \ \sqrt{z-x}]$ यथेष्ट नहीं होगा। इसके लिए $m \angle \theta$ का बीजांक $[p \ q] = [(z+x) \ y] = [y \ (z-x)]$ ही यथेष्ट हल होगा।

15-7 त्रिभुज के भुजाओं के सापेक्ष शीर्षों पर अन्तरित अतः कोण माप का बीजांक



यदि त्रिभुज ABC के तीनों शीर्षों के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप की हो तो कोण न्यूनता सूत्र के तहत—

$$1• \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad 2• \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$3• \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ प्रमाणित है तब—}$$

$m \angle A$ का बीजांक गणना

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{ से } m \angle A \text{ का त्रिभुजांक } [x \ y \ z] = [\{b^2 + c^2 - a^2\} \ \{-----\} \ \{2bc\}]$$

$$= [\{b^2 + c^2 - a^2\} \ \{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}\} \ \{2bc\}]$$

$\therefore m \angle A$ का त्रिभुजांक के सापेक्ष

$$m \angle A \text{ का बीजांक } [p_A \ q_A] = [\sqrt{z+x} \ \sqrt{z-x}]$$

$$= [\sqrt{(2bc) + (b^2 + c^2 - a^2)} \ \sqrt{(2bc) - (b^2 + c^2 - a^2)}]$$

$$= [\sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc) - a^2} \ \sqrt{a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)}]$$

$$= [\sqrt{(b+c)^2 - a^2} \ \sqrt{a^2 - (b-c)^2}]$$

$$= [\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)} \ \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)}]$$

$$= [\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)} \ \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}] \text{ -----(1)}$$

$$a+b+c = 2S \text{ से } b+c-a = 2S - 2a = 2(S-a), \quad (c+a-b) = 2S - 2b = 2(S-b),$$

$$(a+b-c) = 2S - 2c = 2(S-c), \text{ समिका (1) में प्रतिस्थालित करने पर}$$

$$m \angle A \text{ का बीजांक } [p_A \ q_A] = [\sqrt{(2S)} \ \{2(S-a)\} \ \sqrt{\{2(S-b)\} \ \{2(S-c)\}}]$$

$$= [\sqrt{S(S-a)} \ \sqrt{(S-b)(S-c)}] \text{ -----(2)}$$

$$\text{इसी प्रकार } m \angle B \text{ का बीजांक } [p_B \ q_B] = [\sqrt{(c+a+b)(c+a-b)} \ \sqrt{(a+b-c)(b+c-a)}] \text{ -----(1)}$$

$$= [\sqrt{S(S-b)} \ \sqrt{(S-c)(S-a)}] \text{ -----(2)}$$

$$m \angle C \text{ का बीजांक } [p_C \ q_C] = [\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)} \ \sqrt{(b+c-a)(c+a-b)}] \text{ -----(1)}$$

$$= [\sqrt{S(S-c)} \ \sqrt{(S-a)(S-b)}] \text{ -----(2)}$$

15-8 त्रिभुज के शीर्षों पर अन्तरित किन्हीं दो अतः कोण माप के योग एवं अन्तर मान का आदर्श बीजांकों का प्रमेय—

त्रिभुज शीर्षों पर अन्तरित किन्हीं दो अतः कोण माप के योग एवं अन्तर मान का आदर्श बीजांकों का अनुपात मान और

उन अन्तः कोणों के संगत क्रम में सम्मुख भुजा माप के क्रमशः अन्तर एवं योग मान का अनुपात मान बराबर होता है।

या सरल शब्दों में त्रिभुज शीर्षों पर अन्तरित किन्हीं दो अतः कोण माप के योगमान का बीजांक और उनके संगत भुजाओं के मापों के

योगमान का गुणनफल, उन्हीं दो अतः कोण माप के संगत अन्तरमान का बीजांक और उनके संगत भुजाओं के मापों के अन्तरमान का

गुणनफल के बराबर होगा।

अर्थात् यदि त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष A B C के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप की हो तो –

$$1• [m \angle(A + B) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(A - B) \text{ का बीजांक}] = (a - b) : (a + b)$$

$$\text{या } [m \angle(A + B) \text{ का बीजांक}] * (a + b) = [m \angle(A - B) \text{ का बीजांक}] * (a - b)$$

$$2• [m \angle(B + A) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(B - A) \text{ का बीजांक}] = (b - a) : (b + a)$$

$$\text{या } [m \angle(B + A) \text{ का बीजांक}] * (b + a) = [m \angle(B - A) \text{ का बीजांक}] * (b - a)$$

$$3• [m \angle(B + C) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(B - C) \text{ का बीजांक}] = (b - a) : (b + c)$$

$$\text{या } [m \angle(B + C) \text{ का बीजांक}] * (b + c) = [m \angle(B - C) \text{ का बीजांक}] * (b - c)$$

$$4• [m \angle(C + B) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(C - B) \text{ का बीजांक}] = (c - a) : (c + b)$$

$$\text{या } [m \angle(C + B) \text{ का बीजांक}] * (c + b) = [m \angle(C - B) \text{ का बीजांक}] * (c - b)$$

$$5• [m \angle(C + A) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(C - A) \text{ का बीजांक}] = (c - a) : (c + b)$$

$$\text{या } [m \angle(C + A) \text{ का बीजांक}] * (c + a) = [m \angle(C - A) \text{ का बीजांक}] * (c - a)$$

$$6• [m \angle(A + C) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(A - C) \text{ का बीजांक}] = (a - c) : (a + c)$$

$$\text{या } [m \angle(A + C) \text{ का बीजांक}] * (a + c) = [m \angle(A - C) \text{ का बीजांक}] * (a - c)$$

प्रमाण (1) अनुच्छेद 15-7 के अनुसार

$$m \angle A \text{ का बीजांक} = [\sqrt{S(S-a)} \quad \sqrt{(S-b)(S-c)}]$$

$$m \angle B \text{ का बीजांक} = [\sqrt{S(S-b)} \quad \sqrt{(S-c)(S-a)}]$$

∴ अनुच्छेद 15-6 के अनुसार

$$\begin{aligned} m \angle(A + B) \text{ का बीजांक} &= [\{ \sqrt{S^2(S-a)(S-b)} - \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)^2} \} \\ &\quad \{ \sqrt{S(S-b)^2(S-c)} \} + \sqrt{S(S-c)(S-a)^2}] \\ &= [\{ (S-S+c) \sqrt{(S-a)(S-b)} \} \{ (S-b+S-a) \sqrt{S(S-c)} \}] \\ &= [\{ c \sqrt{(S-a)(S-b)} \} \{ 2S-a-b \} \sqrt{S(S-c)}] \\ &= [c \sqrt{(S-a)(S-b)} \quad c \sqrt{S(S-c)}] \\ &= [\sqrt{(S-a)(S-b)} \quad \sqrt{S(S-c)}] \end{aligned}$$

$$m \angle(A + B) \text{ का आदर्श बीजांक} = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)}}{\sqrt{S(S-c)}} \text{ -----(1)}$$

$$\begin{aligned} m \angle(A - B) \text{ का बीजांक} &= [\{ \sqrt{S^2(S-a)(S-b)} + \sqrt{(S-a)(S-b)(S-c)^2} \} \\ &\quad \{ \sqrt{S(S-b)^2(S-c)} - \sqrt{S(S-c)(S-a)^2} \}] \\ &= [\{ (S+S-c) \sqrt{(S-a)(S-b)} \} \{ (S-b-S+a) \sqrt{S(S-c)} \}] \\ &= [\{ (2S-c) \sqrt{(S-a)(S-b)} \} \{ (a-b) \sqrt{S(S-c)} \}] \\ &= [\{ (a+b) \sqrt{(S-a)(S-b)} \} \{ (a-b) \sqrt{S(S-c)} \}] \end{aligned}$$

$$m \angle(A - B) \text{ का आदर्श बीजांक} = \frac{(a+b) \sqrt{(S-a)(S-b)}}{(a-b) \sqrt{S(S-c)}} \text{ -----(2)}$$

समिका (1) और (2) से

$$[m \angle(A + B) \text{ का बीजांक}]:[m \angle(A - B) \text{ का बीजांक}] = \frac{\sqrt{(S-a)(S-b)}}{\sqrt{S(S-c)}} : \frac{(a+b) \sqrt{(S-a)(S-b)}}{(b-a) \sqrt{S(S-c)}}$$

$$= 1 : \frac{a+b}{a-b} = (a-b) : (b+a) \text{ सिद्ध।}$$

या $[m \angle(A+B) \text{ का बीजांक}] * (a+b) = [m \angle(A-B) \text{ का बीजांक}] * (a-b)$ सिद्ध।

प्रमाण (2) ज्यामिति रचना प्रमाण

$[m \angle(A+B) \text{ का बीजांक}] : [m \angle(A-B) \text{ का बीजांक}] = (a-b) : (b+a)$ प्रमाण हेतु ज्यामिति आकृति 15-1 के अनुसार -

ज्ञात है- त्रिभुज ABC के तीनों शीर्ष A B C के सम्मुख भुजाओं के ज्ञात माप क्रमशः a, b, c इकाई माप के है।

$m \angle A$ का बीजांक $[p_1 \ q_1]$ और $m \angle B$ का बीजांक $[p_2 \ q_2]$ है।

सिद्ध करना है $[m \angle(A+B) \text{ का बीजांक}] : [m \angle(A-B) \text{ का बीजांक}] = (a-b) : (b+a)$

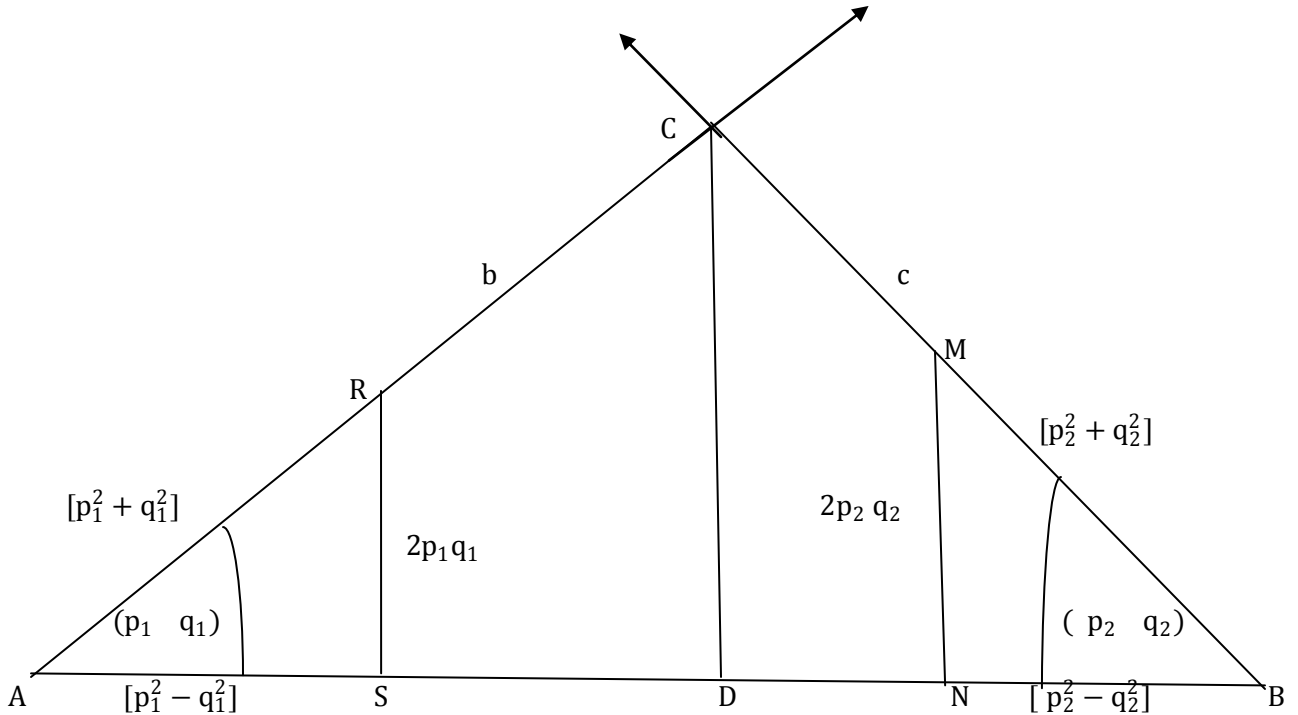
रचना शीर्ष C तथा भुजा AC एवं BC के कोई और अन्य बिन्दु क्रमशः R एवं M से भुजा AB (आवश्यकतानुसार बढ़ाने)

पर क्रमशः लम्ब CD तथा RS एवं MN अन्तरित कीजिए।

उपपत्ति अनुच्छेद 6-3 त्रिभुजांक सदृश्य बीजांक (त्रि. स. बी.) अन्तर्गत अदक्ष एवं दक्ष बीजांक के व्याख्या में स्पष्ट किया गया है कि बीजांक (p, q) के प्रति प्राप्त त्रिभुजांक $[(p^2 - q^2), (2pq), (p^2 + q^2)]$ होगा।

अतः $m \angle A$ का बीजांक $(p_1 \ q_1)$ के सापेक्ष $m \angle A$ का त्रिभुजांक $= [\{p_1^2 - q_1^2\} \ \{p_1 q_1\} \ \{p_1^2 + q_1^2\}]$
जो कि समकोण त्रिभुज ASR के रूप में दर्शित है।

$m \angle B$ का बीजांक $(p_2 \ q_2)$ के सापेक्ष $m \angle B$ का त्रिभुजांक $= [\{p_2^2 - q_2^2\} \ \{p_2 q_2\} \ \{p_2^2 + q_2^2\}]$
जो कि समकोण त्रिभुज BNM के रूप में दर्शित है।



आकृति 15-1

$m \angle(A+B) \text{ का बीजांक} = [\{p_1 p_2 - q_1 q_2\} \ \{p_2 q_1 + p_1 q_2\}]$

$m \angle(A+B) \text{ का आदर्श बीजांक} = \frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{p_2 q_1 + p_1 q_2}$

$m \angle(A-B) \text{ का बीजांक} = [\{p_1 p_2 + q_1 q_2\} \ \{p_2 q_1 - p_1 q_2\}]$

$$m \angle(A - B) \text{ का आदर्श बीजांक} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2}$$

$$\begin{aligned} [m \angle(A + B) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(A - B) \text{ का आदर्श बीजांक}] &= \frac{p_1 p_2 - q_1 q_2}{p_2 q_1 + p_1 q_2} : \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{p_2 q_1 - p_1 q_2} \\ &= [\{p_1 p_2 - q_1 q_2\} * \{p_2 q_1 - p_1 q_2\}] : [\{p_1 p_2 + q_1 q_2\} * \{p_2 q_1 + p_1 q_2\}] \\ &= [p_1 q_1 p_2^2 - p_2 q_2 q_1^2 - p_2 q_2 p_1^2 + p_1 q_1 q_2^2] : [p_1 q_1 p_2^2 + p_2 q_2 q_1^2 + p_2 q_2 p_1^2 + p_1 q_1 q_2^2] \\ &= [\{p_2^2 + q_2^2\} * p_1 q_1 - \{p_1^2 + q_1^2\} * p_2 q_2] : [\{p_2^2 + q_2^2\} * p_1 q_1 + \{p_1^2 + q_1^2\} * p_2 q_2] \text{ -----(1)} \end{aligned}$$

$$[m \angle(A + B) \text{ का बीजांक}] : [m \angle(A - B) \text{ का बीजांक}] = (a - b) : (b + a) \text{ प्रमाण हेतु ज्यामिति आकृति ।}$$

रचना से— 1• समकोण त्रिभुज ASR और समकोण त्रिभुज ADC समरूप होंगे ।

$$\text{अतः भुजा } AC = b = \{p_1^2 + q_1^2\} * v, AD = \{p_1^2 - q_1^2\} * v, DC = \{p_1 q_1\} * v$$

2• समकोण त्रिभुज BNM और समकोण त्रिभुज BDC समरूप होंगे ।

$$\text{अतः भुजा } BC = a = \{p_2^2 + q_2^2\} * w, BD = \{p_2^2 - q_2^2\} * w, DC = \{p_2 q_2\} * w$$

$$DC = \{p_1 q_1\} * v = \{p_2 q_2\} * w \text{ से } v = \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1} * w$$

$$\begin{aligned} \text{भुजा } AB = c = AD + BD &= \{p_1^2 - q_1^2\} * v + \{p_2^2 - q_2^2\} * w \\ &= \{p_1^2 - q_1^2\} * \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1} * w + \{p_2^2 - q_2^2\} * w \end{aligned}$$

तीनों शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप θ_1, θ_2 और θ_3 के सम्मुख भुजा माप a, b और c का निम्नानुसार मानक अनुपात गणन समिका में किन्ही एक का अनुप्रयोग कर $a : b : c$ का मानक हल प्राप्त कीजिए।

$$= [\{p_1^2 - q_1^2\} * \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1} + \{p_2^2 - q_2^2\}] * w$$

$$\text{भुजा } AC = b = \{p_1^2 + q_1^2\} * v = \{p_1^2 + q_1^2\} * \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1} * w$$

$$\text{भुजा } BC = a = \{p_2^2 + q_2^2\} * w$$

$$\begin{aligned} \text{तब } (a-b) : (a+b) &= [\{p_2^2 + q_2^2\} - \{p_1^2 + q_1^2\} * \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1}] : [\{p_2^2 + q_2^2\} + \{p_1^2 + q_1^2\} * \frac{p_2 q_2}{p_1 q_1}] \\ &= [\{p_2^2 + q_2^2\} * p_1 q_1 - \{p_1^2 + q_1^2\} * p_2 q_2] : [\{p_2^2 + q_2^2\} * p_1 q_1 + \{p_1^2 + q_1^2\} * p_2 q_2] \text{ -----(2)} \end{aligned}$$

(1) और (2) से $[m \angle(A + B) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(A - B) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (a-b) : (a+b)$ सिद्ध ।

या $[m \angle(A + B) \text{ का बीजांक}] * (a+b) = [m \angle(A - B) \text{ का बीजांक}] * (a-b)$ सिद्ध ।

इसी प्रकार 2• $[m \angle(B + A) \text{ का बीजांक}] : [m \angle(B - A) \text{ का बीजांक}] = (b - a) : (b + a)$

या $[m \angle(B + A) \text{ का बीजांक}] * (b+a) = [m \angle(B - A) \text{ का बीजांक}] * (b-a)$

3• $[m \angle(B + C) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (b - a) : (b + c)$

या $[m \angle(B + C) \text{ का बीजांक}] * (b+c) = [m \angle(B - C) \text{ का बीजांक}] * (b-c)$

4• $[m \angle(C + B) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(C - B) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (c - a) : (c + b)$

या $[m \angle(C + B) \text{ का बीजांक}] * (c+b) = [m \angle(C - B) \text{ का बीजांक}] * (c-b)$

5• $[m \angle(C + A) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(C - A) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (c - a) : (c + b)$

या $[m \angle(C + A) \text{ का बीजांक}] * (c+a) = [m \angle(C - A) \text{ का बीजांक}] * (c-a)$

6• $[m \angle(A + C) \text{ का आदर्श बीजांक}] : [m \angle(A - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (a - c) : (a + c)$

या $[m \angle(A + C) \text{ का बीजांक}] * (a+c) = [m \angle(A - C) \text{ का बीजांक}] * (a-c)$ सिद्ध कीजिए।

15-9 किन्हीं दो अन्तः कोण माप के ज्ञात बीजांक के सापेक्ष तीसरे कोण का बीजांक

त्रिभुज के तीनों शीर्षों पर अन्तरित अन्तः कोण माप θ_1, θ_2 और θ_3 में $m\angle\theta_1$ का बीजांक $[p_1 \ q_1]$ तथा $m\angle\theta_2$ का बीजांक $[p_2 \ q_2]$ हो तो $m\angle\theta_3$ का बीजांक $[(p_2q_1 + p_1q_2) \ (p_1p_2 - q_1q_2)]$

प्रमाण $m\angle(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = 180^\circ$ का बीजांक $[\ 0 \quad 1]$

$m\angle\theta_1$ का बीजांक $[\ p_1 \quad q_1]$

$m\angle\theta_2$ का बीजांक $[\ p_2 \quad q_2]$

$\therefore m\angle(\theta_1 + \theta_2)$ का बीजांक $[\{p_1p_2 - q_1q_2\} \ \{p_2q_1 + p_1q_2\}]$

$\therefore m\angle\theta_3 = m\angle\{180 - (\theta_1 + \theta_2)\}$ का बीजांक $[\ (p_2q_1 + p_1q_2) \ \{p_1p_2 - q_1q_2\}]$ **सिद्ध**

उदाहरण 1 ■ त्रिभुज ABC में भुजा AB और CA क्रमशः 2 और 3 इकाई माप की है। $m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(P)=3$ के प्रति $m\angle B$ और $m\angle C$ का बीजांक तथा भुजा BC का ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार भुजा AB = c = 2 इकाई माप भुजा CA = b = 3 इकाई माप

$m\angle(A + B + C) = m\angle 180^\circ$ का बीजांक = $[0 \quad 1]$

$m\angle A$ का आदर्श बीजांक $F(P)=3$ से $m\angle A$ का बीजांक = $[3 \quad 1]$

$\therefore m\angle(B + C)$ का बीजांक = $m\angle(180^\circ - A)$ का बीजांक = $[1 \quad 3]$ -----(1)

$m\angle(B + C)$ का आदर्श बीजांक = $\frac{1}{3}$

$[m\angle(B + C) \text{ का आदर्श बीजांक}]:[m\angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (b - c):(b + c)$

$\Rightarrow [m\angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (b - c) = [m\angle(B + C) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (b + c)$

$\Rightarrow [m\angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (3 - 2) = \frac{1}{3} * (3 + 2)$

$\Rightarrow [m\angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] * 1 = \frac{1}{3} * 5 \Rightarrow [m\angle(B - C) \text{ का आदर्श बीजांक}] = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow [m\angle(B - C) \text{ का बीजांक}] = [5 \quad 3]$ -----(2)

बीजांक समिका (1) और (2) से

1• $m\angle\{(B + C) + (B - C)\} = m\angle 2B$ का बीजांक = $[\{(1*5) - (3*3)\} \ \{(5*3) + (1*3)\}]$
= $[4 \quad 18] = [2 \quad 9]$

आधे कोण माप के बीजांक नियम से $m\angle B$ का बीजांक = $[\{\sqrt{2^2 + 9^2} + 2\} \quad 9]$

= $[\{\sqrt{85} - 2\} \quad 9]$ **उत्तर**

2• $m\angle\{(B + C) - (B - C)\} = m\angle 2C$ का बीजांक = $[\{(1*5) + (3*3)\} \ \{(5*3) - (1*3)\}]$
= $[14 \quad 12] = [7 \quad 6]$

आधे कोण माप के बीजांक नियम से $m\angle C$ का बीजांक = $[\{\sqrt{7^2 + 6^2} + 7\} \quad 6]$

= $[\{\sqrt{85} + 7\} \quad 6]$ **उत्तर**

भुजा BC = a का माप ज्ञात करने

$m\angle(A + B + C) = m\angle 180^\circ$ का बीजांक = $[0 \quad 1]$

$m\angle C$ का बीजांक = $[\{\sqrt{85} + 7\} \quad 6]$

$\therefore m\angle(B + A) = m\angle(180^\circ - C)$ का बीजांक = $[6 \quad (\sqrt{85} + 7)]$

$m\angle(B + A)$ का आदर्श बीजांक = $[\frac{6}{\sqrt{85} + 7}] = \frac{6}{\sqrt{85} + 7} * \frac{\sqrt{85} - 7}{\sqrt{85} - 7} = \frac{6(\sqrt{85} - 7)}{36} = \frac{\sqrt{85} - 7}{6}$

$m\angle B$ का बीजांक = $[\{\sqrt{85} - 2\} \quad 9]$

$$m \angle A \text{ का बीजांक} = [\begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix}]$$

$$\therefore m \angle (B - A) \text{ का बीजांक} = [\{3*(\sqrt{85} - 2) + 9*1\} \quad \{3*9 - 1*(\sqrt{85} - 2)\}]$$

$$= [\{3\sqrt{85} + 3\} \quad \{29 - \sqrt{85}\}]$$

$$m \angle (B - A) \text{ का आदर्श बीजांक} = [\frac{3\sqrt{85} + 3}{29 - \sqrt{85}}] = \frac{3\sqrt{85} + 3}{29 - \sqrt{85}} * \frac{29 + \sqrt{85}}{29 + \sqrt{85}} = \frac{342 + 90\sqrt{85}}{756} = \frac{19 + 5\sqrt{85}}{42}$$

$$[m \angle (B + A) \text{ का आदर्श बीजांक}]:[m \angle (B - A) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (b - a):(b + a)$$

$$\Rightarrow [m \angle (B - A) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (b - a) = [m \angle (B + A) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (b + a)$$

$$\Rightarrow [\frac{19 + 5\sqrt{85}}{42}] * (3 - a) = \frac{\sqrt{85} - 7}{6} (3 + a)$$

$$\Rightarrow [\frac{19 + 5\sqrt{85}}{7}] * (3 - a) = (\sqrt{85} - 7) (3 + a)$$

$$\Rightarrow \{(\sqrt{85} - 7) + \frac{19 + 5\sqrt{85}}{7}\}a = 3 * \{(\frac{19 + 5\sqrt{85}}{7}) - (\sqrt{85} - 7)\}$$

$$\Rightarrow \{7\sqrt{85} - 49 + 19 + 5\sqrt{85}\}a = 3 * [19 + 5\sqrt{85} - 7\sqrt{85} + 49]$$

$$\Rightarrow \{12\sqrt{85} - 30\}a = 3 * [68 - 2\sqrt{85}]$$

$$\Rightarrow \{2\sqrt{85} - 5\}a = 34 - \sqrt{85}$$

$$\Rightarrow a = \frac{34 - \sqrt{85}}{2\sqrt{85} - 5} = \frac{34 - \sqrt{85}}{2\sqrt{85} - 5} * \frac{2\sqrt{85} + 5}{2\sqrt{85} + 5} * \frac{68\sqrt{85} - 170 + 170 - 5\sqrt{85}}{340 - 25} = \frac{63\sqrt{85}}{315} = \frac{\sqrt{85}}{5}$$

$$= 1.84390 \text{ इकाई उत्तर}$$

अथवा

$$m \angle (A + B + C) = m \angle 180^\circ \text{ का बीजांक} = [\begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix}]$$

$$m \angle B \text{ का बीजांक} = [\{\sqrt{85} - 2\} \quad 9]$$

$$\therefore m \angle (C + A) = m \angle (180^\circ - B) \text{ का बीजांक} = [\begin{matrix} 9 & (\sqrt{85} - 2) \end{matrix}]$$

$$m \angle (C + A) \text{ का आदर्श बीजांक} = [\frac{9}{\sqrt{85} - 2}] = \frac{9}{\sqrt{85} - 2} * \frac{9(\sqrt{85} + 2)}{\sqrt{85} + 2} = \frac{9(\sqrt{85} + 2)}{81} = \frac{(\sqrt{85} + 2)}{9}$$

$$m \angle C \text{ का बीजांक} = [\{\sqrt{85} + 7\} \quad 6]$$

$$m \angle A \text{ का बीजांक} = [\begin{matrix} 3 & 1 \end{matrix}]$$

$$\therefore m \angle (C - A) \text{ का बीजांक} = [\{3*(\sqrt{85} + 7) + 6*1\} \quad \{3*6 - 1*(\sqrt{85} + 7)\}]$$

$$= [\{3\sqrt{85} + 27\} \quad \{11 - \sqrt{85}\}]$$

$$m \angle (C - A) \text{ का आदर्श बीजांक} = [\frac{3\sqrt{85} + 27}{11 - \sqrt{85}}] = \frac{3\sqrt{85} + 27}{11 - \sqrt{85}} * \frac{11 + \sqrt{85}}{11 + \sqrt{85}} = \frac{33\sqrt{85} + 297 + 255 + 27\sqrt{85}}{121 - 85}$$

$$= \frac{60\sqrt{85} + 552}{36} = \frac{5\sqrt{85} + 46}{3}$$

$$[m \angle (C + A) \text{ का आदर्श बीजांक}]:[m \angle (C - A) \text{ का आदर्श बीजांक}] = (c - a):(c + a)$$

$$\Rightarrow [m \angle (C - A) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (c - a) = [m \angle (C + A) \text{ का आदर्श बीजांक}] * (c + a)$$

$$\Rightarrow [\frac{5\sqrt{85} + 46}{3}] * (2 - a) = \frac{(\sqrt{85} + 2)}{9} (2 + a)$$

$$\Rightarrow [15\sqrt{85} + 138] * (2 - a) = (\sqrt{85} + 2) (2 + a)$$

$$\Rightarrow I(\sqrt{85} + 2) + (15\sqrt{85} + 138)a = 2 * [(15\sqrt{85} + 138) - (\sqrt{85} + 2)]$$

$$\Rightarrow [16\sqrt{85} + 140]a = 2*[14\sqrt{85} + 136]$$

$$\Rightarrow [4\sqrt{85} + 35]a = 7\sqrt{85} + 68]$$

$$a = \frac{7\sqrt{85} + 68}{4\sqrt{85} + 35} = \frac{7\sqrt{85} + 68}{4\sqrt{85} + 35} * \frac{4\sqrt{85} - 35}{4\sqrt{85} - 35} = \frac{2380 + (272 - 245)\sqrt{85} - 2380}{1360 - 1225} = \frac{27\sqrt{85}}{135} = \frac{\sqrt{85}}{5}$$

$$= 1.84390 \text{ इकाई उत्तर}$$

उदाहरण 2■ त्रिभुज ABC में भुजा CA = 20 इकाई माप $m\angle B$ का त्रिभुजांक [12 5 13] तथा $m\angle C$ का त्रिभुजांक [3 4 5] के प्रति भुजा AB एवं BC के माप ज्ञात कीजिए।

हल प्रश्नानुसार CA = b = 20 इकाई माप AB = c = ? BC = a = ?

$m\angle B$ का त्रिभुजांक [12 5 13] से $m\angle B$ का बीजांक [(13+12) 5] = [25 5] = [5 1]

$\therefore m\angle B$ का आदर्श बीजांक F(B) = 5 ----- (1)

$m\angle C$ का त्रिभुजांक [3 4 5] से $m\angle C$ का बीजांक [(5+3) 4] = [8 4] = [2 1]

$\therefore m\angle C$ का आदर्श बीजांक F(C) = 2 ----- (2)

(1) और (2) से $m\angle(B + C)$ का बीजांक = [(5*2 - 1) (2+5)] = [9 7]

$m\angle(B + C)$ का आदर्श बीजांक = F(B+C) = $\frac{9}{7}$ ----- (3)

$m\angle(B - C)$ का आदर्श बीजांक F(B - C) = $\frac{5*2+1}{2-5} = -\frac{11}{3}$ ----- (4)

भुजा AB = c के लिए गणना

बीजांकों का योगान्तर प्रमेय से $\frac{F(B+C)}{F(B-C)} = \frac{b-c}{b+c} \Rightarrow F(B+C) * (b+c) = F(B-C) * (b-c)$ में

प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर $\frac{9}{7} * (20 + c) = \left(-\frac{11}{3}\right) * (20 - c) \Rightarrow 3*9(20+c) = 7*(-11)(20-c)$

$$\Rightarrow 540 + 27c = -1540 + 77c \Rightarrow 77c - 27c = 540 + 1540$$

$$\Rightarrow 50c = 2080 \text{ अतः } c = 41.6 \text{ इकाई। उत्तर}$$

भुजा BC = a के लिए गणना

$m\angle(A + B + C) = m\angle 180^\circ$ का बीजांक = [0 1]

$m\angle(B+C)$ का बीजांक = [9 7]

$\therefore m\angle A = m\angle\{180 - (B + C)\}$ का बीजांक = [7 9] }
 $m\angle C$ का बीजांक = [2 1] } से

$m\angle(A+C)$ का बीजांक = [{(7*2 - 9*1) (2*9 + 7*1)}] = [{5 25}] = [1 5]

$m\angle(A + C)$ का आदर्श बीजांक = $\frac{1}{5}$ ----- (5)

$m\angle(A-C)$ का बीजांक = [{(7*2 + 9*1) (2*9 - 7*1)}] = [{23 11}]

$m\angle(A - C)$ का आदर्श बीजांक = $\frac{23}{11}$ ----- (6)

बीजांकों का योगान्तर प्रमेय से $\frac{F(A+C)}{F(A-C)} = \frac{a-c}{a+c} \Rightarrow F(A+C) * (a+c) = F(A-C) * (a-c)$ में

प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर $\frac{1}{5} * (a + 41.6) = \frac{23}{11} * (a - 41.6) \Rightarrow 11*1(a+41.6) = 5*23*(a-41.6)$

$$\Rightarrow 11a + 457.6 = 115a - 4784 \Rightarrow 115a - 11a = 457.6 + 4784$$

$$\Rightarrow 104a = 5241.6 \text{ अतः } a = 50.4 \text{ इकाई। उत्तर}$$

अथवा

$m\angle(A + B + C) = m\angle 180^\circ$ का बीजांक = [0 1]

$$\begin{aligned}
& m \angle(B+C) \text{ का बीजांक} = [\{ 9 \quad 7 \}] \\
\therefore m \angle A) = m \angle \{180 - (B + C)\} \text{ का बीजांक} &= [\begin{array}{cc} 7 & 9 \end{array} \} \\
& m \angle B = \text{का बीजांक} = [\begin{array}{cc} 5 & 1 \end{array} \} \quad \left. \vphantom{m \angle B} \right\} \text{ से} \\
m \angle(A+B) \text{ का बीजांक} &= [\{ (7 * 5 - 9 * 1) \quad (5 * 9 + 7 * 1) \}] = [\{ 26 \quad 52 \}] = [1 \quad 2] \\
m \angle(A + B) \text{ का आदर्श बीजांक} &= \frac{1}{2} \text{ ----- (5)} \\
m \angle(A-B) \text{ का बीजांक} &= [\{ (7 * 5 + 9 * 1) \quad (5 * 9 - 7 * 1) \}] = [\{ 44 \quad 38 \}] = [22 \quad 19] \\
m \angle(A - B) \text{ का आदर्श बीजांक} &= \frac{22}{19} \text{ ----- (6)} \\
\text{बीजांकों का योगान्तर प्रमेय से } \frac{F(A+C)}{F(A-C)} &= \frac{a-b}{a+b} \Rightarrow F(A+C) * (a+c) = F(a = A - C) * (a - c) \text{ में} \\
\text{प्राप्त मान प्रतिस्थापित करने पर } \frac{1}{2} * (a + 20) &= \frac{22}{19} * (a - 20) \Rightarrow 19 * 1 (a+20) = 2 * 22 * (a-20) \\
\Rightarrow 19a + 380 &= 44 a - 880 \Rightarrow 44 a - 19a = 380 + 880 \\
\Rightarrow 25a &= 1260 \text{ अतः } a = 50.4 \text{ इकाई। } \textcolor{blue}{\text{उत्तर}} \\
&\textcolor{blue}{\text{-----15 -----}}
\end{aligned}$$

अध्याय 16 वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति

16-1 प्रस्तावना ज्यामिति अध्ययन में सर्व प्रथम फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने डेस्कार्टस्** ने 1637 में प्रकाशित अपनी पुस्तक **लाज्यामेट्री** में बीज गणित का उपयोग कर ज्यामिति को नया रूप दिया है। इस पुस्तक से ही ज्यामिति के अध्ययन में वक्र के समीकरण का विचार तथा सम्बंधित वैश्लेषिक विधियों का प्रारम्भ हुआ। ज्यामिति एवं विश्लेषण का परिणामी संयोजन अब **वैश्लेषिक ज्यामिति** के रूप में उल्लेखित होता है। जियका गणित की विभिन्न शाखाओं में व्यवहारिक सम्बंध है।

वैश्लेषिक ज्यामिति की वह शाखा जिसमें किसी समतल पर बिन्दुओं को वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्मों, रेखाओं तथा वक्रों को बीजीय समीकरणों के रूप में व्यक्त किया जाता है **वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति** कहलाता है।

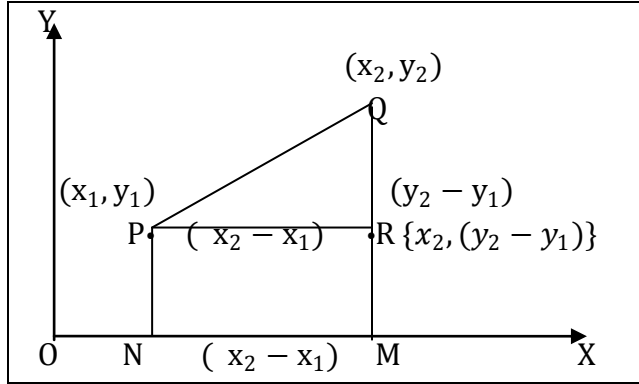
प्रारम्भिक अध्ययन क्रम में समकोणिक कार्तीय निर्देशांक, बिन्दुओं का आलेखन, दो बिन्दुओं की बीच की दूरी रेखाखण्ड का अनुपातिक विभाजन(खण्ड सूत्र), मध्य बिन्दु सूत्र (दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का मध्य बिन्दु) सरलरेखा का समीकरण आत्मसात किये जाने उपरान्त—

1• समकोणिक कार्तीय निर्देशांक बिन्दु P का समकोणिक कार्तीय निर्देशांक $(x,y) = (h,k)$	2• बिन्दुओं का आलेखन बिन्दु P का आलेखन $(x,y) = (2,3)$

16-2 वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति प्रमेय

(1) दो बिन्दुओं के बीच की दूरी का प्रमेय

दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ होगा।



प्रमाण माना कि $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ दो बिन्दु हैं।

बिन्दु P और Q मिलाइये तथा इनसे X - अक्ष पर PN और QM लम्ब अंतरित कीजिए। बिन्दु P से X - अक्ष के समांतर PR अंतरित कीजिए जो QM से R पर मिलता है।

त्रिभुज PRQ समकोण त्रिभुज रचित होगा।

जिसका आधार भुजा $PR = NM = x_2 - x_1$

तथा लम्ब भुजा $RQ = y_2 - y_1$ होगा।

तब बिन्दु $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$

के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{(PR)^2 + (RQ)^2}$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{सिद्ध।}$$

बिन्दु $P(x, y)$ की मूल बिन्दु $O(0,0)$ से दूरी $= \sqrt{x^2 + y^2}$ सिद्ध होगा।

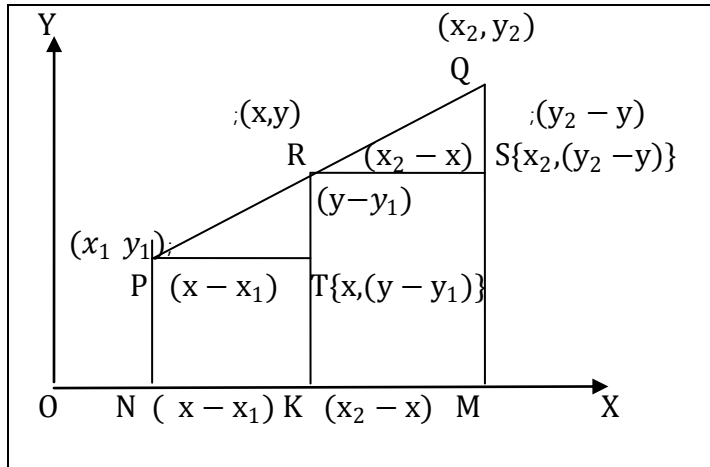
उदाहरण 1 $P(-6, -1)$ और $Q(-6, 11)$ के बीच की दूरी $PQ = \sqrt{\{-6 - (-6)\}^2 + \{11 - (-1)\}^2}$
 $= \sqrt{\{0\}^2 + \{12\}^2} = \sqrt{\{12\}^2} = 12$ इकाई

उदाहरण 2 बिन्दु $P(12, 5)$ की मूल बिन्दु $O(0,0)$ से दूरी $= \sqrt{12^2 + 5^2}$
 $= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ इकाई

(2) रेखाखण्ड का अनुपातिक विभाजन बिन्दु का निर्देशांक प्रमेय

रेखाखण्ड PQ के दो अन्त्य बिन्दु सह निर्देशांक $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ हैं जो $m_1 : m_2$ में अन्तर ($m_1 \neq m_2$)

विभाजन करने वाले बिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right)$ होगा।



प्रमाण माना कि रेखाखण्ड PQ के दो अन्त्य बिन्दु सह निर्देशांक $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ हैं जो अपने अन्तः निष्ठ बिन्दु $R(x, y)$ पर $m_1 : m_2$ में अन्तर ($m_1 \neq m_2$) विभाजन करता है।

बिन्दु P, Q और R से X - अक्ष पर PN, QM और RK लम्ब अंतरित कीजिए। X - अक्ष के समांतर PR और RS अंतरित कीजिए जो क्रमशः RK से T पर तथा QM से S पर मिलता है।

त्रिभुज PTR और त्रिभुज RSQ समरूप समकोण त्रिभुज रचित होंगे।

समकोण त्रिभुज PTR समरूप समकोण त्रिभुज

RSQ

आधार भुजा $PT = NK = (x - x_1)$

आधार भुजा $RS = KM = (x_2 - x)$

लम्ब भुजा $RT = (y - y_1)$

लम्ब भुजा $QS = (y_2 - y)$

कर्ण भुजा $PR = m_1$

कर्ण भुजा $RQ = m_2$

∴ समरूप त्रिभुज का अनुपात नियम से $\frac{PR}{RQ} = \frac{PT}{RS} = \frac{RT}{QS} \Rightarrow \frac{PR}{RQ} = \frac{NK}{KM} = \frac{RT}{QS} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$
 तब $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x}$ से $x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}$ तथा $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ से $y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$ सिद्ध।

उदाहरण बिन्दुओं $(4, -3)$ तथा $(8, 5)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड को 3:1 में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

$$(x, y) = \left(\frac{3 \cdot 8 + 1 \cdot 4}{3+1}, \frac{3 \cdot 5 + 1 \cdot (-3)}{3+1} \right) = \left(\frac{28}{4}, \frac{12}{4} \right) = (7, 3) \text{ होगा।}$$

(3) रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का निर्देशांक प्रमेय

रेखाखण्ड PQ के दो अन्त्य बिन्दु सह निर्देशांक $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ है के मध्य बिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2} \right)$ होगा।

प्रमाण रेखाखण्ड का अनुपातिक विभाजन बिन्दु का निर्देशांक प्रमेय में $m_1:m_2 = 1:1$ अनुपातिक विभाजन बिन्दु R रेखाखण्ड PQ का मध्य बिन्दु होगा।

अतः रेखाखण्ड का अनुपातिक विभाजन बिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2} \right)$ में $m_1 = m_2 = 1$ प्रतिस्थापित करने पर रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का निर्देशांक $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2} \right)$ सिद्ध।

उदाहरण बिन्दुओं $(4, -3)$ तथा $(8, 5)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु का निर्देशांक

$$(x, y) = \left(\frac{8+4}{2}, \frac{5+(-3)}{2} \right) = \left(\frac{12}{2}, \frac{2}{2} \right) = (6, 1) \text{ होगा।}$$

16-3 वैश्लेषिक निर्देशांक ज्यामिति समीकरण

(1) रेखा का व्यापक समीकरण

दो चर राशियों के एक घातीय व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ है जहाँ A, B और C ऐसे वास्तविक अचर राशियाँ हैं कि A और B एक साथ शून्य नहीं हैं। समीकरण $Ax + By + C = 0$ का निर्देशांक लेखाचित्र सदैव एक सरल रेखा होता है। इसलिए जब A और B एक साथ शून्य नहीं हैं तो $Ax + By + C = 0$ के रूप का कोई समीकरण **रेखा का व्यापक रैखिक समीकरण या रेखा का व्यापक समीकरण** कहलाता है। यदि $B \neq 0$, तो $Ax + By + C = 0$ को $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ या $y = mx + c$ **रेखा का व्यापक रैखिक समीकरण का सामान्य समीकरण निरूपण होगा। जहाँ $m = -\frac{A}{B}$ और $c = -\frac{C}{B}$** के रूप में लिखा जा सकता है। उच्चतर अध्ययन में यह समीकरण उस रेखा की ढाल-अन्तःखण्ड रूप है जिसकी ढाल $-\frac{A}{B}$ और y-अन्तःखण्ड $-\frac{C}{B}$ है। यदि $B=0$ तो $x = -\frac{C}{A}$, जो कि एक उर्ध्वाधर रेखा का समीकरण है जिसकी ढाल अपरिभाषित और x-अन्तःखण्ड $-\frac{C}{A}$ है। ढाल स्वयं में उच्चतर अध्ययन का विषय है। अतः प्रसंगवश इतना ही।

1• (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण – सरल आत्मसात्ति प्रस्तुति में (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण –

$$(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + \{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)\} \text{ होगा।}$$

प्रमाण रेखा का सामान्य समीकरण निरूपण $y = mx + c$ में –

$$1 \quad x=x_1 \text{ एवं } y=y_1 \text{ प्रतिस्थापित करने पर } mx_1 + c = y_1 \text{ ----- (1)}$$

$$2 \quad x=x_2 \text{ एवं } y=y_2 \text{ प्रतिस्थापित करने पर } mx_2 + c = y_2 \text{ ----- (2)}$$

$$\text{समिका (2) - (1) से } m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1 \Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ समिका (1) में प्रतिस्थापित करने पर}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * x_1 + c = y_1 \Rightarrow c = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * x_1 = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

प्राप्त m और c के मान $y = mx + c$ में प्रतिस्थापित करने पर

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} * x + \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + \{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)\} \text{ प्रमाणित।}$$

टीप उक्त समीकरण को $(x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x + \{y_1(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)\}$ लिया जा सकता है। सरल एवं आत्मसाती होगा।

जिसे हल करने उर्ध्व तिर्यक गणना नियम का अनुप्रयोग अवलोकित करें।

$$(x_2 - x_1)y = (y_2 - y_1)x + \{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)\} \text{ के हल के लिए—}$$

$$(x_2 - x_1) = p \quad (y_2 - y_1) = q$$

$$x_1 \quad y_1$$

$$py = qx + (p * y_1 - q * x_1) \text{ अभीष्ट हल समीकरण देगा या देने की ओर पूर्वान्तिम होगा।}$$

अथवा

$$(x_2 - x_1) = p \quad x_1$$

$$(y_2 - y_1) = q \quad y_1$$

$$py = qx + (p * y_1 - q * x_1) \text{ अभीष्ट हल समीकरण देगा या देने की ओर पूर्वान्तिम होगा।}$$

$$(x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x + \{y_1(x_1 - x_2) - x_1(y_1 - y_2)\} \text{ के हल के लिए—}$$

$$(x_1 - x_2) = p \quad (y_1 - y_2) = q$$

$$x_1 \quad y_1$$

$$py = qx + (p * y_1 - q * x_1) \text{ अभीष्ट हल समीकरण देगा या देने की ओर पूर्वान्तिम होगा।}$$

अथवा

$$(x_1 - x_2) = p \quad x_1$$

$$(y_1 - y_2) = q \quad y_1$$

$$py = qx + (p * y_1 - q * x_1) \text{ अभीष्ट हल समीकरण देगा या देने की ओर पूर्वान्तिम होगा।}$$

उपरोक्त विश्लेषण प्रस्तुति में किसी एक का चयन कीजिए। देखने मात्र के भाव में हल समीकरण प्राप्त होता पायेंगे।

उदाहरण 1■ बिन्दु (9, 7) तथा (-7, 2) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण -

$$\text{हल—} \quad (x_1 - x_2) = \{9 - (-7)\} = 16 \quad 9$$

$$(y_1 - y_2) = (7 - 2) = 5 \quad 7$$

$$16y = 5x + (16 * 7 - 5 * 9) \Rightarrow 16y = 5x + 67 \text{ अभीष्ट समीकरण होगा।}$$

उदाहरण 2■ बिन्दु (10, 5) तथा (18, 9) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण -

$$\text{हल—} \quad (x_1 - x_2) = \{10 - 18\} = -8 \quad 10$$

$$(y_1 - y_2) = (5 - 9) = -4 \quad 5$$

$$-8y = -4x + \{(-8) * 5 - (-4) * 10\}$$

$$\Rightarrow -8y = -4x \Rightarrow 2y = x \text{ अभीष्ट समीकरण होगा।}$$

देखते देखते बिन्दु $(10, 5) = 5(2, 1)$ तथा $(18, 9) = 9(2, 1)$ से $2y = x$ अभीष्ट समीकरण होगा।

उदाहरण 3■ बिन्दु $(10, 8)$ तथा $(9, 7)$ निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण –

हल—

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) &= \{10 - 9\} = 1 & 10 \\ (y_1 - y_2) &= \{8 - 7\} = 1 & 8 \end{aligned}$$

$$y = x + \{1 * 8 - 1 * 10\}$$

$\Rightarrow y = x - 2$ अभीष्ट समीकरण होगा।

देखते देखते बिन्दु $(10, 8) = \{10, (10 - 2)\}$ तथा $(9, 7) = \{9, (9 - 2)\}$ से

$y = x - 2$ अभीष्ट समीकरण

उदाहरण 4■ बिन्दु $(4, 7)$ तथा $(3, 5)$ निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण –

हल—

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) &= \{4 - 3\} = 1 & 4 \\ (y_1 - y_2) &= \{7 - 5\} = 2 & 7 \end{aligned}$$

$$y = 2x + (1 * 7 - 2 * 4)$$

$\Rightarrow y = 2x - 1$ अभीष्ट समीकरण होगा।

देखते देखते बिन्दु $(4, 7) = \{4, (2 * 4 - 1)\}$ तथा $(3, 5) = \{3, (2 * 3 - 1)\}$ से

$y = 2x - 1$ अभीष्ट समीकरण होगा।

उदाहरण 5■ बिन्दु $(17, 9)$ तथा $(13, -8)$ निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण –

हल—

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) &= \{17 - 13\} = 4 & 17 \\ (y_1 - y_2) &= \{9 - (-8)\} = 17 & 9 \end{aligned}$$

$$4y = 17x + (4 * 9 - 17 * 17)$$

$\Rightarrow 4y = 17x - 253$ अभीष्ट समीकरण होगा।

उदाहरण 6■ बिन्दु (a, b) तथा (c, d) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण –

हल—

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2) &= \{a - c\} & a \\ (y_1 - y_2) &= \{b - d\} & b \end{aligned}$$

$$(a - c)y = (b - d)x + (ad - bc)$$
 अभीष्ट समीकरण होगा।

टीप उपरोक्त उदाहरण के अनुसार सामान्य अभ्यास उपरांत स्वयं ही मन ही मन (मौखिक) अभीष्ट समीकरण प्राप्त करना चाहेंगे और स्वयं पर गर्व करेंगे।

विडम्बना आधुनिक गणित अध्ययन में आज पर्यन्त (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) निर्देशांक वाले बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा का व्यापक समीकरण $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$ का उपयोग होता है। अन्ततः है तो ठीक, किन्तु स्पष्ट समझने समझाने के लिए बढ़ते हल प्रक्रम लम्बी और गड़बड़ाने वाली है।

16-4 सामान्य समीकरण तथा दो सरल रेखाएँ ✕ निर्देशांक ज्यामिति के उच्चतर अध्ययन में सामान्य समीकरण $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2zy + c = 0$ में केवल c के प्रति मानों पर यह समीकरण 1. दो सरल रेखाओं का समीकरण,, 2. अन्तःस्पर्शी अतिपरवलय का समीकरण, 3. संयुग्मित अतिपरवलय का समीकरण स्वरूपण सुनिश्चित होता है। जिसके प्रति!

(1) केवल सामान्य समीकरण के दो सरल रेखाओं में निरूपण होने का लोनी का प्रतिबंध –
 प्रोफेसर एस. एल. लोनी के अनुसार सामान्य समीकरण

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2zy + c = 0$ के दो सरल रेखाओं में निरूपण होने का प्रतिबंध
 $abc + 2fgh - af^2 - hg^2 - ch^2 = 0$ है। जो कि जाँच प्रक्रिया में डराने के लिये काफी है।⁵

- (2) दो सरल रेखाओं का समीकरण,, अन्तःस्पर्शी अतिपरवलय का समीकरण, एवं संयुग्मित अतिपरवलय का समीकरण स्वरूपण सुनिश्चित करने जगत गुरु स्वामी कृष्णतीर्थराजजी महाराज का सरल गुणनखण्ड नियम

$$\text{सामान्य समीकरण } ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2zy + c = 0 \\ \Rightarrow ax^2 + kxy + by^2 + mx + ny + c = 0$$

के प्रति अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए

प्रक्रम 1 $ax^2 + kxy + by^2 = (p_1x + q_1y) * (p_2x + q_2y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण $p_1r_2 + p_2r_1 = m$ { सामान्य समीकरण के x पद का अचर गुणांक } और

$$q_1r_2 + q_2r_1 = n \text{ (सामान्य समीकरण के y पद का अचर गुणांक) प्राप्त कीजिए तथा } r_1 \text{ और } r_2$$

का मान सुनिश्चित कीजिए।

निष्कर्ष 1. दो सरल रेखाओं का समीकरण,के प्रति – यदि $r_1 * r_2 = c$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद) होगा।

जिनका प्रतिरूपण $p_1x + q_1y + r_1 = 0$ और $p_2x + q_2y + r_2 = 0$ होगा।

और यदि $r_1 * r_2 \neq c$ होने पर सामान्य समीकरण दो सरल रेखाओं का समीकरण नहीं होगा। तब

2. अन्तःस्पर्शी अतिपरवलय का समीकरण के प्रति–

$$(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = ax^2 + hxy + by^2 + mx + ny + (r_1 * r_2) = 0 \text{ होगा } \hat{f}$$

3. संयुग्मित अतिपरवलय का समीकरण के प्रति –

$$ax^2 + hxy + by^2 + mx + ny + (2 * r_1 * r_2 - c) = 0 \text{ होगा।}$$

तुलनात्मक अध्ययन हेतु उदाहरण “निर्देशांक ज्यामिति के मूलतत्त्व” पुस्तक के प्रख्यात रचयिता (इस विषय पर विश्वविख्यात आधुनिक अधिकृत विद्वान) प्रोफेसर एस. एल. लोनी ने इस विषय की प्रचलित तथा परंपरागत व्याख्या करते समय अपनी पुस्तक के 119 वें अनुभाग में पृष्ठ 97 पर उदाहरण 1 सामान्य समीकरण $12x^2 + 7xy - 10y^2 + 13x + 45y - 35 = 0$ को दो रेखाओं का पंक्तियों (कोई तर्क या समझाने के लिए नहीं वरन ठोस काम) दिया है। जगद्गुरु स्वामी श्री भारतीकृष्णतीर्थ जी महाराज की अद्भुत कृति समीकरण प्रमाणित करने और इन रेखाओं के समीकरण प्राप्त करने **लोनी का प्रतिबंध नियम** के तारतम्य जो प्रतिदर्शन हल 15 **वैदिक गणित** के 39 वें अध्याय पृष्ठ 314 -315 दर्शित है। साभार यथावत प्रस्तुत है। अवलोकित कीजिए।

प्रतिबंध नियम यहाँ $a=12, h=\frac{7}{2}, b=-10, g=\frac{13}{2}, f=\frac{45}{2}$ तथा $c=-35$

$$\therefore abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= \{12(-10)\{-35\}\} + \left\{\frac{2*45}{2} * \frac{13}{2} * \frac{7}{2}\right\} - \left\{12 * \left(\frac{45}{2}\right)^2\right\} - \left\{(-10) * \left(\frac{13}{2}\right)^2\right\} - \left\{(-35) * \left(\frac{7}{2}\right)^2\right\}$$

$$= 4200 + \frac{4095}{4} - 6075 + \frac{1690}{4} + \frac{1715}{4} = -1875 + \frac{7500}{4} = -1875 + 1875 = 0$$

इसलिए यह समीकरण दो सरल रेखाओं को निरूपित करता है। इसे x के लिए हल करते हुए–

$$x^2 + x \frac{7y+13}{12} + \left[\frac{7y+13}{24}\right]^2 = \frac{10y^2 - 45y + 35}{12} + \left[\frac{7y+13}{24}\right]^2 = \left[\frac{23y-43}{24}\right]^2$$

$$\therefore x + \frac{7y+13}{24} = \pm \frac{23y-43}{24} \therefore x = \frac{2y-7}{3} \text{ या } \frac{5y+5}{4}$$

इसलिए दो सरल रेखाएँ का समीकरण $3x = 2y - 7 \Rightarrow 2y = 3x + 7$ तथा $4x = -5y + 5 \Rightarrow 5y = 5 - 4x$ होगा।

2• सरल गुणनखण्ड नियम सामान्य समीकरण $12x^2 + 7xy - 10y^2 + 13x + 45y - 35 = 0$ के प्रति अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए

प्रक्रम 1 $12x^2 + 7xy - 10y^2 = (3x - 2y) * (4x + 5y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण

$$3r_2 + 4r_1 = 13 \text{ \{ सामान्य समीकरण के } x \text{ पद का अचर गुणांक\} और}$$

$$-2r_2 + 5r_1 = 45 \text{ (सामान्य समीकरण के } y \text{ पद का अचर गुणांक) प्राप्त कीजिए तथा}$$

$$r_1 = 7 \text{ और } r_2 = -5 \text{ सुनिश्चित कीजिए।}$$

निष्कर्ष $r_1 * r_2 = 7(-5) = -35$ दिये सामान्य समीकरण का अचर पद है

∴ उक्त सामान्य समीकरण दो सरल रेखाएँ का समीकरण $3x - 2y + 7 = 0$ तथा $4x + 5y - 5 = 0$ होगा।

3• विलोपन एवं उभयनिष्ठ का नियम द्वारा—

सामान्य समीकरण $12x^2 + 7xy - 10y^2 + 13x + 45y - 35 = 0$ दो सरल रेखाएँ का समीकरण होने की जाँच की हल

प्रक्रिया — $x=0$ से— बाँया पक्ष = $-10y^2 + 45y - 35$

$$= (-2y+7)(5y-5) \text{ ----- (1)}$$

$$y=0 \text{ से— बाँया पक्ष } = 12x^2 + 13x - 35$$

$$= (3x+7)(4x-5) \text{ ----- (2)}$$

तब समिका (1) और (2) के गुणनखण्ड में तुल्य अचर पदों के सयुक्तीकरण से—

$$12x^2 + 7xy - 10y^2 + 13x + 45y - 35 = (3x-2y+7)(4x+5y-5)$$

∴ सामान्य समीकरण $12x^2 + 7xy - 10y^2 + 13x + 45y - 35 = 0$ का दो सरल रेखाएँ का समीकरण प्रतिरूपण—

$$2y = 3x + 7 \text{ और } 5y = 5 - 4x \text{ होगा।}$$

तुलना सटीक सरल और व्यापकता की दृष्टि से उपरसेक्त तीनों हल में सरल गुणनखण्ड का नियम यथेष्ट होगा।

सरल गुणनखण्ड नियम द्वारा सामान्य समीकरण का विवेचनार्थ साधित उदाहरण

उदाहरण 1■ $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$ के विवेचनार्थ अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए

—

पृष्ठ 238 ■ जगद्गुरु स्वामी श्री भारतीकृष्णतीर्थ जी महाराज की अद्भुत कृति **वैदिक गणित** के 39वें अध्याय पृष्ठ 314 में सामान्य 7मीकरण तथा दो सरल रेखाएँ का निर्देशांक ज्यामिति के अध्ययन के तारतम्य में अवगत कराते कि “ **निर्देशांक ज्यामिति के मूलतत्त्व** पुस्तक के प्रख्यात रचयिता (इस विषय पर विश्वविख्यात आधुनिक अधिकृत विद्वान) प्रोफेसर एस. एल. लोनी ने इस विषय की प्रचलित तथा परंपरागत व्याख्या किये है। प्रोफेसर एस. एल. लोनी के अनुसार इस विषय पर प्रस्तुत व्याख्या के प्रति स्वामी जी अपनी **नोट : हम यहाँ केवल इतना कहेंगे कि** भिन्नो की बढी हुई सख्याएँ तथा उनके अनंत गुणन , घटाना आदि डराने के लिए काफी है। और इसी तरह का भारी बोझ सा परिश्रम है जो बच्चों के दिल में गणित और इसलिए गणित शिक्षकों के प्रति चिरकालिक द्वेष बढाने के लिए जिम्मर है हम प्रोफेसर .लोनी पर कोई लांछन नहीं लगाना नहीं चाहते हैं। वे तो सम्भवतः सर्वोत्तम तथा बहुत ही अध्यवसायी गणितज्ञ है। और हम इसके पांडित्यपूर्ण ग्रंथों का बहुत सम्मान करते है। हम तो उस पद्ध विशेष को दोष देते है (या क म से कम उसके वेदिक गणित से तुलना कर वैषम्य देखना ताहतें है)

पृष्ठ 298 । डराने वाली जैसी बात कही गयी है उसके प्रतिउत्तर में **वेवल सामान्य समीकरण के दो सरल रेखाओं में निरूपण होने का समीकरण हल करने के प्रति— मेरी कृति . गणित अध्ययन विकास में उनागर संख्यांकन पद्धति छत्तीसगढ़ की देन . प्रखण्ड 2/3 •** बीजगणित सोपान • अध्याय 2 , अनुच्छेद **2.4** जटिल द्विघाती व्यंजको का द्विखण्डी गुणनखण्ड प्राप्त करने विलोपन एवं उभयनिष्ठ का नियम रोमांचकारी होगा।

प्रक्रम 1 $8x^2 + 10xy - 3y^2 = (4x - y)(2x + 3y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो

युगपद समीकरण $4r_2 + 2r_1 = -2$ { सामान्य समीकरण के x पद का अचर गुणांक } और

$-r_2 + 3r_1 = 4$ { सामान्य समीकरण के y पद का अचर गुणांक } प्राप्त कीजिए तथा

$r_1 = 1$ और $r_2 = -1$ सुनिश्चित कीजिए।

विवेचना $r_1 * r_2 = 1(-1) = -1 \neq -2$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद)

$\therefore 8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$ दो सरल रेखाओं का समीकरण नहीं है।

अचर पद $= r_1 * r_2 = 1(-1) = -1$ लिए जाने पर

इसके प्रति अनन्तस्पर्शी अतिपरवलय समीकरण $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ होगा। तथा

अचर पद $= 2r_1 * r_2 - c = 2(-1) - (-2) = 0$ (जहाँ $c = -2$ सामान्य समीकरण का अचर पद) लिए जाने पर

संयुग्मित अतिरवलय का समीकरण $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y = 0$ होगा।

उदाहरण 2■ $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$ के विवेचनार्थ अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड

स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए -

प्रक्रम 1 $y^2 - xy - 2x^2 = (y + x)(y - 2x)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण

$r_2 - 2r_1 = 1$ { सामान्य समीकरण के x पद का अचर गुणांक } औ

$r_2 + r_1 = -5$ { सामान्य समीकरण के y पद का अचर गुणांक } प्राप्त कीजिए तथा

$r_1 = -2$ और $r_2 = -3$ सुनिश्चित कीजिए।

विवेचना $r_1 * r_2 = (-2)(-3) = 6 \neq -6$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद)

$\therefore 8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$ दो सरल रेखाओं का समीकरण नहीं है।

अचर पद $= r_1 * r_2 = 6$ लिए जाने पर

इसके प्रति अनन्तस्पर्शी अतिपरवलय समीकरण $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x + 6 = 0$ होगा। तथा

अचर पद $= 2r_1 * r_2 - c = 2 * 6 - (-6) = 18$ (जहाँ $c = -6$ सामान्य समीकरण का अचर पद है) लिए जाने पर

संयुग्मित अतिरवलय का समीकरण $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x + 18 = 0$ होगा।

उदाहरण 3 $55x^2 - 120xy + 20y^2 + 64x - 48y = 0$ विवेचनार्थ अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड

स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए -

प्रक्रम 1 $55x^2 - 120xy + 20y^2 = (11x - 2y)(5x - 10y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण

$11r_2 + 5r_1 = 64$ { सामान्य समीकरण के x पद का अचर गुणांक } और

$-2r_2 - 10r_1 = -48$ { सामान्य समीकरण के y पद का अचर गुणांक } प्राप्त कीजिए तथा

$r_1 = 4$ और $r_2 = 4$ सुनिश्चित कीजिए।

विवेचना $r_1 * r_2 = 4 * 4 = 16 \neq 0$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद दर्शित नहीं है)

$\therefore 55x^2 - 120xy + 20y^2 + 64x - 48y = 0$ दो सरल रेखाओं का समीकरण नहीं है।

अचर पद $= r_1 * r_2 = 4 * 4 = 16$ लिए जाने पर

इसके प्रति अनन्तस्पर्शी अतिपरवलय समीकरण $55x^2 - 120xy + 20y^2 + 64x - 48y + 16 = 0$ होगा। तथा
अचर पद $= 2r_1 * r_2 - c = 2 * 16 - 0 = 32$ (जहाँ $c=0$ सामान्य समीकरण अचर पद रहित होने के प्रति है) लिए जाने पर
संयुग्मित अतिपरवलय का समीकरण $8x^2 + 10xy - 3y^2 - 2x + 4y + 32 = 0$ होगा।

उदाहरण 4■ $12x^2 - 23xy + 10y^2 - 25x + 26y - 14 = 0$ के विवेचनार्थ अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए -

प्रक्रम 1 $12x^2 - 23xy + 10y^2 = (4x - 5y) * (3x - 2y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण

$$\begin{aligned} 4r_2 + 3r_1 &= -25 \quad \{ \text{सामान्य समीकरण के } x \text{ पद का अचर गुणांक} \} \text{ और} \\ -5r_2 - 2r_1 &= 26 \quad \{ \text{सामान्य समीकरण के } y \text{ पद का अचर गुणांक} \} \text{ प्राप्त कीजिए तथा} \\ r_1 &= -3 \text{ और } r_2 = -4 \text{ सुनिश्चित कीजिए।} \end{aligned}$$

विवेचना $r_1 * r_2 = (-3)(-4) = 12 \neq -14$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद है)

$\therefore 12x^2 - 23xy + 10y^2 - 25x + 26y - 14 = 0$ दो सरल रेखाओं का समीकरण नहीं है।

अचर पद $= r_1 * r_2 = 12$ लिए जाने पर

इसके प्रति अनन्तस्पर्शी अतिपरवलय समीकरण $12x^2 - 23xy + 10y^2 - 25x + 26y + 12 = 0$ होगा। तथा
अचर पद $= 2r_1 * r_2 - c = 2 * 12 - (-14) = 38$ (जहाँ $c = -14$ सामान्य समीकरण का अचर पद है) लिए जाने पर
संयुग्मित अतिपरवलय का समीकरण $12x^2 - 23xy + 10y^2 - 25x + 26y + 38 = 0$ होगा।

उदाहरण 5■ $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ के विवेचनार्थ अचर पद युक्त एकघाती दो त्रिपदों के गुणनखण्ड स्वरूपण $(p_1x + q_1y + r_1) * (p_2x + q_2y + r_2) = 0$ के लिए -

प्रक्रम 1 $6x^2 - 5xy - 6y^2 = (2x - 3y) * (3x + 2y)$ स्वरूपण में प्राप्त कीजिए।

प्रक्रम 2 r_1 और r_2 का मान सुनिश्चित करने सामान्य समीकरण एवं प्रक्रम 1 से प्राप्त द्विपद गुणनखण्डों को दृष्टिगत करते हुए दो युगपद समीकरण

$$\begin{aligned} 2r_2 + 3r_1 &= 14 \quad \{ \text{सामान्य समीकरण के } x \text{ पद का अचर गुणांक} \} \text{ और} \\ -3r_2 + 2r_1 &= 5 \quad \{ \text{सामान्य समीकरण के } y \text{ पद का अचर गुणांक} \} \text{ प्राप्त कीजिए तथा} \\ r_1 &= 4 \text{ और } r_2 = 1 \text{ सुनिश्चित कीजिए।} \end{aligned}$$

$r_1 * r_2 = 4 * 1 = 4$ (दिये सामान्य समीकरण का अचर पद है।)

$\therefore 6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ दो सरल रेखाओं

$2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 2y + 1 = 0$ का समीकरण है।

-----16-----

आपके मार्गदर्शन की अभिलाषा में

• आपका स्नेहकांक्षी •

पंचराम केशरिया

चाँदनी चौक नगर अर्जुन्दा जिला बालोद (छ.ग.) भारत

p.in 491225 mn 96300-86128• 96852-67495•